

Matemáticas Discretas

Capítulo 3: Conteo Permutaciones y Combinaciones



1

Conteo

Conteo



Entradas

- Nachos (N)
- Ensalada (E)

Platos Principales

- Hamburguesa (H)
- Hamburguesa con queso (Q)
- Filete de Pescado (F)

Bebidas

- Té (T)
- Leche (L)
- Cola (C)
- Cerveza de raíz (R)

- Un menú consta de los platos de la tabla.
- Si enumeramos todas las comidas posibles que constan un plato principal y bebida, tenemos:

HT, HL, HC, HR, QT, QL, QC, QR, FT, FL, FC, FR
Tenemos $3 \times 4 = 12$ comidas diferentes

- Si enumeramos todas las comidas posibles que constan de tres platos, tenemos:

NHT, NHL, NHC, NHR, NQT, NQL, NQC, NQR,
NFT, NFL, NFC, NFR, EHT, EHL, EHC, EHR,
EQT, EQL, EQC, EQR, EFT, EFL, EFC, EFR
Tenemos $3 \times 4 \times 2 = 24$ comidas diferentes

2

Cont...

conteo



• Principio de la Multiplicación

- Si una actividad puede ser construida en t pasos sucesivos y el paso 1 puede ser de n_1 maneras, el paso 2 de n_2 maneras... y el paso t de n_t maneras; entonces el número de las posibles actividades diferentes es $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_t$.

3

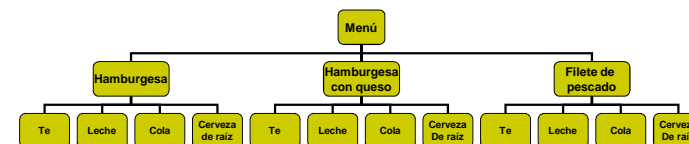
Cont...

conteo




• Cont...

- El principio de multiplicación se puede ilustrar de la siguiente manera




4

conteo 

Cont...

- **Cont...**
 - **Ejemplo 1:**
 - Cuántas comidas constan de un plato principal y una bebida opcional?
 - **Solución:**
 1. Elección del plato principal
 - Existen 3 formas posibles
 2. Elección de bebida opcional
 - Existen $4 + 1 = 5$ formas posibles (puede pedir o no)
 - Entonces existen $3 \times 5 = 15$ comidas
HT, HL, HC, HR, HN, QT, QL, QC, QR, QN, FT, FL, FC, FR, FN


5

conteo 

Cont...

- **Cont...**
 - **Ejercicio en clases:**
 - a) ¿Cuántas cadenas de longitud 4 pueden formarse mediante las letras ABCDE si no se permiten repeticiones?
 - b) ¿Cuántas cadenas de la parte a comienzan con la letra B?
 - c) ¿Cuántas cadenas de la parte a no comienzan con la letra B?


6

conteo 

Cont...

- **Cont...**
 - **Solución ejercicio en clases:**
 - a) $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$
 - b) $1 \times 4 \times 3 \times 2 = 24$
 - c) $120 - 24 = 96$


7

conteo 

Cont...

- **Cont...**
 - **Ejemplo 2:**
 - En una imagen digital queremos codificar la cantidad de luz como una cadena de 8 bits. ¿Cuántos valores son posibles en cada punto?.
 - **Solución:**
 - $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8 = 256$


8

conteo 

Cont...

- **Cont...**
 - **Ejemplo 3:**
 - ¿Cuántas cadenas de 8 bits comienzan con 101 o 111?
 - 1. Una cadena de 8 bits que inicia con 101 puede construirse en 5 pasos.
 - Como son 2 bits: $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$
 - 2. Para cadenas que inicien con 111 es exactamente igual
 - Entonces el número de cadenas es 32
 - De esta manera:
 - $32 + 32 = 64$

9


conteo 

Cont...

- **Principio de la Adición**
 - Suponga que x_1, x_2, \dots, x_t son conjuntos y que el i -ésimo conjunto X_i tiene n_i elementos. Si $\{x_1, \dots, x_t\}$ es disjunto (es decir, si $i \neq j, x_i \cap x_j = \emptyset$), el número de posibles elementos que pueden ser seleccionados de X_1 o X_2 o... o X_t es:

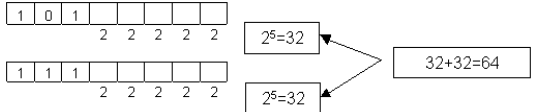
$$n_1 + n_2 + \dots + n_t$$

10


conteo 

Cont...

- **Cont...**
 - ¿Cuántas cadenas de 8 bits comienzan por 101 o 111?



11

conteo 

Cont...

- **Cont...**
 - **Ejemplo 1:**
 - De cuántas formas podemos elegir dos libros de diferentes materias entre 5 de computación, 3 de matemáticas y dos de arte (todos distintos)?
 - **Solución:**
 1. **Por el principio de multiplicación**
 - 1 de computación y 1 de matemáticas = $5 \times 3 = 15$ formas
 - 1 de computación y 1 de arte = $5 \times 2 = 10$ formas
 - 1 de matemáticas y 1 de arte = $3 \times 2 = 6$ formas
 2. **Por el principio de la suma**
 - Existen $15 + 10 + 6 = 31$ formas posibles

12

Cont...

conteo



- **Cont...**
 - **Ejercicio en clases:**
 - Un comite de 6 personas (Alicia, Luis, Anita, Juan, Edgar y Francisco) debe elegir un presidente, un secretario y un tesorero.
 - a) ¿De cuántas formas puede hacerse esto?
 - b) ¿De cuántas formas puede hacerse esto si debe ser presidente Alicia o Luis?
 - c) ¿De cuántas formas puede hacerse esto si Edgar debe ocupar uno de los puestos?
 - d) ¿De cuántas formas puede hacerse esto si Juan y Francisco deben tener alguno de los puestos?

13

Cont...

Conteo



- **Cont...**
 - **Solución ejercicio en clases:**
 - a) $6 \times 5 \times 4 = 120$
 - b) $5 \times 4 = 20$
 $20 + 20 = 40$
 - c) **Primera forma:** Si Edgar es presidente existen $4 \times 5 = 20$ formas de elegir a los demás. De igual manera si es secretario o tesorero, entonces:
 $20 + 20 + 20 = 60$
Segunda forma: El asignar a Edgar un puesto de cualquiera de los tres nos da 3 posibilidades para él. Una vez dado un puesto a Edgar no quedan 5 para el otro puesto y luego 4 para el último puesto. Así:
 $3 \times 5 \times 4 = 60$
 - d) El asignar puestos a Juan, Francisco y otra persona consta de 3 pasos:
 1. 3 formas para asignar un puesto a Juan
 2. 2 formas de asignar un puesto a Francisco
 3. 4 formas de a asignar el puesto restante $3 \times 2 \times 4 = 24$

14

Cont...

Conteo



- **Deber:**
 - Hacer los ejercicios del 5, 6, 8, 9, 11, 15, 17, 18, 20, 21, 23, 24, 28, 31, 34, 35, 37, 38, 40, 54, 55 de las paginas 226 a la 227

15

Permutaciones

Permutaciones



- **Definiciones**
 - Una permutación de n elementos distintos x_1, x_2, \dots, x_n es un ordenamiento de los n elementos x_1, x_2, \dots, x_n
- **Ejemplo:**
 - Los nombres en las papeletas electorales

16



Cont...

- **Ejemplo:**
 - Tenemos 4 candidatos para un puesto de elección: Juan, Anita, Julio, Karina.
 - Necesitamos imprimir papeletas con todas los órdenes posibles de los nombre, para que estas no influyan en los votantes.
- Por el principio de multiplicación podemos formar una papeleta en 4 pasos:
 - El primer nombre puede elegirse de 4 formas, el segundo de 3, el tercero de 2, el cuarto de 1, entonces:

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

17



Cont...

- **Teorema:**
 - Existen $n!$ Permutaciones de n elementos.

$$n(n-1)(n-2) \dots 2 \times 1 = n!$$

- **Ejemplo:**
 - Si tenemos 10 elementos:

$$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3628800$$

18



Cont...

- **Cont...**
 - **Ejemplo 1:**
 - ¿Cuántas permutaciones de las letras ABCDEF contiene la subcadena DEF?
 - **Solución:**
 1. Las letras DEF deben estar juntas
 2. Las demas letras pueden colocarse de manera arbitraria
$$DEF, A, B, C$$

$$4! = 24$$

19



Cont...

- **Cont...**
 - **Ejemplo 2:**
 - ¿Cuántas permutaciones de las letras ABCDEF contienen las letras DEF juntas en cualquier orden?
 - **Solución:**
 1. Las letras DEF deben estar juntas en cualquier orden

$$3! = 6$$
 2. Las demas letras pueden colocarse de manera arbitraria

$$4! = 24$$
 3. El total de permutaciones es:

$$6 \times 24 = 144$$

20



Cont...

- **Cont...**
 - **Ejemplo 3:**
 - ¿De cuántas formas pueden sentarse seis personas en torno de una mesa circular?
 - **Solución:**
 1. Si una forma se obtiene de otra, haciendo que cada persona se mueva n asientos en el sentido de las manecillas del reloj, entonces se consideran idénticas
 2. Denotemos a las personas como A, B, C, D, E, F
 3. Sentemos a A de manera arbitraria.
 4. A las 5 persona restantes podemos ordenarlas y sentarlas a partir de A en sentido de las manecillas del reloj.
$$5! = 120$$

21



R-Permutación

- **Definiciones**
 - Una r-permutación de n elementos distintos x_1, x_2, \dots, x_n es un ordenamiento de un subconjunto de r elementos de $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. El número de r-permutaciones de un conjunto de n elementos distintos se denota $P(n,r)$
- **Teorema**
 - El número de r-permutaciones de un conjunto de n objetos distintos es:
 - $P(n,r) = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1), r \leq n$
 - Por el principio de multiplicación tenemos:
 - $P(n,r) = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)(n-r)\dots 2 \times 1}{(n-r)\dots 2 \times 1} = \frac{n!}{(n-r)!}$

22



Cont...

- **Cont...**
 - **Ejemplo 1:**
 - La 2-permutación de a,b,c
 - **Solución:**

ab, ac, ba, bc, ca, cb

$$P(3,2) = 3 \times 2 = 6$$

23



Cont...

- **Cont...**
 - **Ejemplo 2:**
 - ¿De cuántas formas podemos elegir un presidente, un vicepresidente, un secretario y un tesorero de un grupo de 10 personas?
 - **Solución:**
 - Debemos de contar el número de ordenamientos de cuatro personas elegidas de un grupo de 10.
 - Un ordenamiento elige:
 1. de manera única 1 presidente
 2. de manera única 1 vicepresidente
 3. de manera única 1 secretario
 4. de manera única 1 tesorero

$$P(10,4) = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

$$P(10,4) = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!}$$

24



Cont...

- **Cont...**
- **Ejemplo 3:**
 - ¿De cuántas formas pueden formarse en una fila siete marcianos distintos y cinco jupiterianos distintos, si ninguna pareja de jupiterianos puede estar juntos?
- **Solución:**
 - Podemos formarlos mediante un proceso de 2 pasos.
 1. Formamos a los marcianos
 _ M1 _ M2 _ M3 _ M4 _ M5 _ M6 _ M7 _
 Esto nos da: $7! = 5040$
 2. Los jupiterianos pueden formarse de $P(8,5)$ formas:
 $P(8,5) = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720$
 - De esta manera tenemos:
 $5040 \times 6720 = 33\ 868\ 800$

25



R-Combinación

- **Definiciones**
 - Dado un conjunto $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ con n elementos distintos.
 - a) Una r -combinación de X es una selección no ordenada de r elementos de X (es decir un subconjunto de X con r elementos).
 - b) El número de r -combinaciones de un conjunto de n elementos distintos se denota $C(n,r)$ o
- **Teorema**
 - El número de r -combinaciones de un conjunto de n objetos distintos es:
 - $C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$, $r \leq n$

26



Cont...

- **Cont...**
- **Ejemplo 1:**
 - Un grupo de 5 estudiantes (Maria, Boris, Rosa, Ana, Luis) ha decidido hablar con la jefa del dep. de matemáticas para pedir que ofrezcan mas cursos de mate. disc. La jefa va a atender a 3 de ellos. De cuántas maneras pueden elegir 3 estudiantes de los 5?
- **Solución:**
 MBR, MBA, MRA, MBL, MRL, BRL, MAL, BAL, RAL, BRA
 $C(5,3) = 10$

27



Cont...

- **Cont...**
- **Ejemplo 2:**
 - ¿De cuántas formas puede elegirse un comite de 3 entre un grupo de 10 personas distintas?
- **Solución:**
 - Como un comite es un grupo no ordenado de personas, tenemos.

$$C(10,3) = \frac{10 \times 9 \times 8}{3!} = 120$$

28



Cont...

- **Cont...**
 - **Ejemplo 3:**
 - ¿De cuántas formas puede elegirse un comite de 2 mujeres y 3 hombres de un grupo de 5 mujeres y 6 hombres distintos?
 - **Solución:**
 - Las dos mujeres pueden elegirse de:
 $C(5,2) = 10$
 - Los tres hombres pueden elegirse de:
 $C(6,3) = 20$
 - De esta manera el número total de maneras es:
 $10 * 20 = 200$

29



Cont...

- **Cont...**
 - **Ejemplo 4:**
 - ¿Cuántas cadenas de 8 bits contienen exactamente cuatro unos?
 - **Solución:**
 - Pueden elegirse de:
 $C(8,4) = 70$

30



Cont...

- **Ejercicio en clases:**
 - Una baraja ordinaria de 52 cartas consta de cuatro palos (trebol, diamante, corazones y espada) con 13 denominaciones cada una (as, 2, ..., 10, jack, reina, rey)
 - 1. ¿Cuántas manos de póquer de 5 cartas (no ordenadas) pueden elegirse de una baraja ordinaria de 52 cartas?
 - 2. ¿Cuántas manos de póquer tienen todas las cartas de un mismo palo?
 - 3. ¿Cuántas manos de póquer tienen 3 cartas de una denominación y dos de una segunda denominación?

31



Cont...

- **Deber:**
 - Hacer los ejercicios del 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 18, 20, 22, 26, 29, 30, 33, 38, 39, 59, 60, 64, 65 de las paginas 237 a la 239

32