ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL	CALIFICACIÓN	
INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS	TEMA 1	
CÁLCULO DIFERENCIAL	TEMA 2	
	TEMA 3	
PRIMERA EVALUACIÓN 08 de Julio de 2011	TEMA 4	
	BONUS	
	TOTAL EXAMEN	
Nombre:	DEBERES Y LECCIONES	
#Matrícula:.................. Firma:............................ Paralelo:.....	TOTAL	

TEMA 1 (15 puntos)

a) i.) Usando la definición de la función seno dada por, $\sin(w) := \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{w^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $w \in \mathbb{R}$, y la desigualdad triangular dada por $|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$, demuestre que

$$|\sin(x)| \leq e|x|, \qquad \text{para } |x| \leq 1. \qquad (\textbf{VALOR 5 puntos})$$

CRITERIOS	**PUNTAJE**
Acotar superiormente el $|\sin(x)|$ usando la desigualdad triangular.	2
Usar la condición que $|x| \leq 1$.	1
Usar la expresión de la serie del número e para obtener la cota superior buscada.	2

ii.) Use el Teorema del emparedado o del sánduche y el resultado obtenido en i.) para demostrar que

$$\lim_{x \to 0} |\sin(x)| = 0. \qquad (\textbf{VALOR 3 puntos})$$

CRITERIOS	**PUNTAJE**
Acotar adecuadamente la función $|\sin(x)|$ por arriba y por abajo, para $|x| \leq 1$.	2
Usar el Teorema del sánduche para concluir.	1

b) Construya de ser posible una función f continua exactamente en $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ tal que la composición $f \circ f$ sea continua en $\mathbb{R}$. (**VALOR 7 puntos**)

CRITERIOS	**PUNTAJE**
Decidir si es posible o no la construcción requerida.	2
Mostrar la función requerida y justificar la respuesta.	5

TEMA 2 (15 puntos)

a) Sea $f(x) = 3\cos^3(x) - 2x - 2$, $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que por lo menos una de las raíces de f se encuentra en el intervalo $[0, 1]$. (**VALOR 5 puntos**)

CRITERIOS	**PUNTAJE**
Mencionar y justificar brevemente que la función dada es continua.	1
Analizar los signos de los valores de la función f en los extremos del internvalo dado.	2
Usar el Teorema de Bolzano o del Valor Intermedio para concluir.	2

b) Determine, de ser posible, $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función f dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & \text{si } x < 1, \\ ax^2 + bx, & \text{si } x \in [1, 2], \\ x^2 - 4, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

sea continua en $\mathbb{R}$. (**VALOR 5 puntos**)

CRITERIOS	**PUNTAJE**
Calcular los límites laterales en el punto x=1 y escribir la ecuación correspondiente.	2
Calcular los límites laterales en el punto x=2 y escribir la ecuación correspondiente.	2
Encontrar los valores adecuados para a y b.	1

c) Demuestre formalmente, usando la definición de límite con épsilons y deltas, que

$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{x} = \frac{1}{3}. \qquad (\textbf{VALOR 5 puntos})$$

CRITERIOS	**PUNTAJE**
Encontrar el $\delta > 0$ adecuado para el $\varepsilon > 0$ en la definición de límite.	3.5
Escribir correctamente la definición de límite para concluir con la tesis.	1.5

TEMA 3 (15 puntos)

a) Sea $a > 0$. Encuentre el siguiente límite:

$$\lim_{x \to a} \frac{ln(x) - ln(a)}{x - a}. \qquad \textbf{(VALOR 5 puntos)}$$

CRITERIOS	**PUNTAJE**
Simplificar adecuadamente la fracción correspondiente.	3
Usar límites usuales asociados al número e para concluir.	2

b) Dado el conjunto $X = \{-1\} \cup (0, 5]$, determine:

i.) $\text{Int}(X) = X^{\circ}$; (**VALOR 2.5 puntos**)

ii.) X'. (**VALOR 2.5 puntos**)

CRITERIOS	**PUNTAJE**
i.) Escribir los puntos del conjunto dado que no son interiores para concluir el resultado.	2.5
ii.) Observar la existencia de un punto aislado en el conjunto X y usar la definición de punto de acumulación para concluir.	2.5

c) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \left(x + e^{x}\right)^{\frac{1}{x}}. \qquad \textbf{(VALOR 5 puntos)}$$

CRITERIOS	**PUNTAJE**
Simplificar adecuadamente la expresión correspondiente.	3
Emplear límites usuales asociados al número e para concluir.	2

TEMA 4 (15 puntos)

a) Construya la gráfica de una función de variable real tal que:

i.) $f(0) = f(1) = f(5) = 0$;

ii.) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x+2| < \delta \implies |f(x) - 1| < \varepsilon$;

iii.) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, 0 < x - 1 < \delta \implies |f(x) + 1| < \varepsilon$;

iv.) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, 0 < 1 - x < \delta \implies |f(x) + 2| < \varepsilon$;

v.) $\forall N > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x-3| < \delta \implies f(x) < -N$;

vi.) $\forall N > 0, \exists M > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x > M \implies f(x) > N$;

vii.) $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x < -M \implies |f(x)| < \varepsilon$. (**VALOR 9 puntos**)

CRITERIOS	**PUNTAJE**
Usar la hipótesis i.) para graficar los 3 puntos en cuestión.	1
Usar la hipótesis ii.) para escribir el límite correspondiente.	1
Usar la hipótesis iii.) para escribir el límite correspondiente.	1
Usar la hipótesis iv.) para escribir el límite correspondiente.	1
Usar la hipótesis v.) e indicar la existencia de la asíntota correspondiente.	1
Usar la hipótesis vi.) para escribir el límite correspondiente.	1
Usar la hipótesis vii.) para escribir el límite correspondiente.	1
Bosquejar el gráfico de una función que cumpla las hipótesis anteriores.	2

b) Sea $f : X \mapsto \mathbb{R}$ una función y sea $a \in X'$. Suponga que existe $\lim_{x\to a} f(x) = L > 0$. Demuestre que $\exists \delta > 0, \forall x \in X, 0 < |x-a| < \delta \implies f(x) > L/2$. (**VALOR 6 puntos**)

CRITERIOS	**PUNTAJE**
Tomar un $\varepsilon > 0$ adecuado en la definición de límite.	4
Usar la definición de límite con el ε escogido para concluir.	2

<u>BONUS</u> (30 puntos, opcional) Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Califique la siguiente proposición como Verdadera o Falsa y justifique rigurosamente su respuesta: "Es posible escribir f como un límite de una sucesión de funciones continuas f_n, es decir

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$".

Observación: Recuerde que si la suma de las calificaciones de las preguntas que no son del tipo Bonus (Temas 1-4) con la calificación de la pregunta tipo Bonus que el estudiante ha optado por desarrollar llegara a ser superior a la nota máxima del Examen, entonces el resultado final del Examen será el equivalente al 100% de la nota del Examen.

CRITERIOS	**PUNTAJE**
Escoger dos intervalos abiertos adecuados alrededor de los puntos 0 y 1 en la imagen.	5
Estudiar las preimágenes de los intervalos abiertos escogidos antes y escribir, en el caso de que sea posible obtener f como un límite puntual de una sucesión de funciones continuas, estos conjuntos como una unión adecuada de conjuntos cerrados.	15
Obtener una conclusión a partir del razonamiento anterior y justificar.	10