ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS CÁLCULO DIFERENCIAL SEGUNDA EVALUACIÓN 02 de Septiembre de 2011 Nombre: .... #Matrícula:.................. Firma:............................ Paralelo:.....	CALIFICACIÓN	
	TEMA 1	
	TEMA 2	
	TEMA 3	
	TEMA 4	
	BONUS	
	TOTAL EXAMEN	
	DEBERES Y LECCIONES	
	TOTAL	

TEMA 1 (15 puntos)

a) Suponga que una bola de nieve que rueda desde la cima de una montaña está aumentando su volumen en $2t\ \frac{cm^3}{seg}$, donde t se expresa en segundos. Determine la rapidez con que aumenta su radio luego de 20 seg de iniciado su descenso si se conoce que en este instante la bola tiene un diámetro de 10 cm. (**VALOR 8 puntos**)

CRITERIOS	PUNTAJE
Escribir correctamente la ecuación correspondiente a la razón de cambio del volumen de la bola de nieve.	4
Despejar de la ecuación anterior la rapidez con que aumenta el radio de la bola.	2
Reemplazar adecuadamente los datos en el instante $t = 20$ segundos.	2

b) Determine $\frac{d^2y}{dx^2}$ si,

$$\begin{cases} x(t) = 1 + t^2, \\ y(t) = \cos(t). \end{cases}$$ (**VALOR 7 puntos**)

CRITERIOS	PUNTAJE
Calcular correctamente $\frac{dy}{dx}$.	3
Usar la expresión anterior para calcular correctamente $\frac{d^2y}{dx^2}$.	4

TEMA 2 (15 puntos)

a) Determine las dimensiones de un rectángulo con perímetro de 5 unidades, tal que al girar alrededor de uno de sus lados se genere un sólido de máximo volumen posible.
(**VALOR 9 puntos**)

CRITERIOS	**PUNTAJE**
Estudiar la simetría de la expresión de la función volumen cuando el rectángulo gira alrededor de cualquiera de sus dos lados.	2
Escribir corrrectamente la expresión para el Volumen V, usando la restricción dada por el perímetro del rectángulo.	3
Estudiar los puntos críticos de V por medio de su monotonía y/o convexidad.	2
Determinar el punto de máximo buscado y las dimensiones solicitadas.	2

b) Hallar $\frac{dy}{dx} = y'(x)$, si $2x^6 + 2x^3y - y^7x = \pi$. (**VALOR 6 puntos**)

CRITERIOS	**PUNTAJE**
Derivar correctamente la igualdad dada respecto a la variable x.	4
Despejar la expresión correspondiente a $y'(x)$.	2

TEMA 3 (15 puntos)

a) Sean $f, g : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ funciones continuas. Suponga que f y g son derivables en el intervalo abierto $(0,1)$ y que $f(0) = 0$, $g(0) = 2$. Suponga además que $|f'(x)| \leq 1$, $|g'(x)| \leq 1$, $\forall x \in (0,1)$. Demuestre que $f(x) < g(x)$, $\forall x \in [0,1)$. (**VALOR 9 puntos**)

CRITERIOS	**PUNTAJE**
Considerar una función conveniente que sea continua en $[0,1]$ y derivable en el intervalo abierto $(0,1)$.	3
Usar adecuadamente el Teorema del Valor Medio justificando debidamente las hipótesis utilizadas.	3
Usar el hecho que $|f'(x)| \leq 1$, $|g'(x)| \leq 1$, $\forall x \in (0,1)$.	2
Estudiar el caso adicional, $x = 0$, para concluir el resultado.	1

b) Suponga que f es una función dos veces diferenciable en el intervalo abierto $(a-1, a+1)$. Demuestre que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - hf'(a)}{\frac{1}{2}h^2} = f''(a). \quad (\textbf{VALOR 6 puntos})$$

CRITERIOS	**PUNTAJE**
Determinar el tipo de indeterminación.	2
Estudiar el límite usando algún criterio conveniente.	4

<u>TEMA 4</u> (15 puntos)

a) Un abrevadero de 12 pies de largo tiene una sección transversal en forma de triángulo isósceles (con base en la parte superior) de 4 pies de altura y 6 pies de base. Si se está llenando con agua el abrevadero a una razón de 9 pies cúbicos por minuto, ¿a qué velocidad está elevándose el nivel del agua cuando el agua tiene 3 pies de profundidad?. (**VALOR 8 puntos**)

CRITERIOS	**PUNTAJE**
Escribir correctamente la expresión para el volumen $V(t)$.	4
Obtener la expresión de la derivada del volumen $V'(t)$.	2
Despejar la expresión de la velocidad con que se eleva el nivel de agua $h'(t)$ y reemplazar los datos suministrados.	2

b) Sea $a > 0$. Demostrar, usando expansión de Taylor de primer orden, que

$$\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a},$$

donde x es un valor muy pequeño con respecto a la constante a. (**VALOR 7 puntos**)

CRITERIOS	**PUNTAJE**
Considerar una función oportuna para estudiar su expansión de Taylor de primer orden.	3
Obtener la expresión de la derivada de la función encontrada.	1
Desarrollar adecuadamente la expansión de Taylor alrededor de un punto conveniente.	3

<u>BONUS</u> (30 puntos, opcional) Califique la siguiente proposición como Verdadera o Falsa y justifique rigurosamente su respuesta:
"Sea $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ continua. Sea $A = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$, es decir el conjunto A está formado por los números irracionales del intervalo $[0,1]$. Suponga que exista $f'(x)$, $\forall x \in A$, y además $f'(x) = 0, \forall x \in A$. Entonces f es constante en el intervalo $[0,1]$."

Observación: Recuerde que si la suma de las calificaciones de las preguntas que no son del tipo Bonus (Temas 1-4) con la calificación de la pregunta tipo Bonus que el estudiante ha optado por desarrollar llegara a ser superior a la nota máxima del Examen, entonces el resultado final del Examen será el equivalente al 100% de la nota del Examen.

CRITERIOS	**PUNTAJE**
Analizar el caso en que la derivada de una función es negativa en un punto.	5
Considerar la imagen del conjunto A, usar el Teorema del Valor Intermedio de funciones continuas, y la derivada por la derecha para estudiar la monotonía de la función dada.	15
Obtener una conclusión usando los puntos anteriores y justificar.	10