

DESARROLLO DE UN PROGRAMA DIDACTICO DE ELEMENTOS FINITOS PARA EL ANALISIS DE ESTRUCTURAS RETICULARES Y CUERPOS SOMETIDOS A ESFUERZOS PLANOS

Daniel Blum Velasco¹, Eduardo Orcés Pareja²

¹ Ingeniero Mecánico, 2004

² Director de Tesis, BSc., California Institute of Technology, USA, Master en Ciencias de Ingeniería Mecánica, California Institute of Technology, USA, Profesor de la ESPOL.

RESUMEN

La presente tesis comprende el desarrollo de un grupo de programas de computadora con los cuales se realizan, empleando el método de elementos finitos, el análisis estático y dinámico tanto de pórticos bidimensionales como de cuerpos sólidos sometidos a esfuerzos planos. Los programas tienen como objetivo principal el servir de apoyo para el aprendizaje del método de elementos finitos a los estudiantes que tomen el curso de Análisis de Elementos Finitos de la Carrera de Ingeniería en Mecánica.

Los programas han sido desarrollados con el lenguaje de programación Matlab®, por su característica de fácil manejo de funciones matemáticas y matriciales. Adicionalmente, se emplean ciertas funciones de la herramienta Calfem®, desarrollada por el Instituto Tecnológico de Lund, Suecia. Los programas realizan tanto el análisis del caso en el cual las cargas aplicadas son estáticas, como del caso en el cual las cargas son aplicadas de forma transiente, originando la vibración del sistema. En este último caso, se calculan tanto las frecuencias naturales de vibración de la estructura como las deformaciones, velocidades y aceleraciones nodales de la misma debido a las cargas dinámicas aplicadas, además de simular los modos naturales de vibración. Los programas han sido desarrollados de tal manera que pueden ser fácilmente modificados por el usuario para usarlos en otras aplicaciones más avanzadas o de mayor complejidad, así como en otras áreas de la ingeniería como transferencia de calor, mecánica de fluidos y otras.

ABSTRACT

The present thesis covers the development of a group of computer programs which makes the static and dynamic analysis of bidimensional bar and beam structures and solids subject to plane stress. The main object of this programs is to serve as a learning tool to Mechanical Engineering students at the Finite Elements Analysis course.

The mentioned programs were developed using Matlab® programming language, by its characteristics of easy handling of mathematical and matrix functions. Plus, some functions of the Calfem® toolbox, which was developed by the Lund Technologic Institute, Sweden, were used. The programs makes two analysis, the static applied loads and transient applied loads, which makes the system vibrates. On this last case, the natural frequencies, the nodal displacements, velocities and accelerations due to dynamic loads are calculated, plus the natural vibration modes are simulated. The programs were developed in a way that they would be easily modified by user in order to employ them in other more advanced or complex applications, as in other engineering areas as heat transfer, fluid mechanics and others.

INTRODUCCION

Esta tesis ha sido realizada por Daniel Blum Velasco, egresado de la carrera de Ingeniería en Mecánica de la Facultad de Ingeniería en Mecánica y Ciencias de la Producción de la Escuela Superior Politécnica del Litoral.

La tesis consiste en la automatización del empleo de la caja de herramientas de Matlab® llamada Calfem®, así como la creación de nuevas funciones de Matlab®, según sea

necesario. Dicha automatización tiene como fin simplificar la enseñanza del método de elementos finitos aplicado al análisis de los siguientes problemas:

- Armaduras bidimensionales, simulación de cargas estáticas y dinámicas.
- Pórticos bidimensionales, simulación de cargas estáticas y dinámicas.
- Cuerpos sólidos sometidos a esfuerzos planos (elementos triangulares).

Esto se logrará mediante la presentación de la secuencia de cálculos necesarios para resolver los distintos tipos de problemas, sin importar su geometría y propiedades físicas de los materiales.

Para lograr esto se creó una estructura de subrutinas (programa) que permita ejecutar las siguientes tareas básicas:

- Ingreso de los datos de entrada.
- Ejecución de los cálculos basándose en los datos de entrada.
- Presentación de los resultados (datos de salida).

Por lo cual el programa constará de tres partes claramente diferenciadas, según la tarea que se encargarán de ejecutar:

- Pre procesador.
- Procesador.
- Post procesador.

Cabe mencionar que cada uno de los problemas será analizado con un programa específico, dada la diferente naturaleza de los datos de entrada y comportamiento físico de los sistemas a analizar. Cada uno de estos programas contará con operaciones similares pero realizadas con funciones distintas, siendo esta su mayor diferencia.

CONTENIDO

1. Fundamentos teóricos:

Durante el análisis estático de los sistemas propuestos, los programas resuelven básicamente la misma ecuación matricial:

$$K Q = F \quad \text{Ec. 1}$$

La cual es la ecuación de equilibrio estático. Donde K es la matriz de rigidez global, Q es el vector de deformaciones (desplazamientos nodales) y F es el vector de cargas externas.

En cambio, durante el análisis dinámico, para hallar las frecuencias naturales de los sistemas propuestos, los programas resuelven la siguiente ecuación matricial:

$$a \left| K - \omega^2 M \right| = 0 \quad \text{Ec. 2}$$

Que es la ecuación de los valores propios ω (frecuencias angulares naturales del sistema) y los vectores propios a (modos de vibración), la cual se deriva de la ecuación matricial:

$$M \{\ddot{u}\} + K \{u\} = 0 \quad \text{Ec. 3}$$

En cambio, para simular la respuesta dinámica de los sistemas propuestos, los programas tienen que resolver la ecuación matricial:

$$M \{\ddot{u}\} + C \{\dot{u}\} + K \{u\} = \{q\} \quad \text{Ec. 4}$$

Cabe anotar que aunque las ecuaciones matriciales son las mismas para todos los programas, la metodología con la cual se constituyen cada una de las matrices que intervienen en las ecuaciones son distintas de un programa a otro, es decir que varían según el tipo de elementos que conforman a cada sistema.

A continuación se presenta un diagrama de bloques en el cual se describe la secuencia de las operaciones y subrutinas que realizan los programas desarrollados:

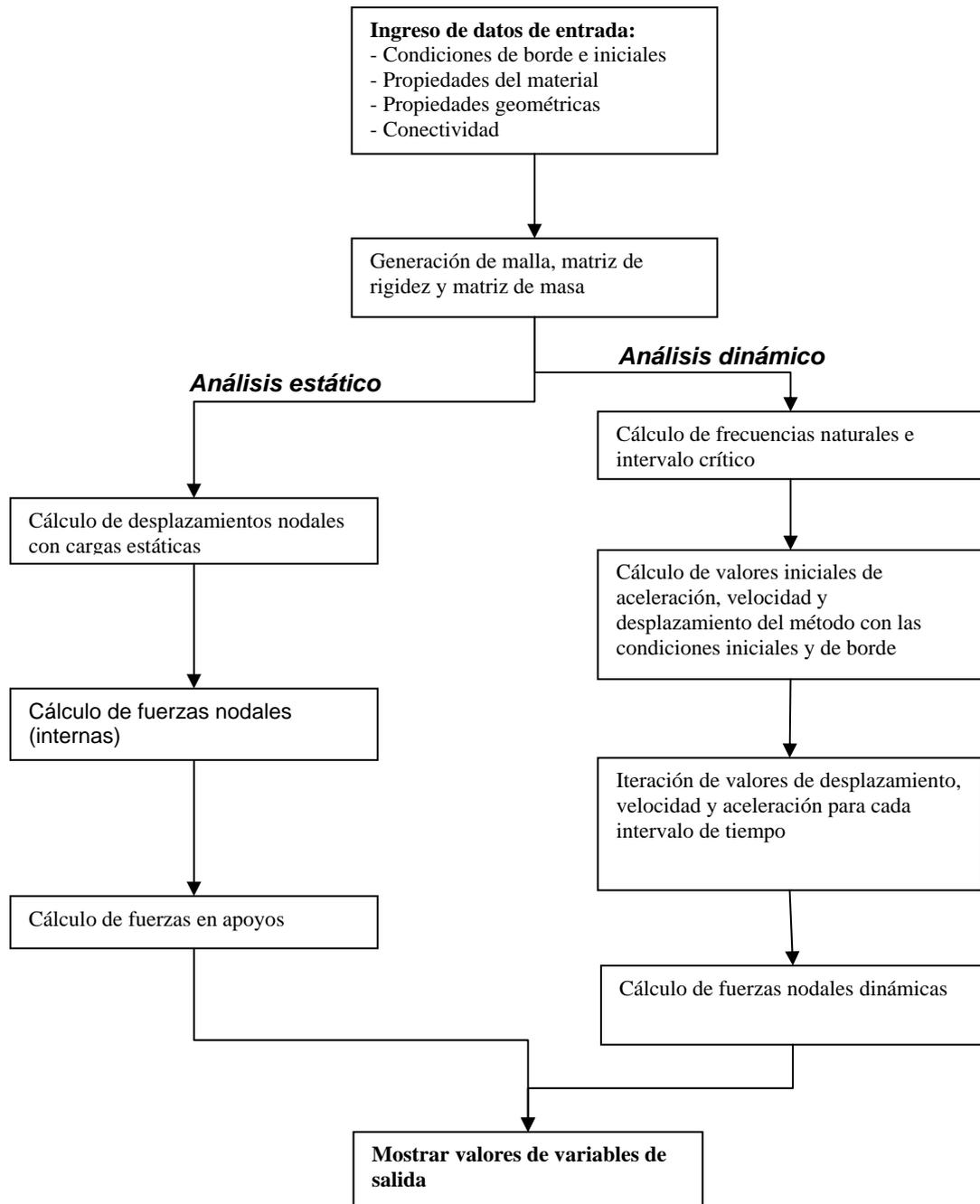


Diagrama 1, Diagrama de bloques de los programas desarrollados

2. Ejemplos de aplicación de los programas desarrollados:

Ejemplo de aplicación del programa para análisis de armaduras bidimensionales:

Los datos que se ingresan al programa son los siguientes:

- Coordenadas de los nodos
- Matriz de conectividad
- Matriz de condiciones de borde
- Modo de vibración libre que se desea simular: primero

Variable en el programa:	Valor:	Unidades:
A	2848	mm ²
E	200e6	Kg/mm ²
dens	8e-6	Kg/mm ³
g	-9810	Mm/s ²
carga(4*2-1,1) (F _x , nodo 4)	0	Kg mm/s ²
carga(4*2,1) (F _y , nodo 4)	-800000	Kg mm/s ²

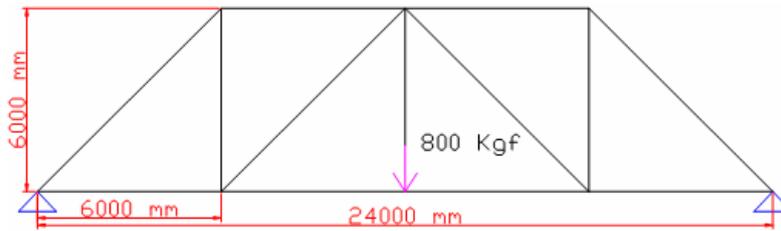


Figura 1, Esquema de armadura analizada.

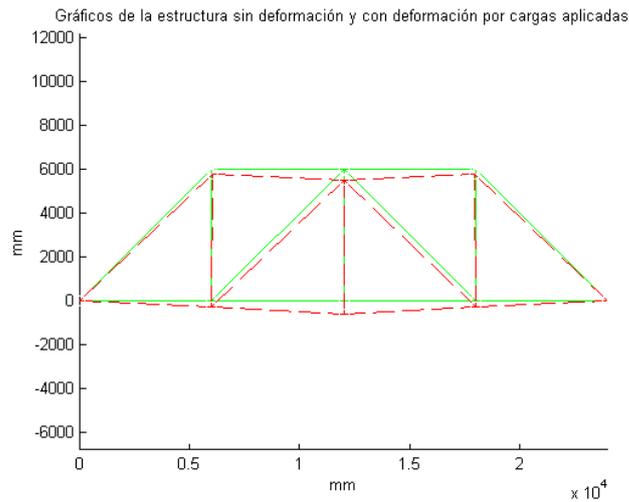


Figura 2, Deformaciones estáticas de la armadura analizada

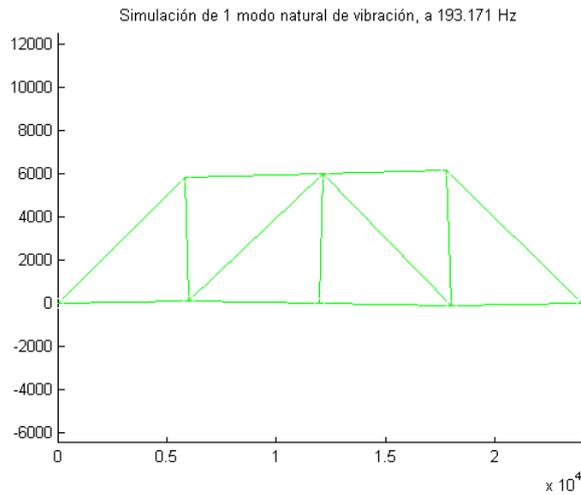


Figura 3, 1^{er} modo de vibración de la armadura analizada

Fuerza axial máxima:	800 Kg f, elemento que soporta la carga aplicada
Desplazamiento nodal máximo:	-0.0428 mm, nodo de aplicación de la carga, sentido vertical
Frecuencia natural estimada:	193 Hz, primer modo de vibración

Ejemplo de aplicación del programa para análisis de pórticos bidimensionales:

Los datos que se ingresan al programa son los siguientes:

- Coordenadas de los nodos
- Matriz de conectividad
- Matriz de condiciones de borde
- Modo de vibración libre que se desea simular: primero

Variable en el programa:	Valor:	Unidades:
A	3142	mm ²
I	1033e4	Mm ⁴
E	200e6	Kg/mm ²
dens	8e-6	Kg/mm ³
g	-9810	Mm/s ²
carga1(2,1) (F _x , nodo 2)	150000	Kg mm/s ²
carga1(2,2) (F _y , nodo 2)	0	Kg mm/s ²
carga1(2,3) (M, nodo 2)	0	Kg mm ² /s ²

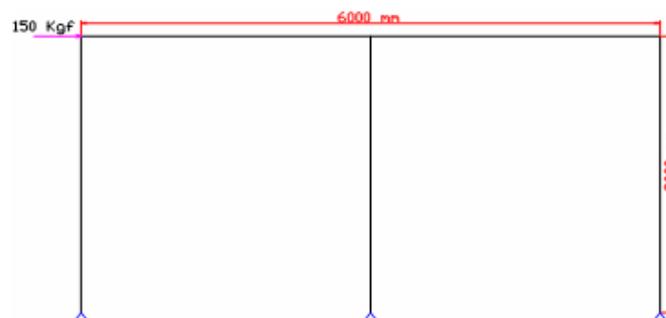


Figura 4, Esquema del pórtico analizado

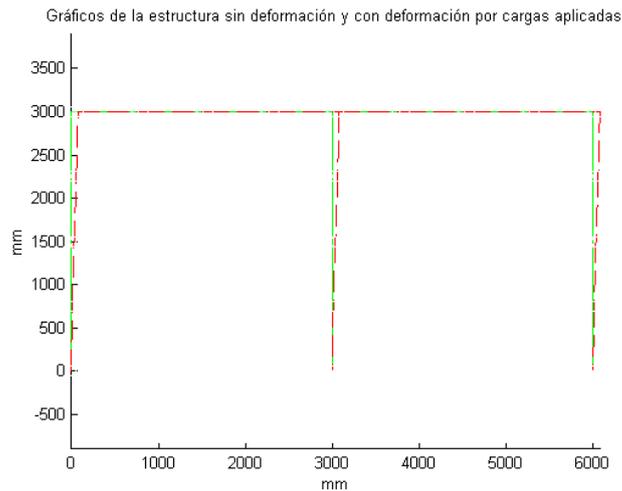


Figura 5, Deformaciones estáticas del pórtico analizado

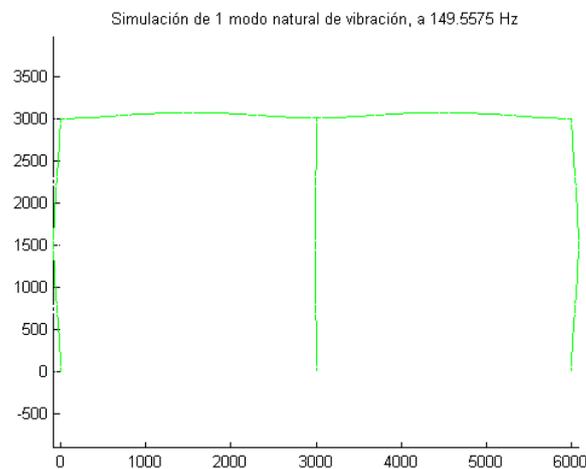


Figura 6, 1^{er} modo de vibración del pórtico analizado

Fuerza axial máxima:	104600 Kg mm/s ² , en el elemento que soporta la carga aplicada
Fuerza cortante máxima:	-59400 Kg mm/s ² , en el elemento que soporta la carga aplicada
Momento flector máximo:	93500 Kg mm ² /s ² , en el elemento que soporta la carga aplicada
Desplazamiento nodal máximo:	-0.0753 mm, nodo de aplicación de la carga, sentido horizontal
Rotación nodal máxima:	-3.569 e-5 radianes, nodo central superior
Frecuencia natural estimada:	150 Hz, primer modo de vibración

Ejemplo de aplicación del programa para análisis de cuerpos sometidos a esfuerzos planos:

Los datos que se ingresan al programa son los siguientes:

- Coordenadas de los nodos
- Matriz de conectividad
- Matriz de condiciones de borde

Variable en el programa:	Valor:	Unidades:
--------------------------	--------	-----------

Esp	0.2	mm
E	200e6	Kg/mm ²
Poi	0.28	
dens	8e-6	Kg/mm ³
g	-9810	Mm/s ²
carga(4,1) (Fx, nodo 4)	0	Kg mm/s ²
carga(4,2) (Fy, nodo 4)	-15000	Kg mm/s ²

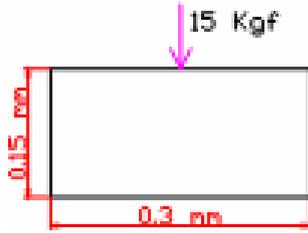


Figura 7, esquema del cuerpo analizado

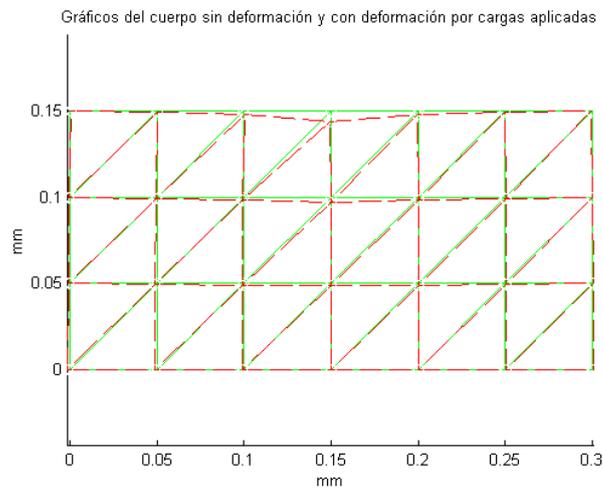


Figura 8, Deformaciones estáticas del cuerpo analizado

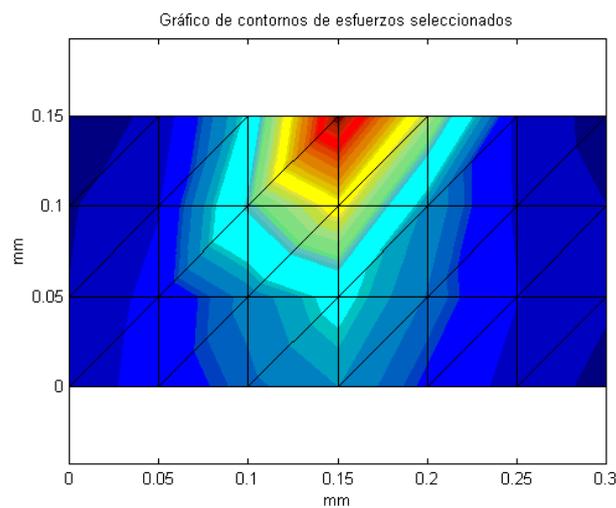


Figura 9, Contornos de esfuerzos de Von Mises del cuerpo analizado

Esfuerzo de Von Mises máximo:	65,1 Mpa, nodo 4
Deformación unitaria máxima:	-0.0051 mm/mm, elemento 6
Máxima deformación angular:	0.0060 radianes, elemento 6

CONCLUSIONES

1. Se desarrolló el grupo de programas propuestos entre los objetivos de la tesis. Estos programas realizan el análisis estático y dinámico tanto de estructuras reticulares planas y de cuerpos sometidos a esfuerzos planos. Adicionalmente a los programas principales desarrollados, se crearon funciones auxiliares para la construcción de matrices de rigidez para elementos tipo barra y viga bidimensionales, así como para elementos triangulares.
2. El código abierto de los programas desarrollados permite que los estudiantes del curso de elementos finitos mejoren su aprendizaje del método, sus limitaciones y potenciales aplicaciones en otras áreas de la ingeniería.
3. Los programas desarrollados a partir del diagrama de bloques propuesto mostraron buena estabilidad numérica en los análisis estático y dinámico de varios ejemplos de prueba.

REFERENCIAS

1. D. Blum, "Desarrollo e Implementación de un Programa de Elementos Finitos Para el Análisis y Simulación Dinámica de una Estructura Bidimensional Tipo Pórtico" (Tesis, Facultad de Ingeniería en Mecánica y Ciencias de la Producción, Escuela Superior Politécnica del Litoral, 2004).

Daniel Blum Velasco
Estudiante de Tesis

Eduardo Orcés Pareja
Director de Tesis