APLICACIÓN DE MODELOS AUTOREGRESIVOS PARA VARIABLES ECONOMICAS EN EL CALCULO ACTUARIAL

Francisco Rafael Torres Guaranda[1] , Mat. Fernando Sandoya Sánchez[2]
[1] Ingeniero en Estadística Informática 2000
[2] Director de Tesis, Matemático, Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, Escuela Politécnica Nacional, 1993, Profesor de la ESPOL desde 1995.

RESUMEN

El objetivo principal del desarrollo de este tema de investigación, es hallar, a partir de un Modelo Autoregresivo que ajusta la fluctuación de la tasa de interés en el tiempo, los momentos de las anualidades, seguros ciertos y de vida, los cuales representan el negocio de muchas empresas no sólo de nuestro país sino también del extranjero. El cálculo de estos momentos es un tema fundamental en Matemáticas Actuariales, pues permiten evaluar el monto de las primas y el riesgo de emitirlas.

La importancia que esta investigación toma dentro del Ecuador se fundamenta por la situación económica de nuestro país, ya que si bien es cierto que con el proceso de la dolarización, la economía del país y con ella sus variables tienden a estabilizarse, para nadie es desconocido que uno de los más grandes problemas del Ecuador es la constante variación en cuanto al tema económico y sus medidas por parte de las autoridades, lo cual trae consigo la fluctuación de varias variables económicas, entre las cuales se encuentran las tasas de interés.

Algunos resultados han sido producto del análisis del Modelo en forma matricial, en cambio que para otros se ha recurrido a las distribuciones de variables conocidas o, en su defecto, al estudio de la combinación lineal de ellas.

INTRODUCCION

A lo largo de la historia de nuestro país, hemos sido testigos en muchos casos del desenvolvimiento que ha tenido el mismo dentro de diversos ámbitos, tales como el económico, social y el cultural. Dentro del ámbito económico en el país, se destacan todo lo que es comercio y negocios, con una amplia gama que va desde las pequeñas industrias, hasta las grandes empresas productoras, comercializadoras y exportadoras para mercados de todo el planeta.

En lo que respecta a la comercialización de bienes y servicios, se destaca el negocio de los seguros, servicio que es prestado a personas naturales o jurídicas, por entidades tanto públicas como privadas.

Dentro del desarrollo de este tema, se ha considerado únicamente a la Ciencia Actuarial como herramienta para obtener mayores réditos mutuos en el negocio de las aseguradoras, tanto para el asegurado como para el asegurador, y en general se ha considerado la tasa de interés como una cantidad constante; pero, en países como el nuestro, en que se ha manejado un mercado en el que la tasa de interés es a veces muy fluctuante es necesario, a más de la Ciencia Actuarial, técnicas que nos permitan analizar y manejar la tasa de interés a través del tiempo, en particular son los llamados Modelos Autoregresivos, los mismos que nos permitirán incluir la variabilidad de la tasa de interés en los modelos actuariales.

CONTENIDO

LA ECONOMIA DEL SEGURO

Las operaciones de seguro se han establecido con el fin de protegerse respecto a contratiempos financieros importantes que puedan acaecer aleatoriamente y que forman parte de planes futuros de empresas o persones naturales.

La cobertura se limita a reducir las consecuencias de los sucesos aleatorios que se pueden medir en términos monetarios. Podríamos definir una " Operación de Seguros" como un medio para reducir el impacto financiero adverso ocasionado por sucesos aleatorios que impiden que se realicen normalmente las expectativas futuras.

LA ESPERANZA MATEMATICA DE LA UTILIDAD

Si pudiéramos prever las consecuencias de nuestras decisiones, podríamos tomarlas en base a nuestras preferencias, respecto a las consecuencias ciertas.

En la práctica no disponemos de estas previsiones, pero podemos tomar decisiones con la incertidumbre asociada a nuestras expectativas, así se ha elaborado la llamada *Teoría de la Utilidad* para fundamentar el uso de la esperanza matemática de la utilidad como criterio de elección en el futuro aleatorio y determinar una función de utilidad que permita ordenar las eventualidades.

Una solución al problema de la toma de decisiones en la fase de la incertidumbre es definir el valor de un proyecto económico con un resultado aleatorio que será su valor esperado. Por este principio, un decisor podría ser indiferente entre asumir la pérdida aleatoria X , y el pago del monto E[X], con el efecto de aliviar una posible pérdida. Similarmente, un decisor podría estar decidido a pagar E[Y] para participar en un negocio riesgoso con una amortización aleatoria Y. En Economía el valor esperado de una expectativa aleatoria con pagos monetarios es frecuentemente llamado el valor actuarial del contrato.

MODELOS AUTOREGRESIVOS

Dentro de las muchas aplicaciones estadísticas una de las más importantes es su poder de inferencia, es decir, poder llegar a concluir algo concreto sobre cierto tema en particular, basado en datos o información que se tiene sobre el mismo.

Existen varias herramientas que nos ayudan sobre este tema en particular, tales como la Regresión Lineal, las tablas de contingencia, o en el caso en donde se hallen implícitas y relacionadas más de una variable, encontramos el Análisis de Factores, el Diseño Experimental, y otras técnicas del Análisis Multivariado.

A parte de estas herramientas que hemos citado, existe otra técnica que es el Análisis de Series de Tiempo y con ella los Modelos Autoregresivos, con los que podemos llegar a obtener excelentes aproximaciones de lo que queremos estimar.

SEGUROS Y ANUALIDADES DE VIDA

Hacer referencia a los modelos de seguros y las anualidades de vida es realmente importante, ya que ellos son establecidos para reducir el impacto financiero de una quiebra, en el caso de una empresa o fábrica, y de una muerte en el caso de una persona y sus dependientes.

Los modelos de seguros y anualidades dependerán únicamente del momento en que ocurra la quiebra o muerte, es decir el modelo considerado dependerá simplemente de la variable aleatoria T= T (x) tiempo de vida futura. En el caso de los seguros, la prestación consiste en un solo pago que se denomina Operación de Tracto Unico, en cambio en las anualidades la prestación consiste de varios pagos periódicos .

Denotemos con z el valor actual (valor presente) de la prestación, calculado al interés efectivo i . El valor E[z] se denomina valor actuarial de la prestación o prima única pura de la operación.

El riesgo de emitir una póliza de seguro, se lo puede medir mediante el uso de la varianza de la variable z .

MODELO A SER APLICADO

Dentro de nuestra aplicación, usaremos un modelo autoregresivo de segundo orden para explicar el comportamiento y la fluctuación de la tasa de interés, entonces, basado en la teoría de Series de Tiempo, el modelo es el siguiente:

$$\delta_t - \delta = 2k(\delta_{t-1} - \delta) - k(\delta_{t-2} - \delta) - e_t$$

Donde definimos que: $u_t = \delta_t - \delta$, y :

$\delta_t = (ln(1+i))$ es la fuerza del interés experimentada en el año en el instante t .
$\delta = (\ln(1+i))$ es la fuerza del interés promedio en un periodo largo de tiempo.

El factor k es obtenido a partir de los datos de la tasa de interés en un periodo determinado de tiempo y e_t es una variable denominada ruido blanco, la cual representa la diferencia entre el valor real y el valor estimado de la predicción.

Cabe recalcar que la utilización del modelo es realmente valedera, puesto que si quisiéramos simplemente realizar simulaciones de la fluctuación de la tasa de interés, éstas no nos mostrarían la realidad de la situación, pues su distribución es desconocida.

El modelo autoregresivo presentado anteriormente permite la derivación de las fórmulas exactas para los momentos de varias funciones de interés compuesto, incluyendo A_n y a_n, las cuales representan los valores de los seguros y las anualidades respectivamente cuando sólo el interés fluctúa, y también lo hace para los momentos de las funciones de contingencia de vida A_x y a_x, cuando varían ambas, la tasa de interés como la edad de muerte. Las fórmulas exactas son muy tediosas de aplicar, y es por esa razón que se han propuesto fórmulas simples para los momentos, las cuales brindan una correcta aproximación a los momentos extraídos directamente del modelo autoregresivo de segundo orden, estas aproximaciones pueden ser obtenidas a partir de una matriz de análisis, la cual es también obtenida del modelo original.

MATRIZ DE ANALISIS

Realicemos primero un adecuado cambio de variable a partir de la relación:

$$u_t = S_t - S_{t-1}$$

Y reemplazando en el modelo originalmente planteado, es decir:

$$u_t = 2ku_{t-1} - ku_{t-2} + e_t$$

Obtenemos que:

$$S_t = (1+2k)S_{t-1} - 3kS_{t-2} + kS_{t-3} + e_t$$

La cual expresada matricialmente nos queda:

$$\begin{bmatrix} S_t \\ S_{t-1} \\ S_{t-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2k & -3k & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{t-1} \\ S_{t-2} \\ S_{t-3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$, válido para cualquier $t > 0$

Esta expresión matricial puede ser representada de la siguiente manera:

$$w_t = Aw_{t-1} + \varepsilon_t$$

donde w_t y w_{t-1} son vectores de dimensión r+1, donde r es el orden del modelo, y A es una matriz cuadrada de dimensión (r+1)x(r+1).

Haciendo los reemplazos correspondientes y definiendo que: $A^t \cong xy^T$, finalmente obtenemos:

$$w_t \cong xy^T w_0 + xy^T(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + ... + \varepsilon_t)$$

Considerando que los vectores aleatorios ε_t son independientes y cada uno de ellos tiene valor esperado 0 y una matriz de covarianza Σ, procedemos a obtener los valores esperados de la función w_t, es así que obtenemos finalmente las siguientes expresiones para cada uno de los momentos :

$$E(w_t) \cong y^T w_0 x$$
$$Var(w_t) \cong txy^T \Sigma yx^T$$
$$Cov(w_t, w_s) \cong min(t,s)xy^T \Sigma yx^T$$

Luego, determinando primero el valor de w_0, obtenemos que:

$$E(w_t) = E\begin{bmatrix} S_t \\ S_{t-1} \\ S_{t-2} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} \dfrac{k(u_0 - u_{-1})}{1-k} \\ \dfrac{k(u_0 - u_{-1})}{1-k} \\ \dfrac{k(u_0 - u_{-1})}{1-k} \end{bmatrix}$$

La varianza de S_t será obtenida de igual manera:

$$Var(S_t) \cong \frac{t\sigma^2}{(1-k)^2}$$

Y la Covarianza entre S_t y S_s será:

$$Cov(S_t, S_s) \cong min(t,s) xy^T \Sigma yx^T$$

Sabiendo que $A_t\neg$ tiene una distribución lognormal, entonces usando las aproximaciones encontradas para S_t, encontramos:

$$E(A_t\neg) \cong C\nu^{\,t} e^{t\Delta/2} \qquad (a)$$
$$Var(A_t\neg) \cong (E(A_t\neg))^2 (e^{t\Delta} - 1) \qquad (b)$$
$$Cov(A_t\neg, A_r\neg) \cong E(A_t\neg)E(A_r\neg)(e^{min(t,r)\Delta} - 1): \qquad (c)$$
$$donde\ \Delta = \frac{\sigma^2}{(1-k)^2} \quad y \quad ln\, C = k(u_0 - u_{-1})/(1-k)$$

Puesto que a_n es simplemente la suma de la función $A_t\neg$ evaluada desde el instante 1 hasta el instante n, las aproximaciones de los momentos de estas anualidades, $a_n\neg$ podrán ser obtenidas mediante la suma de las progresiones geométricas implicadas de insertar las funciones (a), (b), y , entonces:

$$E(a_t\neg) \approx C[{}^{\delta}a_t\neg + {}^{\delta}(IA)_t\neg\Delta / 2$$
$$Var(a_t\neg) \approx C^2 [2\nu(\ {}^{\delta}a_t\neg - {}^{2\delta}a_t\neg)/d^2 - (1+\nu)\ {}^{2\delta}(IA)_t\neg / d]\Delta$$

Donde $(IA)_t\neg$ es un modelo de seguro creciente temporal .

Cabe recalcar que cuando veamos un índice del lado izquierdo de una variable, eso significará que la misma deberá ser evaluada al doble de la fuerza de interés original.

Los momentos de los seguros y las anualidades de vida serán obtenidas simplemente tomando el valor esperado y la varianza condicional de las aproximaciones previas, pero ahora con respecto a la edad de muerte de los asegurados, y asumiendo que ésta y el proceso de variación de la tasa de interés son variables aleatorias independientes, lo cual parece lógico suponer.

Así se tiene por ejemplo:

$$Var(A_x) \approx C^2\{[\,^{2\delta}(IA)_X\,]\Delta + [\,^{2\delta}A_X - (^{\delta}A_X)^2\,]\};$$
$$Var(a_x) \approx C^2\{[\,2v\,(^{\delta}a_x - ^{2\delta}a_x\,)/\,d^2 - (1+v)\ ^{2\delta}(Ia)_x\,/\,d\,]\Delta + [(^{2\delta}A_X - (^{\delta}A_X)^2\,)/\,d\,]\}$$

Cabe recalcar que el primer miembro de cada una de estas expresiones simplemente involucran la variación de la tasa de interés y el segundo miembro involucra la variación de la edad de muerte, que es lo que único que consideran los modelos clásicos.

La aplicación de estos modelos es amplia y no sólo se limita al ámbito actuarial.

CONCLUSIONES

Puntualizamos las siguientes conclusiones:

- El concepto bajo el cual se ha desarrollado la teoría clásica financiera y actuarial ha estado fundamentada bajo la consideración única de la variación del tiempo de una determinada negociación, en el caso financiero, o de la edad de muerte en el ámbito actuarial, sin considerar en ambos caso la variación de la tasa de interés en el tiempo.

- La variable que representa a un seguro cierto $A_{\overline{t}|}$ anteriormente fue tratada como una simple función de interés, en la cual se evaluaba éste de acuerdo al tiempo establecido por el negocio o el contrato, en cambio ahora tiene carácter aleatorio, pues depende la variación de la tasa de interés en el tiempo.

- En esta investigación el uso primordial que se le ha dado al modelo autoregresivo y sus momentos ha sido para descuentos, pero también puede ser utilizado para caso de acumulaciones, como es el caso del establecimiento de los fondos de reserva.

- Para el desarrollo de los momentos de anualidades y seguros de vida consideramos la fluctuación de los años de muerte del asegurado, como lo hace la ciencia actuarial convencional, y la variación de la tasa de interés.

- El análisis que se ha hecho se puede generalizar para cualquier modelo autoregresivo de orden r si el caso lo amerita.

REFERENCIAS

1. F. Torres, " Aplicación de Modelos Autoregresivos para varaibles económicas en el cálculo Actuarial " (Tesis, Facultad de Ingeniería en Estadística Informática, Escuela Superior Politécnica del Litoral , 2000).

2. J. Box, R. Jenkins, Times Series Analysis (3ra. Edición, New York, Printece Hall, 1994), pp 204-254.

3. S. Grossman, Algebra Lineal (Cuarta Edición, México, McGraw-Hill, 1991), pp 409-439.

4. J. G. Villalón, Operaciones de Seguros Clásicas y Modernas, Madrid, Ediciones Pirámide, 1997.

5. J. Pollard, Actuarial Applications of Autoregressive Models (Sydney, School of Economic and Financial Studies, Noviembre 1997)