

# °BONDAD DE LOS ESTIMADORES JACKNIFE PARA DISTINTOS TIPOS DE POBLACIÓN”

Raquel Plúa Morán <sup>1</sup>, Gaudencio Zurita <sup>2</sup>

<sup>1</sup> Ingeniera en Estadística Informática 2003

<sup>2</sup> Director de Tesis, Master en Ciencias Matemáticas, University of South Carolina, EEUU, 1974. Master en Estadística, University of South Carolina, EEUU, 1982. Profesor de ESPOL desde 1969.

## RESUMEN

El presente trabajo de investigación desarrolla la estimación para los parámetros poblacionales de distribuciones continuas y discretas mediante el método Jacknife con el objetivo de determinar la bondad de este tipo de estimación en comparación con los métodos de estimación convencionales.

Para ello, desarrollamos un modelo de simulación, para el problema planteado, se generan 50 muestras aleatorias de tamaño  $n$  cada una a partir de poblaciones discretas y continuas, se estiman los parámetros poblacionales mediante el método Jacknife y el método convencional, así, obtenemos las principales medidas descriptivas para los 50 estimadores.

Al analizar los resultados del proceso de simulación pudimos apreciar que el método de estimación Jacknife funciona bastante bien para ciertas poblaciones y con determinados valores para los parámetros poblacionales, sin embargo debemos recalcar que el método Jacknife es un método de remuestreo o intensivo por computador y mientras la muestra aleatoria sea más grande el tiempo de ejecución del algoritmo para la obtención de este tipo de estimador será mayor. Para estimadores insesgados como la media muestral y la varianza, el método Jacknife y el método convencional proporcionan los mismos resultados con tres dígitos de precisión.

## INTRODUCCIÓN

Al trabajar con muestras aleatorias de alguna población desconocida, tratamos de hacer inferencias respecto a la misma utilizando estimadores para los parámetros poblacionales, el “insesgamiento” de los estimadores para una muestra de tamaño  $n$  nos garantiza que en promedio éstos estarán muy cerca del valor del parámetro poblacional, la dificultad estriba cuando nos enfrentamos con estimadores sesgados o cuyo sesgo y varianza son difíciles de determinar. En estas últimas condiciones el método Jacknife, un método de remuestreo, resulta ser bastante útil, puesto que logra reducir el sesgo de estimación.

Por tanto, la hipótesis del trabajo de investigación es que al trabajar con estimadores para los parámetros poblacionales como la media, mediana, varianza, primer estadístico de orden y último estadístico de orden; mediante el método de estimación Jacknife, se logra reducir el sesgo de estimación; y, la varianza del estimador y la longitud de los intervalos de confianza son pequeñas. Siendo de gran utilidad este tipo de estimadores, especialmente para aquellos investigadores que requieren un grado de acuracidad pequeño, es decir que las estimaciones de los parámetros poblacionales estén muy cercanas al verdadero valor del parámetro poblacional.

## ANÁLISIS DE RESULTADOS

En esta sección se presentan y analizan los resultados obtenidos al comparar el método de estimación Jacknife y los métodos convencionales utilizando estimadores para los parámetros poblacionales de distintas distribuciones continuas y discretas; para cada estimador se trabaja con tamaños muestrales de 5, 15, 50, 100 y 500; y para cada caso obtenemos 50 estimadores, a partir de cada uno de ellos inferimos el sesgo de estimación y el intervalo de confianza al 95%.

El sesgo de estimación, es obtenido a partir de la resta del parámetro poblacional y el estimador obtenido. El intervalo de confianza al 95% para el parámetro poblacional, utilizando el método de estimación Jacknife se define a partir del estadístico  $t$  y utilizando la estimación convencional: para estimadores insesgados y muestras de tamaño 5 y 15 el intervalo de confianza es obtenido a partir de la desigualdad de Tchebysheff, para muestras de tamaño 50, 100 y 500 obtenemos los intervalos de confianza a partir de la

distribución Normal, en cuanto a los estimadores sesgados y para tamaños muestrales de 5 y 15, utilizamos la regla empírica en la que al desviar tres veces su media obtenemos los límites del intervalo de confianza y para muestras de tamaño 50, 100 y 500 obtenemos el intervalo de confianza a partir de la distribución normal, esto lo realizamos cuando el sesgo no sea influyente es decir  $\frac{B}{\hat{\sigma}(\theta)} < \frac{1}{10}$ , sino fuese

así el intervalo de confianza obtenido a partir de la distribución normal es desplazado en la cantidad  $B$ . Con los 50 estimadores se obtienen las distribuciones de frecuencias, y sus principales medidas descriptivas como son: la media, varianza, asimetría, error de estimación promedio, mínimo, máximo, límite inferior y superior promedio del intervalo de confianza al 95%, longitud promedio de los intervalos de confianza y sesgo de estimación promedio; así podremos recomendar en que casos es mejor utilizar la estimación por el método Jackknife y la estimación por el método convencional.

Cabe recalcar que no se estimó el primer estadístico de orden y último estadístico de orden para ciertas distribuciones continuas o discretas por no encontrarse definido el parámetro poblacional en éstas distribuciones, así mismo no se trabajó la mediana para las poblaciones discretas y para la población beta, por no haber una fórmula explícita para obtener la mediana, la cual pueda ser implementada en un simulador.

Las distribuciones continuas trabajadas fueron: Poisson, Binomial Negativa, Hipergométrica y Binomial; las distribuciones discretas fueron: Exponencial, Beta, Normal, Uniforme y Normal Bivariada.

### Estimador para la media poblacional

Tanto en distribuciones continuas como en distribuciones discretas las medidas descriptivas obtenidas mediante el método de estimación Jackknife y el método de estimación convencional coincidían con tres dígitos de precisión, presentamos el caso para una distribución discreta: Poisson  $\lambda=2$ .

**Tabla I**  
Estimación por el Método Jackknife  
Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Media de una Población Poisson con parámetro  $\lambda=2$  utilizando el Método Convencional

Medidas Descriptivas	Tamaño Muestral	5	15	50	100	500
Media		2.096	2.020	2.021	2.003	2.005
Varianza		0.443	0.137	0.033	0.018	0.006
Asimetría		0.003	-0.352	-0.164	0.545	0.091
Error de Estimación Promedio		0.536	0.289	0.146	0.107	0.066
Kurtosis		2.615	3.117	2.701	3.008	1.840
Mínimo		0.600	1.000	1.620	1.740	1.876
Máximo		3.600	2.733	2.420	2.340	2.128
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%		0.000	0.436	1.630	1.727	1.881
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%		4.618	3.604	2.413	2.278	2.128
Longitud Promedio del Int. De Conf.		4.618	3.168	0.783	0.551	0.247
Sesgo de Estimación		0.096	0.020	0.021	0.003	0.005

Elaboración: R. Plúa

**Tabla II**  
Estimación por el Método Jackknife  
Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Media de una Población Poisson con parámetro  $\lambda=2$  utilizando el Método Jackknife

Medidas Descriptivas	Tamaño Muestral	5	15	50	100	500
Media		2.096	2.020	2.021	2.003	2.005
Varianza		0.443	0.137	0.033	0.018	0.006
Asimetría		0.003	-0.352	-0.164	0.545	0.091
Error de Estimación Promedio		0.536	0.289	0.146	0.107	0.066
Kurtosis		2.615	3.117	2.701	3.008	1.840
Mínimo		0.600	1.000	1.620	1.740	1.876
Máximo		3.600	2.733	2.420	2.340	2.128
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%		0.530	1.260	1.630	1.727	1.881
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%		3.662	2.780	2.413	2.278	2.128
Longitud Promedio del Int. De Conf.		3.132	1.520	0.783	0.551	0.247
Sesgo de Estimación		0.096	0.020	0.021	0.003	0.005

Elaboración: R. Plúa

Como se puede apreciar en la Tabla I y en la Tabla II se muestran las medidas descriptivas para la distribución del estimador de la media utilizando el método de estimación Jackknife y el método de estimación convencional, se puede apreciar que la longitud promedio de los intervalos de confianza al 95% logró reducirse mediante el método de estimación Jackknife frente a la estimación convencional, con todas las poblaciones simuladas y para distintos valores de los parámetros poblacionales se obtuvo igual situación.

## Estimador para el estimador insesgado de la varianza

La situación fue muy similar a la que ocurrió con el estimador para la media poblacional, todas las medidas descriptivas coincidieron con tres dígitos de precisión a excepción de la longitud promedio de los intervalos de confianza para tamaños muestrales menores a 30 donde ésta fue menor utilizando el método de estimación Jackknife frente al método de estimación convencional. A continuación presentamos el caso para la distribución Poisson con parámetro  $\lambda=2$ , se puede apreciar en la Tabla III y en la Tabla IV que la longitud promedio de los intervalos de confianza para tamaños muestrales 5 y 15 se redujo utilizando el método de estimación Jackknife.

**Tabla III**

*Estimación por el Método Jackknife*

Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Varianza de una Población Poisson con parámetro  $\lambda=2$  utilizando el Método Convencional

Medidas Descriptivas	Tamaño Muestral	5	15	50	100	500
Media		2.246	1.969	2.006	1.941	1.990
Varianza		3.148	0.650	0.201	0.098	0.013
Asimetría		1.497	0.802	0.754	-0.126	0.108
Error de Estimación Promedio		1.258	0.655	0.359	0.251	0.093
Kurtosis		5.201	2.983	4.446	2.396	2.552
Mínimo		0.000	0.838	1.198	1.368	1.737
Máximo		8.500	3.981	3.592	2.657	2.218
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%		-3.829	-0.761	1.428	1.512	1.768
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%		6.817	4.077	3.179	2.646	2.267
Longitud Promedio del Int. De Conf.		10.646	4.838	1.751	1.135	0.499
Sesgo de Estimación		0.246	-0.031	0.006	-0.059	-0.010

Elaboración: R. Plúa

**Tabla IV**

*Estimación por el Método Jackknife*

Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Varianza de una Población Poisson con parámetro  $\lambda=2$  utilizando el Método Jackknife

Medidas Descriptivas	Tamaño Muestral	5	15	50	100	500
Media		2.246	1.969	2.006	1.941	1.990
Varianza		3.148	0.650	0.201	0.098	0.013
Asimetría		1.497	0.802	0.754	-0.126	0.108
Error de Estimación Promedio		1.258	0.655	0.359	0.251	0.093
Kurtosis		5.201	2.983	4.446	2.396	2.552
Mínimo		0.000	0.838	1.198	1.368	1.737
Máximo		8.500	3.981	3.592	2.657	2.218
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%		-1.779	0.536	1.165	1.360	1.720
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%		6.271	3.402	2.848	2.523	2.261
Longitud Promedio del Int. De Conf.		<b>8.050</b>	<b>2.866</b>	<b>1.683</b>	1.164	0.540
Sesgo de Estimación		0.246	-0.031	0.006	-0.059	-0.010

Elaboración: R. Plúa

## Estimador de máxima Verosimilitud para la Varianza

Para las distribuciones continuas y discretas se presentaron situaciones similares, las medidas como el sesgo de estimación, error promedio de estimación, longitud promedio de los intervalos de confianza al 95% y la varianza de las distribución del estimador de la varianza utilizando el método de estimación Jackknife resultaron ser mayores en magnitud frente al método de estimación convencional.

Una excepción ocurre para la distribución Poisson, que para el parámetro  $\lambda > 7$  logra reducir el sesgo de estimación de la distribución del estimador.

En la Tabla V y en la Tabla VI se muestra el caso para una población Normal con  $\mu=0$  y  $\sigma=1$ .

**Tabla V**

*Estimación por el Método Jackknife*

Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Varianza de una Población Normal con parámetros  $\mu=0$  y  $\sigma=1$  utilizando el Método Convencional

Medidas Descriptivas	Tamaño Muestral	5	15	50	100	500
Media		0.023	0.029	0.029	0.030	0.031
Varianza		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Asimetría		1.011	0.234	0.422	-0.022	0.724
Error de Estimación promedio		0.014	0.007	0.004	0.003	0.001
Kurtosis		3.550	2.683	2.773	2.541	3.696
Mínimo		0.003	0.011	0.018	0.022	0.028
Máximo		0.066	0.049	0.043	0.038	0.035
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%		0.000	0.001	0.021	0.024	0.027
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%		0.064	0.052	0.046	0.041	0.035
Longitud Promedio del Int. De Conf.		0.064	0.050	0.025	0.018	0.008
Sesgo de Estimación		-0.008	-0.002	-0.002	0.000	0.000

Elaboración: R. Plúa

**Tabla VI**  
*Estimación por el Método Jacknife*  
**Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Varianza de una Población Normal con parámetros  $\mu=0$  y  $\sigma=1$  utilizando el Método Jacknife**

<i>Medidas Descriptivas</i> \ <i>Tamaño Muestral</i>	5	15	50	100	500
Media	0.044	0.033	0.030	0.031	0.031
Varianza	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
Asimetría	0.985	0.136	0.408	-0.020	0.721
Error de Estimación promedio	0.024	0.008	0.004	0.003	0.001
Kurtosis	3.384	2.500	2.770	2.524	3.692
Mínimo	0.004	0.013	0.019	0.023	0.028
Máximo	0.134	0.054	0.044	0.038	0.035
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	0.005	0.016	0.021	0.024	0.028
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	2.344	0.074	0.042	0.039	0.035
Longitud Promedio del Int. De Conf.	2.339	0.059	0.021	0.015	0.007
Sesgo de Estimación	0.013	0.003	-0.001	0.000	0.000

Elaboración: R. Plúa

### Estimador para la mediana Poblacional

El estimador de la mediana poblacional para las poblaciones continuas mediante el método de estimación Jacknife proporciona valores que no se encuentran en el dominio de las funciones de densidad podemos observar en la Tabla VII y en la Tabla VIII que los mínimos valores obtenidos de los estimadores son negativos y la muestra aleatoria ha sido obtenida de una población exponencial que está definida para valores mayores a cero, para tamaños muestrales pares se obtienen iguales medidas con tres dígitos de precisión, esto se aprecia en la Tabla IX y en la Tabla X.

**Tabla VII**  
*Estimación por el Método Jacknife*  
**Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Mediana de una Población Exponencial con parámetros  $\beta=36$  utilizando el Método Jacknife**

<i>Medidas Descriptivas</i> \ <i>Tamaño Muestral</i>	5	15	50	100	500
Media	33.384	22.744	25.310	24.754	24.604
Varianza	1191.289	511.832	25.678	11.421	3.008
Asimetría	0.747	0.039	0.953	0.348	-0.401
Error de Estimación Promedio	25.847	18.546	3.854	2.776	1.376
Kurtosis	3.555	2.336	4.530	2.457	3.429
Mínimo	<b>-33.279</b>	<b>-22.525</b>	17.093	18.526	19.509
Máximo	129.245	72.957	43.151	33.011	28.199
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	-2.484	5.519	17.910	18.353	20.691
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	69.253	39.968	32.709	31.154	28.518
Longitud Promedio del Int. De Conf.	71.736	34.449	<b>30.404</b>	<b>20.277</b>	<b>10.405</b>
Sesgo de Estimación	8.431	-2.210	0.356	-0.200	-0.349

Elaboración: R. Plúa

**Tabla VIII**  
*Estimación por el Método Jacknife*  
**Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Mediana de una Población Exponencial con parámetros  $\beta=36$  utilizando el Método Convencional**

<b>Medidas Descriptivas</b>	<b>Tamaño Muestral</b>	<b>5</b>	<b>15</b>	<b>50</b>	<b>100</b>	<b>500</b>
Media		34.501	25.511	25.310	24.754	24.604
Varianza		341.651	78.013	25.678	11.421	3.008
Asimetría		0.423	0.441	0.953	0.348	-0.401
Error de Estimación Promedio		16.248	6.926	3.854	2.776	1.376
Kurtosis		2.281	3.011	4.530	2.457	3.429
Mínimo		5.078	9.948	17.093	18.526	19.509
Máximo		76.435	50.383	43.151	33.011	28.199
Lim. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%		-33.786	-4.695	8.013	13.334	18.894
Lim. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%		77.117	48.300	38.417	33.611	29.299
Longitud Promedio del Int. De Conf.		110.903	52.995	30.404	20.277	10.405
Sesgo de Estimación		9.548	0.557	0.356	-0.200	-0.349

Elaboración: R. Plúa

**Tabla IX**  
*Estimación por el Método Jacknife*  
**Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Mediana de una Población Exponencial con parámetros  $\beta=36$  utilizando el Método Jacknife**

<b>Medidas Descriptivas</b>	<b>Tamaño Muestral</b>	<b>8</b>	<b>10</b>	<b>16</b>	<b>20</b>	<b>30</b>
Media		28.315	25.327	23.188	27.304	24.192
Varianza		146.759	139.309	84.402	74.085	40.475
Asimetría		0.154	1.076	0.295	0.146	0.329
Error de Estimación Promedio		10.453	8.808	8.064	6.982	4.850
Kurtosis		2.143	3.785	1.968	2.624	3.017
Mínimo		8.640	10.277	7.940	9.006	11.504
Máximo		54.603	57.997	41.435	46.038	40.267
Lim. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%		5.158	4.315	8.161	9.942	10.494
Lim. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%		51.472	46.338	38.214	44.667	37.889
Longitud Promedio del Int. De Conf.		<b>46.314</b>	<b>42.024</b>	<b>30.053</b>	<b>34.726</b>	<b>27.395</b>
Sesgo de Estimación		3.362	0.373	-1.766	2.351	-0.762

Elaboración: R. Plúa

**Tabla X**  
*Estimación por el Método Jacknife*  
**Medidas Descriptivas de los Estimadores para la Mediana de una Población Exponencial con parámetros  $\beta=36$  utilizando el Método Convencional**

<b>Medidas Descriptivas</b>	<b>Tamaño Muestral</b>	<b>8</b>	<b>10</b>	<b>16</b>	<b>20</b>	<b>30</b>
Media		28.315	25.327	23.188	27.304	24.192
Varianza		146.759	139.309	84.402	74.085	40.475
Asimetría		0.154	1.076	0.295	0.146	0.329
Error de Estimación Promedio		10.453	8.808	8.064	6.982	4.850
Kurtosis		2.143	3.785	1.968	2.624	3.017
Mínimo		8.640	10.277	7.940	9.006	11.504
Máximo		54.603	57.997	41.435	46.038	40.267
Lim. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%		0.000	0.000	0.000	0.000	3.072
Lim. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%		57.751	56.170	47.611	48.467	41.244
Longitud Promedio del Int. De Conf.		57.751	56.170	47.611	48.467	38.172
Sesgo de Estimación		3.362	0.373	-1.766	2.351	-0.762

Elaboración: R. Plúa

En la Tabla IX y en la Tabla X, podemos observar que para tamaños muestrales pequeños se logra reducir la longitud promedio de los intervalos de confianza al 95%.

### Primer y Último Estadístico de Orden

El primer estadístico de orden mediante la estimación Jackknife logra reducir el sesgo de estimación, la longitud promedio de los intervalos de confianza y el error promedio de estimación para las distribuciones: Beta con parámetros poblacionales  $\nu > 20$  y  $\omega > 0$ , Poisson  $\lambda > 20$ , Binomial Negativa  $r > 50$  y  $p < 0.7$  y Binomial  $p > 0.7$  en la mayoría de los casos, en los demás casos y para las demás distribuciones el método de estimación Jackknife no funciona puesto que se obtienen valores que no se encuentran en el dominio de las funciones de distribución para los estimadores del mínimo valor. Con el último estadístico de orden ocurre igual situación pero para las distribuciones: Beta con parámetros poblacionales  $\nu > 0$  y  $\omega > 20$ , y Binomial  $p < 0.4$ , en los demás casos el método Jackknife no funciona ya que se obtienen valores de los estimadores que no se encuentran en el dominio de las distribuciones.

En la Tabla XI y en la Tabla XII presentamos el caso de la distribución Binomial con  $r=50$  y  $p=0.5$ , donde podemos observar que la estimación Jackknife logra reducir la longitud promedio de los intervalos, el sesgo de estimación y el error promedio de estimación.

**Tabla XI**  
*Estimación por el Método Jackknife*  
Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Primer Estadístico de Orden de una Población Binomial Negativa con parámetros  $r=50$  y  $p=0.5$  utilizando el Método Jackknife

Medidas Descriptivas \ Tamaño Muestral	5	15	50	100	500
Media	84.324	81.776	76.944	74.908	72.584
Varianza	74.158	36.446	32.308	21.669	15.854
Asimetría	0.156	-0.032	-0.425	-0.745	-1.077
Error de Estimación Promedio	<b>34.324</b>	<b>31.776</b>	<b>26.944</b>	<b>24.908</b>	<b>22.584</b>
Kurtosis	3.280	2.481	2.858	3.024	3.723
Mínimo	<b>63.400</b>	<b>66.800</b>	<b>63.220</b>	<b>64.060</b>	<b>61.018</b>
Máximo	108.000	94.000	88.000	82.010	79.000
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	72.287	74.689	70.797	69.552	68.476
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	96.361	88.863	83.091	80.263	76.692
Longitud Promedio del Int. De Conf.	24.074	14.174	<b>12.293</b>	<b>10.711</b>	<b>8.216</b>
Sesgo de Estimación	<b>34.324</b>	<b>31.776</b>	<b>26.944</b>	<b>24.908</b>	<b>22.584</b>

Elaboración: R. Plúa

**Tabla XII**  
*Estimación por el Método Jackknife*  
Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Primer Estadístico de Orden de una Población Binomial Negativa con parámetros  $r=50$  y  $p=0.5$  utilizando el Método Convencional

Medidas Descriptivas \ Tamaño Muestral	5	15	50	100	500
Media	88.660	85.080	80.080	77.640	74.680
Varianza	38.229	18.238	13.096	7.827	5.936
Asimetría	0.659	0.232	0.003	-0.647	-0.606
Error de Estimación Promedio	38.660	35.080	30.080	27.640	24.680
Kurtosis	4.002	2.456	2.523	3.574	2.790
Mínimo	77.000	77.000	73.000	70.000	69.000
Máximo	108.000	94.000	88.000	83.000	79.000
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%	50.000	50.000	50.000	50.000	50.000
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%	68.549	62.812	57.093	55.483	54.776
Longitud Promedio del Int. De Conf.	18.549	12.812	7.093	5.483	4.776
Sesgo de Estimación	38.660	35.080	30.080	27.640	24.680

Elaboración: R. Plúa

En la Tabla XIII y en la Tabla XIV se muestra el último estadístico de orden para una distribución Beta con parámetros  $\omega=3$  y  $\nu=4$ , podemos apreciar que el método de estimación Jackknife proporciona valores para los estimadores mayores a uno como se puede constatar, los máximos valores observados de los estimadores para todos los tamaños muestrales son mayores a uno, los cuales no se encuentran definidos para la función de densidad Beta.

**Tabla XIII**  
*Estimación por el Método Jackknife*  
**Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Último Estadístico de Orden de una Población Beta con parámetros  $\nu=4$  y  $\omega=3$  utilizando el Método Convencional**

<i>Medidas Descriptivas</i>	<i>Tamaño Muestral</i>	5	15	50	100	500
Media		0.768	0.846	0.904	0.930	0.958
Varianza		0.013	0.003	0.002	0.001	0.000
Asimetría		-0.543	0.139	-0.481	-0.143	-0.195
Error de Estimación promedio		0.232	0.154	0.096	0.070	0.042
Kurtosis		2.844	2.858	2.563	1.986	1.860
Mínimo		0.470	0.701	0.810	0.872	0.928
Máximo		0.954	0.977	0.977	0.983	0.989
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%		0.432	0.673	0.827	0.870	0.924
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%		1	1	0.981	0.990	0.991
Longitud Promedio del Int. De Conf.		0.568	0.327	0.154	0.120	0.067
Sesgo de Estimación		-0.232	-0.154	-0.096	-0.070	-0.042

Elaboración: R. Plúa

**Tabla XIV**  
*Estimación por el Método Jackknife*  
**Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Último Estadístico de Orden de una Población Beta con parámetros  $\nu=4$  y  $\omega=3$  utilizando el Método Jackknife**

<i>Medidas Descriptivas</i>	<i>Tamaño Muestral</i>	5	15	50	100	500
Media		0.851	0.897	0.938	0.958	0.972
Varianza		0.024	0.007	0.003	0.002	0.001
Asimetría		-0.240	0.340	-0.140	0.073	-0.011
Error de Estimación promedio		0.170	0.115	0.067	0.050	0.030
Kurtosis		2.197	2.323	2.433	2.118	1.907
Mínimo		0.501	0.732	0.818	0.876	0.931
Máximo		1.099	1.068	1.037	1.044	1.017
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%		0.620	0.788	0.871	0.903	0.944
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%		1.082	1.007	1.006	1.014	1.000
Longitud Promedio del Int. De Conf.		0.463	0.219	0.135	0.111	0.056
Sesgo de Estimación		-0.149	-0.103	-0.062	-0.042	-0.028

Elaboración: R. Plúa

## Estimador del Coeficiente de Correlación

Para una distribución Normal Bivariada la longitud promedio de los intervalos de confianza al 95%, el sesgo de estimación y el error promedio de estimación, logró reducirse mediante el método de estimación convencional, las demás medidas descriptivas cuando aumentaba el tamaño muestral eran similares mediante los métodos de estimación trabajados, esto lo podemos apreciar en la Tabla XV y en la Tabla XVI.

**Tabla XV**  
*Estimación por el Método Jacknife*  
**Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Coeficiente de Correlación de una Población Normal Bivariada con parámetros  $\mu_1=3$ ,  $\mu_2=2$  y  $\rho=0.7$  utilizando el Método Convencional**

<i>Medidas Descriptivas</i>	<i>Tamaño Muestral</i>	5	15	50	100	500
Media		0.633	0.705	0.706	0.703	0.698
Varianza		0.109	0.020	0.006	0.004	0.000
Asimetría		-1.795	-0.603	-0.217	-0.521	-0.173
Error de Estimación promedio		0.228	0.116	0.059	0.046	0.015
Kurtosis		6.971	2.328	2.507	3.554	2.427
Mínimo		-0.661	0.365	0.532	0.525	0.658
Máximo		0.995	0.886	0.833	0.841	0.736
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%		-0.346	0.319	0.535	0.589	0.650
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%		0.963	0.894	0.822	0.790	0.741
Longitud Promedio del Int. De Conf.		1.309	0.575	0.287	0.201	0.090
Sesgo de Estimación		-0.067	0.005	0.006	0.003	-0.002

Elaboración: R. Piúa

**Tabla XVI**  
*Estimación por el Método Jacknife*  
**Medidas Descriptivas de los Estimadores para el Coeficiente de Correlación de una Población Normal Bivariada con parámetros  $\mu_1=3$ ,  $\mu_2=2$  y  $\rho=0.7$  utilizando el Método Jacknife**

<i>Medidas Descriptivas</i>	<i>Tamaño Muestral</i>	5	15	50	100	500
Media		0.400	0.692	0.702	0.701	0.698
Varianza		0.199	0.022	0.006	0.004	0.000
Asimetría		-0.529	-0.613	-0.223	-0.505	-0.172
Error de Estimación promedio		0.411	0.122	0.060	0.046	0.015
Kurtosis		2.291	2.285	2.530	3.516	2.430
Mínimo		-0.630	0.347	0.523	0.525	0.657
Máximo		0.989	0.885	0.828	0.840	0.736
Lím. Inf. Del Int. De Conf. Al 95%		-0.713	0.266	0.525	0.584	0.650
Lím. Sup. Del Int. De Conf. Al 95%		0.975	0.886	0.820	0.789	0.740
Longitud Promedio del Int. De Conf.		1.687	0.620	0.295	0.205	0.090
Sesgo de Estimación		-0.300	-0.008	0.002	0.001	-0.002

Elaboración: R. Piúa

## CONCLUSIONES

1. Analizando el estimador de la media muestral se concluye que para las distribuciones continuas y discretas los dos métodos de estimación trabajados proporcionan las mismas medidas descriptivas con una precisión de tres dígitos como lo son: la media, la varianza, el error promedio de estimación, coeficiente de kurtosis, coeficiente de asimetría, mínimo y máximo valor observados de los estimadores, límite superior e inferior de los intervalos de confianza al 95% para la media poblacional, longitud promedio de los intervalos de confianza y sesgo de estimación, sin embargo para tamaños muestrales menores a 30 la longitud promedio de los intervalos de confianza es menor al utilizar el método de estimación Jacknife frente al método convencional de estimación para la media poblacional.

2. Al utilizar el estimador de máxima verosimilitud para la varianza tanto para distribuciones continuas como para distribuciones discretas en la mayoría de los casos, la estimación Jackknife proporciona valores de mayor magnitud para la varianza, error de estimación promedio, longitud promedio de los intervalos de confianza al 95%, y sesgo de estimación; y a medida que aumenta el tamaño muestral todas las medidas descriptivas para la distribución de los estimadores son similares en magnitud al utilizar los dos métodos de estimación. Con la distribución discreta Poisson para  $\lambda > 7$ , el sesgo de estimación se reduce en la mayoría de los casos mediante la estimación Jackknife frente a la estimación convencional.

3. El estimador insesgado para la varianza obtenido con los métodos de estimación trabajados proporcionan con tres dígitos de precisión las mismas medidas descriptivas para los estimadores, tanto para distribuciones discretas como para distribuciones continuas, al igual que en el caso del estimador para la media, la longitud de los intervalos de confianza para tamaños muestrales menores a 30 es menor mediante la estimación Jackknife frente a la estimación convencional.

4. El estimador insesgado de la varianza y el estimador de la media poblacional que también es insesgado para distintos valores de los parámetros poblacionales en distribuciones continuas y discretas, mediante el método de estimación Jackknife y el método de estimación convencional presentan la misma situación, es decir, proporcionan los mismos valores para los estimadores y por tanto las mismas medidas descriptivas, a excepción de la longitud promedio de los intervalos de confianza al 95% para tamaños muestrales menores a 30, que logra reducirse mediante el método de estimación Jackknife frente al método de estimación convencional.

5. Con el estimador de la mediana poblacional obtenida para distribuciones continuas como son la Beta y Uniforme y para distintos valores de los parámetros poblacionales de las mismas, podemos concluir que para tamaños muestrales impares el método de estimación Jackknife obtiene valores del estimador que no se encuentran en los dominios de las funciones de densidad respectivas. Sin embargo para tamaños muestrales pares el método de estimación Jackknife y el método de estimación convencional proporcionan las medidas descriptivas coincidentes con tres dígitos de precisión, además para tamaños muestrales menores a 30 se logra reducir la longitud promedio de los intervalos de confianza al 95%. Para la distribución Normal se concluye que el método Jackknife funciona, puesto que, la función de densidad Normal está definida en el intervalo  $(-\infty, +\infty)$ .

6. Para el primer estadístico de orden para distintos valores de los parámetros poblacionales de las distribuciones Uniforme y Exponencial el método de estimación Jackknife no funciona puesto que obtiene valores de los estimadores que no se encuentran en los dominios de las funciones de densidad. En la distribución Beta para el parámetro poblacional  $\nu > 20$  y  $\omega > 0$  el método de estimación Jackknife logra reducir el error promedio de estimación y el sesgo de estimación.

7. El primer estadístico de orden mediante el método de estimación Jackknife para distintos valores de los parámetros poblacionales de la distribución Hipergeométrica proporciona valores para los estimadores que no se encuentran en el dominio de la función de probabilidad. Con la distribución Poisson el método de estimación Jackknife para  $\lambda > 20$  funciona y además logra reducir el sesgo de estimación y el error de estimación promedio. Analizando la distribución Binomial el método de estimación Jackknife funciona para  $p > 0.7$  además logra reducir el sesgo de estimación y error de estimación promedio. En cuanto a la distribución Binomial Negativa el método de estimación Jackknife funciona para  $r > 50$  y  $p < 0.7$ , logra reducir el sesgo de estimación, error promedio de estimación y la longitud promedio de los intervalos de confianza al 95%.

8. El último estadístico de orden para la distribución uniforme y con distintos valores de los parámetros poblacionales mediante el método de estimación Jackknife en todos los casos proporciona valores que no se encuentran en el dominio de la función de densidad, para la población Beta para los parámetros poblacionales  $\omega > 20$  y  $\nu > 0$ , el método de estimación Jackknife funciona y las medidas descriptivas como el error promedio de estimación, sesgo de estimación y longitud promedio de los intervalos de confianza al 95% logra reducirse.

9. Analizando el último estadístico de orden para distintos valores de los parámetros poblacionales de la distribución Hipergeométrica el método de estimación Jackknife no funciona en ningún caso; con la distribución Binomial para el parámetro poblacional  $p < 0.4$  el sesgo de estimación, el error de

estimación promedio y la longitud promedio de los intervalos de confianza al 95% logra reducirse mediante la estimación Jackknife frente a la estimación convencional.

10. Para el estimador del coeficiente de correlación de un vector Normal Bivariado y para distintos valores de los parámetros poblacionales, el método de estimación convencional logró reducir la longitud promedio de los intervalos de confianza, el sesgo de estimación y el error de estimación promedio, las restantes medidas descriptivas tendían a ser similares en magnitud a medida que aumentaba el tamaño muestral mediante los dos métodos de estimación.

11. Para todos los estimadores trabajados las medidas descriptivas obtenidas eran similares en magnitud a medida que aumentaba el tamaño muestral.

### REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. **R. PLÚA**, (2003), "*Estimadores Jackknife para distintos tipos de población*", (Tesis, Instituto de Ciencias Matemáticas, Escuela Superior Politécnica del Litoral), Guayaquil-Ecuador.
2. **MARTÍNEZ, W. & MARTÍNEZ, A.**, (2002), "*Computational Statistics Handbook with MATLAB*", Chapman & Hall/CRC, United States of America.
3. **PÉREZ, C.**, (2000), "*Técnicas de Muestreo-Estadística*", Grupo editor Alfaomega, Madrid - España.
4. **BRANDT, S.**, (1999), "*Data Analysis and Statistical & Computational Methods*", Springer, New York Inc., United States of America.
5. **GARCÍA, J., RODRÍGUEZ, J. Y BRÁZALEZ, A.**, (1999), "*Aprenda Matlab como si estuviera en primero*", Universidad de Navarra, San Sebastián
6. **MENDENHALL, W.** (1994). "*Estadística Matemática con Aplicaciones*", Grupo Editorial Iberoamérica, México - México.
7. **ROBERT R. S. & JAMES R. F.**,(1994) "*Biometry*" W. H. Freeman & Co., New York, United States of America.
8. **EVANS, M. & HOSTINGS, N.** (1993) "*Statistical Distributions*" John Wiley & Sans, Inc, Ottawa - Canada.
9. **LAW & KELTON**, (1991), "*Simulation Model and Analysis*", Mc. Graw Hill, Bogotá-Colombia.
10. **MURRAY, R. S.**,(1982), "*Teoría y Problemas de Estadística*", Mc. Graw Hill, Bogotá-Colombia
11. **PARZEN, E.** (1972), "*Procesos Estocásticos*". Paraninfo, Madrid - España.
12. **PAPOULIS**, (1965). "*Probabilidad y Variables Aleatorias*", segunda edición, Mc-Graw Hill, Tokio - Japón.
13. **QUENOUILLE, M.**, (1956), "*Notes on bias in estimation*", *Biométrie* 52, 647-649.
14. **QUENOUILLE, M.**, (1949), "*Aproximate tests of correlation in time series*", *Journal Royal Statistical Society B*11, 68-84.