RUBRICA EXAMEN FINAL ALGEBRA LINEAL FEBRERO 2012



|  |
| --- |
| **Desempeño** |
| **Insuficiente** | **Regular** | **Satisfactorio** | **Excelente** |
| Califica incorrectamente o deja el espacio vacío. | Identifica que la definición es incorrecta pero se equivoca al identificar el error | La corrección mejora la definición pero no es completa | Indica la corrección de manera correcta. |
| **0** | **1 - 4** | **5 - 8** | **9-10** |

****

|  |
| --- |
| **Desempeño** |
| **Insuficiente** | **Regular** | **Satisfactorio** | **Excelente** |
| Califica incorrectamente o deja el espacio vacío | Resuelve la definición para matriz diagonalizable | Falta precisión al corregir. | Indica las correcciones de manera correcta. |
| **0** | **1 - 4** | **5 - 8** | **9-10** |

Tema 2 (10 puntos)

Sean $V$ y $W$ dos espacios vectoriales de dimensión finita tal que $\left\{v\_{1}, v\_{2},… ,v\_{k}, v\_{k+1}, v\_{k+2},…,v\_{n}\right\}$ es una base de $V$. Sea $T:V\rightarrow W$ una transformación lineal. Demuestre que, Si $\left\{v\_{1}, v\_{2},…,v\_{k}\right\}$ es una base del $Ker(T)$, entonces $\left\{ T\left(v\_{k+1}\right),T\left(v\_{k+2}\right)…,T\left(v\_{n}\right)\right\}$ es una base de la $Im (T)$.

$$∀x\in V ∃α\_{i}\in R x=α\_{1}v\_{1}+α\_{2}v\_{2}+…+α\_{k}v\_{k}+α\_{k+1}v\_{k+1}+α\_{k+2}v\_{k+2}+…+α\_{n}v\_{n}$$

$$T\left(x\right)=T\left(α\_{1}v\_{1}+α\_{2}v\_{2}+…+α\_{k}v\_{k}+α\_{k+1}v\_{k+1}+α\_{k+2}v\_{k+2}+…+α\_{n}v\_{n}\right)$$

$$=T\left(α\_{1}v\_{1}\right)+T\left(α\_{2}v\_{2}\right)+…+T\left(α\_{k}v\_{k}\right)+T\left(α\_{k+1}v\_{k+1}\right)+T\left(α\_{k+2}v\_{k+2}\right)+…+T\left(α\_{n}v\_{n}\right)$$

$$=α\_{1}T\left(v\_{1}\right)+α\_{2}T\left(v\_{2}\right)+…+α\_{k}T\left(v\_{k}\right)+α\_{k+1}T\left(v\_{k+1}\right)+α\_{k+2}T\left(v\_{k+2}\right)+…+α\_{n}T\left(v\_{n}\right)$$

Pero se conoce que $T\left(v\_{i}\right)=0\_{w} ∀i=1,… ,k$ por ser elementos del $Ker(T)$, entonces:

$$T(x)=α\_{k+1}T\left(v\_{k+1}\right)+α\_{k+2}T\left(v\_{k+2}\right)+…+α\_{n}T\left(v\_{n}\right)$$

Dado que $T\left(x\right)\in Im(T)$ entonces $Im\left(T\right)=gen\left\{ T\left(v\_{k+1}\right),T\left(v\_{k+2}\right)…,T\left(v\_{n}\right)\right\}$

$$α\_{k+1}T\left(v\_{k+1}\right)+α\_{k+2}T\left(v\_{k+2}\right)+…+α\_{n}T\left(v\_{n}\right)=0\_{w}$$

$$T\left(α\_{k+1}v\_{k+1}+α\_{k+2}v\_{k+2}+…+α\_{n}v\_{n}\right)=0\_{w}$$

Por lo que:

$$α\_{k+1}v\_{k+1}+α\_{k+2}v\_{k+2}+…+α\_{n}v\_{n} \in Ker(T)$$

Al pertenecer al $Ker(T)$, entonces se podrá expresar como combinación lineal de la base del subespacio.

$$α\_{k+1}v\_{k+1}+α\_{k+2}v\_{k+2}+…+α\_{n}v\_{n}=α\_{1}v\_{1}+α\_{2}v\_{2}+…+α\_{k}v\_{k}$$

$$α\_{k+1}v\_{k+1}+α\_{k+2}v\_{k+2}+…+α\_{n}v\_{n}+(-α\_{1})v\_{1}+(-α\_{2})v\_{2}+…+(-α\_{k})v\_{k}=0\_{V}$$

Dado que $\left\{v\_{1}, v\_{2},… ,v\_{k}, v\_{k+1}, v\_{k+2},…,v\_{n}\right\}$ es una base de $V$, entonces la combinación lineal de estos vectores igualados al neutro tiene solución única, es decir,

$$α\_{i}=0 ∀i=1,….,k,k+1, k+2,…., n$$

Por lo que el conjunto $\left\{ T\left(v\_{k+1}\right),T\left(v\_{k+2}\right)…,T\left(v\_{n}\right)\right\}$ es linealmente independiente en $W$.

Por lo tanto es una base de $W$.

|  |
| --- |
| **Desempeño** |
| **Insuficiente** | **Regular** | **Satisfactorio** | **Excelente** |
| No realiza procesos coherentes o deja el espacio vacío. | Identifica que debe probar la independencia lineal y la capacidad de generar la imagen  | Prueba correctamente una de las propiedades pero falla en la otra | Realiza el ejercicio de manera correcta. |
| **0** | **1 - 4** | **5 - 8** | **9-10** |





|  |
| --- |
| **Desempeño** |
| **Insuficiente** | **Regular** | **Satisfactorio** | **Excelente** |
| No realiza procesos coherentes o deja el espacio vacío. | Particulariza los vectores para verificar la linealidad  | Aplica la definición de transformación lineal correctamente, pero con error de cálculos o no concluye.  | Realiza el ejercicio de manera correcta. |
| **0** | **1 - 4** | **5 - 8** | **9-10** |



|  |
| --- |
| **Desempeño** |
| **Insuficiente** | **Regular** | **Satisfactorio** | **Excelente** |
| No realiza procesos coherentes o deja el espacio vacío. | Aplica T a la base canónica | La matriz asociada tiene algún error de cálculo  | Realiza el ejercicio de manera correcta. |
| **0** | **1 - 4** | **5 - 8** | **9-10** |



|  |
| --- |
| **Desempeño** |
| **Insuficiente** | **Regular** | **Satisfactorio** | **Excelente** |
| No realiza procesos coherentes o deja el espacio vacío. | Aplica correctamente la definición de nucleo de T | Aplica el concepto de núcleo, pero al resolver comete errores. | Realiza el ejercicio de manera correcta. |
| **0** | **1 - 4** | **5 - 8** | **9-10** |



|  |
| --- |
| **Desempeño** |
| **Insuficiente** | **Regular** | **Satisfactorio** | **Excelente** |
| No realiza procesos coherentes o deja el espacio vacío. | Determina el rango de T o una base para la imagen de T. | Demuestra conocer la definición de suma directa o el teorema equivalente pero tiene errores de calculo | Realiza el ejercicio de manera correcta. |
| **0** | **1 - 4** | **5 - 8** | **9-10** |





|  |
| --- |
| **Desempeño** |
| **Insuficiente** | **Regular** | **Satisfactorio** | **Excelente** |
| No realiza procesos coherentes o deja el espacio vacío. | Asocia la nulidad de T con la existencia de la inversa | Respuesta correcta pero alguna afirmación errónea. | Realiza el ejercicio de manera correcta. |
| **0** | **1 - 4** | **5 - 8** | **9-10** |

Tema 4 (10 puntos)

1. Considere la ecuación de una forma cuadrática dada por:

$$5x^{2}+6xy+5y^{2}-16x-16y-16=0$$

Consideremos la forma cuadrática:

$$f\left(x,y\right)=5x^{2}+6xy+5y^{2}$$

 La matriz asociada a la forma cuadrática $f$ con respecto a la base canónica está dada por:

$$A=\left(\begin{matrix}5&3\\3&5\end{matrix}\right)$$

Determinemos los valores propios de $A$:

$$det\left(A-λI\right)=0$$

$$\left(5-λ\right)^{2}-9=0$$

Entonces los valores propios de $A $ son $λ\_{1}=8 λ\_{2}=2$

Los espacios propios asociados a cada valor propio, así como sus respectivas bases ortonormales están dados por:

$E\_{λ=8}=\left\{\left(a,b\right):a=b;b ϵ R\right\}$; $Base E\_{λ=8}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1,1\right)\right\}$

$E\_{λ=2}=\left\{\left(a,b\right):a=-b;b ϵ R\right\}$; $Base E\_{λ=2}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-1,1\right)\right\}$

Por lo tanto, la matriz que diagonaliza ortogonalmente a $A$ está dada por:

$$Q=\left(\begin{matrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{matrix}\right)$$

Por lo que la forma cuadrática $f$ se puede expresar de la forma:

$$f'\left(x^{'},y^{'}\right)=8x^{'}^{2}+2y^{'}^{2}$$

Adicionalmente se conoce que:

$$\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}x^{'}\\y^{'}\end{matrix}\right)$$

Por lo que:

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}x^{'}-\frac{1}{\sqrt{2}}y^{'}$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}x^{'}+\frac{1}{\sqrt{2}}y^{'}$$

Remplazando en la expresión dada se tiene:

$$8x^{'}^{2}+2y^{'}^{2}-16\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x^{'}-\frac{1}{\sqrt{2}}y^{'}\right)-16\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x^{'}+\frac{1}{\sqrt{2}}y^{'}\right)-16=0$$

|  |
| --- |
| **Desempeño** |
| **Insuficiente** | **Regular** | **Satisfactorio** | **Excelente** |
| No realiza procesos coherentes o deja el espacio vacío. | Determine la forma cuadrática correspondiente y los valores y vectores propios de la matriz de la forma cuadrática | Reconoce la sustitución apropiada pero tiene errores de cuentas | Realiza el ejercicio de manera correcta. |
| **0** | **1 - 4** | **5 - 8** | **9-10** |



Simplificando:

$$4x^{'}^{2}+y^{'}^{2}-8\sqrt{2}x^{'}-8=0$$

$$4\left(x^{'}-\sqrt{2}\right)^{2}+y^{'}^{2}=16$$

$$\frac{\left(x^{'}-\sqrt{2}\right)^{2}}{4}+\frac{y^{'}^{2}}{16}=1$$

Lo cual representa gráficamente una elipse con centro en el punto $\left(x^{'},y^{'}\right)=\left(\sqrt{2},0\right)$, eje mayor paralelo al eje $y^{'}$ con una longitud del semieje mayor de $a=4$ y longitud del semieje menor de $b=2$.

Para determinar la medida del ángulo de rotación de los ejes originales, se conoce que:

$$\left(\begin{matrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}Cos(θ)&-Sen(θ)\\Sen(θ)&Cos(θ)\end{matrix}\right)$$

Por lo tanto, $θ=\frac{π}{4}$

Con base en lo anterior, la gráfica de la forma cuadrática se muestra a continuación:



|  |
| --- |
| **Desempeño** |
| **Insuficiente** | **Regular** | **Satisfactorio** | **Excelente** |
| No realiza procesos coherentes o deja el espacio vacío. | Halla la matriz Q, reconoce el ángulo de rotación | Además escribe de manera correcta la ecuación de la cónica pero no realiza el bosquejo correcto. | Realiza el ejercicio de manera correcta. |
| **0** | **1 - 4** | **5 - 8** | **9-10** |

****

Derivando y evaluando en 1, queda: 2a + b = 0; de donde b=-2a. Por lo tanto una base de H es:

Base de H = { x2 – 2x, 1}

|  |
| --- |
| **Desempeño** |
| **Insuficiente** | **Regular** | **Satisfactorio** | **Excelente** |
| No realiza procesos coherentes o deja el espacio vacío. | Deriva erróneamente y por ello la base es incorrecta. | Deriva correctamente, pero expresa la base de manera errónea. | Realiza el ejercicio de manera correcta. |
| **0** | **1 - 4** | **5 - 8** | **9-10** |

****

****

|  |
| --- |
| **Desempeño** |
| **Insuficiente** | **Regular** | **Satisfactorio** | **Excelente** |
| No realiza procesos coherentes o deja el espacio vacío. | Realiza erróneamente el producto interno. | Obtiene el sistema homogéneo de manera correcta, pero presenta errores en la respuesta. | Realiza el ejercicio de manera correcta. |
| **0** | **1 - 4** | **5 - 8** | **9-10** |

****

****

|  |
| --- |
| **Desempeño** |
| **Insuficiente** | **Regular** | **Satisfactorio** | **Excelente** |
| No realiza procesos coherentes o deja el espacio vacío. | Trata de calcular la proyección del vector dado pero lo realiza con errores. | Calcula una de las proyecciones del vector correctamente, pero no comete algún error al calcular la segunda proyección. | Realiza el ejercicio de manera correcta. |
| **0** | **1 - 4** | **5 - 8** | **9-10** |

 **TEMA 6**

Dada la matriz $A=\left[\begin{matrix}1&a&a\\-1&1&-1\\1&0&2\end{matrix}\right]$ , $a\in R$.

1. Demostrar que los valores propios de $A$ son independientes del valor del parámetro.
2. Demostrar que $a=0$ si y solo si la matriz $A$ es diagonalizable.
3. Determinar la matriz $C$ tal que $D=C^{-1}AC$.

**SOLUCION**

1. Para hallar los valores propios de $A$, utilizamos la ecuación característica $det⁡(A-λI)=0$

$$\left|\begin{matrix}1-λ&a&a\\-1&1-λ&-1\\1&0&2-λ\end{matrix}\right|=0$$

$$\left(1\right)\left|\begin{matrix}a&a\\1-λ&-1\end{matrix}\right|+\left(2-λ\right)\left|\begin{matrix}1-λ&a\\-1&1-λ\end{matrix}\right|=0$$

$$-a-a\left(1-λ\right)+\left(2-λ\right)\left[\left(1-λ\right)^{2}+a\right]=0$$

$$-a\left(2-λ\right)+\left(2-λ\right)\left[\left(1-λ\right)^{2}+a\right]=0$$

$$\left(2-λ\right)\left[-a+\left(1-λ\right)^{2}+a\right]=0$$

$$\left(2-λ\right)\left(1-λ\right)^{2}=0$$

$$λ\_{1}=2 , λ\_{2}=1 , ∀\_{a\in R} $$

$$α\_{1}=1 , α\_{2}=2 $$

Es decir que los valores propios de la matriz $A$ son independientes del parámetro.

|  |
| --- |
| **Desempeño** |
| **Insuficiente** | **Regular** | **Satisfactorio** | **Excelente** |
| No realiza procesos coherentes o deja el espacio vacío. | Plantea la ecuación característica para determinar los valores propios | Al resolver la ecuación no logra eliminar el parámetro | Realiza el ejercicio de manera correcta. |
| **0** | **1 - 4** | **5 - 8** | **9-10** |

1. Para que $A$ sea diagonalizable, se debe cumplir que:

$α\_{1}=dim\left(ℇ\_{λ\_{1}=2}\right)$ $∧$ $α\_{2}=dim\left(ℇ\_{λ\_{2}=1}\right)$

Para $λ\_{1}=2$ no hay problema puesto que $α\_{1}=1$ y además $1\leq dim\left(ℇ\_{λ\_{1}=2}\right)\leq \left(α\_{1}=1\right)$, de ahí que $α\_{1}=dim\left(ℇ\_{λ\_{1}=2}\right)$.

Para $λ\_{2}=1$ , tenemos:

$$ℇ\_{λ\_{2}=1}=Nu\left[\left(A-I\right)\right]=Nu\left[\left(\begin{matrix}0&a&a\\-1&0&-1\\1&0&1\end{matrix}\right)\right]=\left\{\left(\begin{matrix}0&a&a\\-1&0&-1\\1&0&1\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}x\_{1}\\x\_{2}\\x\_{3}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right)\right\}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones homogéneo por el método de Gauss, tenemos:

$$\left(\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right) ∼ \left(\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right) ∼ \left(\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right) $$

De ahí que:

$$ℇ\_{λ\_{2}=1}=\left\{\begin{matrix}\left\{x\_{3}\in R\right\}&, cuando a\ne 0\\ \left\{x\_{2}, x\_{3}\in R\right\}&,cuando a=0\end{matrix}\right.$$

Por lo tanto, $A$ es diagonalizable si y solo si $a=0$; puesto que $dim\left(ℇ\_{λ\_{2}=1}\right)=2=α\_{2}$.

|  |
| --- |
| **Desempeño** |
| **Insuficiente** | **Regular** | **Satisfactorio** | **Excelente** |
| No realiza procesos coherentes o deja el espacio vacío. | Determina la multiplicidad algebraica de los valores propios | Asocia correctamente la multiplicidad geométrica con la posibilidad de diagonalización  | Realiza el ejercicio de manera correcta. |
| **0** | **1 - 4** | **5 - 8** | **9-10** |

1. Para hallar la matriz diagonalizante, solo falta determinar el vector propio de $A$ asociado a $λ\_{1}=2$.

$$ℇ\_{λ\_{1}=2}=Nu\left[\left(A-2I\right)\right]=Nu\left[\left(\begin{matrix}-1&0&0\\-1&-1&-1\\1&0&0\end{matrix}\right)\right]=\left\{\left(\begin{matrix}-1&0&0\\-1&-1&-1\\1&0&0\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}x\_{1}\\x\_{2}\\x\_{3}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right)\right\}$$

$$ℇ\_{λ\_{1}=2}=\left\{x\_{3}\in R\right\}$$

Por lo tanto $C=\left(\begin{matrix}0&-1&0\\-1&0&1\\1&1&0\end{matrix}\right)$ es la matriz que diagonaliza a la matriz $A$ con forma diagonal $D=\left(\begin{matrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\right)$.

|  |
| --- |
| **Desempeño** |
| **Insuficiente** | **Regular** | **Satisfactorio** | **Excelente** |
| No realiza procesos coherentes o deja el espacio vacío. | Calcula los vectores propios  | Intenta determinar la matriz pedida con los vectores calculados | Realiza el ejercicio de manera correcta. |
| **0** | **1 - 4** | **5 - 8** | **9-10** |