ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL
PROGRAMA DE TECNOLOGIA EN MECANICA
EXAMEN DE MEJORAMIENTO DE MATEMATICAS I
Versión 1

FECHA: 13 DE FEBRERO DE 2012 **PARALELO: 1**

1. (10 puntos c/u) Hallar la integral indefinida de:

a) $\int\left(\frac{2x+1}{x^2+2x-3}\right)dx$

$$\int\frac{2x+1}{x^2+2x-1}dx=\int\frac{2x+1}{(x+3)(x-1)}dx=\int\frac{A}{x+3}dx+\int\frac{B}{x-1}dx$$

$$\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+B(x+3)}{(x+3)(x-1)}=\frac{Ax-A+Bx+3B}{(x+3)(x-1)}=\frac{(A+B)x+(3B-A)}{(x+3)(x-1)}$$

$$\begin{array}{l}A+B=2\\-A+3B=1\end{array}\rightarrow\begin{array}{l}A=2-B\\-2+B+3B=1\end{array}\rightarrow\begin{array}{l}B=\frac{3}{4}\\A=\frac{5}{4}\end{array}$$

$$\int\frac{5/4}{x+3}dx+\int\frac{3/4}{x-1}dx=\frac{5}{4}\ln(x+3)+\frac{3}{4}\ln(x-1)+c$$

b) $\int\left(\frac{x}{2}\ln x\right)dx=\frac{1}{2}\int x\ln x dx$

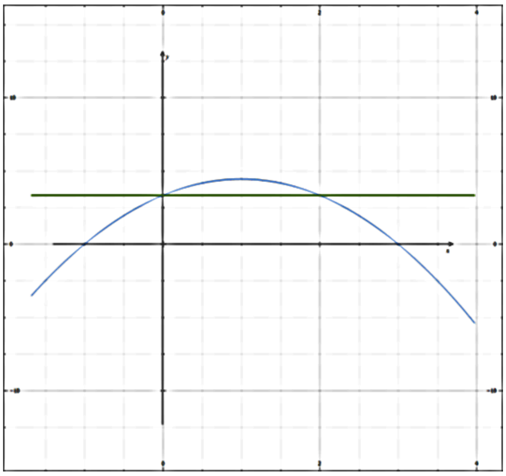
$$u=\ln x\rightarrow du=\frac{dx}{x}$$

$$dv=x\rightarrow v=\frac{x^2}{2}$$

$$\frac{x^2}{2}\ln x-\int\left(\frac{\cancel{x^2}}{2}\right)\frac{dx}{\cancel{x}}=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int xdx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2}\int x\ln xdx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}\right)=\frac{1}{4}\left(x^2\ln x-\frac{x^2}{2}\right)+c$$

2. (20 puntos) Hallar el área comprendida entre la parábola $y = 6+4x - 2x^2$ y la recta $y = 6$
Nota: Haga un gráfico en el plano cartesiano.



Valores de x para $y = 6$

$$6+4x-2x^2=6 \to -2x^2+4x=0 \to x-2=0 \to \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{matrix}$$

$$A = \int [f(x)-g(x)]dx$$

$$A = \int_0^2 \left(6+4x-2x^2-6\right)dx = \int_0^2 \left(4x-2x^2\right)dx = \left[2x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^2$$

$$A = \frac{8}{3}\ u^2$$

3. (10 puntos) Hallar la solución de la siguiente ecuación logarítmica:

$$\log(x) - \log(3x+1) = 1$$

$$\log\frac{x}{3x+1} = 1 \to \frac{x}{3x+1} = 10$$

$$x = 10(3x+1) \to x = 30x+10$$

$$-10 = 29x \to x = -\frac{10}{29}$$

4. (10 puntos) Hallas la solución de la siguiente ecuación exponencial:

$$e^x - 16e^{-x} - 2 = 0$$

cambio de variable: $u = e^x$

$$\to u - \frac{16}{u} - 2 = 0 \to \frac{u^2 - 16 - 2u}{u} = 0 \to u^2 - 2u - 16 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática por $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; tenemos:

$$\begin{matrix} u_1 = 5{,}123 \\ u_2 = -3{,}123 \end{matrix} \to \begin{matrix} e^x = 5{,}123 \to x = \ln(5{,}123) = 1{,}633 \\ e^x = -3{,}123 \to x = \ln\left(-3{,}123\right);\ \text{no tiene solución} \end{matrix}$$

5. (10 puntos) Calcular el límite de la siguiente función: $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{3x^3 - 30x^2 + 60x + 75}{3x^2 - 14x - 5}\right)$

Al calcular el límite se tiene una indeterminación, por tanto se debe reducir la expresión que para este caso es posible pues ambos terminos son factorizables:

$$\frac{3x^3 - 30x^2 + 60x + 75}{3x^2 - 14x - 5} = \frac{3\cancel{(x-5)}\left(x^2 - 5x - 5\right)}{\cancel{(x-5)}(3x+1)}$$

$$3\lim_{x\to 5}\left(\frac{x^2 - 5x - 5}{3x+1}\right) = -\frac{15}{16}$$

6. (10 puntos) Encuentre la derivada de la siguiente función: $y=\frac{\sqrt{5x-1}}{2x}$

$$y=\frac{\sqrt{5x-1}}{2x}$$

$$y'=\frac{2x\frac{d}{dx}(5x-1)^{\frac{1}{2}}-(5x-1)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(2x)}{4x^2}=\frac{\cancel{2}x\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)5(5x-1)^{-\frac{1}{2}}-2(5x-1)^{\frac{1}{2}}}{4x^2}$$

$$y'=\frac{\frac{5x-2(5x-1)}{(5x-1)^{1/2}}}{4x^2}=\frac{2-5x}{4x^2\sqrt{5x-1}}$$

7. (10 puntos) Un barco **A** navega hacia el sur a una velocidad de 16 millas por hora, y otro **B**, situado 32 millas al sur de **A** lo hace hacia el este con una velocidad de 12 millas por hora. Hallar:

a) La velocidad en que dichos barcos se aproximan o separaran al cabo de una hora de haberse iniciado el movimiento,

b) El momento en que dejan de aproximarse y comienzan a separarse y la distancia en que se encuentran cuando comienzan a separarse.

$$x_A=32-16t \quad ; \quad x_B=12t$$

$$y=\sqrt{x_A^2+x_B^2}=\sqrt{(32-16t)^2+(12t)^2}=\sqrt{1024-1024t+256t^2+144t^2}$$

$$y=\sqrt{1024-1024t+400t^2}=\sqrt{8}\sqrt{128-128t+50t^2}$$

$$\text{velocidad es } v=\frac{dy}{dt}$$

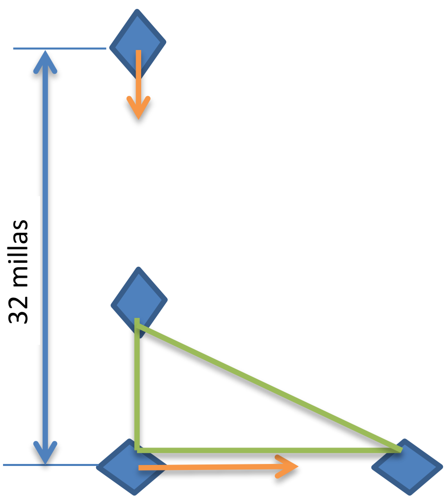
$$\frac{dy}{dt}=\sqrt{8}\frac{d}{dt}\left(128-128t+50t^2\right)^{1/2}=\sqrt{8}\left(128-128t+50t^2\right)^{-1/2}(-128+100t)=\frac{\sqrt{8}(100t-128)}{2\left(128-128t+50t^2\right)^{1/2}}$$

$$v(1)=\frac{\sqrt{8}(100-128)}{2\sqrt{128-128+50}}=-5,6\text{ mi/h}$$

$$b)\quad \frac{dy}{dt}=0\rightarrow\frac{\sqrt{8}(100t-4)}{\left(128-128t+50t^2\right)^{1/2}}=0$$

$$\rightarrow\sqrt{8}(100t-128)=0\rightarrow t=\frac{128}{100}=1,28\ hora$$

$$y=\sqrt{8}\sqrt{128-128(1,28)+50(1,28)^2}=19,2\text{ millas}$$



8. (10 puntos) Encuentre la derivada de la siguiente función: $y = 2x^3 - \frac{1}{3}\sin(5x^3 - 2) + \frac{2}{x}$

$$y = 2x^3 - \frac{1}{3}\sin(5x^3 - 2) + \frac{2}{x}$$

$$y' = 6x - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{3}\left(15x^2\right)\cos\left(5x^3 - 2\right)$$

$$y' = 6x - \frac{2}{x^2} - 5x^2\cos\left(5x^3 - 2\right)$$

1. $\int \frac{d}{dx}[f(x)]\,dx = f(x) + C$
2. $\int (u+v)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx$
3. $\int au\,dx = a\int u\,dx$, siendo a una constante
4. $\int u^m\,du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C, \quad m \neq -1$
5. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$
6. $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1$
7. $\int e^u\,du = e^u + C$
8. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$
9. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$
10. $\int \operatorname{tag} u\,du = \ln|\sec u| + C$
11. $\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$
12. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \operatorname{tag} u| + C$
13. $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$
14. $\int \sec^2 u\,du = \operatorname{tag} u + C$
15. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$
16. $\int \sec u \operatorname{tag} u\,du = \sec u + C$

FORMULAS DE DERIVACION. En las fórmulas siguientes u, v y w son funciones derivables de x.

1. $\frac{d}{dx}(c) = 0$, siendo c una constante
2. $\frac{d}{dx}(x) = 1$
3. $\frac{d}{dx}(u+v+\cdots) = \frac{d}{dx}(u) + \frac{d}{dx}(v) + \cdots$
4. $\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{d}{dx}(u)$
5. $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{d}{dx}(v) + v\frac{d}{dx}(u)$
6. $\frac{d}{dx}(uvw) = uv\frac{d}{dx}(w) + uw\frac{d}{dx}(v) + vw\frac{d}{dx}(u)$
7. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{1}{c}\cdot\frac{d}{dx}(u), \quad c \neq 0$
8. $\frac{d}{dx}\left(\frac{c}{u}\right) = c\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{c}{u^2}\cdot\frac{d}{dx}(u)$, $u \neq 0$
9. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{d}{dx}(u) - u\frac{d}{dx}(v)}{v^2}, \quad v \neq 0$
10. $\frac{d}{dx}(x^m) = mx^{m-1}$
11. $\frac{d}{dx}(u^m) = mu^{m-1}\frac{d}{dx}(u)$