EXAMEN DE CONTROL AUTOMÁTICO
MEJORAMIENTO
SEPTIEMBRE 11 DE 2012

PRIMER TEMA: (25 puntos)

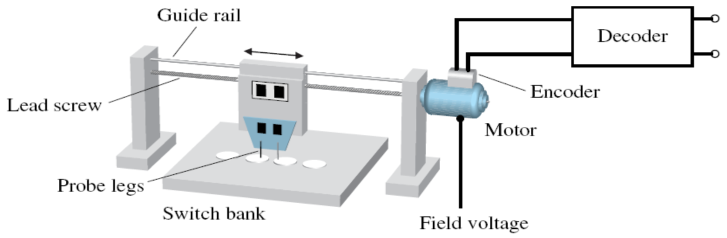
Para el sistema con ganancia de lazo: $$GH(s) = \frac{K(s^2+4s+8)}{s^2(s-1)}$$

a) (12p) Dibuje el Lugar Geométrico de las Raíces para variación del parámetro 0 < K < inf, con todos los detalles posibles.
b) (5p) Determine el rango de valores de K para el cual el sistema es estable.
c) (8p) Encuentre el valor de K que ubique las raíces dominantes con un Coeficiente de Amortiguamiento igual a 0.5. ¿Dónde está la tercera raíz para ese valor de K?.

SEGUNDO TEMA: (25 puntos)

Un sistema de prueba automática utiliza un motor de corriente continua controlado por campo para posicionar los sensores de prueba. Un codificador de disco se encuentra acoplado al eje del motor para medir su velocidad y posición. Se seleccionan como variables de estado la posición angular (x1), la velocidad (x2) y la corriente de campo (x3). La ganancia del Amplificador de Campo para el motor es: K = 10, de tal forma que: vf(t) = K.u(t). La señal de salida y(t) es la posición angular y la señal de entrada de referencia angular es: r(t).

a) (10p) Obtenga las Ecuaciones de: Estado en Modo Controlable y la de Realimentación de Estados.
b) (10p) Calcule la Matriz de Realimentación de Estados de tal manera que el Error de Estado Estacionario sea cero para señal de prueba tipo Escalón Unitario, el Tiempo de Estabilización sea cuatro segundos y el Coeficiente de Amortiguamiento sea 0.707.
c) (5p) Dibuje el modelo se simulación a usar en SIMULINK mostrando todos los parámetros y variables.



$$\Theta(s) = \frac{K_m}{s(R_f + sL_f)(b + sJ)} V_f(s)$$

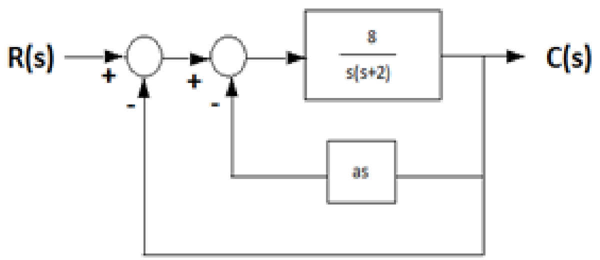
$$R_f / L_f = 5$$

$$b / J = 1$$

$$K_m / JL_f = 1$$

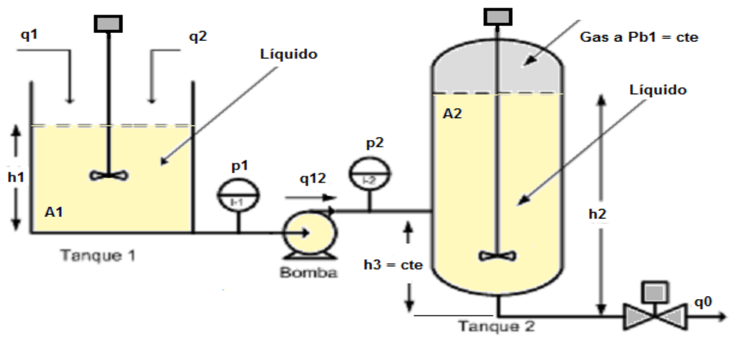
TERCER TEMA: (25 puntos)

El sistema mostrado es de realimentación unitaria con una realimentación derivativa adicional. Determine lo siguiente:



a) (10p) En ausencia de la realimentación derivativa, determine el Factor de Amortiguamiento y la Frecuencia Natural. Determine también el Error de Estado Estacionario resultante para una señal de entrada tipo Rampa.
b) (8p) Determine la Constante de Realimentación derivativa **"a"** que incrementará el Factor de Amortiguamiento del sistema a 0.7. ¿Cuál es el Error de Estado Estacionario considerando este nuevo valor de constante de realimentación?.
c) (7p) Muestre la forma de reducir el Error de Estado Estacionario del sistema con realimentación derivativa al mismo valor de la parte (a), manteniendo el Factor de Amortiguamiento en 0.7.

CUARTO TEMA: (25 puntos)



En el tanque 1, se reciben los fluidos 1 y 2 en caudales q1 y q2 respectivamente, en donde la mezcla es homogenizada mediante un agitador, luego es bombeado hacia el tanque 2; aquí en el tanque 2, la mezcla es presurizada por un gas a presión constante Pb1, y nuevamente la mezcla es homogenizada mediante el agitador.

El producto de este proceso es evacuado mediante la válvula de salida de caudal "**qo**".
El caudal de la bomba es:

$$\mathbf{q_{12}(t) = A(1+B(p_1(t)-p_2(t)))}.$$

El caudal de salida del sistema es:

$$\mathbf{q_o(t) = C_{v}*sqrt(h_2(t))}.$$

Considérese además las densidades de los productos como constantes.

a) (10p) Linealizar las funciones no lineales encontradas en el proceso.
b) (8p) Plantear las ecuaciones matemáticas del sistema de tal forma de expresar las salidas H1(s) y H2(s) como función de las entradas Q1(s) y Q2(s).
c) (7p) Dibujar el diagrama de bloques del sistema de tal forma de expresar lo solicitado en el literal b).

NOTA: Recuerde que: $$p_i(t) = K_i \cdot h_i(t)$$ $$q_i(t) = q_{io} + \Delta q_i(t)$$

Solución:
Primer tema:

a)

$$GH(s)=\frac{K(s^2+4s+8)}{s^2(s-1)} \quad ; \quad 0<K<\infty$$

$$E.C.: \qquad 1+GH(s)=1+K\frac{(s+2+j2)(s+2+j2)}{s^2(s-1)}=0$$

$$E.C.: \qquad s^3+(K-1)s^2+4Ks+8K=0$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 4K \\ s^2 & K-1 & 8K \\ s^1 & A & \\ s^0 & 8K & \end{array} \quad ; \quad A=\frac{4K(K-1)-8K}{K-1}=\frac{4K(K-3)}{K-1}$$

Para que el sistema sea estable deben cumplirse :

$$(K-1)>0 \quad ; \quad A>0 \quad ; \quad 8K>0 \quad \rightarrow \quad (K-1)\,\&\,(K-3)>0$$

$$\rightarrow \quad K>3 \quad \rightarrow \quad K_{crit}=3$$

De la Ecuación auxiliar :

$$(K_{crit}-1)s^2+8K_{crit}=0 \quad ; \quad 2s^2+24=0 \quad \rightarrow \quad s=\omega_o=\pm j2\sqrt{3}$$

Angulo de llegada :

$$(\theta_{z1}+90)-(2(180-\tan^{-1}1)+(180-\tan^{-1}2/3))=\pm180$$

$$(\theta_{z1}+90)-(270+146{,}3)=\pm180 \quad \rightarrow \quad \theta_{z1}=\pm180+326{,}3=146{,}3$$

Punto de salida del eje real :

$$s=\sigma \quad ; \quad K=-\frac{\sigma^3-\sigma^2}{\sigma^2+4\sigma+8} \quad ; \quad 0<\sigma_e<1$$

$$\left.\frac{dK}{d\sigma}\right|_{\sigma_e}=-\frac{(\sigma^2+4\sigma+8)(3\sigma^2+2\sigma)-(\sigma^3+\sigma^2)(2s+4)}{(\sigma^2+4\sigma+8)^2}=0$$

$$(\sigma^3+8\sigma^2+20\sigma-16)\sigma=0 \quad \rightarrow \quad \sigma=0.63;\_-4.3\pm j2.6$$

$$\rightarrow \quad \sigma_e=0.63$$

c)

$$\zeta=0.5$$

Por_comparación_de_coeficientes :

$$\begin{cases} s^3+(K-1)s^2+4Ks+8K=0 \\ (s+r)(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)=0 \end{cases}$$

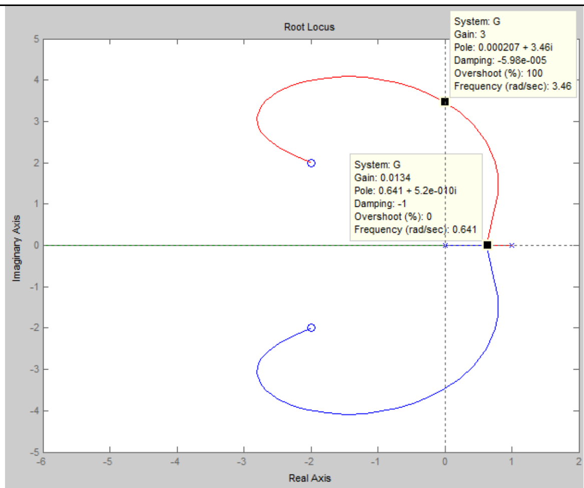
$$\begin{cases} s^3+(K-1)s^2+4Ks+8K=0 \\ s^3+(\omega_n+r)s^2+(r\omega_n+\omega_n^2)s+r\omega_n^2=0 \end{cases}$$

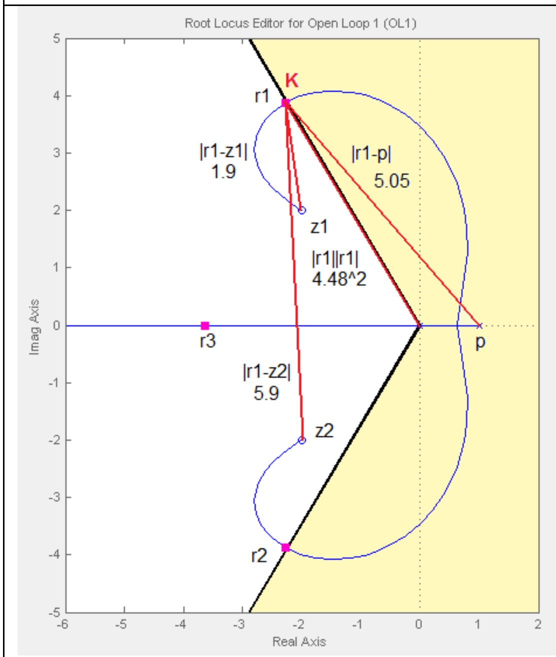
$$\begin{cases} \omega_n+r=K-1 \quad ; \quad 8\omega_n+8r+8=8K=r\omega_n^2 \quad ; \quad r\omega_n^2-8\omega_n-8r-8=0 \\ r\omega_n+\omega_n^2=4K \quad ; \quad 2(\omega_n+r)\omega_n=8K=r\omega_n^2 \quad ; \quad 2(\omega_n+r)=r\omega_n \\ r\omega_n^2=8K \end{cases}$$

$$r=\frac{2\omega_n}{\omega_n-2} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{2\omega_n}{\omega_n-2}\right)\omega_n^2-8\omega_n-8\left(\frac{2\omega_n}{\omega_n-2}\right)-8=0$$

$$\omega_n^3-4\omega_n^2-4\omega_n+8=0 \quad \rightarrow \quad \omega_n=4.5$$

$$r=\frac{2\omega_n}{\omega_n-2}=3.6 \quad \rightarrow \quad K=\omega_n+r+1=9.1$$





En forma aproximada, aplicando el Criterio de Magnitud:

$$K=\frac{|r_1|^2\,|r_1-p|}{|r_1-z_1|\,|r_2-z_2|}=\frac{4.48^2\cdot5.05}{1.0\cdot5.9}=9.04$$

$$s^3+(K-1)s^2+4Ks+8K=0 \quad \rightarrow \quad s^3+8.04s^2+36.16s+72.32=0$$

$$s_{1,2,3}=\begin{cases} -3.58 \\ -2.2+j3.9 \\ -2.2-j3.9 \end{cases}$$

Segundo Tema:

$$Gp(s)=\frac{Y(s)}{V_f(s)}=\frac{1}{s(s+5)(s+1)}=\frac{1}{s^3+6s^2+5s}=\frac{s^{-3}}{1+6s^{-1}+5s^{-2}}$$

$$V_f(s)=K\cdot U(s)$$

-La Planta es Tipo 1, el controlador de Realimentación de Estados garantiza el Error de Estado Estacionario cero para señal de estrada tipo escalón.

$$e=r-y$$

$$\begin{vmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-5&-6\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0\\0\\10\end{vmatrix}u \quad ; \quad y=\begin{vmatrix}1&0&0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{vmatrix}$$

$$u=-\begin{vmatrix}K_{b1}&K_{b2}&K_{b3}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{vmatrix}+K_a\cdot e=-\begin{vmatrix}K_{b1}&K_{b2}&K_{b3}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{vmatrix}+K_a\left(r-\begin{vmatrix}1&0&0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{vmatrix}\right)$$

$$u=-\begin{vmatrix}(K_a+K_{b1})&K_{b2}&K_{b3}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{vmatrix}+K_a\cdot r \quad si:\ K_{b1}=0 \ \rightarrow\ K_{c1}=K_a \ ;\ K_{c2}=K_{b2} \ ;\ K_{c3}=K_{b3}$$

$$u=-\begin{vmatrix}K_{c1}&K_{c2}&K_{c3}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{vmatrix}+K_{c1}\cdot r$$

–Entonces :

$$\begin{vmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-10K_1&-10K_2-5&-10K_3-6\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0\\0\\10\end{vmatrix}K_1\cdot r$$

$$E.C.:\ \det\left|sI-(A-B*K_c)\right|=0 \quad ; \quad \det\begin{vmatrix}s&-1&0\\0&s&-1\\10K_1&10K_2+5&s+10K_3+6\end{vmatrix}=0$$

$$s\left[s(s+10K_3+6)+10K_2+5\right]+10K_1=0$$

$$s^3+(6+10K_3)s^2+(10K_2+5)s+10K_1=0$$

-Para garantizar la dominancia ubicamos la tercer raíz en $(s+6)$

$$T_s=\frac{4}{\zeta\omega_n}=4 \quad ; \quad \zeta=0.707$$

$$s_{1,2}=-a\pm jb \quad ; \quad a=\zeta\omega_n=1 \quad ; \quad b=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=1$$

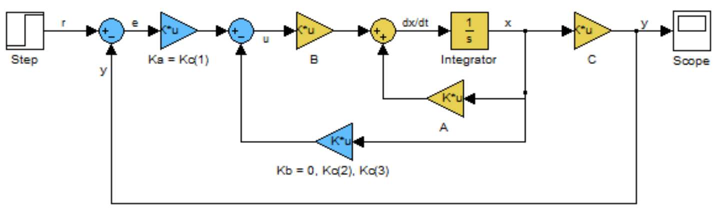
$$(s+1+j)(s+1-j)(s+6)=0 \ \rightarrow\ (s^2+2s+2)(s+6)=0$$

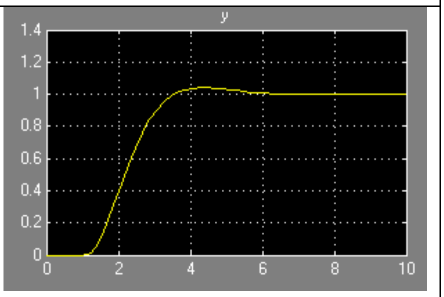
Por_comparación_de_coeficientes_con:

$$\begin{cases} s^3+8s^2+14s+12=0\\ s^3+(5+10K_3)s^2+(10K_2+6)s+10K_1=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} 8=6+10K_3 & \rightarrow\ K_3=0.2\\ 14=5+10K_2 & \rightarrow\ K_2=0.9\\ 12=10K_1 & \rightarrow\ K_1=1.2\end{cases}$$

```
clc, clear
A=[0 1 0;0 0 1;0 -5 -6]
B=[0; 0; 10]
C=[1 0 0]
D=[0]
G=ss(A,B,C,D)
eig(A)
p=[-1-i -1+i -6]
K=place(A,B,p)
Ac=A-B*K
eig(Ac)
```





Tercer Tema:

$a)$

$$G(s)=\frac{8}{s(s+2)} \quad ; \quad H(s)=1 \quad ; \quad T(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{8}{s(s+2)+8} \quad ; \quad R(s)=\frac{1}{s^2}$$

$$E.C.: \quad q(s)=s(s+2)+8=0$$

$$\begin{cases} s^2+2s+8=0 \\ s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2=0 \end{cases}$$

$$\omega_n=\sqrt{8}=2\sqrt{2}[rad/\sec] \quad ; \quad 2\zeta\omega_n=2 \quad ; \quad \zeta=\frac{1}{2\sqrt{2}}=0.353$$

$$e_{ss}=\frac{1}{K_v} \quad ; \quad K_v=\lim_{s\to 0} sG(s)=4 \quad \to \quad e_{ss}=0.25$$

$b)$ *Con la realimentación derivativa la Ecuación Característica es :*

$$T(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\frac{8}{s(s+2)}}{1+\frac{8}{s(s+2)}+\frac{8as}{s(s+2)}}=\frac{8}{s(s+2)+8as+8} \quad ; \quad R(s)=\frac{1}{s^2}$$

$$E.C.: \quad q(s)=s(s+2)+8as+8=0 \quad ; \quad \zeta=0.7$$

$$\begin{cases} s^2+(2+8a)s+8=0 \\ s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2=0 \end{cases}$$

$$\omega_n=\sqrt{8}=2\sqrt{2}[rad/\sec] \quad ; \quad 2\zeta\omega_n=2+8a \quad \to \quad a=0.245$$

$$E(s)=R(s)-C(s) \quad ; \quad e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\left(1-T(s)\right)R(s)=\frac{2+8a}{8}=0.495$$

$c)$ *Ajuste la ganancia de lazo directo 8 a un nuevo valor más alto K.*

$$T(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K}{s(s+2)+aKs+K}$$

$$E.C.: \quad q(s)=s(s+2)+aKs+K=0 \quad ; \quad \zeta=0.7 \quad ; \quad e_{ss}=0.25$$

$$\begin{cases} s^2+(2+aK)s+K=0 \\ s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2=0 \end{cases}$$

$$\omega_n=\sqrt{K} \quad ; \quad 2\zeta\omega_n=2+aK$$

$$e_{ss}=\frac{2+aK}{K}=0.25 \quad \to \quad 2+aK=1.4\sqrt{K}=0.25K \quad \to \quad K=31.36 \quad ; \quad a=0.186$$

Cuarto Tema:

a)

$$q_{12}(t) = A\big(1 + B(p_1(t) - p_2(t))\big) = A\big(1 + B(K_1 h_1(t) - (K_2(h_2(t) - h_3) + p_{b1}))\big)$$

$$= A\big(1 + BK_1 h_1(t) - BK_2 h_2(t) + BK_2 h_3 - B \cdot p_{b1}\big)$$

$$\Delta q_{12}(t) = ABK_1 \Delta h_1(t) - ABK_2 \Delta h_2(t)$$

$$= C_1 \Delta h_1(t) - C_2 \Delta h_2(t)$$

$$q_o(t) = C_v \sqrt{h_2(t)}$$

$$\Delta q_o(t) = C_3 \Delta h_2(t) \quad ; \quad C_3 = \frac{C_v}{2\sqrt{h_{2o}}}$$

b)

1. $\Delta q_1(t) + \Delta q_2(t) - \Delta q_{12}(t) = A_1 \dfrac{d\Delta h_1(t)}{dt} \quad \rightarrow \quad \Delta q_1(t) + \Delta q_2(t) - C_1 \Delta h_1(t) + C_2 \Delta h_2(t) = A_1 \dfrac{d\Delta h_1(t)}{dt}$

2. $\Delta q_{12}(t) - \Delta q_o(t) = A_2 \dfrac{d\Delta h_2(t)}{dt} \quad \rightarrow \quad C_1 \Delta h_1(t) - C_2 \Delta h_2(t) - C_3 \Delta h_2(t) = A_2 \dfrac{d\Delta h_2(t)}{dt}$

1. $Q_1(s) + Q_2(s) - C_1 H_1(s) + C_2 H_2(s) = sA_1 H_1(s) \quad \rightarrow \quad H_1(s) = \dfrac{Q_1(s) + Q_2(s) + C_2 H_2(s)}{(C_1 + sA_1)}$

$$H_1(s) = \frac{A_1}{\left(s + C_1 / A_1\right)} \left[Q_1(s) + Q_2(s) + C_2 H_2(s)\right]$$

2. $C_1 H_1(s) - C_2 H_2(s) - C_3 H_2(s) = sA_2 H_2(s) \quad \rightarrow \quad H_2(s) = \dfrac{C_1 H_1(s)}{(C_2 + C_3 + sA_2)}$

$$H_2(s) = \frac{A_2}{\left(s + (C_2 + C_3) / A_2\right)} C_1 H_1(s)$$