ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES Y HUMANISTICAS
EXAMEN PARCIAL MÉTODOS CUANTITATIVOS IV
GUAYAQUIL, MIÉRCOLES 3 DE JULIO DEL 2013

COMPROMISO DE HONOR

Yo, ……… al firmar este compromiso, reconozco que
(Escriba aquí sus cuatro nombres)
el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que puedo usar una calculadora *ordinaria* para cálculos aritméticos, un lápiz o esferográfico; que solo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen; y, cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído, debo apagarlo y depositarlo en la parte anterior del aula, junto con algún otro material que se encuentre acompañándolo. No debo además, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a las que se entreguen en esta evaluación. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.
Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptar la declaración anterior.

____
Firma ***NÚMERO DE MATRÍCULA:…………..……………….*** ***PARALELO:………….***

SOLUCION Y RUBRICA

TEMA I 30 PUNTOS
Resuelva cuantitativamente las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x^2y + 3\,y^2x}{x^3 + 2x^2y}$

SOLUCIÓN

Ecuación Homogénea

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x^2y\ + 3y^2x \quad /x^2y}{x^3 + \ 2x^2y \quad /x^2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2+3\left(\frac{y}{x}\right)}{\left(\frac{y}{x}\right)+2}$$

$$v = \frac{y}{x} \qquad y = v.x \qquad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = -\frac{2+3v}{\frac{1}{v}+2}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = -\frac{2v+3v^2}{1+2v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = -\frac{2v+3v^2}{1+2v} - v$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{-2v-3v^2-v-2v^2}{1+2v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{-5v^2-3v}{1+2v}$$

$$-\int\frac{1+2v}{5v^2+3v}dv = \int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1+2v}{v(5v+3)} = \frac{A}{v} + \frac{B}{5v+3}$$

$$\frac{1+2v}{v(5v+3)} = \frac{5Av+3A+Bv}{v(5v+3)} = \frac{(5A+B)v+3A}{v(5v+3)} = \begin{cases} 5A + B = 2 \\ 3A = 1 \end{cases}$$

$$-\int\left(\frac{1}{3v} + \frac{1}{3(5v+3)}\right)dv = \int\frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{3}\ln v - \frac{1}{15}\ln|5v+3| = \ln|x| + c$$

$$-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{y}{x}\right| - \frac{1}{15}\ln\left|5\left(\frac{y}{x}\right)+3\right| = \ln|x| + c$$

RUBRICA

Desempeño					
Insuficiente	**Malo**	**Regular**	**Bueno**	**Muy bueno**	**Excelente**
VACIO o procesos incoherentes	Identifica correctamente el nombre de la ecuación	Plantea la ecuación en su forma homogénea	Desarrolla la ecuación hasta llegar a la integral	Obtiene los valores de "A" y "B" para resolver la integral por Fracciones parciales	Integra correctamente y expresa la respuesta en términos de "x" y de "y"
0	**1**	**3**	**5**	**7**	**10**

b) $2xy' + y^2 = 2x^2$

SOLUCIÓN

Ecuación Bernoully

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y^2}{2xy} = \frac{2x^2}{2xy}$$

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{2x}\right) y = xy^{-1}$$

$$y\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{2x}\right) y^2 = x$$

$$v = y^2 \qquad \frac{dv}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$$

$$2y\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{x}\right) y^2 = 2x$$

$$\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}v = 2x$$

$$v = \frac{1}{e^{\int \frac{1}{x}dx}} \left[\int e^{\int \frac{1}{x}dx} .\ 2x\, dx + c\right]$$

$$v = \frac{1}{x}\left[2\int x^2\, dx + c\right]$$

$$v = \frac{1}{x}\left[2\frac{x^3}{3} + c\right]$$

$$v = 2\frac{x^2}{3} + \frac{c}{x}$$

$$y = \sqrt{2\frac{x^2}{3} + \frac{c}{x}}$$

RUBRICA

Desempeño					
Insuficiente	**Malo**	**Regular**	**Bueno**	**Muy bueno**	**Excelente**
VACIO o procesos incoherentes	Identifica correctamente el nombre de la ecuación	Plantea la ecuación en su forma Bernoully	Desarrolla la ecuación hasta llegar a la integral	Integra correctamente la primera parte	Termina de integrar y expresa la respuesta en términos de "x" y de "y"
0	1	2	6	7	10

c) $(10 - 6y + e^{-3x})dx = 2dy \qquad x(1) = 1$

SOLUCIÓN

$$(10 - 6y + e^{-3x})dx - 2dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -6 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

No exacta

Factor Integrante

$u(x) = e^{\int \frac{-6-0}{-2}dx} = e^{3x}$

$(10e^{3x} - 6ye^{3x} + e^{-3x}e^{3x})dx - 2e^{3x}dy = 0$

$(10e^{3x} - 6ye^{3x} + 1)dx - 2e^{3x}dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = -6e^{3x} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -6e^{3x}$

$f(x,y) = \int (10e^{3x} - 6ye^{3x} + 1)dx + H(y)$

$f(x,y) = \frac{10}{3}e^{3x} - 2ye^{3x} + x + H(y)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -2e^{3x} + H'(y) = -2e^{3x}$

$H'(y) = 0$

$H(y) = c$

$f(x,y) = \frac{10}{3}e^{3x} - 2ye^{3x} + x + c = 0$

Reemplazo condiciones iniciales ***x(1)=1***

$f(x,y) = \frac{10}{3}e^{3(1)} - 2(1)e^{3(1)} + 1 + c$

$c = -\frac{10}{3}e^{3} + 2e^{3} - 1$

$f(x,y) = \frac{10}{3}e^{3x} - 2ye^{3x} + x - \frac{10}{3}e^{3} + 2e^{3} - 1$

RUBRICA

Desempeño					
Insuficiente	**Malo**	**Regular**	**Bueno**	**Muy bueno**	**Excelente**
VACIO o procesos incoherentes	Identifica correctamente el nombre de la ecuación	Obtiene el factor integrante	Desarrolla la ecuación e integra	Deriva f(x,y) con respecto a "y" y obtiene H(y)	Obtiene el valor de "c" y escribe la respuesta correctamente
0	**2**	**4**	**7**	**8**	**10**

TEMA II 15 PUNTOS

Una empresa considera que un producto de venta masiva maneja las siguientes funciones de oferta y demanda respectivamente:

$$Q_s = -3p(t) + 4p'(t) - 5$$

$$Q_d = 2p(t) - 8p'(t)$$

Si se considera el equilibrio de mercado:

a) Determine el precio en cualquier tiempo si se sabe que inicialmente el precio es de $ 4.

b) Analice cualitativamente la estabilidad dinámica del equilibrio para la ecuación diferencial del precio

c) Cuantitativamente analice que ocurre con el precio a largo plazo.

a) SOLUCION

$$\mathrm{Qs} = \mathrm{Qd}$$

$$-3p(t) + 4p'(t) - 5 = 2p(t) - 8p'(t)$$

$$12p'(t) - 5p(t) = 5$$

$$p'(t) - \frac{5}{12}p(t) = \frac{5}{12}$$

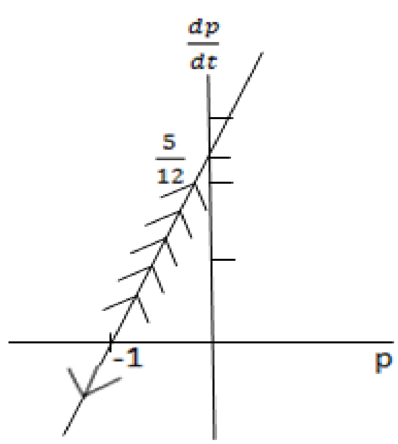
$$p(t) = \frac{1}{e^{\int -\frac{5}{12}dt}}\left[\int e^{\int -\frac{5}{12}dt} \cdot \frac{5}{12}dt + c\right]$$
$$p(t) = e^{\frac{5}{12}t}\left[\frac{5}{12}\int e^{-\frac{5}{12}t} \cdot dt + c\right]$$
$$p(t) = e^{\frac{5}{12}t}\left[e^{-\frac{5}{12}t} + c\right]$$
$$p(t) = e^{\frac{5}{12}t} + ce^{\frac{5}{12}t} \qquad 4 = 1 + c; c = 3$$
$$p(t) = e^{\frac{5}{12}t} + 3e^{\frac{5}{12}t}$$

RUBRICA

Desempeño				
Insuficiente	**Regular**	**Bueno**	**Muy bueno**	**Excelente**
VACIO o procesos incoherentes	Iguala las ecuaciones de oferta y demanda	Reduce la ecuación	Desarrolla la ecuación y obtiene la solución general	Obtiene el valor de "c" y reescribe la solución
0	1	2	4	5

b) SOLUCION

Cualitativamente $\frac{dp}{dt} = \frac{5}{12}p + \frac{5}{12}$



Diverge de p = -1

c) SOLUCION

$\lim_{t\to\infty} p(t) = \infty$

RUBRICA

Desempeño			
Insuficiente	**Bueno**	**Muy bueno**	**Excelente**
VACIO o procesos incoherentes	Grafica correctamente la ecuación diferencial	Analiza la estabilidad dinámica del equilibrio	Analiza correctamente lo que ocurre con el precio a largo plazo
0	4	5	10

TEMA III 10 PUNTOS
Dadas la siguiente ecuación encuentre su solución y su estabilidad dinámica cuantitativamente.

$$y'' - 6y' + 9y = e^{3x}2x + e^{3x} \qquad y(0) = 1; \qquad y'(0) = 2$$

SOLUCIÓN

$y = yc + yp$

$yc \quad \rightarrow \qquad y = e^{rx} \quad y' = re^{rx} \quad y'' = r^2e^{rx}$

$e^{rx}(r^2 - 6r + 9) = e^{3x}2x + e^{3x}$

$(r-3)^2 = 0 \qquad r = 3$

$yc = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}$

$y'' - 6y' + 9y = e^{3x}(2x+1)$

$yp = (Ax+B)e^{3x}x^S \qquad S = 2$

$yp = Ax^3e^{3x} + Bx^2e^{3x}$

$yp' = 3Ax^2e^{3x} + 3Ax^3e^{3x} + 2Bxe^{3x} + 3Bx^2e^{3x}$

$yp'' = 6Axe^{3x} + 9Ax^2e^{3x} + 9Ax^2e^{3x} + 9Ax^3e^{3x} + 2Be^{3x} + 6Bxe^{3x} + 6Bxe^{3x} + 9Bx^2e^{3x}$

$6Axe^{3x} + 9Ax^2e^{3x} + 9Ax^2e^{3x} + 9Ax^3e^{3x} + 2Be^{3x} + 6Bxe^{3x} + 6Bxe^{3x} + 9Bx^2e^{3x} -$
$18Ax^2e^{3x} - 18Ax^3e^{3x} - 12Bxe^{3x} - 18Bx^2e^{3x} + 9Ax^3e^{3x} + 9Bx^2e^{3x} = e^{3x}2x + e^{3x}$

$6Axe^{3x} + 2Be^{3x} = e^{3x}2x + e^{3x}$

$6A = 2 \qquad\qquad 2B = 1$

$A = \frac{1}{3} \qquad\qquad B = \frac{1}{2}$

$yp = \frac{1}{3}x^3e^{3x} + \frac{1}{2}x^2e^{3x}$

$y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x} + \frac{1}{3}x^3e^{3x} + \frac{1}{2}x^2e^{3x}$

Condiciones iniciales $y(0) = 1$

$1 = c_1$

Condiciones iniciales $y'(0) = 2$

$y' = 3c_1e^{3x} + c_2e^{3x} + 3c_2xe^{3x} + x^2e^{3x} + x^3e^{3x} + xe^{3x} + \frac{3}{2}x^2e^{3x}$

$2 = 3c_1 + c_2$

$2 = 3 + c_2$

$c_2 = -1$

$y = e^{3x} - xe^{3x} + \frac{1}{3}x^3e^{3x} + \frac{1}{2}x^2e^{3x}$

RUBRICA

Desempeño			
Insuficiente	**Regular**	**Bueno**	**Excelente**
VACIO o procesos incoherentes	Obtiene la solución complementaria	Plantea la solución particular	Desarrolla correctamente obtiene los valores usando las condiciones iniciales
0	**3**	**5**	**10**

TEMA IV 10 PUNTOS
Determine si las funciones $(\operatorname{sen}3x)^2\ y\ (\cos 3x)^2$ **son linealmente independientes**

SOLUCIÓN

$$W = \begin{vmatrix} (sen3x)^2 & (cos3x)^2 \\ 6cos3x\ sen3x & -6cos3x\ sen3x \end{vmatrix}$$

$W = -6cos3x\ (sen3x)^3 - 6sen3x\ (cos3x)^3$
$W = -6sen3x\ cos3x\ [(sen3x)^2 + (cos3x)^2]$
$W = -6sen3x\ cos3x\ \neq 0$
$W = -3sen6x \neq 0 \qquad\qquad x \neq 0, \pi, 2\pi \ldots..$

RUBRICA

Desempeño				
Insuficiente	**Regular**	**Bueno**	**Muy bueno**	**Excelente**
VACIO o procesos incoherentes	Plantea el sistema correspondiente y saca el determinante.	Reduce la ecuación.	Obtiene la solución e indica que es diferente de “0”	Simplifica la respuesta aplicando propiedades de las Funciones Trigonométricas
0	5	7	9	10

TEMA V 5 PUNTOS
Analice cualitativamente la siguiente ecuación en caso de que falle interprete cuantitativamente la solución

$$y''' + 2y'' + 2y' + 1 = 2$$

SOLUCIÓN
$r^3 + 2r^2 + 2r + 1 = 0$
$a_0 = 1 \quad a_1 = 2 \quad a_2 = 2 \quad a_3 = 1 \quad a_4 = 0 \quad a_5 = 0$
$|2| = 2 > 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$
$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$
Todos los determinantes son > 0 por lo que la solución converge a las Yp

RUBRICA

Desempeño				
Insuficiente	**Regular**	**Bueno**	**Muy bueno**	**Excelente**
VACIO o procesos incoherentes	Plantea la ecuación	Forma dos matrices y saca conclusiones.	Forma la tercera matriz y saca conclusiones.	Analiza e interpreta correctamente los resultados.
0	1	3	4	5