



6.- Marque con X lo INCORRECTO:

(2 puntos)

- El triángulo de presiones en un flujo cóncavo es mayor que el de un flujo paralelo.
- La celeridad de una onda en aguas profundas depende sólo del tirante.
- Las ecuaciones de Navier-Stokes son únicamente para flujo incompresible.
- En el análisis de onda difusa, la pendiente de fondo y fricción son equivalentes.

7.- Escoja la(s) opción(es) CORRECTA(S) sobre rugosidades:

(3 puntos)

- El coeficiente Chèzy (C) es directamente proporcional al de Manning (n).
- Se espera un n mayor para canales de acero que para canales con vegetación.
- El coeficiente de Chèzy es menor para concreto liso que para rugoso.

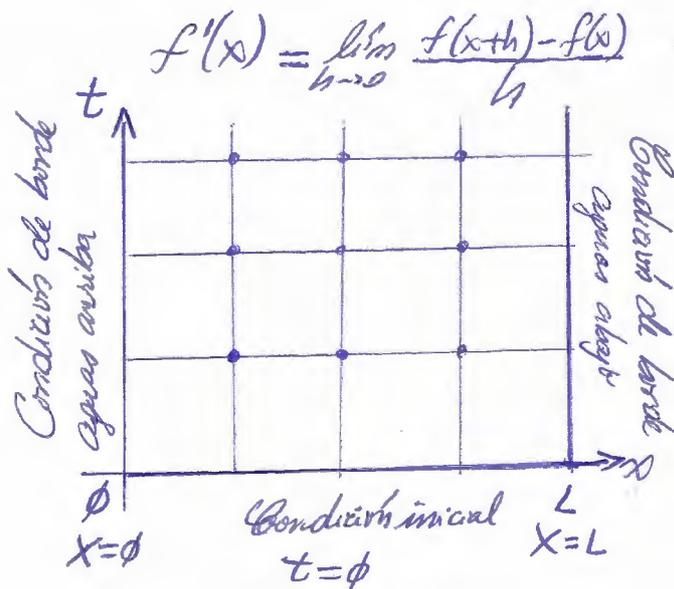
8.- Explique de manera CONCISA (si es preciso, con gráficos):

(4 puntos)

¿En qué consiste el método de las diferencias finitas en la hidráulica computacional? Explique su relación con las condiciones de borde e inicial.

En hidráulica computacional se usa el método de las diferencias finitas para aproximar / discretizar la solución de diversas tipos de ecuaciones, tales como: Elípticas, parabólicas e hiperbólicas.

Las diferencias finitas se basan en la definición de la 1<sup>ra</sup> derivada:



Las diferencias finitas pueden ser orientadas:

- a) Hacia adelante ("Forward")
- b) Hacia atrás ("Backwards")
- c) Centradas ("Centered")

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

$$f'(x) = \frac{f(x+\frac{1}{2}h) - f(x-\frac{1}{2}h)}{h}$$

✓ Dependiendo de la derivada a usar (1<sup>ra</sup>, 2<sup>da</sup>, 3<sup>ra</sup>) pueden ser de: 1<sup>ro</sup>, 2<sup>do</sup>, 3<sup>er</sup> orden.

✓ Las condiciones de borde (x=0, L), e inicial (t=0) ayudan a resolver el sistema de ecuaciones que se genera para resolver una variable que depende del tiempo y el espacio.

**IIda. PARTE (10 PUNTOS):**

A partir del **Teorema de Transporte de Reynolds**, demuestre que existe una relación entre el tirante inicial o anterior ( $Y_1$ ), y final o posterior ( $Y_2$ ) de un resalto hidráulico. El fondo es horizontal, el canal es rectangular y está bajo condiciones de flujo permanente. La expresión a demostrar es la siguiente:

$$\frac{y_2}{y_1} = 0.5 * (\sqrt{1 + 8F_1^2} - 1), \text{ siendo } F \text{ el número de Froude de la sección inicial.}$$

TTR:  $\frac{dB_{sist}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho \vec{v} dV + \int_{SC} \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA$  *flujo permanente*

$$\rightarrow \Sigma F = \rho [V_2^2 A_2 - V_1^2 A_1]$$

$$F_1 - F_2 = \rho [V_2^2 A_2 - V_1^2 A_1] \quad 3/3$$

~~$$\rho \left[ \frac{y_1^2}{2} - \frac{y_2^2}{2} \right] = \rho [V_2^2 y_2 - V_1^2 y_1]$$~~

$$\frac{\rho}{2} \left[ 1 - \left( \frac{y_2}{y_1} \right)^2 \right] = \frac{V_2^2 y_2}{y_1^2} - \frac{V_1^2}{y_1}$$

$$\frac{\rho}{2} \left[ 1 - \left( \frac{y_2}{y_1} \right)^2 \right] = \frac{V_2 (V_1 y_1)}{y_1^2} - \frac{V_1^2}{y_1}$$

$$\frac{\rho}{2} \left[ 1 - \left( \frac{y_2}{y_1} \right)^2 \right] = \left( \frac{y_1 V_1}{y_2} \right) \left[ \frac{V_1}{y_1} \right] - \frac{V_1^2}{y_1} = \frac{V_1^2}{y_2} - \frac{V_1^2}{y_1}$$

$$\frac{\rho}{2} \left[ 1 - \left( \frac{y_2}{y_1} \right)^2 \right] = F_1^2 g \left( \frac{y_1}{y_2} \right) - F_1^2 g \quad 2/2$$

$$1 - a^2 = 2F_1^2 \left[ \frac{1}{a} - 1 \right] \quad \frac{y_2}{y_1} = a$$

$$1 - a^2 = 2F_1^2 \left[ \frac{1-a}{a} \right]$$

Se elimina  $1-a=0 \Rightarrow y_1=y_2$  de lo contrario no habría salto hidráulico.

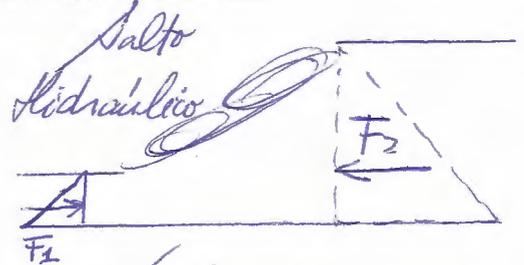
~~$$a(1-a)(1+a) = 2F_1^2(1-a)$$~~

$$a^2 + a - 2F_1^2 = 0 \quad 3/3$$

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-2F_1^2)}}{2}$$

$$a_1 = \frac{1}{2} [\sqrt{1 + 8F_1^2} - 1] \Rightarrow \left( \frac{y_2}{y_1} \right) = \frac{1}{2} [\sqrt{1 + 8F_1^2} - 1] \quad \checkmark \text{lggd}$$

$$\rightarrow a_2 = \frac{1}{2} [-\sqrt{1 + 8F_1^2} - 1] \Rightarrow \text{no puede haber tirante negativo}$$



$$\checkmark A_2 = b y_1$$

$$\checkmark A_2 = b y_2$$

Ley de Continuidad

$$\checkmark Q = A_1 V_1 = A_2 V_2$$

$$b y_1 V_1 = b y_2 V_2$$

$$\checkmark \frac{V_1}{V_2} = \frac{y_2}{y_1} \quad 2/2$$

$$F_1^2 = \frac{V_1^2}{g y_1}$$

**IIIra. PARTE (20 PUNTOS):**

Una corriente de agua, que fluye a 1.5 m/s en un canal ancho (cuyo tirante es 1m), se aproxima a una elevación del fondo de 10 cm. Se conoce que dependiendo del valor de la elevación dada, si el flujo previo a la elevación estuviese bajo régimen subcrítico, entonces el régimen en la sección sobre la elevación debería ser subcrítico también. Análogamente en caso de ser flujo supercrítico.

Estime:

- a) La profundidad del agua  $y_2$  sobre la elevación (soluciones matemáticas y físicas y resalte **la correcta**, comentando por qué la escoge y por qué discrimina el resto); y,
- b) La altura de la elevación que haría que el flujo sobre la misma fuera crítico.

Grafique la energía específica vs. tirantes.

a)

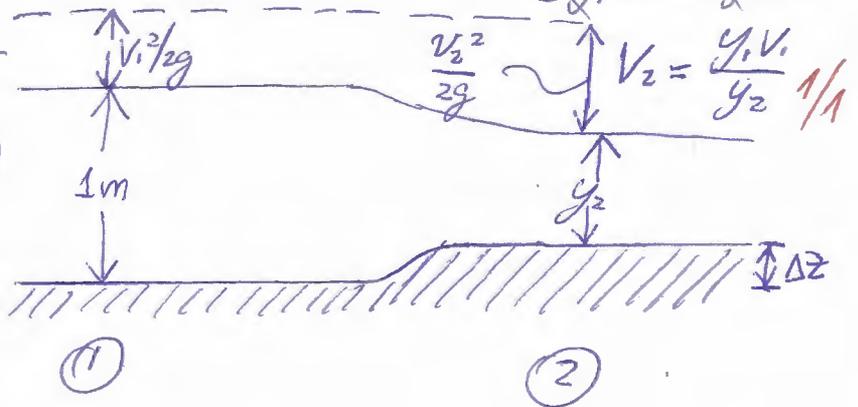
$$F_1 = \frac{V_1}{\sqrt{gD_1}} = \frac{1.5}{\sqrt{(9.8)(1)}} = 0.479 \Rightarrow \text{régimen subcrítico. } 2/2$$

Ec. Continuidad

$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2$$

$$b y_1 V_1 = b y_2 V_2$$

$D_1 \approx y_1$  por ser canal rectangular



Bernoulli: (se desprecian pérdidas)

$$y_1 + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = y_2 + z_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$1 + \frac{(1.5)^2}{2g} = y_2 + (z_2 - z_1) + \frac{y_1^2 V_1^2}{y_2^2 (2g)}$$

$$1.114 y_2^2 = y_2^3 + 0.114 + 0.1 y_2^2$$

$$y_2^3 - 1.014 y_2^2 + 0.114 = 0$$

- ✓  $y_{2a} = 0.859 \text{ m} \rightarrow V_{2a} = 1.75 \text{ m/s} \Rightarrow F_{2a} = 0.60 \Rightarrow \text{régimen subcrítico}$
- ✗  $y_{2b} = 0.451 \text{ m} \rightarrow V_{2b} = 3.32 \text{ m/s} \Rightarrow F_{2b} = 1.58 \Rightarrow \text{supercrítico}$
- ✗  $y_{2c} = -0.296 \text{ m} \rightarrow \text{no es posible físicamente}$

$y_{2a}, V_{2a}, F_{2a}$  se escogen para satisfacer la condición dada en el problema. #

b) Graficar E vs y.

$$y_c = \text{tirante crítico} = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{V_1^2 y_1^2}{g}} = 0.612 \text{ m} = y_c \quad 2/2$$

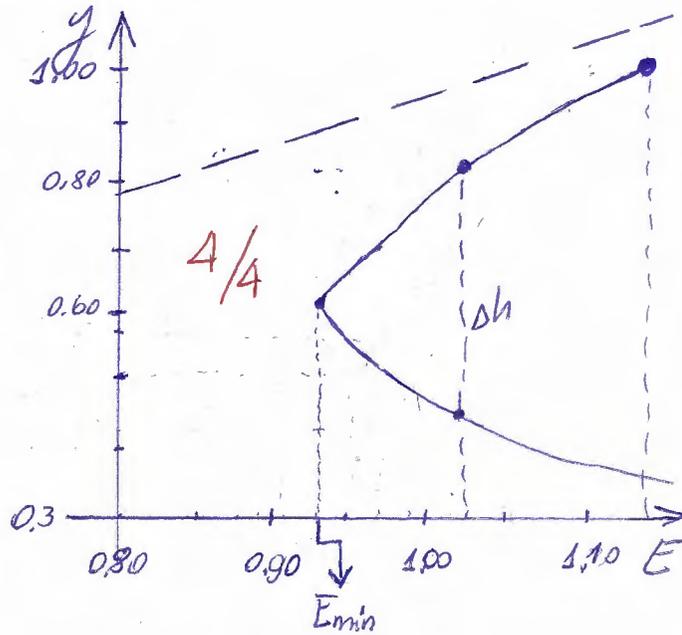
$$q = V_1 y_1$$

$$E_1 = y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = 1.0 + \frac{(1.5)^2}{2g} = 1.114 \text{ m}$$

$$E_{2a} = y_{2a} + \frac{V_{2a}^2}{2g} = 0.859 + \frac{(1.75)^2}{2g} = 1.015 \text{ m}$$

$$E_{min} = \frac{3}{2} y_c = 0.918 \text{ m} \quad \frac{2}{2}$$

$$E_{2b} = y_{2b} + \frac{V_{2b}^2}{2g} = 0.451 + \frac{(3.32)^2}{2g} = 1.013 \text{ m} \quad \frac{2}{2}$$



Para que el flujo se vuelva crítico,

$E_1$  tiene que volverse  $E_{min}$ , la diferencia es el  $\Delta z$  de Bernoulli

$$\Rightarrow E_1 - E_{min} =$$

①

②  
Crítico

$$y_1 + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = y_c + \frac{V_c^2}{2g} + z_c$$

$$E_1 + z_1 = E_{min} + z_c \quad \frac{2}{2}$$

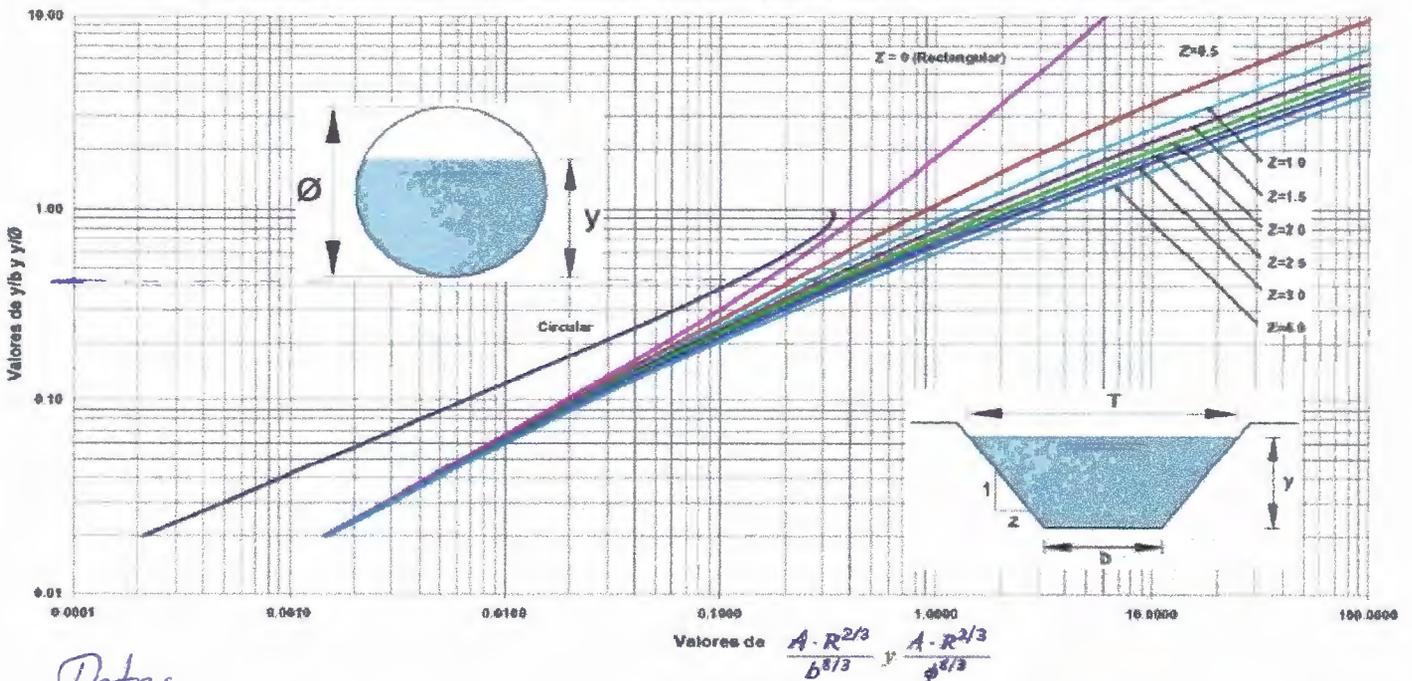
$$E_1 - E_{min} = \Delta z_c = 0.196 \text{ m}$$

El escalón debe ser de casi 20cm de altura para lograr que la sección se vuelva crítica.

**IVta. PARTE (20 PUNTOS):**

Un canal trapezoidal con un ancho de solera de 5m, ángulo de paredes laterales: 41.35° con la horizontal (para ambas paredes, datos provisto por los estudios geotécnicos), va a descargar 120 m<sup>3</sup>/s. Las superficies del canal se corrugan con asfalto (n = 0.016). El informe de topografía establece una pendiente de fondo de 85.2 por diez mil. Determine el tirante normal del canal, utilizando: a) Iteraciones numéricas; y, b) Nomograma de dimensionamiento (ver figura).

Tipo de sección	Área A (m <sup>2</sup> )	Perímetro mojado P (m)	Radio hidráulico Rh (m)	Espejo de agua T (m)
 Trapezoidal	$(b+zy)y$	$b+2y\sqrt{1+z^2}$	$\frac{(b+zy)y}{b+2y\sqrt{1+z^2}}$	$b + 2zy$



Datos:

$b = 5m$

$\phi = 41.35^\circ = \tan^{-1}\left(\frac{1}{z}\right)$

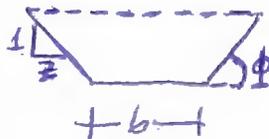
$z = 1.136$

$Q = 120m^3/s$

$n = 0.016$

$S = 8.52 \times 10^{-3}$

$y = ?$



a)  $A = (b+zy)y$   
 $P = b+2y\sqrt{1+z^2}$

$Q = \frac{1}{n} A R_h^{2/3} S^{1/2}$

$\left[ \frac{(b+zy)y}{b+2y\sqrt{1+z^2}} \right]^{2/3} = \frac{Qn}{\sqrt{S}}$

$\frac{[(5+1.136y)y]^{5/3}}{[5+2y(1.513)]^{2/3}} = 20.8$

$\frac{[(5+1.136y)y]^5}{[5+3.026y]^2} = 9000$

6/6

Iteración	y	≈ 9000
1	2.00	5327.67
2	3.00	51521.42
3	2.20	8994.97 → $y \approx 2.20 \text{ m}$
4	2.201	9017.58

7/7

b) Usando nomogramas:

$$\frac{Q_n}{\sqrt{S}} = 20.8 = AR_h^{2/3}$$

$$\frac{20.8}{b^{2/3}} = \frac{AR_h^{2/3}}{b^{2/3}} = 0.284$$

Del gráfico para dimensionamiento, y para  $Z = 1.136 \Rightarrow \frac{y}{b} \approx 0.43$

$$\Rightarrow y = 0.43(5) = 2.15 \text{ m}$$

Comprobando la respuesta del literal a)