

Del Análisis de Fourier al Análisis Wavelet.

Isaac Mancero Mosquera⁽¹⁾, Xavier Ochoa Chehab⁽²⁾
Facultad de Ingeniería en Electricidad y Computación
Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL)
Campus Gustavo Galindo, Km 30.5 vía Perimetral
Apartado 09-01-5863. Guayaquil-Ecuador
isaacmm@me.com⁽¹⁾, xochoa@fiee.espol.edu.ec⁽²⁾

Resumen

La transformación wavelet es una relativamente reciente herramienta de análisis que fue desarrollada en diferentes áreas de la ciencia y por distintas personas, cuyos trabajos han sido integrados en una teoría formal a partir de la década de 1980. El presente trabajo enfoca el tema como una transición que inicia con la teoría clásica de Fourier y se dirige hacia las nuevas ideas que representa la transformación wavelet en el campo del procesamiento de señales. Al utilizar el análisis de Fourier como base para el desarrollo del análisis wavelet, se obtienen estándares objetivos para comparar el desempeño de ambos operadores, se facilita mostrar las similitudes, diferencias, ventajas y desventajas de ambas transformaciones y, finalmente, hace evidente su complementariedad. No necesariamente una relega a la otra ni la vuelve obsoleta. Adicionalmente, las múltiples aplicaciones ofrecidas revelan la utilidad práctica y el potencial de uso de ambas herramientas de análisis en las diferentes ramas de la ciencia.

Palabras Claves: Transformación wavelet, Fourier, estacionaridad, señales transitorias

Abstract

The wavelet transform is a relatively recent tool of analysis, developed in different science fields and by different people whose research has been integrated in a formal theory since the eighties. This topic is presented as a transition from the classic Fourier theory towards the new ideas represented by the wavelet transform in the realm of the digital signal processing. By using the Fourier theory as a basis for the development of the wavelet operator, an objective standard is achieved in order to compare the performance of both transformations. The differences and similitudes, advantages, disadvantages are made clear by this approach and, finally, the complementarity of both is established. The new operator does not make obsolete the previous one. In addition, the many applications described show the practical utility and the perspectives of use of both mathematical tools in the different branches of science.

Keywords: Wavelet transform, Fourier, stationarity, transient signals

1. Introducción

La transformación de Fourier presenta limitaciones cuando se trata de localizar en el plano tiempo-frecuencia el contenido de energía de una señal, particularmente señales transitorias o procesos no estacionarios. En la formulación fundamental, la transformada de Fourier de $f(t)$ es:

$$\hat{f}(\omega) = \left\langle f(t) \mid e^{j\omega t} \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt,$$

y la reconstrucción o transformación inversa es:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

La reconstrucción es una integral, de menos a más infinito, de sinusoides complejas perennemente oscilantes; las mismas representarán fielmente a $f(t)$, incluyendo sus características transitorias, pero sin la capacidad de proporcionar información acerca de dónde se producen tales características ni cuánto tiempo duran. Además, la propiedad de Escala de la transformación confirma la imposibilidad de obtener localización perfecta en el plano tiempo-frecuencia.

La transformación wavelet efectúa una integral en tiempo del producto de una señal con una función oscilatoria de corta duración, produciendo un espectro de energía con una referencia tanto en tiempo como en frecuencia. El advenimiento de la teoría de funciones wavelet hace necesario que su estudio sea integrado con aquel de la transformación de Fourier, pues ambas se complementan entre sí [1].

2. La transformación wavelet

2.1. Definiciones

Una wavelet es una función oscilante $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, con promedio cero, energía unitaria y localizada alrededor de $t=0$, de modo que decae siempre que $t \rightarrow \pm\infty$. Se puede generar una familia de funciones con las mismas propiedades mediante traslaciones y dilataciones de la forma:

$$\psi_{s,\tau} = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right), s>0;$$

por lo cual ψ recibe el nombre de wavelet madre.

La transformación wavelet de una función f , a la escala s y traslación τ , se define como la proyección de f sobre $\psi_{s,\tau}$:

$$\mathcal{W}f(s,\tau) = \langle f, \psi_{s,\tau} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{s,\tau}^*(t) dt,$$

y la reconstrucción o transformación inversa es:

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{W}f(s,\tau) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) d\tau \frac{ds}{s^2},$$

donde

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < +\infty;$$

para que esta integral exista debe cumplirse que $\hat{\psi}(0)=0$. Esta transformación está relacionada con la operación de convolución o filtrado lineal.

2.2. Similitudes y diferencias conceptuales

Ambas transformaciones se modelan como la proyección escalar de una función f , del espacio de funciones continuas con energía finita $L^2(\mathbb{R})$, sobre el kernel de la transformación, que en el caso de Fourier son las sinusoides de la forma $e^{j\omega t}$, donde ω define su frecuencia. En el caso discreto, la señal bajo análisis es una secuencia de datos de la forma $y[n]$ indexados de 0 a N . La adaptación a este caso se hace mediante la modificación de la sinusoides en $\exp(j2\pi kn/N)$, donde n, k son enteros entre 0 y N , donde la k -ésima frecuencia está dada por k/N . Las proyecciones de la señal sobre este conjunto de sinusoides permite hallar coeficientes indexados en frecuencia cuyos módulos al cuadrado constituyen el espectro de energía de la señal. En Figura 1 se muestra este espectro tomado de una serie de 8886 datos de temperaturas medidos en la estación meteorológica ESPOL-FIMCBOR entre 2000 y 2001. Los máximos locales indican las frecuencias con mayor energía en la señal.

En el caso wavelet, ψ es cualquier función que cumpla con las características descritas en la sección 2.1. La presencia del parámetro τ en la formulación

hace que tal operador se relacione a la convolución o filtrado lineal. Las funciones wavelet poseen frecuencias que la caracterizan, pero que se controlan con el parámetro de escala. La variación de s produce dilataciones y contracciones de ψ lo que a su vez modifica su contenido de frecuencia. La versión discreta se obtiene convirtiendo t, τ en variables enteras. El parámetro s se expresa en forma diádica como $s = 2^j$, en unidades de tiempo o periodicidad, por lo que es posible la equivalencia con ω mediante su inverso multiplicativo. Para cada $j \in \mathbb{N}$ la convolución es aplicada a la señal por lo cual la transformación wavelet puede ser interpretada como un banco de filtros cuya banda de paso se modifica diádicamente como se ilustra en el ejemplo de la Figura 2.

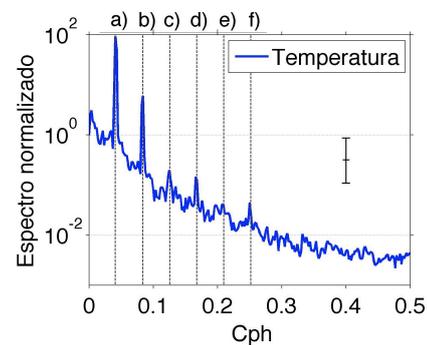


Figura 1. Espectro de energía de Fourier

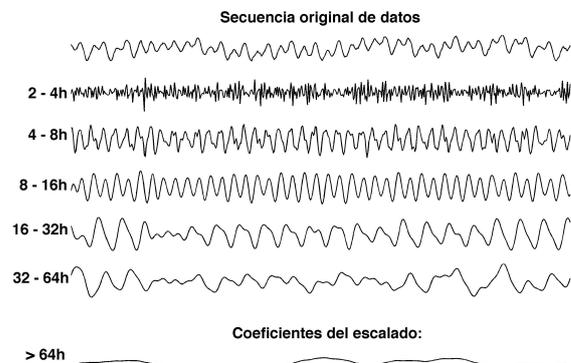


Figura 2. Transformada wavelet como banco de filtros paso de banda

Dado que j no puede incrementarse hasta el infinito, existe una función denominada “de escalado” que captura la información complementaria a todas las bandas de frecuencia previamente halladas con funciones wavelet. La banda de frecuencias del escalado encierra la frecuencia cero que es discriminada por las funciones wavelet.

En la transformación wavelet se genera una serie de coeficientes para cada intervalo de frecuencia mientras que en la transformación de Fourier se produce un solo coeficiente para cada frecuencia puntual. El módulo de los coeficientes es un espectro de energía wavelet. En ambos casos es posible generar una base ortonormal del espacio de funciones en $l_2(\mathbb{R})$.

2.3. Funciones wavelet

Existen dos grupos principales que son las funciones wavelet no ortogonales y las ortogonales, según la posibilidad de generar tal base del espacio $L^2(\mathbb{R})$ con ellas. En el primer grupo están las derivadas de funciones gaussianas, de las cuales la correspondiente a la segunda derivada es la más conocida. En la Figura 3 se muestran las 4 primeras derivadas. Otra función incluida en este grupo en la literatura científica es la función de Morlet, aunque no es estrictamente una función wavelet, es importante por su uso extensivo y por su importancia histórica en el desarrollo de las metodologías wavelet:

$$\psi(t) = e^{-t^2/2\sigma^2} e^{-j\omega t}$$

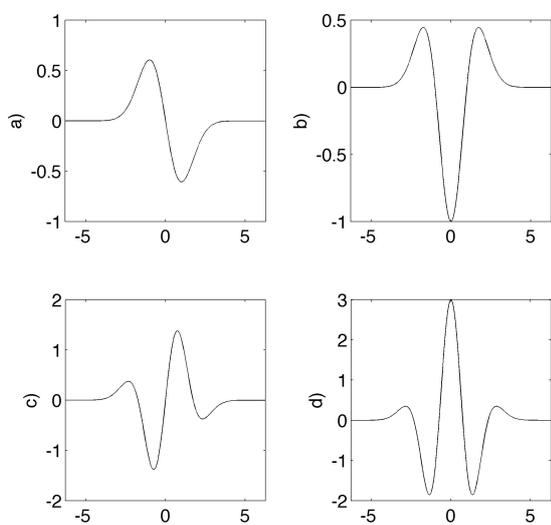


Figura 3. Las cuatro primeras derivadas de una función gaussiana

Las funciones ortogonales se dividen en dos subgrupos, aquellas con soporte infinito y con soporte compacto. Entre las primeras tenemos las familias denominadas wavelet de Battle-Lemarié (o *splines*), de Shannon (Figura 4) y de Meyer. Se caracterizan por existir en todo el intervalo real.

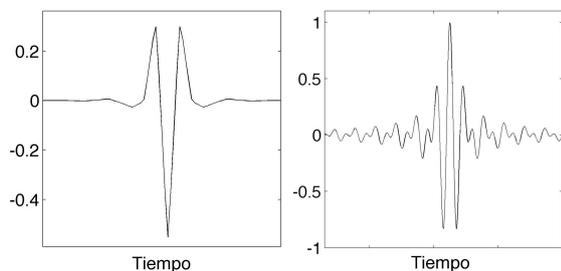


Figura 4. Wavelets de Battle-Lemarié lineal y wavelet Shannon

Las wavelet ortogonales de soporte compacto se extinguen completamente fuera de un intervalo finito y se caracterizan por sus momentos de extinción [2]. Una wavelet con p momentos de extinción indica que

el resultado de la convolución asociada a la misma es proporcional a la p -ésima derivada de la función bajo análisis. Las principales familias son las wavelet de Daubechies, Symmlet, Coiflet y Haar. Unos ejemplos se muestran en Figura 5.

En los ejemplos presentados en la Figura 5, una convolución de una función f con la wavelet de Daubechies-2 permite hallar un resultado proporcional a la segunda derivada de f ; mientras con la Symmlet-8, el equivalente a la 8th derivada de f . Esta propiedad es de utilidad en aplicaciones de detección de transientes. Un cambio repentino en una función puede ser detectada con una función de Haar, pero discontinuidades en las derivadas superiores de una señal se pueden hallar con $p > 1$.

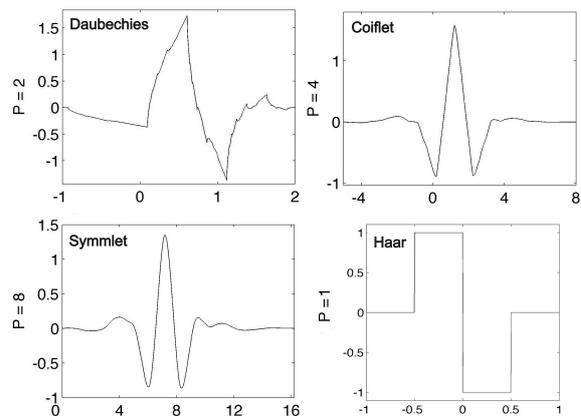


Figura 5. Wavelets de soporte compacto

2.4. Algoritmos

Hay tres tipos de algoritmos utilizados para el cálculo de la transformación wavelet, que son el de la transformación continua, el algoritmo *À Trous*, y el algoritmo de Mallat. El primero es el más cercano a la definición pues efectúa la convolución en el dominio de frecuencia de una función f con la función wavelet que puede ser no ortogonal u ortogonal de soporte infinito. En este método, las escalas se pueden modelar como $s = 2^j 2^{K/V}$, o sea V voces por escala j , y K variando entre 0 y $V-1$. Para cada escala y cada voz V de tal escala existe una serie de coeficientes de transformación indexados en tiempo. El módulo al cuadrado genera el espectro wavelet de energía como se muestra en la Figura 6 para los datos de temperatura del aire de la estación ESPOL-FIMCBOR.

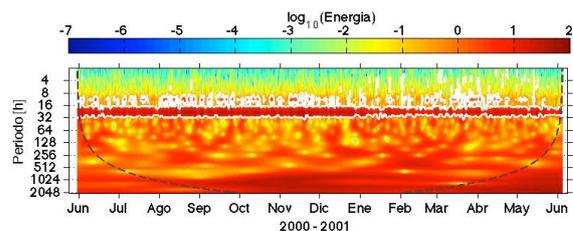


Figura 6. Espectro de energía wavelet de la temperatura del aire

Los algoritmos *À Trous* y de Mallat hacen uso de los filtros asociados. El primero se usa para la denominada transformación invariante en traslación, donde hay redundancia de información pero es útil para la localización de características transitorias detectadas en la señal, el estudio de la estacionaridad y la remoción del ruido. El cambio de escala se hace a nivel de los filtros asociados mediante la inserción de ceros entre cada coeficiente de filtro, para proceder a la siguiente escala. La Figura 2 es precisamente una transformación invariante en traslación, la cantidad de coeficientes en cada escala es igual a la cantidad de datos en la señal original. Luego, para N datos, la transformación con J escalas produce una matriz de datos de $N \times (J+1)$, por la serie de escalado final.

En el algoritmo de Mallat, el cambio de escala se hace sin modificar los filtros; sino que las series filtradas resultantes son muestreadas saltándose un dato (duplicando el intervalo entre muestras, se reduce su número de coeficientes y la frecuencia de Nyquist a la mitad), y luego proceder con el filtrado en la siguiente escala. Por ello, conforme se aumenta la escala, se producen cada vez menos coeficientes, pero en total, junto con los coeficientes del escalado remanente, hay una igual cantidad de datos que en la señal original. Este método permite la reconstrucción perfecta de la señal y es el mejor adaptado a tareas de compresión de datos.

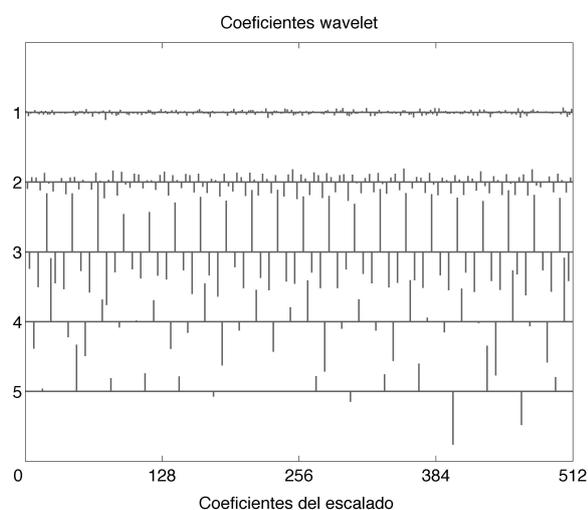


Figura 7. Transformación wavelet ortogonal

3. Campos de Aplicación

3.1. Descomposición de la varianza

En virtud del teorema de Parseval o de la conservación de la energía, la transformada de Fourier permite hallar la potencia de cada componente de

frecuencia de una serie de tiempo y conocer cuáles son dominantes en el espectro (Figura 1). De modo similar sucede con la transformación wavelet, solo que la energía de la transformada está referenciada con ambos parámetros: s , τ (Figura 6). El total de la energía o varianza de la transformación debe ser equivalente a la energía o varianza de la señal original. Un estimador fue propuesto en el presente trabajo, con una mejora con respecto al original de Percival, 1995 [3], al incluir dos componentes, la contribución de los coeficientes wavelet más la contribución de los coeficientes del escalado, no tomados en cuenta en el trabajo original de Percival:

$$\sigma_x^2 = \sum_{j=1}^J \sigma_{\psi}^2(j) + \sigma_{\phi}^2(J);$$

además, la corrección de Bessel para el estimador de las varianzas fue incluida. Experimentos de Monte Carlo confirman un desempeño igual o superior para el estimador propuesto [1].

3.2. Estacionaridad

La estacionaridad de la varianza puede ser estudiada mediante la transformación continua. Modelos de ruido han sido propuestos por Torrence y Compo, para establecer si un coeficiente wavelet es significativo o no. Según la forma que adopten las regiones significativas se puede decir si existen características perennes o transitorias en la serie bajo análisis. Compárese el espectro de energía wavelet de la temperatura (Figura 6), con el correspondiente a la componente principal de la velocidad del viento en Figura 8. En ambos casos las regiones significativas están delimitadas por líneas de contorno blanco. En los datos de temperatura hay energía significativa en la banda comprendida entre 16 y 32 horas, la misma que se mantiene así durante todo el registro (aproximadamente un año). En el caso de la velocidad del viento, también existe energía significativa en la banda 16-32 horas, pero ésta se mantiene en la primera mitad del registro y deja de serlo en Enero de 2001. Este es un tipo de ocurrencia no estacionaria.

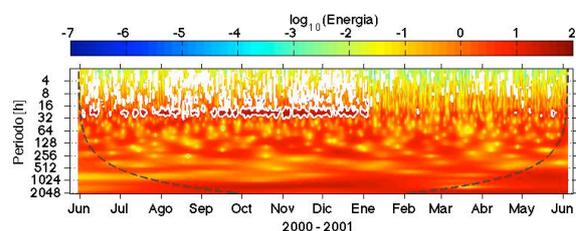


Figura 8. Espectro de energía wavelet de la componente principal de la velocidad del viento

Eventuales cambios en la media de un proceso pueden determinarse aplicando técnicas del control estadístico de procesos. Para una secuencia de datos, se define la serie de sumas acumulativas como:

$$P_k = \frac{\sum_{i=1}^k X_i}{\sigma}$$

y se compara su valor extremo absoluto E con límites de significatividad hallados mediante Monte Carlo [4]. En la presente tesis, se propone aplicar este método a las secuencias de coeficientes de escalado, que contienen la frecuencia cero del espectro, es decir, el valor medio; además, se propone la estandarización previa de los datos, para evitar tratar simultáneamente con dos parámetros (media y varianza), y así simplificar los cálculos. Los límites de significatividad encontrados mediante Monte Carlo tienen una relación logarítmica con el tamaño de la muestra, siendo consistente con los resultados de Tanizaki, 1995 [4]. En la Figura 9, se muestra una porción de datos de presión atmosférica de la estación ESPOL-FIMCBOR, la secuencia de escalado ('aproximaciones') tras de 5 niveles de transformación wavelet, la suma acumulativa y su máximo absoluto. El extremo E se mantiene dentro de los límites indicando que no ha ocurrido ningún cambio en la media de los datos.

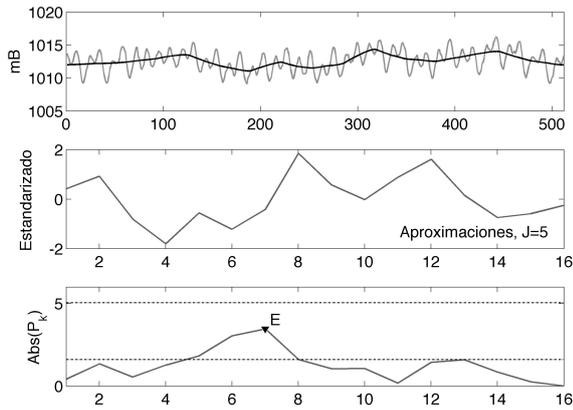


Figura 9.

3.3. Detección de cambios abruptos

La propiedad de los p-momentos de extinción permite que las funciones wavelet se comporten como filtros diferenciadores que efectúan una derivación ponderada p-veces. Por ejemplo, la siguiente función tiene discontinuidades en su segunda derivada:

$$f(t) = \begin{cases} 5t + 5e^{-t} - 5 & t \in [0, 30) \\ 7.5t + 1.25e^{-2(t-30)} - 81.25 & t \in [30, 60) \\ 12.5t + 5e^{-(t-60)} - 386.25 & t \in [60, 120) \\ 15t + 1.25e^{-2(t-120)} - 687.5 & t \in [120, 180) \end{cases}$$

Luego, es necesario $p > 2$ para detectar estos cambios con un filtro wavelet. Para ilustrar esto, 2048 muestras se tomaron entre 0 y 180 y se procedieron a filtrar con varios filtros wavelet. En la Figura 10 se muestran la función original (izquierda) y la filtrada con un filtro Daubechies-3 ($p=3$) en el panel derecho.

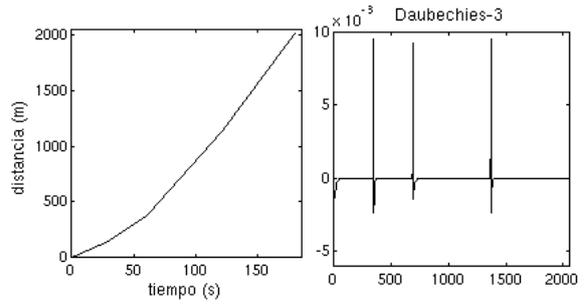


Figura 10.

Se observa que 3 impulsos aparecen donde originalmente hay un cambio en la regla de correspondencia de $f(t)$, indicando que en la segunda derivada hay una discontinuidad. Hay que tener en cuenta las respuestas de fase de los diferentes tipos de filtros wavelet. Un filtro de Daubechies está siempre optimizado para obtener el mínimo retardo de fase; mientras que un filtro Symmlet está optimizado para obtener un retardo casi lineal. El filtro de Daubechies responde más rápido, pero el filtro Symmlet permite una corrección posterior que estima el momento del cambio con mayor precisión.

3.4. Compresión de datos

Es posible construir una base de $L^2(\mathbb{R})$ sea con las funciones sinusoides complejas que con las funciones wavelet ortogonales, de modo que una función pueda expresarse como la combinación lineal:

$$f = \sum_{i=1}^{+\infty} \langle f, u_i \rangle u_i$$

Un esquema de compresión puede lograrse seleccionando un subconjunto de vectores en lugar de la entera base. Para ello, se eligen los M coeficientes de mayor magnitud para efectuar la reconstrucción de f. Los experimentos desarrollados en la presente tesis muestran que, si f es una función con componentes sinusoidales, entonces los vectores base de Fourier son más eficientes que las funciones wavelet en la compresión. Por otra parte, si existen discontinuidades, cambios abruptos y características transitorias en f, las funciones wavelet son más eficientes que las sinusoides de Fourier. El desempeño se mide mediante el error relativo:

$$\frac{\|g - g_M\|}{\|g\|}$$

Los resultados de los experimentos demuestran la importancia de la forma de la función base para representación final de una señal.

3.5. Remoción de ruido

En general, los procesos de ruido se manifiestan espectralmente en todas las frecuencias, pero las señales tienen banda limitada, por lo que se espera que en regiones de relativamente alta frecuencia el ruido sea más fácilmente detectable. Sin embargo, las señales pueden todavía contener información de alta

frecuencia, de carácter transitorio. Se vuelve necesario discriminar las componentes de alta frecuencia de ruido de las componentes con información legítima. Esto implica que el ruido sería detectable en los coeficientes wavelet ('detalles') luego de tan solo el primer proceso de filtrado ($j=1$).

En el ejemplo siguiente, una función suave pero con dos discontinuidades ha sido contaminada con ruido blanco, como se muestra en la Figura 11. El resultado de un proceso de filtrado simple con un filtro wavelet se ilustra en la Figura 12.

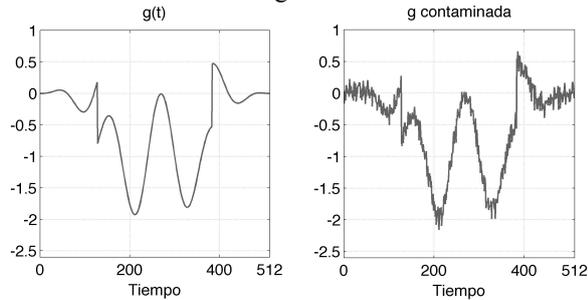


Figura 11

Donoho y Johnstone proveyeron un modo de discriminar el ruido mediante un umbral T que se calcula con la fórmula:

$$T = \sigma \sqrt{2 \ln(N)},$$

donde N es la longitud de los datos y σ es la desviación estándar del ruido presente en los coeficientes wavelet [5][6]. Para evitar que σ sea afectado por características de alta frecuencia legítimas de la señal, se utiliza un estimador robusto basado en la desviación absoluta de la mediana.

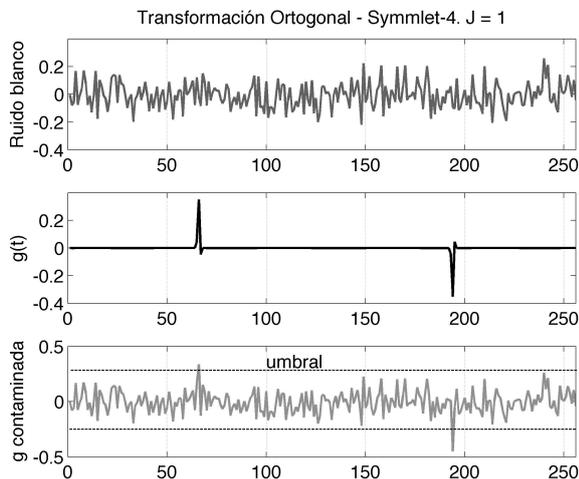


Figura 12

Los coeficientes que superan el umbral se consideran información lícita, mientras los restantes son modificados (umbral flexible) o reemplazados por cero (umbral rígido). A diferencia de los filtros tradicionales, el filtrado wavelet es no lineal y no tiende a suavizar los cambios abruptos, como se observa en la Figura 13.

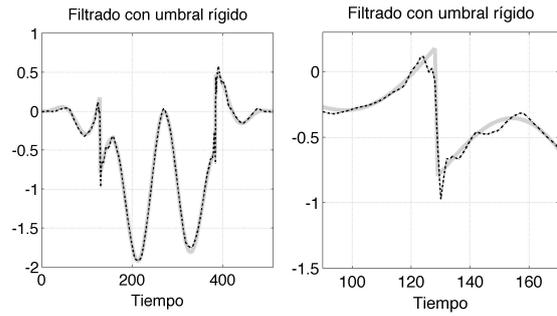


Figura 13

4. Procesamiento bidimensional

La generalización al espacio bidimensional se realiza definiendo funciones wavelet y de escalado del siguiente modo [7]:

$$\phi^2(x,y) = \phi(x)\phi(y) \quad \psi^1(x,y) = \phi(x)\psi(y)$$

$$\psi^2(x,y) = \psi(x)\phi(y) \quad \psi^3(x,y) = \psi(x)\psi(y)$$

Luego la integral de transformación se realiza por separado. Las imágenes son señales bidimensionales que se representan en forma matricial y su procesamiento es una serie de filtrados a columnas y filas por separado. Un nivel de descomposición genera una imagen aproximación (escalado) a_j y 3 imágenes detalles (wavelet) d_j^1 , d_j^2 y d_j^3 :

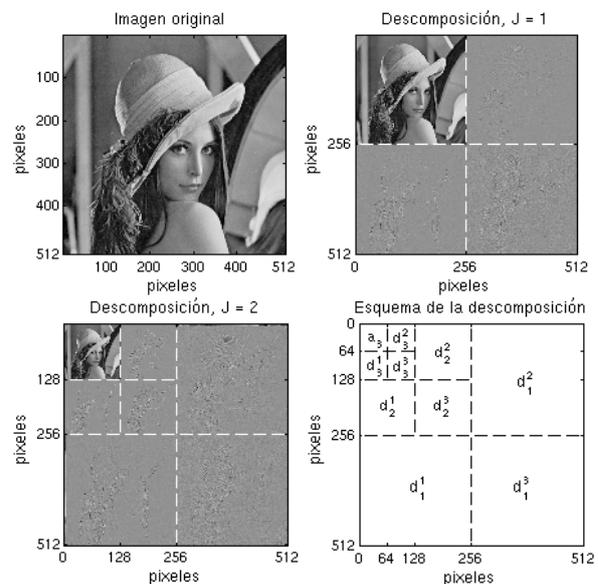


Figura 14. Esquema de la descomposición wavelet bidimensional

Todas las aplicaciones del caso unidimensional pueden extenderse al caso bidimensional, incluyendo la detección de cambios abruptos en una imagen, la remoción del ruido o la compresión. Sin embargo, al tratar con imágenes, la evaluación numérica de los métodos no es suficiente, también hay que juzgar la calidad visual del resultado, que puede depender de la función elegida, como se ilustra en Figura 15.

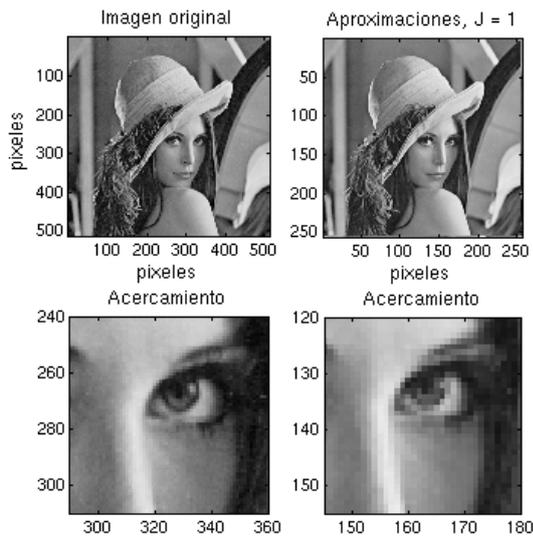


Figura 15. Aproximaciones sucesivas implican pérdida de detalles o de resolución

5. Caso de estudio

Las metodologías basadas en ambas transformaciones fueron aplicadas a series de tiempo provenientes de estación meteorológica ESPOL-FIMCBOR, recolectadas entre Mayo de 2000 y junio de 2001 [1]. Los datos a intervalos horarios contenían mediciones de temperatura del aire, presión atmosférica, velocidad del viento, humedad relativa y precipitación. Los espectros de Fourier permitieron detectar las frecuencias dominantes de las series, mientras que los espectros de energía wavelet indicaron si tales contribuciones de energía eran perennes o transitorias. El principio de superposición fue aplicado para separar las componentes perennes (de origen astronómico, es decir, relacionados a la rotación y traslación terrestre y los ciclos lunares y solares) de los datos mediante un ajuste de términos sinusoidales de frecuencias astronómicas conocidas a los datos [8]:

$$z(t) = \sum_i A_i \cos(\xi_i t - \phi_i)$$

Al remover las componentes perennes, las series residuales fueron nuevamente analizadas mediante transformación wavelet, para establecer la estacionaridad o no de la varianza y de las medias de los procesos.

Estimaciones del punto de cambio en la media de las series establecieron que el primer parámetro en cambiar fue la presión atmosférica (29 Octubre de 2000), seguida de la temperatura del aire (21 Noviembre, 2000), humedad (1 Enero, 2001) y precipitación (14 Enero 2001). Esto es solo un año de datos, pero si se confirma con investigación adicional, se podría establecer un índice o un predictor del inicio de la estación lluviosa; en particular porque la humedad precede por dos semanas la llegada de las lluvias. Por lo tanto, hay amplias perspectivas de aplicación del análisis wavelet y de Fourier, que

incluso podrá contribuir a establecer las diferencias entre un año “normal” y uno bajo el régimen de El Niño (o La Niña) en los registros meteorológicos del país.

4. Conclusiones

Las transformaciones de Fourier y wavelet son lineales, lo que permite la separación de componentes estacionarios y transitorios bajo la premisa de superposición lineal. La transformación de Fourier es óptima para el estudio de señales armónicas perennes, pues se basa en funciones sinusoidales. Por su parte, la transformación wavelet permite establecer si el contenido de frecuencia es permanente o no, siendo útil en el estudio de señales con componentes transitorias.

La transformación wavelet es muy versátil debido a que su definición descansa sobre una función conceptual que puede tomar diversas formas y tener diferentes propiedades. Las funciones wavelet permiten analizar características de una función en modo local, es decir, afectadas por un entorno limitado, cosa que no es posible con las sinusoides de la transformación de Fourier. En cambio, la transformación de Fourier es precisa en el dominio de la frecuencia, mientras que los esquemas wavelet se basan en “escalas” que son intervalos de frecuencias.

Las transformaciones de Fourier y wavelet pueden ser utilizadas en modo combinado para obtener los mejores resultados en un análisis, ya que una complementa a la otra.

Estudios con las series meteorológicas permitieron evaluar el desempeño de ambos operadores, pues este tipo de datos se caracteriza por sus componentes perennes, estacionales, transitorias, determinísticas y aleatorias. Análisis adicionales, con series de más de un año, son necesarios para comprender la denominada variabilidad inter-anual, por ejemplo, es de esperar que fenómenos tales como el El Niño Oscilación Sur, o su contraparte “La Niña”, aparezcan en series más largas. Las metodologías de análisis wavelet tienen por tanto una buena perspectiva de utilización.

5. Agradecimientos

Las series de tiempo meteorológicas fueron recolectadas en la estación de la Facultad de Ingeniería Marítima y Ciencias Biológicas, Oceánicas y Recursos Naturales, como parte del proyecto ECLIMA, y provistas por el supervisor jefe del proyecto, el Dr. José Luis Santos Dávila.

6. Referencias

- [1] MANCERO MOSQUERA, M. I., “*Del Análisis de Fourier al Análisis Wavelet*”, Trabajo de final de graduación previo la obtención del título, Escuela Superior Politécnica del Litoral, Facultad de

- Ingeniería en Electricidad y Computación, 2014.
- [2] DAUBECHIES, I., *Ten Lectures On Wavelets*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, Pennsylvania, 1992.
- [3] PERCIVAL, D. B., "On Estimation of the Wavelet Variance", *Biometrika*, Volumen 82-3, 1995, pp. 619-631.
- [4] TANIZAKI, H., "Asymptotically Exact Confidence Intervals of CuSum and CuSumSq Tests: A Numerical Derivation Using Simulation Technique", *Communications in Statistics, Simulation and Computation*, Volumen 24-4, 1995, pp. 1019-1036.
- [5] DONOHO, D. L. & JOHNSTONE, I. M., "Adapting to Unknown Smoothness via Wavelet Shrinkage", *Journal of the American Statistical Association*, Volumen 90-432, 1995, pp. 1200-1224.
- [6] DONOHO, D. L. & JOHNSTONE, I. M., "Ideal Spatial Adaptation by Wavelet Shrinkage", *Biometrika*, Volumen 81-3, 1994, pp. 425-455.
- [7] MALLAT, S., *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Wiley, 1987.
- [8] PAWLOWICZ, R., BEARDSLEY, B. & LENTZ, S., "Classical Tidal Harmonic Analysis Including Error Estimates in Matlab using T_TIDE", *Computers & Geosciences*, Volume 28, 2002, pp. 929-937.