**ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL**
ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL

***FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS***

# ALGEBRA LINEAL

II TÉRMINO ACADÉMICO AÑO 2014

PRIMERA EVALUACIÓN Diciembre 11 de 2014

**COMPROMISO DE HONOR**

Yo, ………………………………………………………………………………………….………… al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que puedo usar un lápiz o esferográfico; que sólo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen; y, cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído, debo apagarlo y guardarlo, junto con cualquier otro material que se encuentre acompañándome. Además no debo consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a los que se entreguen en esta evaluación. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.
***Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptado la declaración anterior.***

***FIRMA:……………………………………………….…….. NÚMERO DE MATRÍCULA:…………………..PARALELO:….***

## TEMA 1 (10 puntos)

Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 9 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

a) Encuentre una base y determine la dimensión del Espacio Fila de $A$
b) Encuentre una base y determine la dimensión del Núcleo de $A$

| CRITERIO | PUNTAJE |
|---|---|
| **Encontrar una base para el Espacio Fila de** $A$ | **4** |
| **Determinar la dimensión del Espacio Fila de** $A$ | **1** |
| **Encontrar una base para el Núcleo de** $A$ | **4** |
| **Determinar la dimensión del Núcleo de** $A$ | **1** |

**TEMA 2 (17 puntos)**

Sea el espacio vectorial real $V = M_{2x2}$. Sean los subespacios de $V$ :

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2x2} \;/\; a - b + c = 0 \;\wedge\; a + 2b - d = 0 \right\}$$

$$W = gen\left\{ \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

a) Proporcione un ejemplo que muestre que $H \cup W$ no es un subespacio de $V$

b) ¿El vector $v = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ pertenece al subespacio $H \cap W$ ? Justifique su respuesta

c) Encuentre una base y determine la dimensión del subespacio $H + W$

d) ¿Es directa la suma $H + W$ ? Justifique su respuesta

| CRITERIO | PUNTAJE |
|---|---|
| **Construir un ejemplo que ponga en evidencia que $H \cup W$ NO es un subespacio de $V$** | **3** |
| **Probar que $v \in H$** | **2** |
| **Probar que $v \in W$** | **4** |
| **Encontrar una base para $H + W$** | **5** |
| **Determinar la dimensión de $H + W$** | **1** |
| **Justificar que la suma $H + W$ es directa** | **2** |

**TEMA 3 (17 puntos)**

Sea el espacio vectorial real $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in R^3 \,/\, a > 0 \;\; y \;\; b + c = 2 \right\}$ con las operaciones:

$$v_1 \oplus v_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 \\ b_1 + b_2 - 3 \\ c_1 + c_2 + 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \bullet v = \alpha \bullet \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{\alpha} \\ \alpha\, b + 3 - 3\alpha \\ \alpha\, c - 1 + \alpha \end{pmatrix}; \alpha \in R$$

a) Encuentre el vector nulo $n_V$ y el vector inverso aditivo del vector $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$

b) Pruebe que la suma es asociativa

c) Pruebe que $\forall \alpha, \beta \in R \;\; \forall v \in V \;\; (\alpha + \beta) \bullet v = (\alpha \bullet v) \oplus (\beta \bullet v)$

d) ¿El conjunto $S = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es linealmente independiente en $V$ ? Justifique

| CRITERIO | PUNTAJE |
|---|---|
| **Encontrar el vector nulo** $n_V$ | **3** |
| **Encontrar el vector inverso** $v'$ | **3** |
| **Probar que la suma** $\oplus$ **es asociativa** | **3** |
| **Probar que:** $\forall \alpha, \beta \in R \;\; \forall v \in V \;\; (\alpha + \beta) \bullet v = (\alpha \bullet v) \oplus (\beta \bullet v)$ | **4** |
| **Demostrar que el conjunto** $S$ **es linealmente dependiente** | **4** |

**TEMA 4 (17 puntos)**

Sean $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $B_2 = \{u_1, u_2, u_3\}$ bases del espacio vectorial $V = P_2$. Suponga:

$$[x^2 - x]_{B1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad [x+1]_{B1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad [2x^2 + 1]_{B1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[u_1 + u_2]_{B1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad [u_2 + u_3]_{B1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad [u_3]_{B1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Encuentre los vectores de ambas bases
b) Construya la matriz de cambio de base $C$ de la base $B_1$ a la base $B_2$

| CRITERIO | PUNTAJE |
|---|---|
| **Encontrar los vectores de la base $B_1$ (2 puntos por cada vector)** | **6** |
| **Encontrar los vectores de la base $B_2$ (2 puntos por cada vector)** | **6** |
| **Construir la matriz de cambio de base $C$** | **5** |

**<u>TEMA 5 (9 puntos)</u>**

Defina:

a) Suma Directa de Subespacios.-

b) Subespacio Vectorial.-

c) Dependencia Lineal de Vectores.-

| CRITERIO | PUNTAJE |
|---|---|
| **Por cada definición 3 puntos** | **9** |

**<u>NOTA:</u>** Si el estudiante enuncia un teorema en vez de la definición dada en clase se le asigna la calificación de CERO.

¡UN SOLO IDOLO TIENE EL ECUADOR!