ESCUELA SUPERIOR
POLITÉCNICA DEL LITORAL
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
PRIMERA EVALUACIÓN DE ANÁLISIS NUMÉRICO 7 DE JULIO DE 2015

MATRICULA: ....NOMBRE: .... **Luis Rodríguez Ojeda** ....PARALELO: ....

1. a) Sea $f \in C^{\infty}[a,b]$, y $\exists p \in [a,b]$, tal que $f(p) = 0$ y $f'(p) \neq 0$, entonces demuestre que existe un intervalo que contiene a p, tal que el método de Newton Raphson converge para cualquier p0 que pertenece a dicho intervalo.
   b) El precio de demanda de un producto está modelado mediante la ecuación:
   y=10*exp(-x)+4, y el precio de la oferta está modelado mediante la ecuación : y=10* x^2+2, utilizando el método de Newton, plantee la ecuación y encuentre un intervalo de convergencia.
   c) Encuentre el precio y demanda donde las curvas se interceptan (equilibrio).
   Rúbrica: a) 7% b) 8% c) 10%

a) Ecuación recurrente del método de Newton:

$$x = g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

Condición de convergencia

$|g'(x)|<1$

Dada **$f \in C^{\infty}[a,b]$,** sabiendo que **$\exists p \in [a,b]$, $f(p)=0$** y **$f'(p) \neq 0$**

Entonces $g'(p) = \frac{f(p)f''(p)}{[f'(p)]^2} = 0$, por lo tanto, **$\exists I \subset [a,b]$** tal que **$\forall x \in I(|g'(x)|<1)$** y **$p \in I$**

b) **$10e^{-x}+4 = 10x^2 + 2$**
$f(x) = 5e^{-x} - 5x^2 + 1 = 0$
$f'(x) = -5e^{-x} - 10x$

$f(0) = 6$, $f(1) = -5$, además **$f'(x)$** no cambia de signo $\Rightarrow$ **$\exists p \in [0, 1]$** y **p** es único

$f(x)<0, f'(x)<0, f''(x)<0$ para **$x \in (p, \infty)$**
Por el teorema de convergencia local, la fórmula converge con cualquier **$x \in (p, \infty)$**

c) $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$, **$i = 0, 1, 2, 3, \ldots$**

$x_0 = 1$ valor inicial
$x_1 = 0.8175$
$x_2 = 0.8046$
$x_3 = 0.8045$
$x_4 = 0.8045$

Precio = Demanda = **8.4730**

2. Se inyecta un colorante al torrente circulatorio de un paciente para medir su salida cardiaca, que es la tasa de flujo volumétrico de la sangre del ventrículo izquierdo del corazón. En otras palabras, la salida cardiaca es el número de litros de sangre que el corazón bombea por minuto. Para una persona en reposo, la tasa es de 5 a 6 litros por minuto. Si se trata de un maratonista durante una carrera, la salida cardiaca puede ser tan elevada como 30 litros por minuto. Los datos siguientes muestran la respuesta de un individuo cuando se inyectan 5 mg de colorante en el sistema vascular.

Tiempo (s)	2	6	9	12	15	18	20	24
Concentración (mg/L)	0.0	1.5	3.2	4.1	3.4	2.0	1.0	0.0

Rúbrica: a) 10% b) 5% c) 10%

a) Ajuste una curva polinómica de grado al menos 2.
b) Utilizando el polinomio anterior,iInterpole en todos los punto de la tabla y estime el error
c) Utilice la función polinómica para aproximar la salida cardiaca del paciente mediante la fórmula

$$Salida\ cardiaca = \frac{cantidad\ de\ colorante}{área\ bajo\ la\ curva}$$

a) $p_2(t)$: t= [2, 12, 24], f(t)= [0, 4.1, 0]

$$p_2(t) = \sum_{i=0}^{2} f_i L_i(t) = f_0 L_0(t) + f_1 L_1(t) + f_2 L_2(t) = 5L_0(t) + 6L_1(t) + 3L_2(t)$$

$$L_i(t) = \prod_{j=0, j\neq i}^{2} \frac{(t-t_j)}{(t_i-t_j)}, \quad i=0,\ 1,\ 2$$

$$L_0(t) = \prod_{j=0, j\neq 0}^{2} \frac{(t-t_j)}{(t_0-t_j)} = \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)} = \frac{(t-12)(t-24)}{(2-12)(2-24)} = \frac{t^2-36t+288}{220}$$

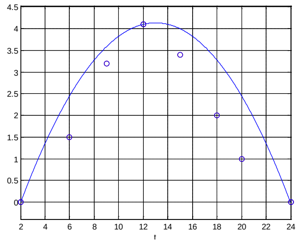
$$L_1(t) = \prod_{j=0, j\neq 1}^{2} \frac{(t-t_j)}{(t_1-t_j)} = \frac{(t-t_0)(t-t_2)}{(t_1-t_0)(t_1-t_2)} = \frac{(t-2)(t-24)}{(12-2)(12-24)} = \frac{t^2-26t+48}{-120}$$

$$L_2(t) = \prod_{j=0, j\neq 2}^{2} \frac{(t-t_j)}{(t_2-t_j)} = \frac{(t-t_0)(t-t_1)}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)} = \frac{(t-2)(t-12)}{(24-2)(24-12)} = \frac{t^2-14t+24}{264}$$

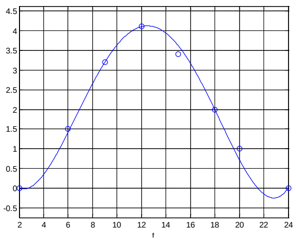
Sustituir en el polinomio y simplificar:

$$p_2(t) = 0(\ ) + 4.1\left(\frac{t^2-26t+48}{-120}\right) + 0(\ ) = -0.03416t^2 + 0.88833t - 1.64$$

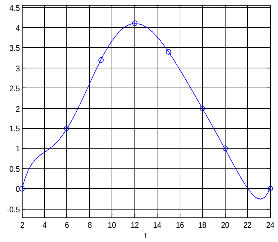
n=2



n=4



n=7



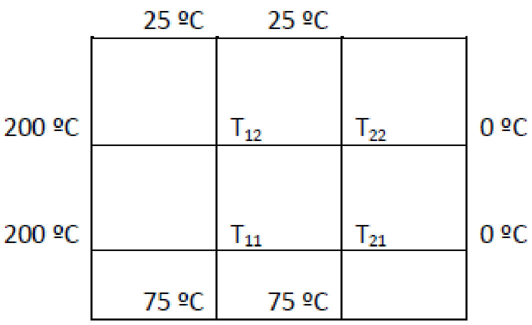
b)

t	f(t)	$p_2(t)$	|Error|
2	0	0	0
6	1.5	2.46	0.96
9	3.2	3.5875	0.3875
12	4.1	4.1	0
15	3.4	3.9975	0.5975
18	2	3.28	1.28
20	1	2.46	1.46
24	0	0	0

c) Salida cardiaca $= \dfrac{\textbf{cantidad de colorante}}{\textbf{área bajo la curva}} = \dfrac{5}{\int_2^{24} p_2(t)dt} = \dfrac{5}{60.6344} = \mathbf{0.082461}$

3. La distribución de temperatura de estado estable en una placa cuadrada, de 30 cm de lado y caliente está modelada por la ecuación de Laplace: $\frac{\delta^2 T}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 T}{\delta y^2} = 0$

Se representa la placa por una serie de nodos que forman cuadrículas que indican la temperatura en dichos nodos. Ya hemos calculado la temperatura en los nodos interiores de la placa, estos valores son: $T_{11} = 106.25$, $T_{12} = 93.75$, $T_{21} = 56.25$ y $T_{22} = 43.75$. Utilice un polinomio de grado tres en ambas direcciones para aproximar la temperatura en el centro de la placa.



Rúbrica: a) Interpolar en x=10, y=15 cm 7%
b) Interpolar en x=20, y=15 cm 7%
c) Interpolar en y=15, x=15 cm 11%

En las esquinas se supondrá un valor promedio

a) Interpolación en **x=15**

$$p_3(x) = \sum_{i=0}^{3} f_i L_i(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x) + f_3 L_3(x)$$

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{3} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}, \quad i=0,\ 1,\ 2,\ 3$$

$$L_0(x=15) = \prod_{j=0, j\neq 0}^{3} \frac{(15-x_j)}{(x_0-x_j)} = \frac{(15-x_1)(15-x_2)(15-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(15-10)(15-20)(15-30)}{(0-10)(0-20)(0-30)} = -0.0625$$

$L_1(x=15) = 0.5625$

$L_2(x=15) = 0.5625$

$L_3(x=15) = -0.0625$

$y=0:\quad p_3(x=15) = 137.5(-0.0625) + 75(0.5625) + 75(0.5625) + 37.5(-0.0625) = 73.4375$

$y=10:\quad p_3(x=15) = 200(-0.0625) + 106.25(0.5625) + 56.25(0.5625) + 0(-0.0625) = 78.9063$

$y=20:\quad p_3(x=15) = 200(-0.0625) + 93.75(0.5625) + 43.75(0.5625) + 0(-0.0625) = 64.8438$

$y=30:\quad p_3(x=15) = 112.5(-0.0625) + 25(0.5625) + 25(0.5625) + 12.5(-0.0625) = 20.3125$

b) Interpolación en **y=15** (la variable independiente **y** tiene los mismos factores que **x)**

$p_3(y=15) = 73.4375(-0.0625) + 78.9063(0.5625) + 64.8438(0.5625) + 20.3125(-0.0625) = 75$

4. Se tienen cuatro lingotes de 100 gr. cada uno compuestos del siguiente modo

Lingote	Oro (gramos)	Plata (gramos)	Cobre (gramos)	Estaño (gramos)
1	**20**	**50**	**20**	**10**
2	**30**	**40**	**10**	**20**
3	**20**	**40**	**10**	**30**
4	**50**	**20**	**20**	**10**

Se requiere determinar el peso en gramos que debe tomarse de cada uno de los cuatro lingotes anteriores para formar un nuevo lingote de 100 gramos que contenga 27 gramos de oro, 39.5 gramos de plata, 14 gramos de cobre y 19.5 gramos de estaño.

Rúbrica: a) 7% b) 10% c) 8%

a) Plantee un modelo matemático para describir este problema

b) Describa un método numérico directo para encontrar la solución. Muestre evidencia suficiente del uso del método numérico

c) Encuentre una cota para el error en la solución calculada y comente.

a) Modelo matemático

Sean x_1, x_2, x_3, x_4 cantidad de gramos que se toman de los lingotes **1, 2, 3, 4** respectivamente para formar el nuevo lingote:

Ecuaciones:

Gramos de oro: $\mathbf{20\%x_1 + 30\%x_2 + 20\%x_3 + 50\%x_4 = 27}$

Gramos de plata: $\mathbf{50\%x_1 + 40\%x_2 + 40\%x_3 + 20\%x_4 = 39.5}$

Gramos de cobre: $\mathbf{20\%x_1 + 10\%x_2 + 10\%x_3 + 20\%x_4 = 14}$

Gramos de estaño: $\mathbf{10\%x_1 + 20\%x_2 + 30\%x_3 + 10\%x_4 = 19.5}$

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 39.5 \\ 14 \\ 19.5 \end{bmatrix}$$

b) Método de eliminación de Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1.00000 & 1.5000 & 1.0000 & 2.5000 \\ 0 & 1.0000 & 0.2857 & 3.0000 \\ 0 & 0 & 1.0000 & -7.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 135 \\ 80 \\ -70 \\ 15 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 25 \\ 35 \\ 15 \end{bmatrix}$$

c) cond(a) = $||A||\ ||A^{-1}||$ = 1.5 * 30 = 45

Suponer que el error de redondeo está en el segundo decimal:

$\mathbf{|e_A| = ||E_A|| / ||A|| = 0.01/1.5 = 0.0067}$

$\mathbf{|e_X| \le cond(A)\,|(e_A)| = 45*0.0067 = 0.3015 = 30.15\%}$

Matriz bien condicionada. Normalmente el error real es bastante menor que la cota.