

T
620.105
BLVD



ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL

**Facultad de Ingeniería en Mecánica y Ciencias de la
Producción**

**“Desarrollo e Implementación de un Programa de Elementos
Finitos Para el Análisis y Simulación Dinámica de una
Estructura Bidimensional Tipo Pórtico”**

TESIS DE GRADO

Previo a la obtención del título de:

INGENIERO MECANICO

Presentada por:

Daniel Blum Velasco

Guayaquil – Ecuador

Año: 2004



DEDICATORIA

A mis padres, José Luis e Isabel Esperanza, a mis hermanos, María José y Sergio, y en especial a mi esposa, Karina, y a mi hijo, Gabriel.



AGRADECIMIENTO

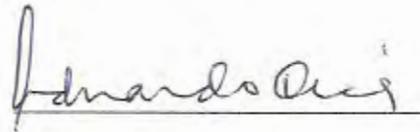
A mis padres, quienes siempre velaron por el bienestar y educación tanto mío como de mis hermanos, a mis profesores, quienes supieron transmitirme sus conocimientos, a mis compañeros, con quienes desarrollé vínculos de amistad que perduran más allá de nuestra etapa de estudiantes, y especialmente a mi esposa y a mi hijo.



TIBUNAL DE GRADUACIÓN



Ing. Francisco Andrade S.
SUBDECANO DE LA FIMCP
PRESIDENTE



Ing. Eduardo Orces P.
DIRECTOR DE TESIS



Ing. Jorge Félix N.
VOCAL



Ing. Alfredo Torres G.
VOCAL

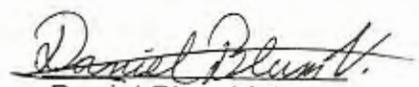


POLITECNICA DEL LITORAL
BIBLIOTECA "GONZALO ZUVALLOS"
F.I.M.

DECLARACION EXPRESA

"La responsabilidad del contenido de esta Tesis de Grado, me corresponden exclusivamente; y el patrimonio intelectual de la misma a la ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL"

(Reglamento de Graduación de la ESPOL)


Daniel Blum Velasco

RESUMEN

La presente tesis comprende el desarrollo de un grupo de programas de computadora con los cuales se realizan, empleando el método de elementos finitos, el análisis estático y dinámico tanto de pórticos bidimensionales como de cuerpos sólidos sometidos a esfuerzos planos. Los programas tienen como objetivo principal el servir de apoyo para el aprendizaje del método de elementos finitos a los estudiantes que tomen el curso de Análisis de Elementos Finitos de la Facultad de Ingeniería en Mecánica y Ciencias de la Producción.

En los capítulos 1 y 2 se revisan los fundamentos teóricos para el posterior desarrollo de los programas. En los capítulos 3 y 4, se describe el método seleccionado para la implementación de los programas, se muestra el diagrama de bloques de los mismos y luego son aplicados a varios ejemplos prácticos. En el capítulo 5 se presentan las conclusiones y observaciones obtenidas luego de la implementación y posterior aplicación de los programas.

Los programas han sido desarrollados con el lenguaje de programación Matlab®, por su característica de fácil manejo de funciones matemáticas y matriciales. Adicionalmente, se emplean ciertas funciones de la herramienta Calfem®, desarrollada por el Instituto Tecnológico de Lund, Suecia. Los programas realizan tanto el análisis del caso en el cual las cargas aplicadas son estáticas, como del caso en el cual las cargas son aplicadas de forma transiente, originando la vibración del sistema. En este último caso, se calculan tanto las frecuencias naturales de vibración de la estructura como las deformaciones, velocidades y aceleraciones nodales de la misma debido a las cargas dinámicas aplicadas, además de simular los modos naturales de vibración. Los programas han sido desarrollados de tal manera que pueden ser fácilmente modificados por el usuario para usarlos en otras aplicaciones más avanzadas o de mayor complejidad, así como en otras áreas de la Ingeniería como Transferencia de Calor y otras. En el apéndice se presentan tanto los códigos de los programas como un breve manual de usuario para la correcta utilización de los mismos.



Los programas han sido desarrollados con el lenguaje de programación Matlab®, por su característica de fácil manejo de funciones matemáticas y matriciales. Adicionalmente, se emplean ciertas funciones de la herramienta Calfem®, desarrollada por el Instituto Tecnológico de Lund, Suecia. Los programas realizan tanto el análisis del caso en el cual las cargas aplicadas son estáticas, como del caso en el cual las cargas son aplicadas de forma transiente, originando la vibración del sistema. En este último caso, se calculan tanto las frecuencias naturales de vibración de la estructura como las deformaciones, velocidades y aceleraciones nodales de la misma debido a las cargas dinámicas aplicadas, además de simular los modos naturales de vibración. Los programas han sido desarrollados de tal manera que pueden ser fácilmente modificados por el usuario para usarlos en otras aplicaciones más avanzadas o de mayor complejidad, así como en otras áreas de la Ingeniería como Transferencia de Calor y otras. En el apéndice se presentan tanto los códigos de los programas como un breve manual de usuario para la correcta utilización de los mismos.



INDICE GENERAL

	Pág.
RESUMEN	I
INDICE GENERAL	III
ABREVIATURAS	VI
SIMBOLOGIA	VII
INDICE DE FIGURAS	IX
INTRODUCCION	1
CAPITULO 1	
1. ANALISIS ESTATICO EMPLEANDO EL METODO DE ELEMENTOS	
FINITOS	4
1.1 Barras y Armaduras	6
1.1.1 Barras y armaduras bidimensionales	7
1.1.2 Barras y armaduras tridimensionales	15
1.2 Vigas y Pórticos	16
1.2.1 Vigas bidimensionales	16
1.2.2 Pórticos bidimensionales	21
1.2.3 Vigas y pórticos tridimensionales	23
1.3 Resolución del Sistema de Ecuaciones de Equilibrio Estático	

.....	29
1.4 Elementos Sólidos Triangulares Sometidos a Esfuerzos Planos	
.....	29
CAPITULO 2	
2. ANALISIS DINAMICO EMPLEANDO EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS	
.....	35
2.1 El Sistema Masa – Resorte – Amortiguador	36
2.2 Vibraciones Libres, Cálculo de Valores y Vectores Propios	40
2.3 El Método de Newmark	42
2.4 Análisis Modal	46
CAPITULO 3	
3. IMPLEMENTACION DE UN METODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA EL ANALISIS ESTATICO Y DINAMICO DE ESTRUCTURAS RETICULARES PLANAS Y CUERPOS SOLIDOS SOMETIDOS A ESFUERZOS PLANOS	
.....	49
3.1 Selección del Método Para Análisis Dinámico	49
3.2 Diagrama de Bloques del Programa	51



CAPITULO 4

4. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE LOS PROGRAMAS DESARROLLADOS	53
4.1 Análisis Estático y Dinámico de Pórticos Bidimensionales	53
4.2 Análisis Estático y Dinámico de Elementos Sólidos Triangulares	61

CAPITULO 5

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	64
APENDICES	66
BIBLIOGRAFIA	108



POLITECNICA DEL LITORAL
BIBLIOTECA "GONZALO ZEVALLOS"
F.I.M.C.P.

ABREVIATURAS

- 2D: Espacio bidimensional.
- 3D: Espacio tridimensional.
- G: Gravedad, aceleración gravitacional de la tierra.
- in: Pulgada.
- m: Metro.
- psi: Libras por pulgada cuadrada.
- Pa: Pascal.
- lb/in³: Libras por pulgada cúbica.
- Kg/mm³: Kilogramos por milímetro cúbico.
- Hz: Hertz, ciclos por segundo.
- s: Segundo.



SIMBOLOGIA

- u: Vector de desplazamientos.
- du/dt : Vector de velocidades.
- d^2u/dt^2 : Vector de aceleraciones.
- f: Vector local de fuerzas internas.
- F: Vector global de fuerzas internas.
- q: Vector local de fuerzas externas.
- Q: Vector global de fuerzas externas.
- m: Matriz local de masa.
- M: Matriz global de masa.
- k: Matriz local de rigidez.
- K: Matriz global de rigidez.
- c: Matriz local de amortiguamiento.
- C: Matriz global de amortiguamiento.
- ω : Frecuencia natural angular.
- f: Frecuencia natural.
- Ω_{crit} : Frecuencia crítica.
- T: Periodo de vibración.



- ρ : Densidad.
- A: Area transversal de la sección.
- L: Longitud del elemento.
- E: Módulo de Young.
- U_s : Energía potencial de deformación.
- E_p : Energía potencial total.
- T: Energía cinética.
- V: Energía potencial de las fuerzas aplicadas.
- R: Matriz de rotación.
- N: Matriz de Hermite.





INDICE DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1.1	Esquema de elemento tipo barra bidimensional 6
Figura 1.2	Esquema de condiciones de borde de un nodo 12
Figura 1.3	Esquema de elemento tipo viga bidimensional 17
Figura 1.4 27
Figura 1.5 27
Figura 1.6	Esquema de elemento sólido triangular 29
Figura 3.1	Diagrama de bloques del programa 53
Figura 4.1	Esquema de la estructura del ejemplo 1 55
Figura 4.2	Deformaciones estáticas de estructura tipo armadura 56
Figura 4.3	Perfil de modo de vibración de estructura tipo armadura 57
Figura 4.4	Esquema de la estructura del ejemplo 2 58
Figura 4.5	Deformaciones estáticas de estructura tipo pórtico 59
Figura 4.6	Perfil de modo de vibración de estructura tipo pórtico 59
Figura 4.7	Esquema de la estructura del ejemplo 3 60
Figura 4.8	Deformaciones estáticas de estructura tipo pórtico 62

Figura 4.9	Esquema de la estructura del ejemplo 4	63
Figura 4.10	Deformaciones estáticas de estructura tipo pórtico	65
Figura 4.11	Esquema del cuerpo del ejemplo 5	66
Figura 4.12	Deformaciones estáticas de cuerpo sólido sometido a esfuerzos planos	68
Figura 4.13	Contorno de esfuerzos de Von Mises de cuerpo sólido sometido a esfuerzos planos	69



INTRODUCCION

Esta tesis ha sido realizada por Daniel Blum Velasco, alumno de la carrera de Ingeniería en Mecánica de la Facultad de Ingeniería en Mecánica y Ciencias de la Producción.

La tesis consiste en la automatización del empleo de la caja de herramientas de Matlab® llamada Calfem, creada por varios miembros del Departamento de Mecánica de Sólidos del Instituto de Tecnología de Lund, Suecia. Dicha automatización tiene como fin simplificar la enseñanza del método de elementos finitos aplicado al análisis de los siguientes problemas:

- Armaduras bidimensionales, simulación de cargas estáticas y dinámicas.
- Pórticos bidimensionales, simulación de cargas estáticas y dinámicas.
- Cuerpos sólidos sometidos a esfuerzos planos (elementos triangulares).

Esto se logrará mediante la presentación de la secuencia de cálculos necesarios para resolver los distintos tipos de problemas, sin importar su geometría y propiedades físicas de los materiales.

Para lograr esto se creó una estructura de subrutinas que permita ejecutar las siguientes tareas básicas:

- Ingreso de los datos de entrada.



- Ejecución de los cálculos basándose en los datos de entrada.
- Presentación de los resultados (datos de salida).

Por lo cual el programa constará de tres partes claramente diferenciadas, según la tarea que se encargarán de ejecutar:

- Pre procesador.
- Procesador.
- Post procesador.

Cabe mencionar que cada uno de los problemas que la estructura de subrutinas permitirá analizar será tratado con un programa específico, dada la naturaleza de los datos de entrada y comportamiento físico de los sistemas a analizar. Cada uno de estos programas contará con operaciones similares pero realizadas con funciones distintas, siendo esta su mayor diferencia.

Debido a que la estructura de subrutinas permitirá la simulación del comportamiento de estructuras mecánicas bajo la acción de cargas dinámicas, lo cual consiste en resolver ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas, dicha estructura de subrutinas puede ser modificada en las funciones empleadas en cada programa con el fin de permitir el análisis de otros problemas físicos en los cuales dichas ecuaciones estén presentes, como es el caso de los problemas de transferencia de calor.

En los capítulos subsiguientes se presentarán las consideraciones teóricas para establecer las subrutinas necesarias para los cálculos de cada uno de los problemas (i.e. las operaciones matemáticas y modificación de los datos de entrada). De igual manera, se presentará la forma en que se realizan los cálculos individualmente para cada problema. Debido a que Calfem no dispone de ciertas funciones indispensables para realizar ciertos cálculos, en la presente tesis de grado se desarrollarán todas las funciones que sean necesarias.



CAPITULO 1

1. ANALISIS DE PROBLEMAS ESTATICOS EMPLEANDO EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS

Cuando se analiza una estructura cualquiera empleando el método de elementos finitos, se observan ciertas diferencias con los métodos analíticos, que consisten tanto en la metodología (se discretiza la estructura y se asumen funciones de interpolación), como en las incógnitas primarias (se encuentran primero los desplazamientos nodales y luego las fuerzas internas).

Para efectos de que el lector pueda observar las diferencias por sí mismo, se presenta a continuación la lista de pasos y procedimientos necesarios en el orden estricto en que deben ser llevados a efecto para la resolución de un problema cualquiera con el método de elementos finitos:

- ◆ Ingreso de coordenadas de los nodos.

- ◆ Ingreso de matriz de conectividad de nodos.
- ◆ Ingreso de condiciones de borde.
- ◆ Ingreso de propiedades mecánicas de los materiales y geométricas de los elementos.
- ◆ Ingreso de cargas externas.
- ◆ Elaboración de ecuaciones de equilibrio empleando los datos de entrada.
- ◆ Resolución de ecuaciones y obtención de incógnitas primarias (desplazamientos nodales) empleando las condiciones de borde.
- ◆ Obtención de incógnitas secundarias (fuerzas internas).
- ◆ Presentación de resultados.

Por lo que se puede observar, en los dos primeros pasos se procede a la discretización de la estructura, en base de la cual se desarrollan todos los pasos siguientes. De ahí la importancia de la correcta discretización de la estructura (junto con la aplicación de las condiciones de borde) para evitar posibles inestabilidades del método y los consiguientes errores en los valores de las incógnitas primarias y secundarias.

A continuación se presentan con un poco más de detalle las ecuaciones y métodos de resolución de cada uno de los problemas estáticos tanto en dos como en tres dimensiones:



1.1 Barras y Armaduras

Barras son elementos estructurales sometidos a cargas axiales únicamente; dichas cargas pueden ser de compresión o de tensión. Las armaduras son estructuras formadas por barras, las cuales están unidas por juntas articuladas que permiten transmitir únicamente cargas axiales a sus elementos.

Considérese un elemento estructural cualquiera:

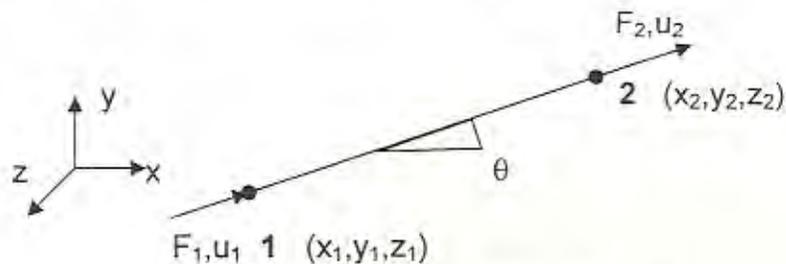


Fig. 1.1 Esquema de elemento tipo barra bidimensional

Donde los nodos 1 y 2 son los extremos de las barras y están ubicados en las coordenadas (x_1, y_1) e (x_2, y_2) y F_i, u_i son las fuerzas internas y desplazamientos nodales. Si k es la rigidez de la barra, entonces:

$$\begin{aligned} F_1 &= k(u_1 - u_2) \\ F_2 &= k(u_2 - u_1) \end{aligned} \quad (\text{Ec. 1.1})$$

Por consiguiente, la ecuación matricial de equilibrio estático sería:

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{Ec. 1.2})$$

Donde tanto u como F son vectores cuya dimensión depende del tipo de elemento que se analiza (barra, viga, 2D, 3D), al igual que la matriz k .

1.1.1 Barras y armaduras bidimensionales

Cuando el elemento que se analiza es una barra bidimensional, existen dos grados de libertad por cada nodo, por lo cual los vectores u y F del elemento son los siguientes:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i &= \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \\ \mathbf{F}_i &= \begin{Bmatrix} F_{x_i} \\ F_{y_i} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{Ec. 1.3})$$

Para encontrar el valor de la matriz k , debemos establecer las funciones de interpolación. Para tal efecto, asumiremos la variación lineal del desplazamiento a través del elemento:

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x \quad (\text{Ec. 1.4})$$

Donde $\alpha_{1,2}$ son constantes indeterminadas, cuyo número es igual al de grados de libertad del elemento. Aplicando las condiciones de borde:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 \\
 u_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_2 \\
 \therefore & \quad \quad \quad (\text{Ec. 1.5}) \\
 \alpha_1 &= \frac{u_1 x_2 - u_2 x_1}{x_2 - x_1} \\
 \alpha_2 &= \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1}
 \end{aligned}$$

Substituyendo en (4) y reordenando, se tiene:

$$\begin{aligned}
 u(x) &= \left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \right) u_1 + \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) u_2 \quad (\text{Ec. 1.6}) \\
 &= N_1 u_1 + N_2 u_2
 \end{aligned}$$

Donde:

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{Ec. 1.7})$$

Es el vector de polinomios de interpolación (o vector hermitiano), y $N_{1,2}$ son las funciones de interpolación del elemento (o polinomios de interpolación de Hermite). El vector hermitiano es de gran empleo en el análisis dinámico y para el cálculo de los valores de las incógnitas a lo largo del elemento.



Una vez que se tienen las funciones de interpolación, se prosigue con la obtención de la matriz de rigidez con el método de la energía potencial mínima:

$$E_p = \frac{1}{2} \int_l \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{A} \, dx - \int_l \mathbf{u}^T \mathbf{f} \mathbf{A} \, dx - \int_l \mathbf{u}^T \mathbf{T} \, dx - \sum_i \mathbf{u}_i \mathbf{p}_i \quad (\text{Ec. 1.8})$$

$$= U_e - W_v - W_s - W_c$$

Donde U_e es la energía de deformación elástica. Se empleará esta energía para determinar la matriz de rigidez k^e :

$$U_e = \frac{1}{2} \int_l \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{A} \, dx \quad (\text{Ec. 1.9})$$

Mediante el reemplazo en (Ec. 1.9) de: $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{q}$, y $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{q}$, se obtiene:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_l \mathbf{q}^T \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{q} \mathbf{A} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \left(\int_l \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{A} \, dx \right) \mathbf{q} \quad (\text{Ec. 1.10})$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{k} \mathbf{q}$$

Donde D es la matriz de propiedades del material, en este caso $D = [E]$, y B es la matriz de gradientes que relaciona las deformaciones unitarias con los desplazamientos nodales:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= \frac{du}{dx} \\
 &= \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} = \frac{u_2 - u_1}{L} \quad (\text{Ec. 1.11}) \\
 &= \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

Donde $\mathbf{B} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$ (Ec. 1.12)

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k}^e &= \frac{EA}{L^2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \int dx \quad (\text{Ec. 1.13}) \\
 &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

El segundo elemento de la ecuación (Ec. 1.8) corresponde a la fuerza distribuida en el volumen, y de manera análoga a la anterior, se obtiene:

$$\mathbf{f}^e = \frac{AL}{2} \mathbf{f} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{Ec. 1.14})$$

El tercer elemento de (Ec. 1.8), representa la fuerza distribuida en la superficie, y con procedimientos similares a los anteriores, se obtiene:

$$\mathbf{T}^e = \frac{L}{2} \mathbf{T} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{Ec. 1.15})$$

Por consiguiente, se puede reescribir la ecuación (Ec. 1.8) de la siguiente forma:

$$E_p^e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{k}^e \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{f}^e - \mathbf{q}^T \mathbf{T}^e - \mathbf{q}^T \mathbf{p}^e \quad (\text{Ec. 1.16})$$

Minimizando E_p :

$$\frac{dE_p^e}{dQ} = 0 \quad (\text{Ec. 1.17})$$

$$\therefore \mathbf{k}^e \mathbf{q} = \mathbf{f}^e + \mathbf{T}^e + \mathbf{p}^e$$

Matriz de rigidez global: para formar la matriz de rigidez global, se emplea cada una de las matrices de rigidez locales, así como la conectividad de los nodos (grados de libertad de los nodos que forman los elementos). Empleando dicha conectividad, se obtiene a partir de la ecuación (Ec. 1.16):

$$\begin{aligned} E_p &= \sum_e E_p^e = \sum_e \left(\frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{k}^e \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{f}^e - \mathbf{q}^T \mathbf{T}^e - \mathbf{q}^T \mathbf{p}^e \right) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \mathbf{K} \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T \mathbf{F} \end{aligned} \quad (\text{Ec. 1.18})$$

Minimizando la energía potencial E_p , se obtiene:

Donde la energía de deformación del resorte es:

$$U_s = \frac{1}{2} C (Q_1 - a_1)^2 \quad (\text{Ec. 1.20})$$

y la energía potencial total es:

$$E_p = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \mathbf{K} \mathbf{Q} + \frac{1}{2} C (Q_1 - a_1)^2 - \mathbf{Q}^T \mathbf{F} \quad (\text{Ec. 1.21})$$

Minimizando la energía potencial, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} K_{11} + C & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 + C a_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (\text{Ec. 1.22})$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtiene Q_1, Q_2, \dots, Q_n .

De esta manera, la reacción en el apoyo es:

$$R_1 = -C(Q_1 - a_1) \quad (\text{Ec. 1.23})$$

La primera ecuación del sistema se puede reescribir de a siguiente manera:

$$\left(\frac{K_{11}}{C} + 1 \right) Q_1 + \frac{K_{12}}{C} Q_2 + \dots + \frac{K_{1n}}{C} Q_n = \frac{F_1}{C} + a_1 \quad (\text{Ec. 1.24})$$

Por consiguiente, si C fuese un valor grande, entonces $Q_1 \approx a_1$. Para esto, normalmente se emplea un valor de $C = \max(K) \times 10^4$.

Armaduras: Las armaduras son estructuras formadas por barras unidas entre sí por juntas articuladas. Los elementos de la misma soportan únicamente cargas axiales, ya sean de tensión o de compresión. En estas estructuras, la dirección de la barra incide en la matriz de rigidez global. Por consiguiente, se debe analizar esta incidencia:

Consideremos la barra del dib. 1. Esta forma un ángulo de valor θ con la horizontal. Por consiguiente, las componentes de los desplazamientos nodales son:

$$\begin{aligned} u' &= u \cos \theta + v \operatorname{sen} \theta \\ v' &= v \cos \theta + u \operatorname{sen} \theta \end{aligned} \quad (\text{Ec. 1.25})$$

O escrito de forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} u' \\ v' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (\text{Ec. 1.26})$$

Aplicando esto a ambos extremos del elemento, se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} u_1' \\ v_1' \\ u_2' \\ v_2' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \\ 0 & 0 & -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{Ec. 1.27})$$

$$\mathbf{q}' = \mathbf{R} \mathbf{q}$$

Donde \mathbf{R} es la matriz de rotación, la cual debe cumplir con las condiciones:

$$\mathbf{R}(\theta) \mathbf{R}(-\theta) = \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{I}$$

$$\therefore \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$$

La misma es aplicable al vector de fuerzas nodales y a la matriz de rigidez:

$$\mathbf{f}' = \mathbf{R} \mathbf{f}^e$$

$$\mathbf{k}' = \mathbf{R} \mathbf{k}^e \quad (\text{Ec. 1.28})$$

Estos procedimientos también son aplicables de igual manera a las vigas y pórticos, así como a elementos tridimensionales, en cuyos casos se deben hacer las consideraciones respectivas.

1.1.2 Barras y armaduras tridimensionales

En el caso de las barras tridimensionales, existen 3 grados de libertad por cada nodo. De forma análoga al caso bidimensional, se obtienen las ecuaciones de fuerzas y deformaciones:

$$\mathbf{k} = \mathbf{G}' \mathbf{k}_e \mathbf{G} \text{ (Ec. 1.29)}$$

Donde \mathbf{k}_e es la misma matriz de la ecuación (Ec. 1.13), y \mathbf{G} es la matriz de rotación tridimensional, la cual se obtiene de forma análoga. Mientras, la relación matricial esfuerzo – deformación es la misma que en el caso bidimensional (Ec. 1.19), y la forma de ensamblar la matriz de rigidez global es la misma descrita en (Ec. 1.18).

1.2 Vigas y Pórticos

Una viga es un elemento estructural sometido a fuerzas axiales, fuerzas transversales y momentos. Un pórtico es una estructura formada por vigas, unidas por juntas rígidas que transmiten fuerzas tanto axiales como transversales y momentos de un elemento a otro.

1.2.1 Vigas bidimensionales

En las vigas, los nodos tienen 2 grados de libertad cada uno (6 en el caso tridimensional), los cuales son desplazamiento transversal y rotación. Por consiguiente, la matriz de rigidez tendrá una dimensión 4 x 4, mientras que el vector de fuerzas internas y el vector de

desplazamientos nodales tendrán una dimensión 4×1 . La forma de determinar los elementos de la matriz de rigidez es la misma que se emplea en el caso de las barras, sólo cambian las condiciones de borde. Así:

Considérese un elemento estructural cualquiera:

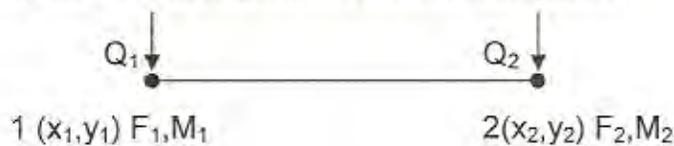


Fig. 1.3 Esquema de elemento tipo viga bidimensional

Donde Q_1 y Q_2 son cargas transversales y momentos aplicados al elemento por agentes externos. Por razones propias del método de elementos finitos, se asume que las cargas son únicamente aplicadas en los nodos, y en caso de existir cargas distribuidas, se emplean cargas puntuales equivalentes. Por conocimientos previos de mecánica de sólidos, se tiene la ecuación de deflexión en vigas:

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = 0 \quad (\text{Ec. 1.30})$$

La cual nos indica que se deberá emplear un polinomio de interpolación de tercer grado, el cual es una solución exacta de la ecuación diferencial anterior:

ESPOL

$$\begin{aligned}
 v(x) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \\
 &= (1, x, x^2, x^3) \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{Ec. 1.31}) \\
 &= M(x) \alpha
 \end{aligned}$$

Donde las condiciones de borde son:

$$\begin{aligned}
 x = 0, \quad q_1 = v_1 = \alpha_1, \quad q_2 = v_1' = \alpha_2 \\
 x = L, \quad q_3 = v_2 = \alpha_1 + \alpha_2 L + \alpha_3 L^2 + \alpha_4 L^3, \quad q_4 = v_2' = \alpha_2 + 2 \\
 \alpha_3 L + 3 \alpha_4 L^2
 \end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & L & L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{Ec. 1.32}) \\
 \mathbf{q} &= \mathbf{C} \alpha
 \end{aligned}$$

De donde se infiere que:

$$v(x) = M(x) \alpha = M(x) C^{-1} \mathbf{q} = N(x) \mathbf{q} \quad (\text{Ec. 1.33})$$

Donde $N(x)$ es el vector de polinomios de interpolación, y las funciones de interpolación son:

Donde $p(x)$ es la carga distribuida por unidad de longitud y P_m, M_k son las fuerzas y momentos concentrados aplicados en los nodos.

De igual manera:

$$\begin{aligned} v(x) &= \mathbf{N}(x) \mathbf{q} \\ \frac{d^2 v}{dx^2} &= \mathbf{N}''(x) \mathbf{q} \\ \therefore \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 &= \mathbf{q}^T (\mathbf{N}''(x))^T (\mathbf{N}(x)) \mathbf{q} \end{aligned} \quad (\text{Ec. 1.36})$$

De donde se deduce que:

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \left(\int_0^L EI (\mathbf{N}'')^T \mathbf{N}'' dx \right) \mathbf{q} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{k} \mathbf{q} \end{aligned} \quad (\text{Ec. 1.37})$$

Por consiguiente:

$$\mathbf{k}^e = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 1.38})$$

Es la matriz de rigidez de una viga.

Existen otro tipo de vigas, las llamadas vigas – columna, las cuales soportan además de cargas transversales y momentos flectores, cargas axiales. Estas vigas tienen 3 grados de libertad por nodo, por

lo cual la matriz de rigidez respectiva será diferente. Dicha matriz se obtiene fácilmente de la inserción de los polinomios de interpolación (Ec. 1.7) de los elementos tipo barra en el vector hermitiano de las vigas (Ec. 1.34). Estos polinomios lineales corresponderían al primer y cuarto elementos del vector hermitiano de las viga – columna, mientras que los polinomios de (Ec. 1.34) serían en el mismo orden, el segundo, tercer, quinto y sexto elementos del vector hermitiano de las viga – columna:

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} \frac{x}{L} \\ 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 1 \\ \left[\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \frac{x}{L}\right] L \\ 1 - \frac{x}{L} \\ -2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 \\ \left[\left(\frac{x}{L}\right)^3 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right] L \end{Bmatrix} \quad (\text{Ec. 1.39})$$

Estos elementos son ampliamente empleados en los pórticos. Son elementos restringidos a relaciones de esbeltez L/r pequeñas, es decir elementos en los que no hay pandeo.



1.2.2 Pórticos bidimensionales

Los pórticos son la unión de vigas con orientación arbitraria, por lo cual se requerirá el empleo de las matrices de rotación para el cálculo de la matriz de rigidez local:

$$k' = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EI}{L^3} & 6\frac{EI}{L^2} & 0 & -12\frac{EI}{L^3} & 6\frac{EI}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EI}{L^2} & 4\frac{EI}{L} & 0 & -6\frac{EI}{L^2} & 2\frac{EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EI}{L^3} & -6\frac{EI}{L^2} & 0 & 12\frac{EI}{L^3} & -6\frac{EI}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EI}{L^2} & 2\frac{EI}{L} & 0 & -6\frac{EI}{L^2} & 4\frac{EI}{L} \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 1.40})$$

La cual se debe expresar en coordenadas globales de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} q' &= R q \\ p' &= R p \end{aligned} \quad (\text{Ec. 1.41})$$

Donde R es la matriz de rotación:

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 1.42})$$

Por consiguiente:

$$\begin{aligned} p' &= k' q' \\ \therefore R p &= k' R q && \text{(Ec. 1.43)} \\ \therefore p &= (R^T k' R) q \end{aligned}$$

Mientras que:

$$\begin{aligned} p &= k^e q \\ k^e &= R^T k' R && \text{(Ec. 1.44)} \end{aligned}$$



Donde k^e es la matriz de rigidez del elemento expresada en coordenadas globales.

Gracias a la estructura básica del método de elementos finitos, se mantienen las mismas relaciones matriciales esfuerzo – deformación y la forma de ensamblar la matriz de rigidez global vistas desde un principio.

1.2.3 Vigas y pórticos tridimensionales

Cuando los elementos tipo viga tienen una orientación tridimensional, los grados de libertad por nodo son 6. Esto implica que la dimensión de la matriz de rigidez será de 12 x 12, mientras que la dimensión del

vector de desplazamientos y del vector de fuerzas internas será de 12×1 . Los grados de libertad de estos últimos dos son:

Vector de fuerzas internas:

$$p' = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{z1} \\ T_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{z2} \\ T_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix} \quad (\text{Ec. 1.45})$$

Vector de desplazamientos nodales:

$$q' = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \theta_{z1} \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} \quad (\text{Ec. 1.46})$$

Los cuales están expresados en coordenadas locales. De igual manera, la relación matricial entre cargas y desplazamientos es, en coordenadas locales:

$$p' = k'q \quad (\text{Ec. 1.47})$$

Donde k' es la matriz de rigidez expresada en coordenadas locales:

$$k' = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 6\frac{EI_y}{L^2} & 0 & -12\frac{EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 6\frac{EI_x}{L^2} \\ 0 & 0 & 12\frac{EI_y}{L^3} & 0 & -6\frac{EI_x}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -12\frac{EI_z}{L^3} & 0 & -6\frac{EI_x}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6\frac{EI_x}{L^2} & 0 & 4\frac{EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & 6\frac{EI_x}{L^2} & 0 & 2\frac{EI_x}{L} & 0 \\ 0 & 6\frac{EI_x}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 4\frac{EI_y}{L} & 0 & -6\frac{EI_x}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 2\frac{EI_x}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -6\frac{EI_y}{L^2} & 0 & 12\frac{EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -6\frac{EI_x}{L^2} \\ 0 & 0 & -12\frac{EI_y}{L^3} & 0 & 6\frac{EI_x}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 12\frac{EI_z}{L^3} & 0 & 6\frac{EI_x}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6\frac{EI_x}{L^2} & 0 & 2\frac{EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & 6\frac{EI_x}{L^2} & 0 & 4\frac{EI_x}{L} & 0 \\ 0 & 6\frac{EI_x}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 2\frac{EI_y}{L} & 0 & -6\frac{EI_x}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 4\frac{EI_x}{L} \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 1.48})$$

La matriz de rotación R para transformar las coordenadas locales a globales es:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} l_1 m_1 n_1 & & & & \\ l_2 m_2 n_2 & 0 & 0 & 0 & \\ l_3 m_3 n_3 & & & & \\ & l_1 m_1 n_1 & & & \\ 0 & l_2 m_2 n_2 & 0 & 0 & \\ & l_3 m_3 n_3 & & & \\ & & l_1 m_1 n_1 & & \\ 0 & 0 & l_2 m_2 n_2 & 0 & \\ & & l_3 m_3 n_3 & & \\ & & & l_1 m_1 n_1 & \\ 0 & 0 & 0 & l_2 m_2 n_2 & \\ & & & l_3 m_3 n_3 & \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 1.49})$$

Donde:

l_1, m_1, n_1 son los cosenos directores del eje local x' con respecto a los ejes globales x, y, z .

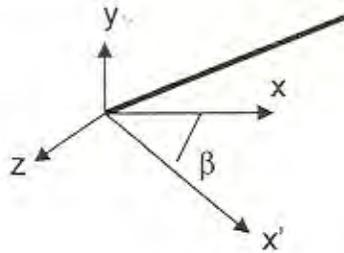
l_2, m_2, n_2 son los cosenos directores del eje local y' con respecto a los ejes globales x, y, z .

l_3, m_3, n_3 son los cosenos directores del eje local z' con respecto a los ejes globales x, y, z .

Los cuales están expresados en coordenadas globales por:

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{x_2 - x_1}{L} \\ m_1 &= \frac{y_2 - y_1}{L} \\ n_1 &= \frac{z_2 - z_1}{L} \end{aligned} \quad (\text{Ec. 1.50})$$

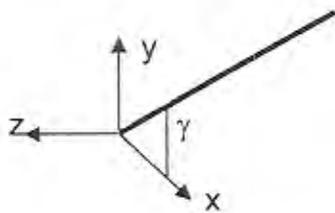
Otra forma de determinar la matriz de rotación es rotando los ejes globales hasta hacerlos coincidir con los ejes locales del elemento. Primero se rota un ángulo β alrededor del eje "y" hasta que el eje "x" global coincide con el eje x' local proyectado sobre el plano xz:



(Figura 1.4)

$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \text{sen } \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen } \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 1.51})$$

Luego, se rota un ángulo γ alrededor del eje global "z" (rotado anteriormente en el mismo plano xz). El eje "z" global sigue permaneciendo paralelo al plano xz, mientras que el eje "x" global (rotado en el paso anterior) coincide con el eje x' local:



(Figura 1.5)

$$R_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \text{sen } \gamma & 0 \\ -\text{sen } \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 1.52})$$

Estas dos rotaciones pueden ser combinadas en una tercera rotación única:

$$\mathbf{R}_{zy} = \mathbf{R}_z(\gamma) \mathbf{R}_y(\beta) \quad (\text{Ec. 1.53})$$

Después de la última rotación, el eje "y" rotado tiene una proyección en la dirección positiva del eje global "y" original. Nótese que el plano que forman los ejes globales "x" e "y" rotados sigue siendo un plano vertical. En la gran mayoría de ocasiones esto es suficiente, pues éste plano suele ser un plano principal de la sección.

En otros casos, en los que la sección del elemento está rotada con respecto al eje local x' (el eje local z' no es paralelo al plano xz), se vuelve necesario rotar un ángulo α alrededor del eje local x' con el fin de alinear los ejes principales de la sección con los ejes globales. Por consiguiente:

$$\mathbf{R}_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \text{sen}\alpha \\ 0 & -\text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 1.54})$$

$$\therefore \mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_x(\alpha) \mathbf{R}_{zy}$$



Esta matriz de rotación se la emplea también para transformar las componentes de fuerzas según los ejes locales a componentes según los ejes globales (igual sucede con los desplazamientos):

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_x &= \mathbf{R} \mathbf{f}_e' \\ \mathbf{q} &= \mathbf{R} \mathbf{q}' \end{aligned} \quad (\text{Ec. 1.55})$$

1.3 Resolución del Sistema de Ecuaciones de Equilibrio Estático

Para resolver el sistema de ecuaciones $\mathbf{F} = \mathbf{K} \mathbf{Q}$, se deben seguir los siguientes pasos en orden estricto:

- Primero se ensambla la matriz de rigidez global \mathbf{K} y el vector global de fuerzas externas \mathbf{F} .
- Luego se aplican las condiciones de borde y se separan las ecuaciones correspondientes a los grados de libertad no restringidos, para con estos y las fuerzas externas determinar por un método iterativo los desplazamientos nodales.
- Luego, se encuentran las fuerzas internas de los elementos usando la conectividad y los desplazamientos encontrados en el paso anterior.
- Finalmente, se encuentran las fuerzas en los apoyos mediante:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \mathbf{Q} - \mathbf{F}_i \quad (\text{Ec. 1.56})$$

1.4 Elementos Sólidos Triangulares Sometidos a Esfuerzos Planos

Para este tipo de elementos, se emplea la misma ecuación matricial de equilibrio $F = K Q$, empleando los mismos pasos descritos anteriormente. Considérese ahora el elemento sólido triangular:

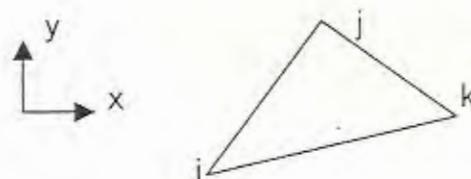


Fig. 1.6 Esquema de elemento sólido triangular

Donde los desplazamientos nodales están dados por los vectores:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i &= \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \\ \mathbf{a}_j &= \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \\ \mathbf{a}_k &= \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \end{Bmatrix} \quad (\text{Ec. 1.57}) \\ \mathbf{a}^e &= \begin{Bmatrix} a_i \\ a_j \\ a_k \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Las fuerzas nodales están dadas, en cambio, por los vectores:

$$\mathbf{f}^e = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_k \\ V_k \end{Bmatrix} \quad (\text{Ec. 1.58})$$

En cambio, para obtener el vector de campo de deformaciones unitarias ε , se relaciona a esta con el vector campo de deformaciones mediante:

$$\varepsilon = \mathbf{B} \mathbf{a}^e \quad (\text{Ec. 1.64})$$

Donde:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_i & a_j & a_k \\ a_i & a_j & a_k & b_i & b_j & b_k \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 1.65})$$

Los esfuerzos a los que está sometido el elemento están dados por la ecuación matricial:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (\text{Ec. 1.66})$$

Donde:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{Ec. 1.67})$$

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 1.68})$$

Donde D es la matriz de la ley constitutiva, E es el módulo de Young y ν es el módulo de Poisson.

Para encontrar la relación entre las fuerzas aplicadas y los desplazamientos nodales están dadas por:

$$\mathbf{k}^e \mathbf{a}^e = \mathbf{q}^e - \mathbf{f}^e \quad (\text{Ec. 1.69})$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^e &= \iiint_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, dv \\ &= \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, tA \end{aligned} \quad (\text{Ec. 1.70})$$

$$\mathbf{f}^e = \iiint_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 \, dv - \iiint_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \, dv \quad (\text{Ec. 1.71})$$

$$\mathbf{q}^e = \iiint_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} \, dv + \iint_A \mathbf{N}^T \mathbf{T} \, dv \quad (\text{Ec. 1.72})$$

Donde la primera integral de la (Ec. 1.72) representa a las fuerzas de cuerpo, y la segunda integral representa a las fuerzas nodales de tracción:

$$\mathbf{q}_{\text{cuerpo}} = \frac{tA}{3} \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_x \\ b_y \end{Bmatrix} \quad (\text{Ec. 1.73})$$

$$\mathbf{q}_{tracción} = \begin{Bmatrix} f_{i,x} \\ f_{i,y} \\ f_{j,x} \\ f_{j,y} \\ f_{k,x} \\ f_{k,y} \end{Bmatrix} \quad (\text{Ec. 1.74})$$

Para transformar la matriz de rigidez de coordenadas locales a coordenadas globales, se emplea la matriz de transformación \mathbf{T} :

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^T \mathbf{k}^e \mathbf{T} \quad (\text{Ec. 1.75})$$

Donde:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 1.76})$$

El método que se emplea para resolver la ecuación matricial de equilibrio de este tipo de elementos es el mismo que se emplea en todos los problemas de elementos finitos, de ahí la simplicidad del método.

CAPITULO 2

2. ANALISIS DINAMICO EMPLEANDO EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS

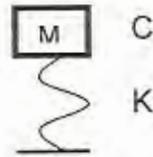
En la resolución de problemas dinámicos (vibraciones) de estructuras mecánicas o cuerpos sólidos empleando el método de elementos finitos, se sigue la misma lista de pasos y procedimientos vistos en el inicio del capítulo anterior. Igualmente, se toma en cuenta la correcta discretización, la cual se vuelve aún más importante en el caso que compete a este capítulo, pues pequeñas variaciones pueden alterar significativamente los resultados.

En este capítulo se presentan varios métodos de resolución de problemas dinámicos, uno de los cuales será empleado en el programa de computadora motivo de esta tesis:



2.1 El Sistema Masa – Resorte – Amortiguador

Sea un elemento estructural (barra, viga o elemento sólido) con una matriz de rigidez K , de densidad ρ y que ofrece un amortiguamiento c (veremos posteriormente cómo se determina la matriz de amortiguamiento C):



Recordando el principio de Hamilton:

$$\int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0 \quad (\text{Ec. 2.1})$$

Donde T es la energía cinética del sistema, V es la energía potencial de las fuerzas aplicadas y t es el tiempo. Empleando q_i como las coordenadas generalizadas y asumiendo que son independientes, las ecuaciones de Euler – Lagrange se transforman en las ecuaciones de Lagrange de movimiento, dadas a continuación en términos del Lagrangiano $L = T - V$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (\text{Ec. 2.2})$$

Para $i = 1, 2, \dots, n$.



Para desarrollar el principio de Hamilton, se emplea el principio de D'Alembert, el cual parte de la cuarta ley de Newton, escrita en la siguiente manera:

$$\mathbf{F} - m \mathbf{a} = 0 \quad (\text{Ec. 2.3})$$

Donde el vector $-m\mathbf{a}$ es considerado una fuerza. Esta ecuación tiene una forma similar a las empleadas en estática. Para un elemento continuo y deformable, la fuerza inercial según el principio de D'Alembert es $-\rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2}$ y es una fuerza distribuida en todo el cuerpo.

Si B es una fuerza distribuida por todo el cuerpo (densidad), y T es una fuerza externa puntual, entonces:

$$\iiint_V \mathbf{B}_i \delta \mathbf{u}_i dv + \iint_S \mathbf{T}_i^{(v)} \delta \mathbf{u}_i dS - \iiint_V \rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} \delta \mathbf{u}_i dv = \iiint_V \boldsymbol{\tau}_{ij} \delta \boldsymbol{\epsilon}_{ij} dv$$

$$(\text{Ec. 2.4})$$

Si el vector de desplazamientos u tiene tres componentes, entonces:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (\text{Ec. 2.5})$$

Con lo cual se puede expresar la ecuación (Ec. 2.4) en forma matricial, reordenando:

$$-\iiint \rho \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} dv + \iiint \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} dv + \oint \delta \mathbf{u}^T \mathbf{T} dA = \iiint \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dv \quad (\text{Ec. 2.6})$$

Si incluimos la disipación de energía, se puede considerar a ésta como:

$$\delta W_{\text{dis}} = \delta \left(\iiint \mathbf{u}^T \mathbf{f} dv \right) \quad (\text{Ec. 2.7})$$

Donde $\{f\}$ es la fuerza de disipación por unidad de volumen. Para el caso de amortiguamiento viscoso, ésta fuerza es proporcional a la velocidad, por lo cual se puede expresar como:

$$\mathbf{f} = c \dot{\mathbf{u}} \quad (\text{Ec. 2.8})$$

Si ahora se discretiza el cuerpo en pequeños elementos finitos, y si $\{u\}$ es expresado en términos de desplazamientos nodales y funciones de interpolación, de manera que $u = N u$. De esta forma, se expresa $\boldsymbol{\varepsilon} = B a$ y $\boldsymbol{\sigma} = D \boldsymbol{\varepsilon}$.

Empleando en la ecuación (Ec. 2.6) la expresión del amortiguamiento viscoso y los vectores de desplazamiento y fuerzas externas, se obtiene la expresión:

$$\begin{aligned}
 & - \iiint_V \rho \delta \mathbf{a}^T \mathbf{N}^T \mathbf{N} \ddot{\mathbf{u}} \, dv + \iiint_V \delta \mathbf{a}^T \mathbf{N}^T \mathbf{b} \, dv + \oint_S \delta \mathbf{a}^T \mathbf{N}^T \mathbf{T} \, dA \\
 & - \iiint_V \delta \mathbf{a}^T \mathbf{N}^T c \mathbf{N} \dot{\mathbf{u}} \, dv = \iiint_V \delta \mathbf{a}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u} \, dv
 \end{aligned} \tag{Ec. 2.9}$$

La cual se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\delta \mathbf{a}^T (\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u}) = \delta \mathbf{a}^T \mathbf{q} \tag{Ec. 2.10}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} &= \iiint_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, dv \\
 \mathbf{C} &= \iiint_V c \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, dv \\
 \mathbf{K} &= \iiint_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, dv \\
 \mathbf{q} &= \iiint_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} \, dv + \oint_S \mathbf{N}^T \mathbf{T} \, dA
 \end{aligned} \tag{Ec. 2.11}$$

Son las matrices de masa, amortiguamiento, rigidez y el vector de cargas externas, respectivamente. Se elimina el término $\{\delta \mathbf{a}\}^T$ de la ecuación (Ec. 2.10) para simplificarla:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{q} \tag{Ec. 2.12}$$

Que es la ecuación básica del movimiento de un elemento.

Cuando se comparan las matrices \mathbf{M} y \mathbf{C} , se nota que cuando c y ρ son constantes, lo cual ocurre en la mayoría de los casos, estas dos matrices son proporcionales, de manera que:

$$\mathbf{C} = \frac{c}{\rho} \mathbf{M} = \alpha \mathbf{M} \quad (\text{Ec. 2.13})$$

Donde α es un valor obtenido experimentalmente.

2.2 Vibraciones Libres, Cálculo de Valores y Vectores Propios

Si se considera el caso del movimiento armónico no amortiguado, sin fuerzas de amortiguamiento (disipación) y sin cargas externas que realicen un trabajo, la ecuación (Ec. 2.12) se podría reescribir de la forma:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (\text{Ec. 2.14})$$

La cual es la ecuación global de vibraciones libres. Si se asume una solución para u de la forma:

$$\mathbf{u} = \mathbf{a} e^{i\omega t} \quad (\text{Ec. 2.15})$$

Donde a es un vector de elementos constantes llamado el vector modal y ω es una frecuencia natural. Sustituyendo esta solución en la ecuación (Ec. 2.14), se tiene:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (\text{Ec. 2.16})$$



El cual es un problema de valores y vectores propios. Si se busca una solución no trivial de a , es necesario que la determinante de los coeficientes de a sea cero para la ecuación reducida, la cual incluye las condiciones de borde del sistema. Esto implica que:

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0 \quad (\text{Ec. 2.17})$$

Debe tomarse en cuenta que la resolución de esta ecuación no es confiable y eficiente para sistemas de gran magnitud. En estos casos se modifica la ecuación (Ec. 2.16) para quedar de la forma:

$$(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{I}) \mathbf{a} = 0 \quad (\text{Ec. 2.18})$$

Por lo cual la ecuación (Ec. 2.15) se transforma en:

$$|\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{I}| = 0 \quad (\text{Ec. 2.19})$$

Ecuación que resulta mucho más simple de resolver. Cabe recordar que se está aplicando la ecuación reducida. Para obtención de esta ecuación reducida se aplican los valores de las condiciones de borde a la matriz de masa. La forma como se lo hace es haciendo cero las filas y columnas de la matriz de masa correspondientes a los grados de libertad restringidos. Esto provoca que aparezcan n valores propios "artificiales" de valor cero al resolver el sistema, siendo n el número de grados de libertad restringidos. Estos valores cero no

representan una frecuencia natural del sistema, sino únicamente que el sistema tiene nodos restringidos.

Cabe anotar que en la simulación dinámica de una estructura se emplea la misma matriz de masa restringida.

2.3 El Método de Newmark

Recordemos la ecuación de movimiento:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{q} \quad (\text{Ec. 2.12})$$

El problema de valor inicial (Ec. 2.12) consiste en encontrar un desplazamiento $d = d(t)$ que satisfaga las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(0) &= \mathbf{u}_0 \\ \dot{\mathbf{u}}(0) &= \mathbf{v}_0 \end{aligned} \quad (\text{Ec. 2.20})$$

Uno de los métodos más empleados en la resolución de la ecuación (Ec. 2.12) es la familia de métodos de Newmark, la cual consiste en las siguientes ecuaciones básicas, que son modificadas dependiendo del método específico que se emplea:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{C} \mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{K} \mathbf{d}_{n+1} &= \mathbf{F}_{n+1} \\ \mathbf{d}_{n+1} &= \mathbf{d}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \frac{\Delta t^2}{2} [(1-2\beta) \mathbf{a}_n + 2\beta \mathbf{a}_{n+1}] \\ \mathbf{v}_{n+1} &= \mathbf{v}_n + \Delta t [(1-\gamma) \mathbf{a}_n + \gamma \mathbf{a}_{n+1}] \end{aligned} \quad (\text{Ec. 2.21})$$

Donde d_n , v_n , a_n son las aproximaciones de u_n , \dot{u}_n , \ddot{u}_n respectivamente. La primera ecuación corresponde a la ecuación de movimiento expresada en función de las soluciones aproximadas, y las dos siguientes corresponden a fórmulas de diferencia finita que describen la evolución de la solución aproximada. Los parámetros β e γ determinan la exactitud y estabilidad del método empleado.

El análisis de la convergencia de la familia de métodos de Newmark comprende varios pasos:

- Reducción a un modelo de grados de libertad simples.
- Definición de una noción de estabilidad aceptable.
- Determinación del error local de truncado.
- Empleo de las dos últimas condiciones para demostrar la estabilidad del sistema.

Algunas condiciones de la forma de C deben ser asumidas, por ejemplo, el amortiguamiento de Rayleigh:

$$C = a M + b K \quad (\text{Ec. 2.22})$$

Lo cual permite encontrar el radio de amortiguamiento:

$$\xi = \left(\frac{a}{\omega} + b \omega \right) \quad (\text{Ec. 2.23})$$

El problema de grados de libertad simples puede ser redefinido como:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{A} \mathbf{y}_n + \mathbf{L}_n \quad (\text{Ec. 2.24})$$

Donde A es la matriz de amplificación y:

$$\mathbf{y}_n = \begin{Bmatrix} d_n \\ v_n \end{Bmatrix} \quad (\text{Ec. 2.25})$$

Las ecuaciones diferenciales como (Ec. 2.24) son comúnmente conocidas como métodos multivalores de un paso, siendo el número de valores igual a la dimensión del vector \mathbf{y} , el cual en el presente caso es 2 (desplazamiento y velocidad).

El siguiente es un sumario de condiciones de estabilidad para el método de Newmark:

- Estabilidad incondicional:

$$2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2} \quad (\text{Ec. 2.26})$$

- Estabilidad condicional:

$$\begin{aligned} \gamma &\geq \frac{1}{2} \\ \beta &< \frac{\gamma}{2} \\ \omega^h \Delta t &\leq \Omega_{crit} \end{aligned} \quad (\text{Ec. 2.27})$$



Donde:

$$\Omega_{crit} = \frac{\xi \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) + \left[\frac{\gamma}{2} - \beta + \xi^2 \left(\gamma - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{1/2}}{\frac{\gamma}{2} - \beta} \quad (\text{Ec. 2.28})$$

Es la frecuencia crítica de muestra. Las condiciones de estabilidad deben ser satisfechas para cada modo de vibración en el sistema. Por consiguiente, la máxima frecuencia natural de vibración, $\omega_{n_m}^h$, puede ser limitada por la frecuencia máxima de los elementos individuales. Note que si $\gamma = \frac{1}{2}$ el amortiguamiento viscoso no tiene efecto sobre la estabilidad. Es más, cuando $\gamma > \frac{1}{2}$ el efecto del amortiguamiento viscoso es de incrementar el tiempo crítico de iteración para los métodos de Newmark de estabilidad condicionada. Por lo tanto, el valor de la frecuencia crítica de un sistema sin amortiguamiento sirve como un valor conservativo cuando un valor estimado del amortiguamiento modal no está disponible, esta frecuencia es:

$$\Omega_{crit} = \left(\frac{\gamma}{2} - \beta \right)^{-1/2} \quad (\text{Ec. 2.29})$$

En la práctica, es mucho más conveniente expresar (Ec. 2.27) en función del periodo de vibración: $T = 2\pi / \omega$, en cuyo caso el intervalo de iteración debe cumplir con:

$$\frac{\Delta t}{T} \leq \frac{\Omega_{crit}}{2\pi} \quad (\text{Ec. 2.30})$$

2.4 Análisis Modal

En este método, con los vectores propios de la Ec. (2.16) se pueden separar las ecuaciones de manera que se tiene una cantidad "n" de ecuaciones diferenciales de movimiento (una para cada nodo). Se reescribe la ecuación general de movimiento de la siguiente manera:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{q} \quad (\text{Ec. 2.34})$$

Se asume que la solución de esta ecuación puede ser escrita como la combinación lineal de los n vectores propios, multiplicados cada uno de ellos por una función del tiempo, denotada por $\Lambda_i(t)$. Por consiguiente:

$$\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{A}} \boldsymbol{\Lambda}(t) \quad (\text{Ec. 2.35})$$

Donde \tilde{A} es la matriz de vectores propios. Ahora se debe determinar la función $\Lambda(t)$ para el caso de vibraciones amortiguadas y forzadas. Reemplazemos a de la (Ec. 2.35) en la (Ec. 2.34), premultiplicando por \tilde{A}^T :

$$\tilde{A}^T \mathbf{M} \tilde{A} \ddot{\Lambda} + \tilde{A}^T \mathbf{C} \tilde{A} \dot{\Lambda} + \tilde{A}^T \mathbf{K} \tilde{A} \Lambda = \tilde{A}^T \mathbf{q} \quad (\text{Ec. 2.36})$$

Esta ecuación puede ser reescrita como:

$$\mathbf{M}^* \ddot{\Lambda} + \mathbf{C}^* \dot{\Lambda} + \mathbf{K}^* \Lambda = \mathbf{q}^* \quad (\text{Ec. 2.37})$$

Debido a que los vectores propios son ortogonales, las matrices \mathbf{M}^* , \mathbf{C}^* y \mathbf{K}^* serán diagonales. Por consiguiente, la (Ec. 2.37) representará a un grupo de "n" ecuaciones separadas. Estas "n" ecuaciones serán:

$$m_i \ddot{\Lambda}_i + c_i \dot{\Lambda}_i + k_i \Lambda_i - q_i = 0 \quad (\text{Ec. 2.38})$$

Para los $i = 1, 2, \dots, n$ grados de libertad del sistema analizado. Si se desea simplificar más la ecuación, se pueden normalizar los modos, de manera que $m_i = 1$. Además, se puede expresar c_i de la forma:

$$c_i = 2 \omega_i c'_i \quad (\text{Ec. 2.39})$$

Donde c'_i es el valor crítico de la relación de amortiguamiento. Otra simplificación se obtiene por:

$$\begin{aligned}\omega_i^2 m_i &= k_i \\ \omega_i^2 &= k_i\end{aligned}\quad (\text{Ec. 2.40})$$

Por consiguiente, la Ec. (2.38) se reescribe:

$$\ddot{\Lambda}_i + 2 \omega_i c'_i \dot{\Lambda}_i + \omega_i^2 \Lambda_i - q_i = 0 \quad (\text{Ec. 2.41})$$

Esta ecuación diferencial se puede resolver por un método tradicional. Cabe destacar que la solución de Λ_i está dada por la integral de Duhamel:

$$\Lambda_i = \int_0^t q_i e^{-c'_i \omega_i (t-\tau)} \sin(\omega_i (t-\tau)) d\tau \quad (\text{Ec. 2.42})$$

Por lo tanto, se tiene una solución disponible para la respuesta dinámica de un sistema sometido a cargas dinámicas y amortiguamiento. En la práctica, generalmente se estiman solamente las respuestas máximas para cada modo, y se formula una combinación lineal de estos resultados para obtener la respuesta deseada. Finalmente, la técnica de superposición de modos sólo es válida para problemas lineales, en los cuales las matrices M y K no dependen de la variable dependiente a .



CAPITULO 3

3. IMPLEMENTACION DE UN METODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA EL ANALISIS ESTATICO Y DINAMICO DE ESTRUCTURAS RETICULARES PLANAS Y CUERPOS SOLIDOS SOMETIDOS A ESFUERZOS PLANOS

3.1 Selección del Método Para Análisis Dinámico

El método que se desea emplear para el análisis dinámico debe cumplir con dos condiciones:

- Cálculo simple, con la menor cantidad de parámetros, o parámetros con relaciones de dependencia de otro.
- Estabilidad incondicional para eliminar desviaciones en los resultados aproximados debido a limitaciones intrínsecas del método.

El método que se selecciona para su posterior implementación es el método de "análisis modal". Se selecciona este método por su simpleza, pues es un método de cálculo simple que no requiere

mayor conocimiento matemático al separar las ecuaciones de cada grado de libertad activo. Cabe destacar que la gran mayoría de programas comerciales emplean métodos sencillos de integración en el tiempo, pues los programadores buscan algoritmos que no empleen largos tiempos de cálculo.

Descripción General de los Programas desarrollados:

Los programas que se han desarrollado analizan estructuras reticulares tipo armadura y pórtico, así como cuerpos sometidos a esfuerzos planos. Estos programas se dividen en dos partes claramente diferenciadas: análisis estático y análisis dinámico. En el análisis estático se obtienen las deformaciones nodales y las fuerzas internas en los nodos y las fuerzas externas de los apoyos. En el análisis dinámico se obtienen en cambio las frecuencias naturales correspondientes a los modos de vibración, la respuesta dinámica del sistema ante una carga tipo escalón de igual magnitud a la aplicada en el análisis estático, y se grafican los modos de vibración del sistema.

La forma en que se ingresan los datos de entrada es en forma manual. Las variables que se deben ingresar están en el primer bloque de los programas, a continuación de las instrucciones de

cómo se deben ingresar las mismas (es decir, su formato). Luego del bloque de ingreso de las variables de entrada se tiene el bloque de cálculos correspondientes al análisis estático. Posteriormente a este, se tiene el bloque de cálculos correspondientes al análisis dinámico. Los resultados se muestran de dos maneras: los resultados numéricos en la ventana de comandos de Matlab® y los resultados gráficos en ventanas gráficas.

Los programas desarrollados son los siguientes:

- ***armadura.m***: analiza una estructura bidimensional tipo armadura.
- ***portico.m***: analiza una estructura bidimensional tipo pórtico.
- ***port3d1.m* y *port3d2.m***: analizan dos estructuras diferentes tipo pórtico tridimensionales.
- ***eplano.m***: analiza un cuerpo sometido a esfuerzos planos (uniformes a lo largo de su espesor y sin componentes tridimensionales).

3.2 Diagrama de Bloques del Programa

A continuación se presenta un diagrama de bloques con las operaciones fundamentales que debe realizar el programa y en el orden que debe realizarlas:

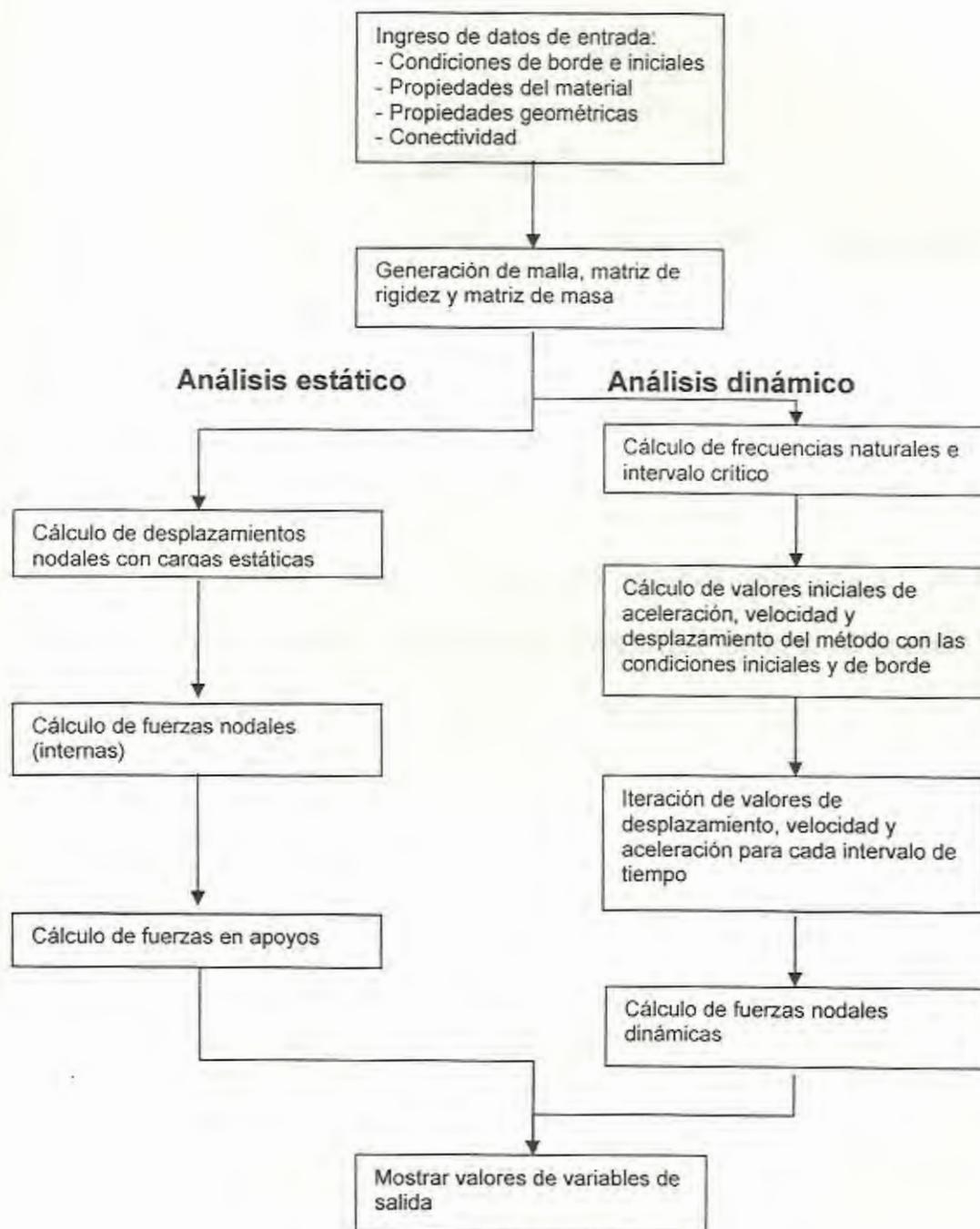


Figura 3.1 Diagrama de bloques del programa

CAPITULO 4

4. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE LOS PROGRAMAS DESARROLLADOS

Con el objetivo tanto de determinar la confiabilidad numérica como de presentar la forma en que se utilizan los programas desarrollados, se los probó con el análisis de varios ejemplos prácticos. En el análisis estático se asume que la carga introducida es estática, mientras que durante el análisis dinámico se asume que la carga es tipo escalón (aplicada abruptamente).

4.1 Análisis Estático y Dinámico de Pórticos Bidimensionales

Ejemplo1:

El primer ejemplo corresponde a una estructura bidimensional tipo armadura, el cual se encuentra en el archivo *armadura.m* (ver apéndice A, página 72). La figura 4.1 corresponde al esquema de la

estructura planteada. Los extremos están fijos horizontal y verticalmente y se aplica una carga de 800 Kgf en sentido vertical en el nodo indicado en el gráfico. El material de la estructura es acero SAE1010 ($E=200 \text{ GPa}$, $\rho=8e6 \text{ Kg/m}^3$), y el perfil empleado en todos los elementos es el IPE 200 ($A=2848 \text{ mm}^2$).

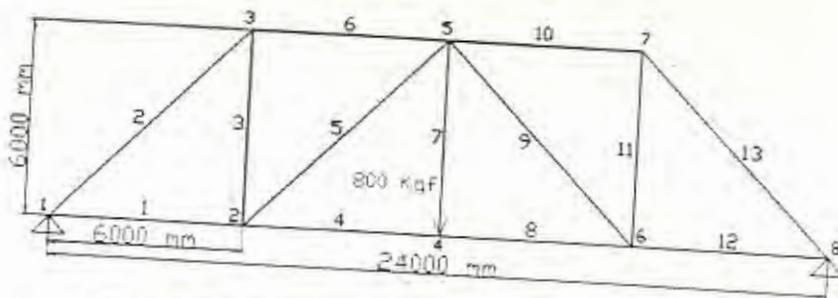


Fig. 4.1 Esquema de la estructura del ejemplo 1

Los datos que se ingresan al programa son los siguientes:

- Coordenadas de los nodos (variable N):

```
N=[1 0 0;
  2 6000 0;
  3 6000 6000;
  4 12000 0;
  5 12000 6000;
  6 18000 0;
  7 18000 6000;
  8 24000 0];
```

- Matriz de conectividad (variable Cons):

```
Cons=[1 1 2;
  2 1 3;
  3 2 3;
  4 2 4;
  5 2 5;
  6 3 5;
  7 4 5;
  8 4 6;
  9 5 6;
  10 5 7;
  11 6 7;
  12 6 8;
  13 7 8];
```

- Matriz de condiciones de borde (variable bc):

```
bc=[1 0;
    2 0;
    15 0;
    16 0];
```

- Carga aplicada (variable carga):

```
carga(4*2-1:4*2,1)=[0 -800*1000]';
```

Los resultados que se obtienen del análisis estático son los siguientes:

Máxima fuerza axial en tensión:	800000 Kg mm/s ² , elemento 8
Máxima fuerza axial en compresión:	-569590 Kg mm/s ² , elemento 13
Desplazamiento nodal máximo:	-0.0428 mm, nodo 4, sentido vertical

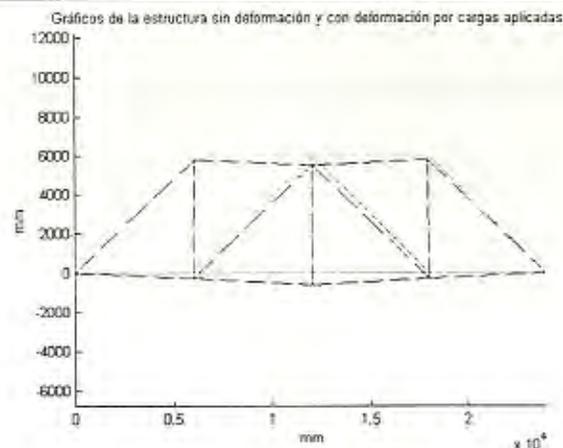


Fig. 4.2 Deformaciones estáticas de estructura tipo armadura

Mientras que del análisis dinámico se obtiene una frecuencia natural de 193 Hz, correspondiente al primer modo de vibración.

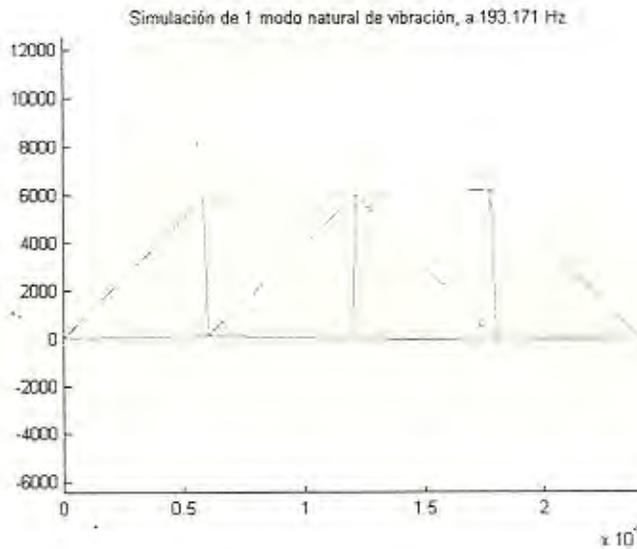


Fig. 4.3 Perfil de modo de vibración de estructura tipo armadura

Ejemplo 2:

El segundo ejemplo corresponde a una estructura bidimensional tipo pórtico, el cual se encuentra en el archivo *portico.m* (ver apéndice B, pág. 82). La figura 4.2 corresponde al esquema de la estructura planteada. Los nodos correspondientes a los apoyos están empotrados y se aplica una carga de 150 Kgf en sentido horizontal en el nodo indicado en el gráfico. El material de la estructura es acero SAE1010 ($E=200$ GPa, $\rho=8e6$ Kg/m³), y el perfil empleado en los elementos es el HE 140 A ($A=3142$ mm², $I=1033e4$ mm⁴).



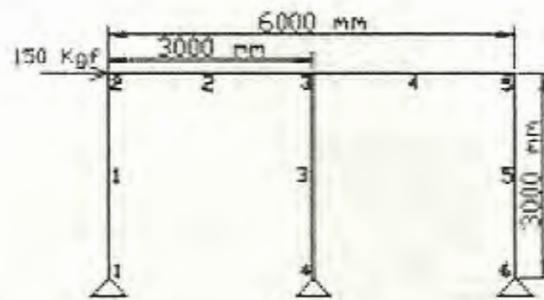


Fig. 4.4 Esquema de la estructura del ejemplo 2

Los datos que se ingresan al programa son los siguientes:

- Coordenadas de los nodos (variable N1):

```
N1=[1 0 0;
    2 0 3000;
    3 3000 3000;
    4 3000 0;
    5 6000 3000;
    6 6000 0];
```

- Matriz de conectividad (variable Cons1):

```
Cons1=[1 1 2;
    2 2 3;
    3 3 4;
    4 3 5;
    5 5 6];
```

- Matriz de condiciones de borde (variable bc):

```
bc=[1 0;
    2 0;
    3 0;
    10 0;
    11 0;
    12 0;
    16 0;
    17 0;
    18 0];
```

- Carga aplicada (variable carga1):

```
carga1(2,:)= [150000 0 0];
```

Los resultados que se obtienen del análisis estático son los siguientes:

Máxima fuerza axial en tensión:	32782 Kg mm/s ² , elemento 1
Máxima fuerza axial en compresión:	-104600 Kg mm/s ² , elemento 2
Fuerza cortante máxima:	-59400 Kg mm/s ² , elemento 3
Momento flector máximo:	93500 Kg mm ² /s ² , elemento 3
Desplazamiento nodal máximo:	-0.0753 mm, nodo 2, sentido horizontal
Rotación nodal máxima:	-3.569 e-5 radianes, nodo 3

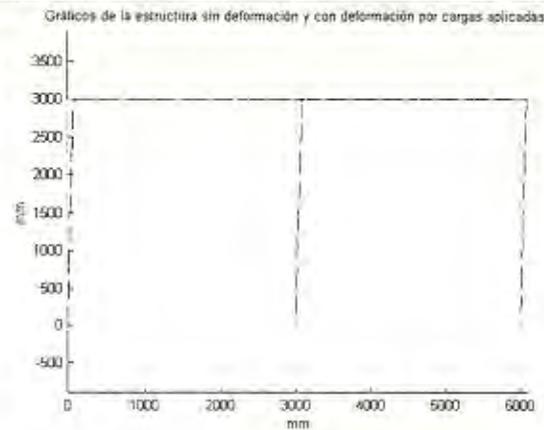


Fig. 4.5 Deformaciones estáticas de estructura tipo pórtico

Mientras que del análisis dinámico se obtiene una frecuencia natural de 150 Hz, correspondiente al primer modo de vibración.

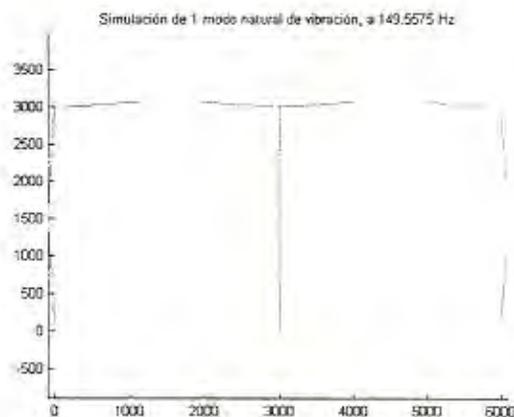


Fig. 4.6 Perfil de modo de vibración de estructura tipo pórtico

Ejemplo 3:

El tercer ejemplo corresponde a una estructura tridimensional tipo pórtico, el ejemplo se encuentra desarrollado en el programa *port3d1.m* que se encuentra en el disco adjunto. Los apoyos de la estructura están fijos horizontal y verticalmente, pero pueden rotar libremente. Se aplican dos cargas de 7.5 y 12 KN en los nodos indicados en la figura 4.3. El material de la estructura es acero SAE 1010 ($E=200$ Gpa, $G=80$ Gpa). Los elementos tienen un área transversal $A=1900$ mm², $I_x=324e4$ mm⁴, $I_y=5260e4$ mm⁴, $J=5584e4$ mm⁴.

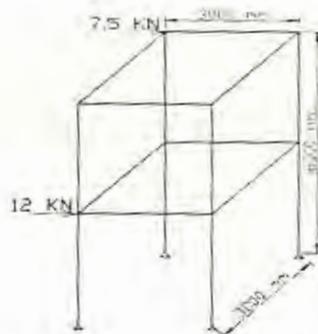


Fig. 4.7 Esquema de la estructura del ejemplo 3

En el apéndice G (pág. 114) se adjunta el gráfico con la numeración de la malla de la estructura planteada.

Los datos que se ingresan al programa son los siguientes:

- Coordenadas de los nodos:

```
N=[1 0 0 0;
  2 0 3000 0;
  3 3000 3000 0;
  4 3000 0 0;
  5 0 0 3000;
```

```

6 0 3000 3000;
7 3000 3000 3000;
8 3000 0 3000;
9 0 0 6000;
10 0 3000 6000;
11 3000 3000 6000;
12 3000 0 6000];

```

- Matriz de conectividad:

```

Cons=[1 1 5;
2 2 6;
3 3 7;
4 4 8;
5 5 6;
6 6 7;
7 7 8;
8 8 5;
9 5 9;
10 6 10;
11 7 11;
12 8 12;
13 9 10;
14 10 11;
15 11 12;
16 12 9];

```

- Matriz de condiciones de borde:

```

bc=[1 0;
2 0;
3 0;
7 0;
8 0;
9 0;
13 0;
14 0;
15 0;
19 0;
20 0;
21 0];

```

- Cargas aplicadas

```

carga(5*6-5:5*6,1)=[12000 0 0 0 0 0]';
carga(12*6-5:12*6,1)=[7500 0 0 0 0 0]';

```

Los resultados que se obtienen son los siguientes:

Máxima fuerza axial en tensión:	15027 Kg mm/s ² , elemento 2
Máxima fuerza axial en	-15027 Kg mm/s ² , elemento 3



compresión:	
Fuerza cortante máxima:	-10904 Kg mm/s ² , elemento 8
Momento flector máximo:	16.42e6 Kg mm ² /s ² , elemento 1
Momento de torsión máximo:	93500 Kg mm ² /s ² , elemento 6
Desplazamiento nodal máximo:	14.671 mm, nodo 12, sentido horizontal
Rotación nodal máxima:	5.1 e-6 radianes, nodo 1

Críticos de la estructura sin deformación y con deformación por cargas aplicadas

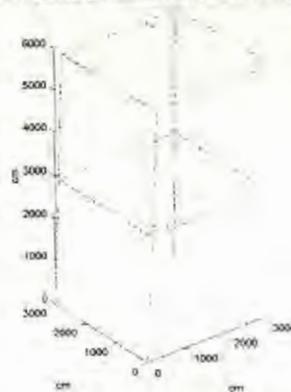


Fig. 4.8 Deformaciones estáticas de estructura tipo pórtico

Ejemplo 4:

Este ejemplo es similar al anterior y se encuentra en el programa *port3d2.m* en el disco adjunto. Los apoyos de la estructura están fijos horizontal y verticalmente, pero pueden rotar libremente. Se aplican dos cargas de 4.5 y 45 KN en los nodos indicados en la figura 4.4.). Los elementos tienen un área transversal $A=1900 \text{ mm}^2$, $I_x=324e4 \text{ mm}^4$, $I_y=5260e4 \text{ mm}^4$, $J=5584e4 \text{ mm}^4$. El material de la estructura es acero SAE 1010 ($E=200 \text{ Gpa}$, $G=80 \text{ Gpa}$).



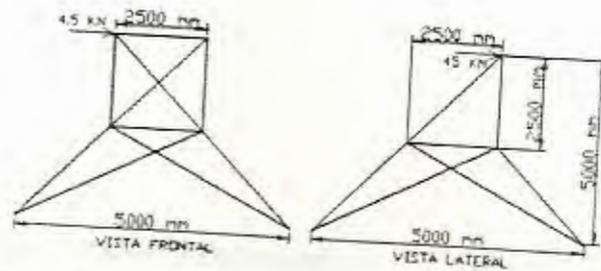


Fig. 4.9 Esquema de la estructura del ejemplo 4

En el apéndice H (pág. 115) se adjunta el gráfico con la numeración de la malla de la estructura planteada.

Los datos que se ingresan al programa son los siguientes:

- Coordenadas de los nodos:

```
N=[1 0 0 0;
  2 0 5000 0;
  3 5000 5000 0;
  4 5000 0 0;
  5 1550 1550 2500;
  6 1550 3450 2500;
  7 3450 3450 2500;
  8 3450 1550 2500;
  9 1550 1550 5000;
  10 3450 1550 5000];
```

- Matriz de conectividad:

```
Cons=[1 1 5;
  2 1 6;
  3 1 8;
  4 2 5;
  5 2 6;
  6 2 7;
  7 3 6;
  8 3 7;
  9 3 8;
  10 4 5;
  11 4 7;
  12 4 8;
  13 5 6;
  14 6 7;
  15 7 8;
  16 8 5;
  17 5 9;
  18 5 10;
  19 6 9];
```

```

20 6 10;
21 7 9;
22 7 10;
23 8 9;
24 8 10;
25 9 10;];

```

- Matriz de condiciones de borde:

```

bc=[1 0;
2 0;
3 0;
7 0;
8 0;
9 0;
13 0;
14 0;
15 0;
19 0;
20 0;
21 0];

```

- Cargas aplicadas:

```

carga(5*6-5:5*6,1)=[-2300 0 0 0 0 0]';
carga(6*6-5:6*6,1)=[-2300 0 0 0 0 0]';
carga(9*6-5:9*6,1)=[-4500 -4500 -23000 0 0 0]';
carga(10*6-5:10*6,1)=[0 -4500 -23000 0 0 0]';

```

Los resultados que se obtienen son los siguientes:

Máxima fuerza axial en tensión:	7596 Kg mm/s ² , elemento 8
Máxima fuerza axial en compresión:	-23923 Kg mm/s ² , elemento 1
Fuerza cortante máxima:	1.78 Kg mm/s ² , elemento 17
Momento flector máximo:	4687 Kg mm ² /s ² , elemento 10
Momento de torsión máximo:	-517 Kg mm ² /s ² , elemento 23
Desplazamiento nodal máximo:	-0.0030 mm, nodo 9, sentido horizontal
Rotación nodal máxima:	-1.430 e-6 radianes, nodo 9



Fig. 4.10 Deformaciones estáticas de estructura tipo pórtico

4.2 Análisis Estático y Dinámico de Elementos Sólidos Triangulares

Ejemplo 5:

El quinto ejemplo corresponde a un cuerpo sólido sometido a esfuerzos planos, el cual se encuentra en el archivo *eplano.m* (ver apéndice C, pág. 95). El cuerpo consiste en un prisma rectangular de 0.2 mm de espesor y 0.3 mm de ancho por 0.15 mm de alto, con una fuerza concentrada de 15 Kgf en el centro de su lado superior, como lo indica la figura 4.11. El material del cuerpo es acero SAE 1010 ($E=200$ GPa, $\nu=0.28$). El objetivo de este ejemplo es hacer un análisis estático y observar los contornos de los esfuerzos de Boussinesq. Los nodos del borde inferior están restringidos en

sentido vertical, y el nodo central del mismo está restringido horizontalmente.

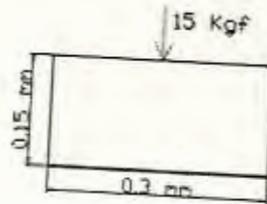


Fig. 4.11 Esquema del cuerpo del ejemplo 5

Los datos que se ingresan al programa son los siguientes:

- Coordenadas de los nodos (variable N):

```
N=[1 0 0.15;
  2 0.05 0.15;
  3 0.1 0.15;
  4 0.15 0.15;
  5 0.2 0.15;
  6 0.25 0.15;
  7 0.3 0.15;
  8 0 0.1;
  9 0.05 0.1;
  10 0.1 0.1;
  11 0.15 0.1;
  12 0.2 0.1;
  13 0.25 0.1;
  14 0.3 0.1;
  15 0 0.05;
  16 0.05 0.05;
  17 0.1 0.05;
  18 0.15 0.05;
  19 0.2 0.05;
  20 0.25 0.05;
  21 0.3 0.05;
  22 0 0;
  23 0.05 0;
  24 0.1 0;
  25 0.15 0;
  26 0.2 0;
  27 0.25 0;
  28 0.3 0];
```

- Matriz de conectividad (variable Cons):

```
Cons=[1 1 2 8;
  2 2 8 9;
```



```
3 2 3 9;  
4 3 9 10;  
5 3 4 10;  
6 4 10 11;  
7 4 5 11;  
8 5 11 12;  
9 5 6 12;  
10 6 12 13;  
11 6 7 13;  
12 7 13 14;  
13 8 9 15;  
14 9 15 16;  
15 9 10 16;  
16 10 16 17;  
17 10 11 17;  
18 11 17 18;  
19 11 12 18;  
20 12 18 19;  
21 12 13 19;  
22 13 19 20;  
23 13 14 20;  
24 14 20 21;  
25 15 16 22;  
26 16 22 23;  
27 16 17 23;  
28 17 23 24;  
29 17 18 24;  
30 18 24 25;  
31 18 19 25;  
32 19 25 26;  
33 19 20 26;  
34 20 26 27;  
35 20 21 27;  
36 21 27 28];
```

- Matriz de condiciones de borde (variable bc):

```
bc=[49 0;  
44 0;  
46 0;  
48 0;  
50 0;  
52 0;  
54 0;  
56 0];
```

- Carga aplicada (variable carga):

```
cargal(4,:)= [0 -15000];
```

El contorno de esfuerzos que se desea graficar en este ejemplo es el de Von Mises, pues este esfuerzo es empleado en el diseño de componentes fabricados con materiales dúctiles debido a que representa tanto la acción del esfuerzo normal como del esfuerzo cortante.

Los resultados que se obtienen son los siguientes:

Esfuerzo de Von Mises máximo:	65,1 MPa, nodo 4
Deformación unitaria máxima:	-0.0051 mm/mm, elemento 6
Máxima deformación angular:	0.0060 radianes, elemento 6

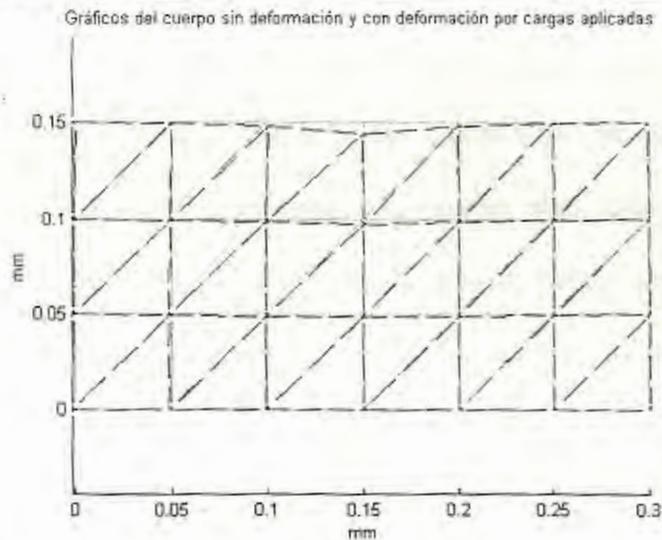


Fig. 4.12 Deformaciones estáticas de cuerpo sólido sometido a esfuerzos planos

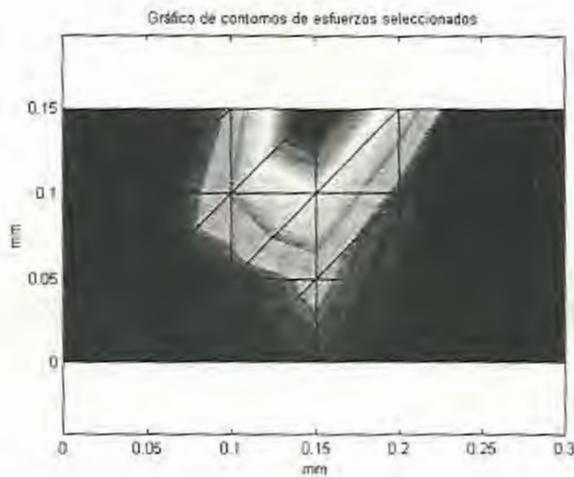


Fig. 4.13 Contorno de esfuerzos de Von Mises de cuerpo sólido sometido a esfuerzos planos

En el contorno de esfuerzos mostrado se puede visualizar, en cierta medida debido al poco número de elementos de la malla, los llamados círculos de Boussinesq, los cuales son concéntricos con respecto al punto de aplicación de la carga, punto en el cual los esfuerzos son máximos. Si se aumenta el número de elementos en la malla, especialmente en la zona de mayor concentración de esfuerzos, se podría observar de mejor manera los círculos de Boussinesq.

Adicionalmente, se calcula la frecuencia natural de la placa y se obtiene un valor de 2.38×10^6 Hz, correspondientes al primer modo de vibración.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1 Conclusiones

1. Se desarrolló el grupo de programas propuestos entre los objetivos de la tesis. Estos programas realizan el análisis estático y dinámico tanto de estructuras reticulares planas y de cuerpos sometidos a esfuerzos planos. Adicionalmente a los programas principales desarrollados, se crearon funciones auxiliares para la construcción de matrices de rigidez para elementos tipo barra y viga bidimensionales, así como para elementos triangulares.
2. Debido al empleo de un algoritmo estable y confiable de Runge Kuta en la resolución de las ecuaciones diferenciales de la respuesta dinámica de los sistemas analizados (obtenidas por el método de análisis modal), se puede asegurar que los datos obtenidos son muy confiables, siempre y cuando el modelo estructural planteado por el usuario de los programas sea correcto.

3. El código abierto de los programas desarrollados permite que los estudiantes del curso de elementos finitos mejoren su aprendizaje del método, sus limitaciones y potenciales aplicaciones.

5.2 Recomendaciones

Las recomendaciones que se hacen para aprovechar los programas en los cursos de elementos finitos o como tema de tesis son:

1. Modificar los programas de análisis de armaduras y pórticos bidimensionales para el análisis estático y dinámico de estructuras tridimensionales.
2. Modificar el programa de análisis de cuerpos sólidos sometidos a esfuerzos planos, para permitir el análisis de cuerpos sólidos sometidos a esfuerzos tridimensionales (elementos cúbicos o tipo pirámide en lugar de elementos triangulares) y modificar a su vez este algoritmo para el análisis de problemas de transferencia de calor en cuerpos tridimensionales.



APENDICE A

CÓDIGO DEL PROGRAMA ARMADURA.M:

```

%-----Programa de vibración de un pórtico bidimensional. Creado por
Daniel Blum Velasco
%-----empleando GALEM y funciones creadas como parte de la tesis
previa a la obtención
%-----del título de Ingeniero Mecánico.-----
%-----Derechos del autor reservados.-----

%-----Propósito: Análisis estático y dinámico de una armadura con
geometría tipo puente.
%-----Durante el análisis estático se asume que la carga ha sido
aplicada progresivamente.
%-----Durante el análisis dinámico se asume que la carga es aplicada
de forma abrupta y se
%-----mantiene constante (escalón).

%-----Variables de entrada:

%-----N: Coordenadas de los nodos de la malla:
%-----En esta matriz nx3 se ingresan las coordenadas de los n nodos
de la estructura
%-----de la siguiente forma: [i1 x1 y1; i2 x2 y2;...;in xn yn],
donde i1, i2,...in son los
%-----números respectivos de los n nodos, x1, x2,...xn son las
coordenadas X de cada nodo,
%-----e y1, y2,...yn son las coordenadas Y de cada nodo.-----

%-----Cons: Matriz constitutiva:
%-----En esta matriz nx3 se ingresan los n elementos de la
estructura y los nodos que los
%-----constituyen de la siguiente forma: [i1 a1 b1; i2 a2 b2;...;in
an bn], donde i1, i2,
%-----...in son los números respectivos de los n elementos, a1,
a2,...an son los nodos
%-----iniciales de cada elemento, y b1, b2,...bn son los nodos
finales de cada elemento.-----

```

```

%-----imp; Modo al cual se le graficará su desplazamiento,
velocidad y aceleración
*-----durante el periodo de vibración.-----

%-----modo; Modo de vibración natural que se desea visualizar.-----

%-----A; Area de la sección transversal de los elementos.-----
%-----E; Módulo de Young del material de la estructura.-----
%-----dens; Densidad del material de la estructura.-----
%-----g; Aceleración gravitacional.-----

%-----bc; Condiciones de frontera:
%-----En esta matriz nx2 se ingresan las n condiciones de frontera
de la estructura (apoyos)
%-----de la siguiente manera: [i1 c1; i2 c2;...;in cn], donde i1,
i2,...,in son los n grados
%-----de libertad restringidos, y c1,c2,...,cn son los valores de las
restricciones.
%-----respectivas.-----

%-----carga; Cargas nodales externas:
%-----En esta matriz nx2 se ingresan las cargas nodales de los n
nodos de la estructura de
%-----la siguiente manera: [x1 y1;x2 y2;...;xn yn], donde x1,
x2,...,xn son las componentes
%-----X de las cargas nodales, e y1, y2,...,yn son las componentes Y
de las cargas nodales.-----

%-----Variables de salida:

%-----ed; Desplazamientos nodales:
%-----En esta matriz nx4 se muestran los desplazamientos de los
grados de libertad de los dos
%-----nodos de cada elemento.-----

%-----Faxial; En esta matriz lx2 se indica la mayor fuerza axial de
la estructura y el
%-----elemento en que se encuentra.-----

%-----frec; Frecuencias naturales:
%-----En esta matriz nx1 se muestran los valores de las frecuencias
naturales de la estructura.
%-----Sus respectivos perfiles de deformación se encuentran en la
variable modal.-----

%+++++
%-----Datos de entrada:-----
%

```

§-----Coordenadas de los nodos de la malla:-----

```
N=[1 0 0;
    2 6000 0;
    3 6000 6000;
    4 12000 0;
    5 12000 6000;
    6 18000 0;
    7 18000 6000;
    8 24000 0];
```

§-----Matriz de conectividad:-----

```
Cons=[1 1 2;
      2 1 3;
      3 2 3;
      4 2 4;
      5 2 5;
      6 3 5;
      7 4 5;
      8 4 6;
      9 5 6;
      10 5 7;
      11 6 7;
      12 6 8;
      13 7 8];
```

§-----Nodo al cual se le graficará su desplazamiento, velocidad y aceleración

§-----durante el periodo de vibración:-----

```
imp=[4];
```

§-----Modo de vibración natural que se desea visualizar:-----

```
modo=[1];
```

§-----Area, módulo de Young, densidad y gravedad (constantes para todos los elementos):-----

```
A=[2848]; §---Area de la sección transversal de los elementos.---
E=[200e6]; §---Módulo de Young del material de la estructura.---
dens=[8e-6]; §---Densidad del material de la estructura.---
g=-9810; §---Aceleración gravitacional.---
```

§-----Condiciones de frontera:-----

```
bc=[1 0;
    2 0;
    15 0;
    16 0];
```

§-----Cargas nodales externas:-----

```
carga=zeros(size(N,1)*2,1);
carga(4*2-1:4*2,1)=[0 -800000]';
```



```

%*****
%
%-----Fin de ingreso de datos de entrada. No modificar el programa
en las líneas
%-----siguientes.-----
%
%-----Número de nodos de la malla:-----
Nnod=size(N,1);
%-----Numero de elementos de la estructura:-----
Nel=size(Cons,1);

%-----Matriz de grados de libertad de los nodos de cada elemento:---
--
Edof=zeros(Nel,2*2+1);
for i=1:Nel,
    Edof(i,1)=Cons(i,1);
    Edof(i,2)=Cons(i,2)*2-1;
    Edof(i,3)=Cons(i,2)*2;
    Edof(i,4)=Cons(i,3)*2-1;
    Edof(i,5)=Cons(i,3)*2;
end

%-----Coordenadas de los nodos inicial y final de los elementos:-----
--
ex=zeros(Nel,2);
ey=zeros(Nel,2);
for i=1:Nel,
    ex(i,:)=[N(Cons(i,2),2) N(Cons(i,3),2)];
    ey(i,:)=[N(Cons(i,2),3) N(Cons(i,3),3)];
end

%
%-----Matrices de rigidez, amortiguamiento, masa y cargas externas
nodales:-----
%
%-----Young, Area, Inercia, densidad (constantes para todos los
elementos):-----
ep=[E A];

%-----Vector de fuerzas nodales:-----
F=zeros(Nnod*2,1);

%-----Matriz de cargas distribuidas:-----
Req=zeros(Nel*2,1);

```

```

%for i=1:Nel
%   eq(i,:)= [0 dens*g];
%end

%-----Matrices de rigidez y masa:-----
K=zeros(Nnod*2,Nnod*2);
C=zeros(size(K));
Mass=zeros(Nnod*2,Nnod*2);
for i=1:Nel,
    [ke]=bar2e(ex(i,:),ey(i,:),ep);
    [K]=assem(Edof(i,:),K,ke);
    me=masb2d(ex(i,:),ey(i,:),dens,A);
    Mass=assem(Edof(i,:),Mass,me);
end
%K=.01*K+.01*Mass;
F=F+carga;

%
%-----Resolver el sistema de ecuaciones:-----
%
[D,Q]=solveq(K,F,bc);
ed=extract(Edof,D);

%
%-----Dibujar la estructura deformada:-----
%
newplot;
figure(1);
clf;
eldraw2(ex,ey,[1 2 1]);
eldisp2(ex,ey,ed,[2 4 1]);
title('Gráficos de la estructura sin deformación y con deformación
por cargas aplicadas');
xlabel('mm');
ylabel('mm');

%
%-----Obtener las fuerzas nodales máximas:-----
%
Faxial=zeros(1,2);
es=zeros(Nel,1);

for i=1:Nel
    es(i,1)=bar2s(ex(i,:),ey(i,:),ep,ed(i,:));
end

Faxial(1,1)=max(abs(es(:,1)));

for i=1:Nel,
    if Faxial(1,1)==abs(es(i,1))
        Faxial(1,:)=[es(i,1) i];
    end
end

```

```

end
end

```

```

echo on;
%-----Maxima fuerza axial (absoluta) y elemento de su ubicación:-----
echo off;
Faxial

```

```

%
%-----Simulación de respuesta dinámica:-----
%
%-----Obtener las frecuencias naturales de la estructura:-----
%
M2=Mass;
C2=C;
K2=K;
M2(bc(:,1),:)=[];
M2(:,bc(:,1))=[];
C2(bc(:,1),:)=[];
C2(:,bc(:,1))=[];
K2(bc(:,1),:)=[];
K2(:,bc(:,1))=[];

%-----Creación de matriz de cargas externas en formato para
simulación dinámica:-----
q=zeros(Nnod*2,1);
q=carga;

[modal,frec]=eig(K2,M2); %-----Valores propios de la ecuación  $K' -
\omega^2 + Mass = 0$ 
if min(real(frec))<0
    frec
end
frec=diag(frec);
frec=sqrt(frec);
frec=frec/(2*pi);

cond1=max(abs(imag(frec))); %-----Se verifica que la parte
imaginaria tenga valores %--despreciables, producto del redondeo al
realizar los cálculos.
cond2=[1];
for i=1:length(frec),
    if isinf(frec(i,1))==1 | isnan(frec(i,1))==1
        cond2=0;
    end
end

```

```

    end
end

if (cond1/max(abs(real(frec)))>=1e-5 | cond2==[0] %---Mostrar un
mensaje y detener la ejecución si hay error.
    echo on;
    %La matriz de rigidez o de masa es singular, verificar
condiciones de borde y dimensionamiento.
    cond1
    cond2
    echo off;
    break;
end

frec=real(frec); %-----Se toma únicamente la parte real de las
frecuencias naturales.
modal=real(modal); %-----tomando en cuenta que la parte
imaginaria es mínima.

%-----Determinar el intervalo crítico:-----
a=length(frec);
cont=1;
for i=1:a
    if frec(cont)==0 | frec(cont)/max(frec)<=1e-4
        frec(cont)=[];
        cont=cont-1;
    end
    cont=cont+1;
end
a=length(frec);
if frec(a)==0 | frec(a)/max(frec)<=1e-4
    frec(a)=[];
end

echo on;
%-----Frecuencias naturales de la estructura:-----
echo off;
frec

echo on;
%-----Periodo de vibración:-----
echo off;
T=1 / min(frec(1:length(frec),1)) %---Periodo de la
frecuencia mínima.

echo on;
%---Frecuencia angular correspondiente a T.
echo off;
omega=min(frec(1:length(frec),1))*2*pi;

echo on;
%-----Intervalo crítico de interpolación:-----
echo off;

```

```

int=(1 / mean(frec(1:length(frec),1))) / pi %---Intervalo de
interpolación.

echo on;
%-----Número de intervalos de interpolación:-----
echo off;
n=round(T/int*1) %---Número de intervalos.

t=n*int; %---Rango de tiempo del gráfico (periodo de vibración).--

%
%-----Simular los modos de vibración de la estructura:-----
%

gdla=[1:Nnod*2]';
gdla(bc(:,1))=[]; %---Vector con los GDL activos.
condinicial=zeros(Nnod*2,2);

%-----Diagonalizar matrices de masa y rigidez y convertirlas en
vectores:-----
M2=modal'*M2*modal;
K2=modal'*K2*modal;
C2=modal'*C2*modal;
q2=modal'*q(gdla);
M2=diag(M2);
C2=diag(C2);
K2=diag(K2);

M3=zeros(Nnod*2,1);
M3(gdla)=M2;
C3=zeros(Nnod*2,1);
C3(gdla)=C2;
K3=zeros(Nnod*2,1);
K3(gdla)=K2;
q3=zeros(Nnod*2,1);
q3(gdla)=q2;

echo on;
%-----El programa está realizando las iteraciones para simulación
dinámica.
%-----Esto podría tardar unos minutos. Por favor espere...
echo off;

%-----Resolver la ecuación de movimiento mediante un metodo de Runge
Kutta
%-----separando las ecuaciones de cada GDL:-----
desp=zeros(n,2,Nnod*2);
a=size(bc);
a=a(1);
for i=1:n

```

```

    desp(i,:,bc(:,1))=[bc(:,2)'; zeros(1,a)];
end

for i=1:Nnod*2
    a=0;
    j=1;
    while j<=length(gdla) & a==0
        if i==gdla(j)
            a=1;
        end
        j=j+1;
    end
    if a==1;
        [tiempo,desp(:,:,i)]=ode15s('función',[0:t/(n-1):t],condinicial(i,:),[],M3(i),C3(i),K3(i),q3(i));
    end
end

echo on;
%-----Nodo al cual se analiza:-----
echo off;
imp

%-----Graficar el desplazamiento del nodo analizado vs. tiempo:-----
de=desp(:,1,(imp*2-1:imp*2));
figure(2);
plot(tiempo,de(:,:,i));
title(['Gráfico de desplazamiento vs. tiempo del nodo ',num2str(imp)]);
xlabel('Tiempo (s)');
ylabel('Desplazamiento (mm)');

%-----Graficar la velocidad del nodo analizado vs. tiempo:-----
de=desp(:,1,(imp*2-1:imp*2));
figure(3);
plot(tiempo,de(:,:,i));
title(['Gráfico de velocidad vs. tiempo del nodo ',num2str(imp)]);
xlabel('Tiempo (s)');
ylabel('Velocidad (mm/s)');

%-----Graficar la aceleración del nodo analizado vs. tiempo:-----
de=de(:,1,1:2);
tiempo=[tiempo tiempo];
ac=diff(de(:,1:2))./diff(tiempo);
figure(4);
plot(tiempo(1:(length(tiempo)-1)),ac(:,:,i));
title(['Gráfico de aceleración vs. tiempo del nodo ',num2str(imp)]);
xlabel('Tiempo (s)');
ylabel('Aceleración (mm/s^2)');

%-----Mostrar los modos de vibración (vibración libre):-----

```

```

clear i;
vld=zeros(Nnod*2,1);
eld=zeros(Nel,4);
int=1/frec((size(frec,1))-modo)/(pi*10);
n=round(1/frec((size(frec,1))-modo)/int)+1;
anima=moviein(n);
for j=1:n
    t=j*int;
    vld(gdla,1)=modal(:,size(modal,2)-
modo+1)*real(exp(i*2*pi*frec(length(frec)-modo+1)*t));
    vld(bc(:,1),1)=[0];
    eld(:,1)=vld(Cons(:,2)*2-1,1);
    eld(:,2)=vld(Cons(:,2)*2,1);
    eld(:,3)=vld(Cons(:,2)*2-1,1);
    eld(:,4)=vld(Cons(:,3)*2,1);
    figure(5);
    clf;
    eldisp2(ex,ey,eld,[1 2 1],10);
    anima(:,j)=getframe;
end
title(['Simulación de ',num2str(modo),' modo natural de vibración, a
',num2str(frec(length(gdla)-modo+1,1)),' Hz']);
movie(anima,5,8);

```



APENDICE B

CÓDIGO DEL PROGRAMA PORTICO.M:

*-----Programa de vibración de un portico bidimensional. Creado por
 Daniel Elum Velasco
 *-----empleando CALFEM y funciones creadas como parte de la tesis
 previa a la obtención
 *-----del título de Ingeniero Mecánico.-----
 *-----Derechos del autor reservados.-----

*-----Propósito: Análisis estático y dinámico de un pórtico con
 geometría tipo puente.
 *-----Durante el análisis estático se asume que la carga ha sido
 aplicada progresivamente.
 *-----Durante el análisis dinámico se asume que la carga es aplicada
 de forma abrupta y se
 *-----mantiene constante (escalón).

*-----Variables de entrada:

*-----N1; Coordenadas de los nodos de la malla:
 *-----En esta matriz $n \times 3$ se ingresan las coordenadas de los n nodos
 de la estructura
 *-----de la siguiente forma: $[i1 \ x1 \ y1; i2 \ x2 \ y2; \dots; in \ xn \ yn]$,
 donde $i1, i2, \dots, in$ son los
 *-----números respectivos de los n nodos, $x1, x2, \dots, xn$ son las
 coordenadas X de cada nodo,
 *-----e $y1, y2, \dots, yn$ son las coordenadas Y de cada nodo.-----

*-----Const; Matriz constitutiva:

*-----En esta matriz $n \times 3$ se ingresan los n elementos de la
 estructura y los nodos que los
 *-----constituyen de la siguiente forma: $[i1 \ a1 \ b1; i2 \ a2 \ b2; \dots; in \ an \ bn]$, donde $i1, i2, \dots, in$
 son los números respectivos de los n elementos, $a1, a2, \dots, an$
 son los nodos
 *-----iniciales de cada elemento, y $b1, b2, \dots, bn$ son los nodos
 finales de cada elemento.-----

*-----Número de elementos de la malla para análisis dinámico:

%-----En esta matriz 1x1 se ingresa el numero de elementos en los
 cuales se va a dividir
 %-----cada elemento para analizar de mejor manera los modos de
 vibración de la estructura.-----

%-----imp; Modo al cual se le graficará su desplazamiento,
 velocidad y aceleración
 %-----durante el periodo de vibración.-----

%-----modo; Modo de vibración natural que se desea visualizar.-----

%-----A; Area de la sección transversal de los elementos.-----
 %-----I; Momento de inercia de la sección transversal de los
 elementos.-----
 %-----E; Módulo de Young del material de la estructura.-----
 %-----dens; Densidad del material de la estructura.-----
 %-----g; Aceleración gravitacional.-----

%-----bc; Condiciones de frontera:
 %-----En esta matriz nx2 se ingresan las n condiciones de frontera
 de la estructura (apoyos)
 %-----de la siguiente manera: [i1 c1; i2 c2;...;in cn], donde i1,
 i2,...in son los n grados
 %-----de libertad restringidos, y c1,c2,...,cn son los valores de las
 restricciones
 %-----respectivas.-----

%-----cargal; Cargas nodales externas:
 %-----En esta matriz nx2 se ingresan las cargas nodales de los n
 nodos de la estructura de
 %-----la siguiente manera: [x1 y1;x2 y2;...;xn yn], donde x1,
 x2,...,xn son las componentes
 %-----X de las cargas nodales, e y1, y2,...,yn son las componentes Y
 de las cargas nodales.-----

%-----Variables de salida:

%-----ed; Desplazamientos nodales:
 %-----En esta matriz nx4 se muestran los desplazamientos de los
 grados de libertad de los dos
 %-----nodos de cada elemento.-----

%-----T, V, M; En estas matrices 1x2 se indican la mayores fuerzas
 axial, transversales y momentos flectores
 %----- de la estructura y los elementos en que se encuentran
 respectivamente.-----

%-----frac; Frecuencias naturales:
 %-----En esta matriz nx1 se muestran los valores de las frecuencias
 naturales de la estructura.
 %-----Sus respectivos perfiles de deformación se encuentran en la
 variable modal.-----

```

+++++
%
%-----Datos de entrada:-----
%
%-----Coordenadas de los nodos de la malla base:-----
N1=[1 0 0;
    2 0 3000;
    3 3000 3000;
    4 3000 0;
    5 6000 3000;
    6 6000 0];

%-----Matriz de conectividad:-----
Consl=[1 1 2;
       2 2 3;
       3 3 4;
       4 3 5;
       5 5 6];

%-----Número de elementos de la malla para analisis dinámico (4 por
%-----cada elemento de la malla base):-----
Nev=[4];

%-----Nodo al cual se le graficará su desplazamiento, velocidad y
%-----aceleración
%-----durante el periodo de vibración:-----
imp=2;

%-----Modo que se desea visualizar:-----
modo=1;

%-----Area, Inercia, modulo de Young, densidad y gravedad
%----- (constantes para todos los elementos):-----
A=[3142]; %---Area de la sección transversal de los elementos.---
I=[1033e4]; %---Momento de inercia de la sección transversal de los
%-----elementos.---
E=[200e6]; %---Módulo de Young del material de la estructura.---
dens=[8e-6]; %---Densidad del material de la estructura.---
g=-9810; %---Aceleración gravitacional.---

%-----Condiciones de frontera:-----
bc=[1 0;
    2 0;
    3 0;
    10 0;
    11 0;
    12 0;
    16 0;

```

```

17 0;
18 0];

-----Cargas nodales externas:-----
cargal=zeros(size(N1,1),3);
cargal(2,:)=[150000 0 0];

+++++
%-----Fin de ingreso de datos de entrada. No modificar el programa
en las líneas
%-----siguientes.-----

%-----Generación de la malla apropiada para análisis dinámico (4
elementos por cada
%-----elemento de la malla base):-----

%-----Número de elementos de la malla base:
Nel=size(Consl);
b=Nel(1);
Nel=b;
Nnod=size(N1); %-----Número de nodos de la malla base:-----
Nnod=Nnod(1);
%-----Número de nodos y de elementos de la malla para análisis
dinámico:-----
Nnod=Nnod + Nel*(Nev-1);
Nel=Nel*Nev;

Consl=zeros(Nel,3); %---Matriz constitutiva de la malla para
análisis dinámico.---
N=zeros(Nnod,3); %---Matriz de coordenadas nodales de la malla
para análisis dinámico.---

%-----Variables empleadas para generar la malla de análisis
dinámico:-----
a=[0];
x=zeros(1,2);
y=zeros(1,2);
xel=zeros(1,Nev+1);
yel=zeros(1,Nev+1);
contn=[1];
contel=[1];
Nodel=zeros(1,Nev + 1);

```

```
c=[0];
```

```

%-----Se toma cada elemento de la malla base y se lo divide en Nev
elementos, se calculan
%-----las coordenadas de los nodos intermedios, se les asigna un
numero y elemento:-----
for i=1:b(1),
    %-----Coordenadas de los nodos de la malla base (inicio y final
de la cadena):-----
    x=[N1(Cons1(i,2),2) N1(Cons1(i,3),2)];
    y=[N1(Cons1(i,2),3) N1(Cons1(i,3),3)];
    %-----Separación entre cada nodo:-----
    dx=[x(1,2)-x(1,1)]/Nev;
    dy=[y(1,2)-y(1,1)]/Nev;
    %-----Coordenadas de los nodos intermedios:-----
    for j=1:Nev,
        xel(1,j)=x(1,1) + dx*(j-1);
        yel(1,j)=y(1,1) + dy*(j-1);
    end
    %-----Coordenada del nodo final (para evitar errores de redondeo
en las coordenadas):---
    xel(1,Nev+1)=x(1,2);
    yel(1,Nev+1)=y(1,2);
    %-----Se verifica que el nodo inicial de la cadena no esté
definido (excepto para i=1):
    if (i~=1)
        for j=1:contn-1,
            if (N(j,2)==x(1,1) & N(j,3)==y(1,1))
                a=[1];
                c=[j];
            end
        end
    end
    %-----Si no está definido:-----
    if a~= [1]
        N(contn,:)=[contn xel(1,1) yel(1,1)];
        Nodel(1,1)=contn;
        contn=contn + 1;
        %-----Si ya está definido, se toma el número para asignarlo al
elemento respectivo:-----
    else
        Nodel(1,1)=c;
        c=[0];
    end

    a=[0];
    %-----Se crean los nodos intermedios:-----
    for k=2:Nev,
        N(contn,:)=[contn xel(1,k) yel(1,k)];
        Nodel(1,k)=contn;
        contn=contn + 1;
    end
    %-----Se verifica que el nodo final no esté definido:-----

```

```

for j=1:contrn-1,
    if (N(j,2)==x(1,2) & N(j,3)==y(1,2))
        a=[1];
        c=[j];
    end
end
%-----Si no esta definido:-----
if a~=1
    N(contrn,:)=[contrn x(1,2) y(1,2)];
    Nodel(1,Nev + 1)=contrn;
    contrn=contrn + 1;
%-----Si ya esta definido, se toma el número para asignarlo al
elemento respectivo:-----
else
    Nodel(1,Nev + 1)=c;
    c=[0];
end
a=[0];
%-----Se realiza la asignacion de los nodos a los Nev elementos
de la malla dinamica:---
for j=1:Nev,
    Cons(contel,:)=[contel Nodel(1,j) Nodel(1,j+1)];
    contel=contel + 1;
end
end

%-----Nueva matriz de cargas nodales externas, según malla de
análisis dinámico:-----
carga=zeros(Nnod*3,1);

for i=1:size(N1,1),
    for j=1:Nnod,
        if N1(i,2:3)==N(j,2:3)
            carga(j*3-2:j*3,1)=cargal(i,:)';
        end
    end
end

%-----Matriz de grados de libertad de los nodos de cada elemento:---
Edof=zeros(Nel,3*2+1);
for i=1:Nel,
    Edof(i,1)=Cons(i,1);
    Edof(i,2)=Cons(i,2)*3-2;
    Edof(i,3)=Cons(i,2)*3-1;
    Edof(i,4)=Cons(i,2)*3;
    Edof(i,5)=Cons(i,3)*3-2;
    Edof(i,6)=Cons(i,3)*3-1;
    Edof(i,7)=Cons(i,3)*3;
end

%-----Coordenadas de los nodos inicial y final de los elementos:-----

```

```

ex=zeros(Nel,2);
ey=zeros(Nel,2);
for i=1:Nel,
    ex(i,:)=[N(Cons(i,2),2) N(Cons(i,3),2)];
    ey(i,:)=[N(Cons(i,2),3) N(Cons(i,3),3)];
end

%-----Matrices de rigidez, amortiguamiento, masa y cargas externas
nodales:-----
%
%-----Young, Area, Inercia, densidad (constantes para todos los
elementos):-----
ep=[E A I];

%-----Vector de fuerzas nodales:-----
F=zeros(Nnod*3,1);

%-----Matriz de cargas distribuidas:-----
eq=zeros(Nel,2);
for i=1:Nel
    eq(i,:)=[0 dens*g];
end

%-----Matrices de rigidez y masa:-----
K=zeros(Nnod*3,Nnod*3);
C=zeros(size(K));
Mass=zeros(Nnod*3,Nnod*3);
for i=1:Nel,
    [ke,fe]=beam2e(ex(i,:),ey(i,:),ep,eq(i,:));
    [K,F]=assem(Edof(i,:),K,ke,F,fe);
    me=masv2d(ex(i,:),ey(i,:),dens,A);
    Mass=assem(Edof(i,:),Mass,me);
end
%C=.01*K+.01*Mass;
F=F+carga;

%
%-----Condiciones de frontera:-----
%
%-----Condiciones según nueva malla:-----
a=length(bc);
for i=1:a,
    b=bc(i,1);
    b=floor((b-1)/3)+1;
    d=Nl(b,:);
    contn=[0];
    c=bc(i,1);

```



```

for j=1:Nnod,
    if N(j,2:3)==d(1,2:3);
        contn=[j];
    end
end
bc(i,1)=(contn-1)*3 + 1 + mod(c-1,3);
end

%-----Resolver el sistema de ecuaciones:-----
%
[D,Q]=solveq(K,E,bc);
ed=extract(Edof,D);

%-----Dibujar la estructura deformada:-----
%
newplot;
figure(1);
clf;
eldraw2(ex,ey,[1 2 1]);
eldisp2(ex,ey,ed,[2 4 1]);
title('Gráficos de la estructura sin deformación y con deformación
por cargas aplicadas');
xlabel('mm');
ylabel('mm');

%-----Obtener las fuerzas nodales máximas:-----
%
T=zeros(2,2);
V=zeros(2,2);
M=zeros(2,2);
es=zeros(Nel*2,3);

for i=1:Nel
    es(i*2-1:i*2,:)=beam2s(ex(i,:),ey(i,:),ep,ed(i,:),eq(i,:));
end

T(1,1)=max(abs(es(:,1)));
V(1,1)=max(abs(es(:,2)));
M(1,1)=max(abs(es(:,3)));

for i=1:Nel,
    if abs(T(1,1))==max(abs(es(i*2-1:i*2,1)))
        T=[es(i*2-1,1) i;
           es(i*2,1) i];
    end

    if abs(V(1,1))==max(abs(es(i*2-1:i*2,2)))
        V=[es(i*2-1,2) i;
           es(i*2,2) i];
    end
end

```



POLITECNICA DEL LITORAL
BIBLIOTECA 'GONZALO ZEVALLOS'
F.I.M.C.P.

```
    es(i*2,2) i];
end

if abs(M(1,1))==max(abs(es(i*2-1:i*2,3)))
    M=[es(i*2-1,3) i;
      es(i*2,3) i];
end
end

echo on;
%-----Máxima fuerza axial (absoluta) y elemento de su ubicación:-----
echo off;
T

echo on;
%-----Máxima fuerza transversal (absoluta) y elemento de su
ubicación:-----
echo off;
V

echo on;
%-----Máximo momento flector (absoluto) y elemento de su ubicación:--
echo off;
M

%-----
%-----Simulación de respuesta dinámica:-----
%-----
%-----
%-----Obtener las frecuencias naturales de la estructura:-----
%-----
M2=Mass;
C2=C;
K2=K;
M2(bc(:,1),:)=[];
M2(:,bc(:,1))=[];
C2(bc(:,1),:)=[];
C2(:,bc(:,1))=[];
K2(bc(:,1),:)=[];
K2(:,bc(:,1))=[];

%-----Creación de matriz de cargas externas en formato para
simulación dinámica:-----
q=zeros(Nnod*3,1);
q=carga;

[modal,frec]=eig(K2,M2); %-----Valores propios de la ecuación  $K - \omega^2 * Mass = 0$ 
if min(real(frec))<0
```



```

    frec
    break;
end
frec=diag(frec);
frec=sqrt(frec);
frec=frec/(2*pi);

cond1=max(abs(imag(frec))); %----Se verifica que la parte
imaginaria tenga valores %--despreciables, producto del redondeo al
realizar los cálculos.
cond2=[1];
for i=1:length(frec),
    if isinf(frec(i,1))==1 | isnan(frec(i,1))==1
        cond2=0;
    end
end

if (cond1/max(abs(real(frec))))>=1e-5 | cond2==[0] %---Mostrar un
mensaje y detener la ejecución si hay error.
    echo on;
    %La matriz de rigidez o de masa es singular, verificar
condiciones de borde y dimensionamiento.
    cond1
    cond2
    echo off;
    break;
end

frec=real(frec); %----Se toma únicamente la parte real de las
frecuencias naturales.
modal=real(modal); %----tomando en cuenta que la parte
imaginaria es mínima.

%----Determinar el intervalo crítico:----
a=length(frec);
cont=1;
for i=1:a
    if frec(cont)==0 | frec(cont)/max(frec)<=1e-4
        frec(cont)=[];
        cont=cont-1;
    end
    cont=cont+1;
end
a=length(frec);
if frec(a)==0 | frec(a)/max(frec)<=1e-4
    frec(a)=[];
end

echo on;
%----Frecuencias naturales de la estructura:----
echo off;
frec

```

```

echo on;
%-----Periodo de vibración:-----
echo off;
T=1 / min(frec(1:length(frec),1)) %-----Periodo de la
frecuencia mínima.

echo on;
%---Frecuencia angular correspondiente a T.
echo off;
omega=min(frec(1:length(frec),1))*2*pi;

echo on;
%-----Intervalo crítico de interpolación:-----
echo off;
int=(1 / mean(frec(1:length(frec),1))) / pi %---(Intervalo de
interpolación.

echo on;
%-----Numero de intervalos de interpolación:-----
echo off;
n=round(T/int*1) %---Número de intervalos.

t=n*int; %---Rango de tiempo del gráfico (periodo de vibración).--

%-----Simular los modos de vibración de la estructura:-----

gdla=[1:Nnod*3]';
gdla(bc(:,1))=[]; %---Vector con los GDL activos.
condinicial=zeros(Nnod*3,2);

%-----Diagonalizar matrices de masa y rigidez y convertirlas en
vectores:-----
M2=modal'*M2*modal;
K2=modal'*K2*modal;
C2=modal'*C2*modal;
q2=modal'*q(gdla);
M2=diag(M2);
C2=diag(C2);
K2=diag(K2);

M3=zeros(Nnod*3,1);
M3(gdla)=M2;
C3=zeros(Nnod*3,1);
C3(gdla)=C2;
K3=zeros(Nnod*3,1);
K3(gdla)=K2;
q3=zeros(Nnod*3,1);
q3(gdla)=q2;

echo on;

```



```

%-----El programa está realizando las iteraciones para simulación
dinámica.
%-----Esto podría tardar unos minutos. Por favor espera...
echo off;

%-----Resolver la ecuación de movimiento mediante un metodo de Runge
Kutta
%-----separando las ecuaciones de cada GDL:-----
desp=zeros(n,2,Nnod*3);
a=size(bc);
a=a(1);
for i=1:n
    desp(i,:,bc(:,1))=[bc(:,2)'; zeros(1,a)];
end

for i=1:Nnod*3
    a=0;
    j=1;
    while j<=length(gdla) & a==0
        if i==gdla(j)
            a=1;
        end
        j=j+1;
    end
    if a==1;
        [tiempo,desp(:,:,i)]=ode15s('funcion',[0:t/(n-1):t],condinicial(i,:),[],M3(i),C3(i),K3(i),q3(i));
    end
end

%-----Buscar el número del nodo al cual se analizara según la malla
de análisis dinámico:-----
a=N1(imp,2:3);
b=0;
i=1;
while b==0
    if a==N(i,2:3)
        b=1;
        j=N(i,:);
    end
    if i==length(N)
        b=1;
    end
    i=i+1;
end
echo on;
%-----Nodo al cual se analiza:-----
echo off;
imp=j(1,1)

%-----Graficar el desplazamiento del nodo analizado vs. tiempo:-----

```

```

de=desp(:,1,(imp*3-2:imp*3));
figure(2);
plot(tiempo,de(:,:));
title(['Gráfico de desplazamiento vs. tiempo del nodo
',num2str(imp)]);
xlabel('Tiempo (s)');
ylabel('Desplazamiento (in)');

%----Graficar la velocidad del nodo analizado vs. tiempo:----
de=desp(:,2,(imp*3-2:imp*3));
figure(3);
plot(tiempo,de(:,:));
title(['Gráfico de velocidad vs. tiempo del nodo ',num2str(imp)]);
xlabel('Tiempo (s)');
ylabel('Velocidad (in/s)');

%----Graficar la aceleración del nodo analizado vs. tiempo:----
de=de(:,1,1:3);
tiempo=[tiempo tiempo tiempo];
ac=diff(de(:,1:3))./diff(tiempo);
figure(4);
plot(tiempo(1:(length(tiempo)-1)),ac(:,:));
title(['Gráfico de aceleración vs. tiempo del nodo ',num2str(imp)]);
xlabel('Tiempo (s)');
ylabel('Aceleración (in/s^2)');

%----Mostrar los modos de vibración (vibración libre):----
clear i;
vld=zeros(Nnod*3,1);
eld=zeros(Nel,6);
int=1/frec((size(frec,1)-modo)/(pi*10));
n=round(1/frec((size(frec,1)-modo)/int)+1);
anima=moviein(n);
for j=1:n
    t=j*int;
    vld(gdla,1)=modal(:,size(modal,2)-
modo+1)*real(exp(i*2*pi*frec(length(frec)-modo+1)*t));
    vld(bc(:,1),1)=[0];
    eld(:,1)=vld(Cons(:,2)*3-2,1);
    eld(:,2)=vld(Cons(:,2)*3-1,1);
    eld(:,3)=vld(Cons(:,2)*3,1);
    eld(:,4)=vld(Cons(:,3)*3-2,1);
    eld(:,5)=vld(Cons(:,3)*3-1,1);
    eld(:,6)=vld(Cons(:,3)*3,1);
    figure(5);
    clf;
    eldisp2(ex,ey,eld,[1 2 1],200);
    anima(:,j)=getframe;
end
title(['Simulación de ',num2str(modo),' modo natural de vibración, a
',num2str(frec(length(gdla)-modo+1,1)),' Hz']);
movie(anima,5,8);

```

APENDICE C

CÓDIGO DEL PROGRAMA EPLANO.M:

*-----Programa de análisis estático y dinámico de un cuerpo sólido
 sometido
 1-----a esfuerzos planos. Creado por Daniel Blum Velasco empleando
 CALFEM y funciones creadas
 1-----como parte de la tesis previa a la obtención del título de
 Ingeniero Mecánico.-----
 1-----Derechos del autor reservados.-----

3-----Propósito: Análisis estático y dinámico de un cuerpo sólido
 formado
 1-----por elementos triangulares y sometido a esfuerzos planos.
 Durante el análisis estático se
 3-----asume que la carga ha sido aplicada progresivamente. Durante
 el análisis dinámico se
 3-----asume que la carga es aplicada de forma abrupta y se mantiene
 constante (escalón).

3-----Variables de entrada:

1-----a) Coordenadas de los nodos de la malla:
 1-----En esta matriz $n \times 3$ se ingresan las coordenadas de los n nodos
 de la estructura
 3-----de la siguiente forma: $[i1 \ x1 \ y1; i2 \ x2 \ y2; \dots; in \ xn \ yn]$,
 donde $i1, i2, \dots, in$ son los
 3-----números respectivos de los n nodos, $x1, x2, \dots, xn$ son las
 coordenadas X de cada nodo,
 3-----e $y1, y2, \dots, yn$ son las coordenadas Y de cada nodo.-----

3-----Cons; Matriz constitutiva:
 3-----En esta matriz $n \times 4$ se ingresan los n elementos del cuerpo y
 los nodos que los
 3-----constituyen de la siguiente forma: $[i1 \ a1 \ b1 \ c1; i2 \ a2 \ b2$
 $c2; \dots; in \ an \ bn \ cn]$, donde $i1,$
 3----- $i2, \dots, in$ son los números respectivos de los n elementos, $a1 \ b1$
 $c1, a2 \ b2 \ c2, \dots, an \ bn \ cn$
 3-----son los 3 nodos de cada elemento.-----

§-----imp; Nodo al cual se le graficará su desplazamiento,
 velocidad y aceleración.
 §-----durante el periodo de vibración.-----

§-----modo; Modo de vibración natural que se desea visualizar.-----
 §-----graf; Esfuerzo a graficar: 1=sigmax, 2=sigmay, 3=tauxy,
 4=Von Mises.-----

§-----A; Área de la sección transversal de los elementos.-----
 §-----E; Módulo de Young del material de la estructura.-----
 §-----Poi; Módulo de Poisson del material de la placa.-----
 §-----dens; Densidad del material de la estructura.-----
 §-----g; Aceleración gravitacional.-----

§-----bc; Condiciones de frontera:
 §-----En esta matriz nx2 se ingresan las n condiciones de frontera
 de la estructura (apoyos)
 §-----de la siguiente manera: [i1 c1; i2 c2;...;in cn], donde i1,
 i2,...,in son los n grados
 §-----de libertad restringidos, y c1,c2,...,cn son los valores de las
 restricciones
 §-----respectivas.-----

§-----cargal; Cargas nodales externas:
 §-----En esta matriz nx2 se ingresan las cargas nodales de los n
 nodos de la estructura de
 §-----la siguiente manera: [x1 y1;x2 y2;...;xn yn], donde x1,
 x2,...,xn son las componentes
 §-----X de las cargas nodales, e y1, y2,...,yn son las componentes Y
 de las cargas nodales.-----

§-----Variables de salida:

§-----ed; Desplazamientos nodales:
 §-----En esta matriz nx4 se muestran los desplazamientos de los
 grados de libertad de los dos
 §-----nodos de cada elemento.-----

§-----Faxial; En esta matriz lx2 se indica la mayor fuerza axial de
 la estructura y el
 §-----elemento en que se encuentra.-----

§-----frec; Frecuencias naturales:
 §-----En esta matriz nx1 se muestran los valores de las frecuencias
 naturales de la estructura.
 §-----Sus respectivos perfiles de deformación se encuentran en la
 variable modal.-----

§+++++
 §
 §-----Datos de entrada:-----

2-----Identificación del cuerpo analizado: Rectángulo vertical con
carga aplicada en el centro
-----de su lado superior.-----

3-----Coordenadas de los nodos de la malla:-----

N=[1 0 0.15;
2 0.05 0.15;
3 0.1 0.15;
4 0.15 0.15;
5 0.2 0.15;
6 0.25 0.15;
7 0.3 0.15;
8 0 0.1;
9 0.05 0.1;
10 0.1 0.1;
11 0.15 0.1;
12 0.2 0.1;
13 0.25 0.1;
14 0.3 0.1;
15 0 0.05;
16 0.05 0.05;
17 0.1 0.05;
18 0.15 0.05;
19 0.2 0.05;
20 0.25 0.05;
21 0.3 0.05;
22 0 0;
23 0.05 0;
24 0.1 0;
25 0.15 0;
26 0.2 0;
27 0.25 0;
28 0.3 0];

4-----Matriz de conectividad:-----

Cons=[1 1 2 8;
2 2 8 9;
3 2 3 9;
4 3 9 10;
5 3 4 10;
6 4 10 11;
7 4 5 11;
8 5 11 12;
9 5 6 12;
10 6 12 13;
11 6 7 13;
12 7 13 14;
13 8 9 15;
14 9 15 16;
15 9 10 16;
16 10 16 17;
17 10 11 17];



```

18 11 17 18;
19 11 12 18;
20 12 18 19;
21 12 13 19;
22 13 19 20;
23 13 14 20;
24 14 20 21;
25 15 16 22;
26 16 22 23;
27 16 17 23;
28 17 23 24;
29 17 18 24;
30 18 24 25;
31 18 19 25;
32 19 25 26;
33 19 20 26;
34 20 26 27;
35 20 21 27;
36 21 27 28;

```

```

*-----Nodo al cual se le graficara su desplazamiento, velocidad y
aceleracion
*-----durante el periodo de vibración:-----
imp=4;

```

```

modo=[1]; *-----Modo que se desea visualizar;-----
egraf=[4]; *---Esfuerzo a graficar: 1=sigmax, 2=sigmay, 3=tauxy,
4=Von Mises.---

```

```

*-----Espesor, modulo de Young, módulo de Poisson, densidad y
gravidad (constantes para todos los elementos):-----
Esp=[0.2]; *---Espesor de la placa.---
E=[200e6]; *---Módulo de Young del material de la placa.---
Poi=0.28; *Módulo de Poisson del material de la placa.---
dens=[8e-6]; *---Densidad del material de la placa.---
g=-9810; *---Aceleración gravitacional.---

```

```

*-----Condiciones de frontera:-----
bc=[49 0;
44 0;
46 0;
48 0;
50 0;
52 0;
54 0;
56 0];

```

```

*-----Cargas nodales externas:-----
*-----En esta matriz nx2 se ingresan las cargas nodales de los n
nodos de la estructura de
*-----la siguiente manera: [x1 y1;x2 y2;...;xn yn], donde x1,
y2,...,xn son las componentes

```

```

%-----K de las cargas nodales, e y1, y2,...yn son las componentes
de las cargas nodales.-----

```

```

cargal=zeros(size(N,1),2);
cargal(4,:)=[0 -15000];

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%

```

```

%-----Fin de ingreso de datos de entrada. No modificar el programa
en las líneas
%-----siguientes.-----
%

```

```

Nel=size(Cons,1); %-----Número de elementos de la malla:
Nnod=size(N,1); %-----Número de nodos de la malla:-----

```

```

%-----Matriz de grados de libertad de los nodos de cada elemento:---
Edof=zeros(Nel,2*3+1);
for i=1:Nel,

```

```

    Edof(i,1)=Cons(i,1);
    Edof(i,2)=Cons(i,2)*2-1;
    Edof(i,3)=Cons(i,2)*2;
    Edof(i,4)=Cons(i,3)*2-1;
    Edof(i,5)=Cons(i,3)*2;
    Edof(i,6)=Cons(i,4)*2-1;
    Edof(i,7)=Cons(i,4)*2;
end

```

```

%-----Coordenadas de los nodos inicial y final de los elementos:----
ex=zeros(Nel,3);
ey=zeros(Nel,3);
for i=1:Nel,

```

```

    ex(i,:)=[N(Cons(i,2),2) N(Cons(i,3),2) N(Cons(i,4),2)];
    ey(i,:)=[N(Cons(i,2),3) N(Cons(i,3),3) N(Cons(i,4),3)];
end

```

```

%
%-----Matrices de rigidez, amortiguamiento, masa y cargas externas
nodales:-----
%

```

```

%-----Matriz de ley constitutiva:-----
D=[1 Poi 0;
    Poi 1 0;
    0 0 (1-Poi)/2];
D=D * E/(1-Poi^2);

```

```

%-----Vector de tipo de análisis y espesor de la placa:-----

```

```

ep=[1 Esp]; %---El valor 1 representa esfuerzos planos, 2 es para
deformaciones planas.---

%-----Cargas de cuerpo (peso especifico):-----
eq=zeros(2, Nel);
for i=1:Nel
    eq(:,i)=[0;
            -dens*g];
end

%-----Cargas internas:-----
F=zeros(Nnod*2,1);

%-----Matrices de rigidez, amortiguamiento y masa:-----
K=zeros(Nnod*2,Nnod*2); %---Rigidez.---
C=zeros(size(K)); %---Amortiguamiento.---
Mass=zeros(size(K)); %---Masa.---
for i=1:Nel,
    [ke, fe]=plante(ex(i,:), ey(i,:), ep, D, eq(:,i));
    [K, F]=assem(Edof(i,:), K, ke, F, fe);
    me=maspt(ex(i,:), ey(i,:), dens, Esp);
    Mass=assem(Edof(i,:), Mass, me);
end

carga=zeros(Nnod*2,1);
for i=1:Nnod
    carga(i*2-1:i*2,1)=cargal(i,:);
end
F=F+carga;
q=carga;
%C=.05*K+.05*Mass;

%-----Resolver el sistema de ecuaciones:-----
[d,Q]=solveq(K,F,bc);
ed=extract(Edof,d);

%-----Calcular los esfuerzos y deformaciones unitarias:-----
Esf=zeros(Nel,4);
Def=zeros(Nel,3);
for i=1:Nel,
    [Esf(i,1:3), Def(i,:)]=plants(ex(i,:), ey(i,:), ep, D, ed(i,:));
end

%-----Calcular los esfuerzos de Von Mises:-----
for i=1:Nel,
    Esf(i,4)=sqrt((Esf(i,1)+Esf(i,2))^2/4+Esf(i,3)^2);
end

```

```

%-----Dibujar la estructura deformada:-----
newplot;
figure(1);
eldraw2(ex,ey,[1 2 1]);
eldisp2(ex,ey,ed,[2 4 1],2);
title('Gráficos del cuerpo sin deformación y con deformacion por
cargas aplicadas');
xlabel('mm');
ylabel('mm');

%-----Obtener las fuerzas y deformaciones nodales máximas:-----
sigx=[0 0];
sigy=[0 0];
tauxy=[0 0];
sigx(1,1)=max(abs(Esf(:,1)));
sigy(1,1)=max(abs(Esf(:,2)));
tauxy(1,1)=max(abs(Esf(:,3)));

epsx=[0 0];
epsy=[0 0];
gamxy=[0 0];
epsx(1,1)=max(abs(Def(:,1)));
epsy(1,1)=max(abs(Def(:,2)));
gamxy(1,1)=max(abs(Def(:,3)));

for i=1:Nel,
    if abs(Esf(i,1))==sigx(1,1)
        sigx=[Esf(i,1) i];
    end
    if abs(Esf(i,2))==sigy(1,1)
        sigy=[Esf(i,2) i];
    end
    if abs(Esf(i,3))==tauxy(1,1)
       iauxy=[Esf(i,3) i];
    end

    if abs(Def(i,1))==epsx(1,1)
        epsx=[Def(i,1) i];
    end
    if abs(Def(i,2))==epsy(1,1)
        epsy=[Def(i,2) i];
    end
    if abs(Def(i,3))==gamxy(1,1)
        gamxy=[Def(i,3) i];
    end
end

echo on;

```

```

%-----Máximo esfuerzo normal en X (absoluto) y elemento de su
ubicación:-----
echo off;
sigx

echo on;
%-----Máximo esfuerzo normal en Y (absoluto) y elemento de su
ubicación:-----
echo off;
sigy

echo on;
%-----Máximo esfuerzo cortante (absoluto) y elemento de su
ubicación:-----
echo off;
tauxy

echo on;
%-----Máxima deformación unitaria en X (absoluta) y elemento de su
ubicación:-----
echo off;
epsx

echo on;
%-----Máxima deformación unitaria en Y (absoluta) y elemento de su
ubicación:-----
echo off;
epsy

echo on;
%-----Máxima deformación angular (absoluta) y elemento de su
ubicación:-----
echo off;
gamxy

%-----Graficar los contornos de esfuerzos:-----
%-----Establecer la malla del gráfico:-----
xmax=max(N(:,2));
xmin=min(N(:,2));
ymax=max(N(:,3));
ymin=min(N(:,3));
X=zeros(3,Nel);
Y=zeros(size(X));
vmises=zeros(size(X));
a=zeros(Nel,3);
b=[1];
c=[1];
d=[1];

```

```

for i=1:Nel,
    X(:,i)=[N(Cons(i,2),2) N(Cons(i,3),2) N(Cons(i,4),2)]'; %---
    Coordenadas X de los nodos de cada elemento.---
    Y(:,i)=[N(Cons(i,2),3) N(Cons(i,3),3) N(Cons(i,4),3)]'; %---
    Coordenadas Y de los nodos de cada elemento.---
    for j=1:Nel, %---Lazo para obtener los elementos que comparten
    un mismo nodo.---
        if Cons(i,2)==Cons(j,2) | Cons(i,2)==Cons(j,3) |
        Cons(i,2)==Cons(j,4), %---Nodo 1 compartido.---
            a(b,1)=j;
            b=b+1;
        end
        if Cons(i,3)==Cons(j,2) | Cons(i,3)==Cons(j,3) |
        Cons(i,3)==Cons(j,4), %---Nodo 2 compartido.---
            a(c,2)=j;
            c=c+1;
        end
        if Cons(i,4)==Cons(j,2) | Cons(i,4)==Cons(j,3) |
        Cons(i,4)==Cons(j,4), %---Nodo 3 compartido.---
            a(d,3)=j;
            d=d+1;
        end
    end
    end
    %---Promediar en cada nodo los esfuerzos (a graficar) de los
    elementos que lo comparten y asignarlo al nodo.---
    vmises(:,i)=[sum(Esf(a(1:b-1,1),egraf))/(b-1) sum(Esf(a(1:c-
    1,2),egraf))/(c-1) sum(Esf(a(1:d-1,3),egraf))/(d-1)]';
    b=[1];
    c=[1];
    d=[1];
end

%-----Graficar los contornos de esfuerzos en la pantalla:-----
figure(2);
eldraw2(ex,ey,[1 2 1]);
fill(X,Y,vmises);
axis equal;
colormap jet;
title('Gráfico de contornos de esfuerzos seleccionados');
xlabel('mm');
ylabel('mm');
drawnow;

```

```

%-----Simulación de respuesta dinámica:-----

```

```

%-----Obtener las frecuencias naturales del cuerpo:-----

```

```

M2=Mass;
C2=C;
K2=K;
M2(bc(:,1),:)=[];
M2(:,bc(:,1))=[];
C2(bc(:,1),:)=[];
C2(:,bc(:,1))=[];
K2(bc(:,1),:)=[];
K2(:,bc(:,1))=[];

[modal, frec]=eig(K2,M2); %-----Valores propios de la ecuación:  $K = \omega^2 \times \text{Mass} = 0$ 
omega^2 * Mass = 0
if min(real(frec))<0
    echo on;
    %hay frecuencias naturales con valores negativos.
    echo off;
    frec
    break;
end
frec=diag(frec);
frec=sqrt(frec);
frec=frec/(2*pi);

cond1=max(abs(imag(frec))); %-----Se verifica que la parte
%imaginaria tenga valores
%--despreciables, producto del redondeo al
realizar los cálculos.
cond2=[1];
for i=1:length(frec),
    if isinf(frec(i,1))==1 | isnan(frec(i,1))==1
        cond2=0;
    end
end
end

if (cond1/max(abs(real(frec))))>=1e-5 | cond2==[0] %---Mostrar un
mensaje y detener la ejecución si hay error.
    echo on;
    %Las matrices de rigidez y/o de masa son singulares o tienen
valores negativos,
    %verificar condiciones de borde y dimensionamiento.
    cond1
    cond2
    echo off;
    break;
end

frec=real(frec); %-----Se toma únicamente la parte real de las
frecuencias naturales.
modal=real(modal); %-----tomando en cuenta que la parte
imaginaria es mínima.

%-----Determinar el intervalo crítico:-----
a=length(frec);
cont=1;

```

```

for i=1:a
    if frec(cont)==0 | frec(cont)/max(frec)<=1e-4
        frec(cont)=[];
        cont=cont-1;
    end
    cont=cont+1;
end
a=length(frec);
if frec(a)==0 | frec(a)/max(frec)<=1e-4
    frec(a)=[];
end

echo on;
%-----Frecuencias naturales del cuerpo:-----
echo off;
frec

echo on;
%-----Período de vibración:-----
echo off;
T=1 / min(frec(1:length(frec),1)) %---Período de 1=
frecuencia mínima.

echo on;
%---Frecuencia angular correspondiente a T.
echo off;
omega=min(frec(1:length(frec),1))*2*pi

echo on;
%-----Intervalo crítico de interpolación:-----
echo off;
int=(1 / mean(frec(1:length(frec),1))) / pi %---Intervalo de
interpolación.

echo on;
%-----Número de intervalos de interpolación:-----
echo off;
n=round(T/int*1) %---Número de intervalos.

t=n*int; %---Rango de tiempo del gráfico (período de vibración).--

%
%-----Simular los modos de vibración de la estructura:-----
%
gdla=[1:Nnod*2]';
gdla(bc(:,1))=[]; %---Vector con los GDL activos.
condinicial=zeros(Nnod*2,2);

%-----Diagonalizar matrices de masa y rigidez y convertirlas en
vectores:-----
M2=modal'*M2*modal;

```

```

K2=modal'*K2*modal;
C2=modal'*C2*modal;
q2=modal'*q(gdla);
M2=diag(M2);
C2=diag(C2);
K2=diag(K2);

M3=zeros(Nnod*2,1);
M3(gdla)=M2;
C3=zeros(Nnod*2,1);
C3(gdla)=C2;
K3=zeros(Nnod*2,1);
K3(gdla)=K2;
q3=zeros(Nnod*2,1);
q3(gdla)=q2;

echo on;
%----El programa está realizando las iteraciones para simulación
dinámica.
%----Este podría tardar unos minutos. Por favor espere!..
echo off;

%----Resolver la ecuación de movimiento mediante un método de Runge-
Kutta
%----separando las ecuaciones de cada GDL:----
desp=zeros(n,2,Nnod*2);
a=size(bc);
a=a(1);
for i=1:n
    desp(i,:,bc(:,1))=[bc(:,2)'; zeros(1,a)];
end

for i=1:Nnod*2
    a=0;
    j=1;
    while j<=length(gdla) & a==0
        if i==gdla(j)
            a=1;
        end
        j=j+1;
    end
    if a==1;
        [tiempo, desp(:, :, i)]=ode15s('funcion', [0:t/(n-
1):t], condinicial(i, :)', [], M3(i), C3(i), K3(i), q3(i));
    end
end

%----Buscar el número del nodo al cual se analizará según la malla
de análisis dinámica:----
a=N(imp,2:3);
b=0;

```

```

i=1;
while b==0
    if a==N(i,2:3)
        b=1;
        j=N(i,:);
    end
    if i==length(N)
        b=1;
    end
    i=i+1;
end
echo on;
%-----Nodo al cual se analiza:-----
echo off;
imp=j(1,1)

%-----Graficar el desplazamiento del nodo analizado vs. tiempo:-----
de=desp(:,1,(imp*2-1:imp*2));
figure(3);
plot(tiempo,de(:,,:));
title(['Gráfico de desplazamiento vs. tiempo del nodo ',num2str(imp)]);
xlabel('Tiempo (s)');
ylabel('Desplazamiento (mm)');

%-----Graficar la velocidad del nodo analizado vs. tiempo:-----
de=desp(:,2,(imp*2-1:imp*2));
figure(4);
plot(tiempo,de(:,,:));
title(['Gráfico de velocidad vs. tiempo del nodo ',num2str(imp)]);
xlabel('Tiempo (s)');
ylabel('Velocidad (mm/s)');

%-----Graficar la aceleración del nodo analizado vs. tiempo:-----
de=de(:,1,1:2);
tiempo=[tiempo tiempo];
ac=diff(de(:,1:2))./diff(tiempo);
figure(5);
plot(tiempo(1:(length(tiempo)-1)),ac(:,,:));
title(['Gráfico de aceleración vs. tiempo del nodo ',num2str(imp)]);
xlabel('Tiempo (s)');
ylabel('Aceleración (mm/s^2)');

%-----Mostrar los modos de vibración (vibración libre):-----
clear i;
vld=zeros(Nnod*3,1);
eld=zeros(Nel,6);
int=1/frec((size(frec,1))-modo)/(pi*10);
n=round(1/frec((size(frec,1))-modo)/int)+1;
anima=moviein(n);
for j=1:n
    t=j*int;

```

```
vld(gdla,1)=modal(:,size(modal,2)-  
modo+1)*real(exp(i*2*pi*frec(length(frec)-modo+1)*t));  
vld(bc(:,1),1)=[0];  
eld(:,1)=vld(Cons(:,2)*2-1,1);  
eld(:,2)=vld(Cons(:,2)*2,1);  
eld(:,3)=vld(Cons(:,3)*2-1,1);  
eld(:,4)=vld(Cons(:,3)*2,1);  
eld(:,5)=vld(Cons(:,4)*2-1,1);  
eld(:,6)=vld(Cons(:,4)*2,1);  
figure(6);  
clf;  
eldisp2(ex,ey,eld,[1 2 1],0.02);  
anima(:,j)=getframe;  
end  
title(['Simulación de ',num2str(modo),' modo natural de vibración, a  
,num2str(frec(length(gdla)-modo+1)), ' Hz']);  
movie(anima,5,8);
```



APENDICE D

CÓDIGO DE LA FUNCIÓN MASB2D.M:

```

function [me]=masb2d(ex,ey,dens,A);
% [me]=masb2d(ex(1,2),ey(1,2),dens(1,1))
% Propósito:
% Computar la matriz local diagonalizada de masa de un elemento de
% armadura en 2D
-----
% Variables:
-----
% Entrada:
% ex(1,2) = coordenadas X de los extremos del elemento.
% ey(1,2) = coordenadas Y de los extremos del elemento.
% dens(1,1) = densidad del material.
% A(1,1) = área de la sección transversal del elemento.
-----
% Salida:
% me = matriz local diagonalizada de masa.
-----
% Creada por: Daniel Elum Velasco,
% Facultad de Ingeniería en Mecánica y Ciencias de la Producción,
% Escuela Superior Politécnica del Litoral.
% Derechos del autor reservados, Agosto de 2002.
-----
b=[ex(2)-ex(1);
   ey(2)-ey(1)];
L=sqrt(b'*b);
n=b'/L; % Matriz de cosenos y senos directores
G=[n zeros(size(n));
   zeros(size(n)) n]; % Matriz de rotación
me=[1 0;
    0 1];
me= 2/3 * L * dens * A * me;
me=G'*me*G;

```

```
d=diag(me);  
me=zeros(size(me));  
for i=1:length(me),  
    me(i,i)=d(i,1);  
end
```

APENDICE E

COPIA DE LA FUNCIÓN MATLAB



POLITECNICA AGRARIA
BIBLIOTECA "MIGUEL ZEVALLLOS"
M.I. 1001 11

APENDICE E

CÓDIGO DE LA FUNCIÓN MASV2D.M:

```

function [me]=masv2d(ex,ey,dens,A);
    [me]=masv2d(ex(1,2),ey(1,2),dens(1,1))
% Propósito:
% Computar la matriz local diagonalizada de masa de un elemento de
viga en 2D
-----
% Variables:
% Entrada:
% ex(1,2) = coordenadas X de los extremos de los elementos.
% ey(1,2) = coordenadas Y de los extremos de los elementos.
% dens(1,1) = densidad del material.
% A(1,1) = area de la sección transversal del elemento.
% Salida:
% me = matriz local diagonalizada de masa.
-----
% Creada por: Daniel Blum Velasco,
% Facultad de Ingeniería en Mecánica y Ciencias de la Producción,
% Escuela Superior Politécnica del Litoral.
% Derechos del autor reservados, Agosto de 2002.
%
b=[ex(2)-ex(1);
    ey(2)-ey(1)]; %---Matriz de senos y cosenos directores.
L=sqrt(b(1,1)^2+b(2,1)^2);
n=b/L;
% Matriz de rotación:
G= [n(1) n(2) 0 0 0 0;
    -n(2) n(1) 0 0 0 0;
    0 0 1 0 0 0;
    0 0 0 n(1) n(2) 0;
    0 0 0 -n(2) n(1) 0;
    0 0 0 0 0 1];
% Matriz de masa:
me=zeros(6,6);
me(1,1)=1/3;
me(2,2)=13/35;
me(3,3)=1/105*L^2;

```

```
me(4,4)=1/3;  
me(5,5)=13/35;  
me(6,6)=1/105*L^2;  
me=105/148 * dens * A * L * me;  
me=G'*me*G;  
d=diag(me);  
me=zeros(size(me));  
  
for i=1:length(me),  
    me(i,i)=d(i,1);  
end
```



APENDICE F

CÓDIGO DE LA FUNCIÓN MASPT.M:

```

function me=maspt(ex,ey,dens,Esp);
% [me]=maspt(ex(1,2),ey(1,2),dens(1,1),Esp(1,1))
% Propósito:
% Computar la matriz local diagonalizada de masa de un elemento
% sólido triangular.
%-----
% Variables:
% Entrada:
% ex(1,3) = coordenadas X de los nodos del elemento.
% ey(1,3) = coordenadas Y de los nodos del elemento.
% dens(1,1) = densidad del material.
% Esp(1,1) = Espesor del elemento.
% Salida:
% me = matriz local diagonalizada de masa.
%-----
% Creada por: Daniel Blum Velasco,
% Facultad de Ingeniería en Mecánica y Ciencias de la Producción,
% Escuela Superior Politécnica del Litoral.
% Derechos del autor reservados, Marzo de 2004.
%-----

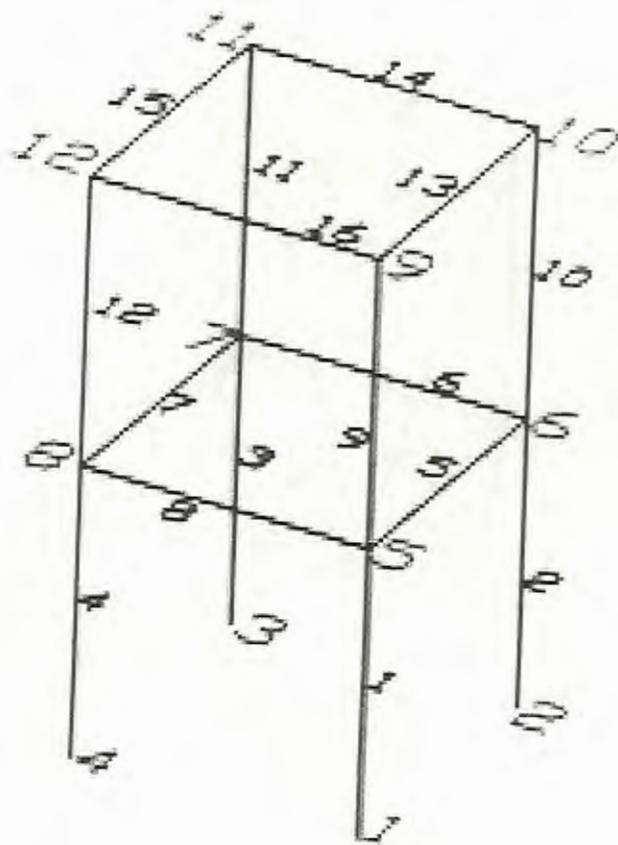
%-----Area del elemento:-----
A=1/2*det([ones(3,1) ex' ey']);
A=abs(A);

%-----Matriz de masa:-----
me=eye(6);
me=dens * Esp * A/3 * me;

```

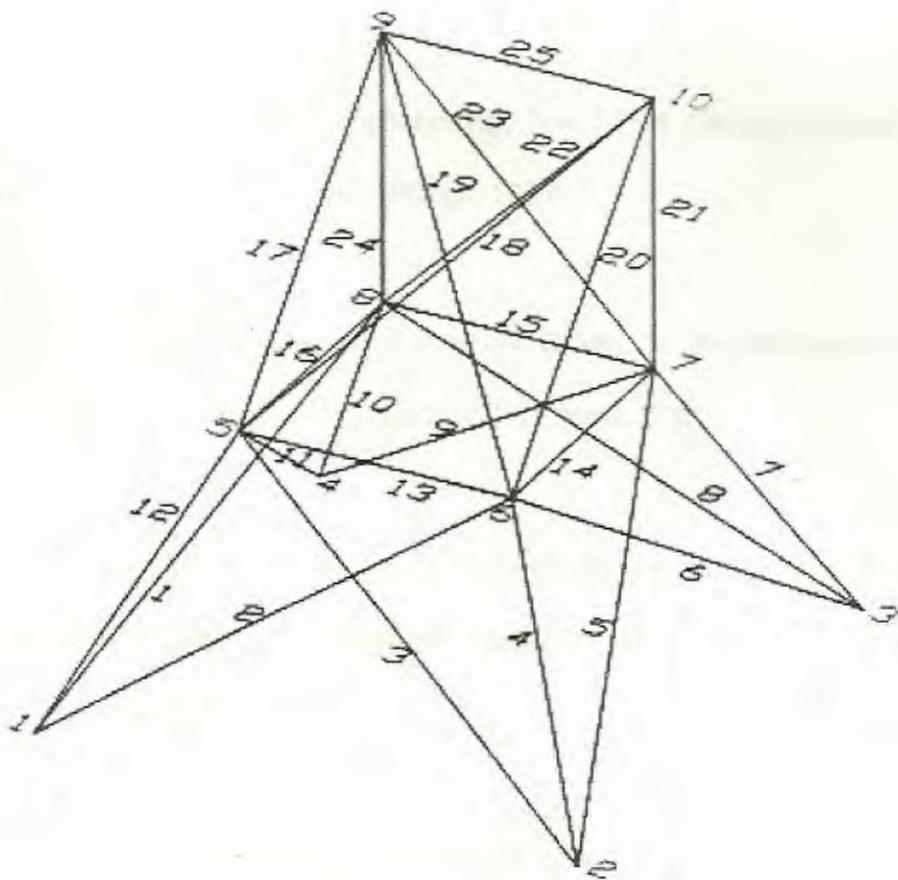
APENDICE G

GRAFICO CON LA NUMERACION DE LA MALLA DE LA ESTRUCTURA DEL EJEMPLO 3:



APENDICE H

GRAFICO CON LA NUMERACION DE LA MALLA DE LA ESTRUCTURA
DEL EJEMPLO 4:





BIBLIOGRAFIA

1. Hughes, Thomas J.R., The Finite Element Method: linear static and dynamic finite element analysis, Reimpresión, Dover Publications, Inc, 2000.
2. Kwon, Young W. & Bang, Hyochoong, The Finite Element Method Using Matlab, Primera edición, CRC Press, 1997.
3. Orcés, Eduardo, Apuntes de Clase del Curso de Análisis de Elementos Finitos, Escuela Superior Politécnica del Litoral, 2000.
4. Shames, Irving H. & Dym, Clive L., Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics, Edición en unidades del Sistema Internacional, Taylor & Francis, 1991.
5. Lund Institute of Technology / Division of Structural Mechanics, Calfem.

