

**ESCUELA SUPERIOR
POLITECNICA DEL LITORAL**

Facultad de Ingeniería Eléctrica

**"Programas de Computación para el Análisis y Diseño de Sistemas de
Control Lineal"**

TESIS DE GRADO

**Previa a la obtención del Título de
Ingeniero en Electricidad**

Especialización: ELECTRONICA

Presentada Por:

Nicanor Echeverría García

Guayaquil-Ecuador

1986

AGRADECIMIENTO

AL ING. CARLOS VILLAFUERTE P.

Director de tesis, por su ayuda y colaboración para la realización de este trabajo.

Al centro de Investigación, Científica y Tecnológica (CICYT) de la ESPOL, por la colaboración del equipo equipo utilizado en la elaboración del texto.

A todas aquellas personas que de una u otra forma asistieron en la culminación de este trabajo.

DEDICATORIA

A MIS PADRES

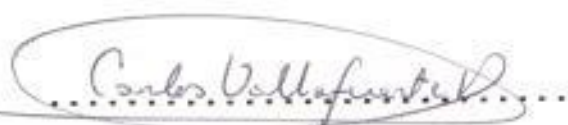
A MIS HERMANAS

A MI ESPOSA

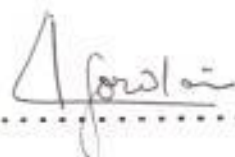
A MIS HIJOS



Ing. Gustavo Bermudez Flores
SUB-DECANO DE LA FACULTAD
DE INGENIERIA ELECTRICA.



Ing. Carlos Villafuerte Peña
DIRECTOR DE TESIS



Ing. Carlos Jordan
MIEMBRO PRINCIPAL



Ing. Sergio Flores Macías
MIEMBRO PRINCIPAL

DECLARACION EXPRESA

" La responsabilidad por los hechos, ideas y doctrinas expuestos en esta tesis, me corresponden; y, el patrimonio intelectual de la misma, a la ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL ".

(Reglamento de Exámenes y Títulos profesionales de la ESPOL).



.....

NICANOR ECHEVERRIA GARCIA

R E S U M E N

El presente trabajo trata de la elaboración de un paquete de programas de computación, capaz de analizar y diseñar la mayoría de los problemas que se presentan en la teoría de Sistemas de Control Lineal.-

El paquete de programas ha sido implementado en lenguaje Fortran y probado con éxito en el computador IBM S/4341 del Centro de Computo de la ESPOL.

Este paquete de programas puede determinar y graficar la respuesta en el tiempo de un sistema particular tanto para lazo abierto, como para lazo cerrado.- Además, este paquete de programas en la parte de diseño es muy versátil, ya que se puede diseñar mediante la Teoría de Control Óptimo ó, utilizando un compensador en cascada; cuando se utiliza este último método primero se encuentra el índice de observabilidad para así determinar el grado del compensador a utilizarse mediante la Teoría de Luenberger.-

Otra forma de utilizar este paquete de programas es en el análisis que presenta en el dominio de Frecuencia.- Así, se puede encontrar la función de Transferencia de un sistema de control Lineal para luego determinar y graficar la res-

puesta de frecuencia, ó encontrar el Lugar Geométrico de las Raíces.- La gráfica de la respuesta de frecuencia se la puede obtener tanto en coordenadas de BODE, así como en el polar de NYQUIST.

INDICE GENERAL

	PAG.
RESUMEN	V
INDICE GENERAL	VII
INDICE DE FIGURAS	XIII
INDICE DE TABLAS	XIV
INTRODUCCION	1
I. OBJETIVOS Y GENERALIDADES	4
1.1. Introducción	4
1.2. Formato de Entrada	6
1.2.1 : Datos Matriciales	8
1.2.2 : Datos Polinomiales	11
1.3. Formato de Salida	15
II. METODOS BASADOS EN EL ESPACIO DE ESTADOS (DOMINIO DEL TIEMPO).	18
2.1. Introducción.	18
2.2. PROGRAMA QUE REALIZA UN ANALISIS MATRICIAL (MATBAS).	22
2.2.1 : Teoría	23
2.2.2 : Formato de Entrada	29
2.2.3 : Formato de Salida	31
2.2.4 : Ejemplo	32
2.2.5 : Listado	34

2.3. PROGRAMA DE RESPUESTA EN EL TIEMPO	
(RETIEM).	41
2.3.1 : Teoría	42
2.3.2 : Formato de Entrada	49
2.3.3 : Formato de Salida	54
2.3.4 : Ejemplo	55
2.3.5 : Listado	57
2.4. PROGRAMA DE GRAFICO DE RESPUESTA EN EL TIEMPO	
(GRESTI).	65
2.4.1 : Teoría	65
2.4.2 : Formato de Entrada	67
2.4.3 : Formato de Salida	71
2.4.4 : Ejemplo	72
2.4.5 : Listado	74
2.5. PROGRAMA DE REALIEMENTACION USANDO VARIABLES	
DE ESTADO (REAVAR).	83
2.5.1 : Teoría	85
2.5.2 : Formato de Entrada	96
2.5.3 : Formato de Salida	110
2.5.4 : Ejemplo	114
2.5.5 : Listado	122
2.6. PROGRAMA DE INDICE DE OBSERVABILIDAD	
(INDOBS).	132
2.6.1 : Teoría	133
2.6.2 : Formato de Entrada	134

III. METODOS BASADOS EN LA FUNCION DE TRANSFERENCIA	
(DOMINIO DE FRECUENCIA).	226
3.1. INTRODUCCION.	226
3.2. PROGRAMA DE RESPUESTA DE FRECUENCIA	
(RESFRE).	228
3.2.1 : Teoria	228
3.2.2 : Formato de Entrada	230
3.2.3 : Formato de Salida	237
3.2.4 : Ejemplo	239
3.2.5 : Listado	241
3.3. PROGRAMA DEL LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES	
(LUGERA).	254
3.3.1 : Teoria	255
3.3.2 : Formato de Entrada	258
3.3.3 : Formato de Salida	262
3.3.4 : Ejemplo	263
3.3.5 : Listado	265
3.4. PROGRAMA PARA EXPANSION POR FRACCIONES	
PARCIALES (EXFPAR).	280
3.4.1 : Teoria	280
3.4.2 : Formato de Entrada	284
3.4.3 : Formato de Salida	286
3.4.4 : Ejemplo	287
3.4.5 : Listado	289

IV. PROBLEMAS DE DISEÑO	297
4.1. INTRODUCCION	297
4.2. PROBLEMA QUE SE RESUELVE MEDIANTE VARIABLES DE ESTADO	297
4.2.1 : Descripción	297
4.2.2 : Definición del problema	298
4.2.3 : Metodo de solución	301
4.2.4 : Listado	312
4.3. PROBLEMA A RESOLVER MEDIANTE FUNCION DE TRANSFERENCIA	331
4.3.1 : Descripción	331
4.3.2 : Definición del problema	331
4.3.3 : Metodo de solución	333
4.3.4 : Listado	337
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	365
APENDICES :	
APENDICE A : SUBROUTINAS	367
A.01. SUBROUTINA ARREMB	369
A.02. SUBROUTINA CACURU	371
A.03. SUBROUTINA CLAMAT	374
A.04. SUBROUTINA COCAPO	377
A.05. SUBROUTINA COCPOL	380
A.06. SUBROUTINA COMASO	383
A.07. SUBROUTINA COQORA	390
A.08. SUBROUTINA CDREMA	393

A.09.	SUBROUTINA DEAXBU	396
A.10.	FUNCION DETER	399
A.11.	SUBROUTINA ECULSI	408
A.12.	SUBROUTINA ECUSIM	414
A.13.	SUBROUTINA EFFRA	426
A.14.	SUBROUTINA EVAPOL	432
A.15.	SUBROUTINA HERMIT	434
A.16.	SUBROUTINA INRUKU	438
A.17.	SUBROUTINA MATRAE	443
A.18.	SUBROUTINA MULMAT	456
A.19.	SUBROUTINA MULPOL	459
A.20.	SUBROUTINA NOANGU	462
A.21.	SUBROUTINA NOCOPO	464
A.22.	SUBROUTINA RAICRE	467
A.23.	SUBROUTINA RELGRA	478
A.24.	SUBROUTINA RESPOL	485
A.25.	SUBROUTINA RETIRU	487
A.26.	SUBROUTINA SEMLOG	494
A.27.	SUBROUTINA SUMPOL	500
A.28.	SUBROUTINA YBVSX	502

APENDICE B :	SIMBOLOGIA	510
--------------	------------	-------	-----

APENDICE C :	MANUAL DE USUARIO	512
--------------	-------------------	-------	-----

BIBLIOGRAFIA	517
--------------	-------	-----

I N T R O D U C C I O N :

Cuando realizamos el estudio de la teoría de sistemas de control lineal nos encontramos con una demanda de mucho cálculo matemático, tales como: Resolución de ecuaciones lineales simultáneas, Determinación de la derivadas de variables de estado, Cálculos matriciales de alto grado: determinante, multiplicación, inversas, etc..., Cálculo de la matriz transición de estado, etc; luego, realizar estos cálculos manualmente si bien es cierto no son difíciles, pero si tediosos, es decir nos conlleva a demorarnos más en nuestra respuesta al problema, y aún con la posibilidad de equivocarnos; de allí mi preocupación por utilizar la herramienta de la década para estos cálculos, que es la computación.-

En conclusión, este trabajo proveerá de un conjunto de códigos computarizados, el cual resolverá la mayoría de los problemas asociados con el estudio y la aplicación de sistemas de control lineal.

Parto de que cualquier persona que desee utilizar este trabajo deberá poseer los conocimientos básicos de la teoría del control lineal; ya que en base a esto, la notación y

sistemas de formulación usados son compatibles con los que se encuentran en el estudio de sistemas de control lineal.

Teniendo esta herramienta a la mano nosotros teóricamente podemos diseñar un problema y simularlo para observar su comportamiento, luego podemos corregir el diseño original y volver a observar la respuesta mejorada, y así, hasta poder obtener nuestro problema de diseño lo más óptimo posible cumpliendo a la vez todas las especificaciones planteadas originalmente.

Por lo general cada cálculo matemático vendrá en una subrutina para ayudar al usuario en su entendimiento, de tal manera que permita al lector generar nuevos programas usando estas subrutinas.- Estas subrutinas se encuentran en el apéndice A.

En otras palabras este trabajo no requerirá que el usuario posea un amplio conocimiento de métodos o análisis numéricos, ni tampoco que conozca a fondo el lenguaje Fortran, solo necesita conocimientos sobre sistemas de control lineal. Este trabajo además indicará como será la entrada y salida de datos.

Los programas son divididos en dos partes :

- 1) Programas basados en el Espacio de Estados.
- 2) Programas basados en la Función de transferencia.

Todos los programas presentan el mismo formato, tanto el de entrada como el de salida, que en cada programa son explicados por medio de ejemplos.

En general los programas son limitados a problemas de orden décimo, aunque no tenemos limitaciones básicas en los algoritmos, tenemos limitaciones físicas obligadas, tales como el ancho de la página.-

C A P I T U L O I
OBJETIVOS Y GENERALIDADES

1.1: INTRODUCCION:

La presente Tesis tiene objetivos: en primer término de proveer una asistencia a la solución de problemas de análisis y diseño asociados con el estudio y la aplicación de Sistemas de Control Lineal.- En segundo lugar, dar una visión clara acerca de los algoritmos matemáticos utilizados, así como también, observar gráficamente el comportamiento del sistema investigado tanto en:

- 1) Dominio del Tiempo, como
- 2) Dominio de Frecuencia.-

En el estudio del primer tipo (dominio del tiempo), se prestará una gran atención a la descripción de variables de Estado de un Sistema de Control Lineal.- Las variables de Estado son especificadas en forma matricial, luego es importante primero conocer como

ingresamos estos datos matriciales en el desarrollo de esta Tesis.

En el estudio del segundo tipo (Dominio de Frecuencia), se trabajará con funciones de transferencia de una planta predeterminada.- Las Funciones de Transferencia son presentadas en forma de polinomio, así, este polinomio puede ser especificado mediante sus Factores ó, mediante sus Coeficientes.

En conclusión, debido a las diferentes maneras de especificar los datos que serán ingresados en nuestros programas, es necesario formalizar la entrada y salida de los mismos antes de profundizarse más en el desarrollo de este trabajo.- Para este efecto, se considerará los subcapítulos siguientes.

1.2 : FORMATO DE ENTRADA :

El formato de entrada de cada programa es descrito con detalle en los capítulos 2 y 3; el propósito de esta sección es comentar ciertas características generales de los formatos de entrada, las cuáles se aplicarán en todos los programas.-

Una consideración primaria en esta sección de formato de entrada fue la de hacer que el uso de los programas sea tan simple como sea posible.- Una segunda consideración fué la de hacerlos tan uniformes como sea posible para todos los programas.-

El porque de estas consideraciones es debido a que a veces los formatos elegidos contienen más espacio, (muchas líneas en el archivo de entrada) que el requerido verdaderamente para proveer al programa principal de los datos de entrada; también, el mismo formato se usa en muchos de los programas, de esta manera, los formatos de entrada son recordados en la mayoría de los programas.-

Además, la cubierta en el archivo de datos de entrada es diseñada tanto para relacionarla con el

problema básico expuesto, como para dar la dimensión del problema, que puede ser fácilmente modificado por otro nuevo problema asignado.

Todos estos programas pueden ser utilizados para resolver más de un problema, con un simple desplazamiento de los datos de entrada, uno después de otro.- En otras palabras, un encabezado de entrada se prepara para cada problema y esos encabezados son añadidos junto a la forma de componer cubiertas de entrada para el programa.

En la descripción de formatos de datos de entrada, el formato tipo fortran es incluido para que el usuario se familiarice con el lenguaje fortran.- La primera línea en el archivo de datos contiene la información de la identificación, la cuál puede ser utilizada para posteriores referencias.-

Un caracter alfa - numérico puede ser situado en las primeras 20 columnas en la primera línea del archivo de datos del programa en cuestión.- Así apropiamente las siguientes dos columnas (21- 22) de la primera línea contendrán la información

concerniente al grado del problema en formato de punto fijo.

En el desarrollo de esta Tesis se encontrarán posteriormente programas, que necesitarán datos ya sean en forma matricial o en términos de polinomios.- Consideremos cada uno de estos tipos de entrada separadamente.

Los datos de entrada de todos los programas aparecerán siempre en el archivo denominado [nombre del programa](no mayor de ocho caracteres alfa-numéricos), con la extensión [.listado].-

1.2.1: DATOS MATRICIALES :

Solamente dos tipos de matrices son considerados en los programas descritos en esta tesis:

- Matrices cuadradas.
- Vectores columna.

Los elementos de cada matriz cuadrada son siempre leídos por fila, tal como aparecen en

el arreglo original.

Los números son situados en campos de 10 columnas con formato de punto flotante.- Si la dimensión n de la matriz es mayor que ocho, el elemento continúa en la siguiente línea.

El elemento de la siguiente fila comenzará en la próxima línea en el archivo de datos.- Pero si n es mayor que ocho pero menor ó igual a diez, se necesitarán 10 líneas adicionales en el archivo de datos, una por cada fila.- Supongamos un ejemplo cuya matriz cuadrada de 3 x 3, está definida por :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1.2 & 3 \end{bmatrix}$$

Entonces estos datos se situarán en el archivo de la forma que se muestra en la tabla # 1.2:1.

TABLA # 1.2:1
 FORMATO DE ENTRADA EN MODO MATRICIAL

# de línea	# de columna					
	1	5	10	15	20	25
1	3.0		0.0		1.0	
2	-1.0		2.0		1.0	
3	4.0		1.2		3.0	

En el caso del vector columna, los elementos son leídos en línea para minimizar el número de líneas en el archivo de datos a utilizarse.- En otras palabras, los elementos son leídos como si el vector columna, fuese un vector fila.

Aquí, la dimensión de la matriz n es igual a tres, luego solo una línea es requerida para cada fila en el archivo de datos.- Recordar que si n es mayor a ocho, pero menor ó igual a diez, entonces se necesitará dos líneas por cada fila en el archivo de datos.

1.2.2: DATOS POLINOMIALES :

En el desarrollo de esta tesis nos encontraremos polinomios de grado n , luego estos datos llamados polinomiales entrarán en nuestros archivos de dos formas diferentes de formato.- Estos son :

- Coeficientes Polinomiales ,
- Factores Polinomiales.

Todos los programas que usan datos polinomiales presentan la alternativa de aceptar los datos de una u otra forma.- Estos dos formatos serán referidos como modo "P", ó como modo "F", respectivamente.

Si el modo P es seleccionado los coeficientes polinomiales son ingresados en un campo con punto flotante de 10 columnas, como si fuèsen elementos de un vector fila.-

El término constante entrará primero, esto es, se situará en el primer campo de 10

columnas hacia la izquierda, luego irán ascendiendo los coeficientes de los siguientes términos de grado mayor.

Es importante tener en cuenta que, si el grado del polinomio es mayor ó igual a ocho, es necesario añadir una segunda fila en el archivo de datos.- En otras palabras si un polinomio de grado ocho (8) va a ser leído, los primeros ocho coeficientes estarán ubicados en los ocho campos de 10 columnas de la primera línea del archivo de datos, el coeficiente de s^0 , entonces será ubicado en las 10 primeras columnas de la siguiente línea del archivo de datos.

Si ahora se quisiera trabajar con el modo "F", entonces cada factor es ubicado en una fila, donde la parte real es leída por el computador en las 10 primeras columnas y la parte imaginaria será leída en las siguientes 10 columnas.

La parte real es positiva si las raíces

correspondientes al factor están en el lado izquierdo del plano s.- Para raíces complejas conjugadas solo una fila será utilizada, ya que nuestro programa suministrará automáticamente la conjugada.

Para identificar cuál de los dos modos será utilizado, en nuestro archivo de datos utilizaremos una línea llamada de control, que estará siempre antes de cada entrada de datos polinomiales; aquí nosotros ubicaremos una P ó una F en la primera columna de esta línea de control, según en que modo vayamos a trabajar, y luego en la tercera columna con campo de punto fijo se indicará el grado del polinomio que se va a ingresar.- Así por ejemplo, si se desea ingresar el polinomio:

$$P(s) = s^3 + 5 s^2 + 9 s + 5$$

Que factorizado, resulta en :

$$\begin{aligned} P(s) &= (s+1) (s+2+j) (s+2-j) = \\ &= (s+1) [(s+2)^2 + 1] \end{aligned}$$

Entonces, en nuestro archivo de datos irá de la forma mostrada en la tabla # 1.2:2, si se desea trabajar en el modo P.-

TABLA 1.2:2

FORMATO DE ENTRADA EN MODO POLINOMIAL TIPO "P".

# de fila	# de columnas						
	1	5	10	15	20	25	30
1	P 3						
2	5.0		9.0		5.0		

Ahora si se desea el modo F se mostrará como aparece en la tabla # 1.2:3.- Tener en cuenta que el coeficiente de s^3 se asume la unidad y no necesita ser puesto en la fila de datos.

TABLA # 1.2:3

FORMATO DE ENTRADA EN MODO POLINOMIAL TIPO "F".

# de fila	# de columnas						
	1	5	10	15	20	25	30
1	F 3						
2	1.0						
3	2.0		1.0				

FORMATO DE SALIDA :

En la salida de todos los programas se describe en detalle el formato de salida, así que aquí solamente se realiza un comentario general para clarificar un factor particular que podrían causar confusión más adelante.- El listado de salida de todos estos programas aparecerán siempre en el archivo denominado: [nombre del programa], con la extensión [.LISTADO] , el cuál empezará enlistando la identificación de nuestro trabajo suministrado por el usuario y, el nombre del programa que se está ejecutando como encabezado.-

Algunos de nuestros programas presentan cálculos computacionales repetidos, entonces la salida será por partes, y en cada cálculo irá la información que concierne a la identificación del problema a tratarse.-

Para todos los ejemplos y cálculos realizados en los capítulos 2 y 3, se realizaron ciertas modificaciones y condensaciones, que fueron necesarias por la limitación del ancho de página,

referiéndonos en la presentación de salida actual del programa.-

Sin embargo el contenido básico y natural de la salida no debería ser cambiado.- Esta es una sugerión para que el usuario se prepare en ingresar correctamente los datos de entrada y, así obtener una correcta ejecución del problema.-

Si en la resolución del problema apareciera como respuesta de salida datos en forma de matrices cuadradas, estas serán siempre escritas como normalmente fueron ingresadas, esto es, con filas horizontales y columnas verticales.- En cambio vectores columnas son impresos en su forma transpuestas, es decir como si fuesen vectores filas, al igual como se explicó para la entrada de datos.- Es importante notar que los polinomios se darán como factores polinomiales o coeficientes polinomiales independientemente de la forma que fueron ingresados en el archivo de datos.- Los coeficientes son dados siempre en forma ascendente con el término constante al principio.-

Los factores polinomiales son listados guardando relación con la explicación original de la subsección anterior, la cuál dice que la parte real es positiva si, la raíz correspondiente al factor se encuentra en el lado izquierdo del plano s.- El usuario debería notar que hay una señal de cambio entre el formato de entrada de un factor y la forma en que este es listado.-

C A P I T U L O I I
METODOS BASADOS EN EL ESPACIO DE
ESTADOS (DOMINIO DEL TIEMPO)

2.1 : INTRODUCCION :

En este capítulo nosotros discutiremos un grupo de 9 programas, los cuáles pueden ser utilizados para el análisis ó diseño de Sistemas de Control Lineal para lazo cerrado que representado mediante sus variables de estado está determinado de la siguiente forma:

$$\dot{X}(t) = A X(t) + b u(t)$$

$$u(t) = K [r(t) - y(t)]$$

$$y(t) = c^T X(t)$$

donde :

$X(t) \in R^n$: Vector de estado.

$u(t) \in R$: Entrada del sistema.

$y(t) \in R$: Salida del sistema.

$r(t) \in R$: Función de entrada.

$\hat{A} \in R^{n \times n}$, $\hat{b} \in R^n$, $\hat{k} \in R^n$, $\hat{c} \in R^n$: Son matrices constantes.- γ ,

K : Escalar.

El programa matriz básica (MATBAS) discutido más adelante en la sección 2.2, presenta en su contenido el cálculo del determinante, inversa, ecuación características, y valores propios una matriz cuadrada \hat{A} , de orden n , así como también puede computar la matriz Transición de Estado y la matriz Solución.-

Además, se incluyen dos programas, que nos sirven para determinar la respuesta en el tiempo del sistema de control lineal realimentado descrito anteriormente.- El programa de respuesta en el tiempo (RETIEM), discutido en la sección 2.3, requiere que la función de entrada $r(t)$ tenga una respuesta de tiempo racional γ , que no sean repetidos los valores característicos cuando se combine la ganancia del sistema con la entrada.- Este programa también da una expresión en forma cerrada para la respuesta en el tiempo.-

El programa que nos da la gráfica de la respuesta en el tiempo (GRESTI), definido en la sección 2.4 se utiliza para determinar y graficar la respuesta en el tiempo para una entrada arbitraria.- Tener en cuenta que los dos programas pueden ser usados para el estudio de un sistema con lazo abierto en el que $K = 0$.-

La siguiente sección de este capítulo encuentra la función de transferencia del sistema anteriormente descrito, mediante el programa (REAVAR).

Este programa puede ser ampliamente utilizado tanto en la parte académica como en la parte práctica aplicado a la industria, para el análisis y diseño de un sistema particular de Control Lineal con variables de estado realimentados.- REAVAR, puede encontrar la función de transferencia del sistema descrito anteriormente para lazo abierto, haciendo $K = 0$.- Además, REAVAR puede diseñar sistemas de lazo cerrado desde una específica función de transferencia de lazo cerrado.

Las secciones 2.6 a 2.8 presentan tres programas, los cuales pueden ser utilizados para diseñar sistema de

control lineal mediante variables de estado, cuando estas son inaccesibles.- El programa denominado INDOBS, se lo utiliza para encontrar el índice de Observabilidad de un sistema lineal y así determinar el grado del compensador necesario, mediante la teoría del " Observador de Luenberger ", dado en el programa DIOBES.- El programa COMCAS utiliza estos dos últimos programas para diseñar nuestro sistema de control lineal que cumpla con los requerimientos deseados.-

En la última sección se presenta un programa que diseña estructuras realimentadas mediante variables de estado para sistemas con entrada y salidas múltiples utilizando la teoría del control óptimo (INCOPT).

2.2 = PROGRAMA QUE REALIZA UN ANALISIS MATRICIAL

(MATBAS).

En esta sección se presenta el programa MATBAS el cual nos servirá para cualquier matriz \underline{A} de grado n , menor ó igual a 10, para encontrar:

- 1) El Determinante de \underline{A} : $|\underline{A}|$
- 2) La Inversa de \underline{A} : \underline{A}^{-1}
- 3) El Polinomio Característico : $\det (s\underline{I} - \underline{A})$.
- 4) Los Valores propios de \underline{A} : λ_i .
- 5) La Matriz Transición de Estado : $\underline{Q}(t) = \exp(\underline{A}t)$.
- 6) La Matriz Solución : $\underline{Q}(s) = (s\underline{I} - \underline{A})^{-1}$.

Este programa lee los elementos de la matriz \underline{A} fila por fila y al final, en el archivo [MATBAS.-DATOS] posee una línea de control, en la cuál irá una de las seis funciones que presenta este programa según sea el requerimiento del usuario. Este programa contiene las subrutinas :

DETER : Calcula el determinante.-

EDUSIM : Resuelve un conjunto de ecuaciones simultáneas.-

CARPOL : Calcula el Polinomio Caracteriticos.-

RAICRE : Calcula las raíces reales de un polinomio.-

MAETRA : Calcula la Matriz Transición de Estado.-

Además CARPOL posee una subrutina llamada Cocapo, la cual determina los coeficientes del Polinomio Característico.- Los algoritmos utilizados son explicados en cada una de las subrutinas en el apéndice A.-

2.2.1: TEORIA :

En esta sección se definen los valores y vectores propios comúnmente denominados valores y vectores característicos respectivamente[1].- Estos, son muy utilizados en la teoría del control moderno; además los valores propios en sistemas lineales nos indican si este sistema es estable o no.

DEFINICION : Sea A una matriz cuadrada de orden n . Entonces un vector columna x , n -dimensional no nulo, es llamado un vector propio de A , si existe un escalar tal que :

$$A \underline{x} = \lambda \underline{x} \quad 2.2-1$$

En estas condiciones λ , es llamado un valor propio de A asociado al vector \underline{x} .-

El conjunto de escalares (valores propios) es llamado el "espectro de A".-

Igualando a cero la ecuación 2.2-1, nos queda:

$$A \underline{x} - \lambda \underline{x} I = 0$$

que factorizando:

$$(A - \lambda I) \underline{x} = 0 \quad 2.2-2$$

donde I : es la matriz identidad.

Además, encontrando los vectores propios estamos a la vez determinando las soluciones no triviales para un conjunto de n ecuaciones homogéneas.-

VALORES PROPIOS :

La condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución no trivial de un conjunto de n ecuaciones homogéneas es que el Rango de $(\underline{A} - \lambda \underline{I}) < n$. Esto es equivalente a decir que:

$$|\underline{A} - \lambda \underline{I}| = 0$$

Cuando el determinante es expandido, este se convierte en un polinomio de grado n -ésimo en el escalar λ . Matemáticamente, esto es:

$$|\underline{A} - \lambda \underline{I}| = (-1)^n + C_{n-1}\lambda^{n-1} + C_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots \\ \dots \dots \dots C_1 + C_0 = \Delta(\lambda) \quad 2.2-3$$

Las raíces de esta ecuación algebraica son los valores propios λ_i . Un resultado fundamental en algebra es que un polinomio de grado n tiene n raíces, por lo tanto una matriz \underline{A} de dimensión $n \times n$, tiene exactamente n valores propios.-

Este polinomio de grado n -ésimo es llamado el Polinomio Característico y la ecuación:

$$\Delta(\lambda) = 0$$

es llamada " Ecuación Característica ".

que factorizando quedará:

$$\Delta(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1) (\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$$

$$\Delta(\lambda) = 0$$

Cuyas raíces son:

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n .$$

Los valores propios de una matriz cuadrada \hat{A} son las raíces de la correspondiente ecuación característica[2].- En general algunas de estas raíces pueden ser iguales.-

El problema se presenta en la determinación de los valores propios de \hat{A} , ya que hay que resolver un polinomio de grado n -ésimo.-

Para un n muy grande nuestra resolución se complica, para evitarlo esto, nos ayudamos con los cálculos computacionales que se realizan en la subrutina CARPOL.-

La solución de la ecuación diferencial del vector de estado puede obtenerse por un método semejante al utilizado para resolver una ecuación diferencial de primer orden[3].- Considerese la ecuación :

$$\underline{\dot{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{b} u(t) \quad 2.2-4$$

donde $\underline{x}(t)$ y $u(t)$ son funciones escalares en el tiempo.- Se espera una solución exponencial de la forma $e^{\underline{A}t}$.- Tomando la transformada de Laplace de la ecuación, se tiene que:

$$s \underline{x}(s) - \underline{x}(0) = \underline{A} \underline{x}(s) + \underline{b} u(s)$$

y por tanto :

$$s \underline{x}(s) - \underline{A} \underline{x}(s) = \underline{x}(0) + \underline{b} u(s)$$

aplicando la ley distributiva, se obtiene que:

$$\underline{x}(s) [s\underline{I} - \underline{A}] = \underline{x}(0) + \underline{b} u(s)$$

despejando $\underline{x}(s)$, esto es:

$$\underline{X}(s) = \frac{\underline{x}(0)}{s\underline{I} - \underline{A}} + \frac{\underline{b}}{s\underline{I} - \underline{A}} u(s)$$

$$\underline{X}(s) = [s\underline{I} - \underline{A}]^{-1} \underline{x}(0) + [s\underline{I} - \underline{A}]^{-1} \underline{b}u(s).$$

Calculando la transformada de Laplace de esta última ecuación se obtiene la solución de la ecuación 2.2-4.- Matemáticamente, esto es:

$$\underline{X}(t) = \underline{\Phi}(t) \underline{x}(0) + \int_0^t \underline{\Phi}(t-\tau) \underline{b} u(\tau) d\tau$$

Notese que :

$$\underline{\Phi}(s) = [s\underline{I} - \underline{A}]^{-1}$$

se le denomina "Matriz Solución ", cuya transformada de Laplace es:

$$\underline{\Phi}(t) = e^{\underline{A}t}$$

que se le denomina " Matriz Transición de Estado ".

3.2.2: FORMATO DE ENTRADA :

Los datos de entrada se almacenarán en un archivo llamado [MATBAS.DATOS], el cuál contiene en su primera línea desde la columna # 01 a la 20, la identificación del problema a tratarse; prosiguiendo, en la columna # 21 - 22 con la dimensión de la matriz \hat{A} .- Las siguientes líneas contendrán los elementos de la matriz \hat{A} , que serán leídos fila por fila en campos desde la columna # 01 a la 10 para cada elemento; así el elemento a_{11} , estará en la segunda fila con el campo de 01 a 10; a_{12} , estará en la misma segunda fila con el campo del 11 al 20, y así sucesivamente.- En la última fila del archivo [MATBAS.DATOS] denominada línea de control, se especificará que función se va a computar.- La función se la indica mediante una clave de números; así, si en la última fila nosotros introducimos un dígito diferente de cero, esto es: 1 a 9, entonces la operación relativa no será ejecutada.- Si la última línea esta completamente en blanco todas las operaciones serán

realizadas.- Para mejor visualización se presenta la tabla # 2.2:1, que nos muestra las opciones con las funciones de este programa.-

Debe tenerse en cuenta que en la línea de control, cada opción tendrá un solo campo de una columna en el orden que se mostró al inicio de esta subsección.-

TABLA # 2.2:1

UTILIDAD DE LAS FUNCIONES DE MATBAS

Columna	Función	Comentarios
00	IDET $\neq 0$	Suprime el determinante de \hat{A} .
00	INV $\neq 0$	Suprime la Inversa de \hat{A} .
00	NRM $\neq 0$	Suprime λ (s).
00	ICP $\neq 0$	Suprime el Polinomio Característico.
00	IEIG $\neq 0$	Suprime los Valores Propios.
00	ISTM $\neq 0$	Suprime la Matriz Transición de Estado λ (t).

2.2.3: FORMATO DE SALIDA :

El programa presentará su respuesta de salida escribiendo primero el encabezado y el problema que se está tratando, luego dependiendo de la opción seleccionada escribirá:

- 1) El Determinante.
- 2) La Inversa de la matriz
- 3) La Matriz Solución $\underline{\tilde{Q}}(s)$, que matemáticamente está definida por :

$$\underline{\tilde{Q}}(s) = \frac{\text{adj} (s\underline{I} - \underline{A})}{\det (s\underline{I} - \underline{A})}$$

Esta función tiene como numerador $\text{adj} (s\underline{I}-\underline{A})$, que se lo expresa en forma de los coeficientes de la matriz en potencias de s , de la forma :

$$\text{adj} (s\underline{I} - \underline{A}) = \underline{E}_1 + \underline{E}_2 s + \dots + \underline{E}_n s^{n-1}$$

donde: \underline{E}_i : Matriz de orden n , para $i = 1, 2, \dots, n$.

De igual forma se expresa la matriz Transición de Estado denotada por $\underline{\Phi}(t)$, que definida en función de los valores característicos, se expresa por:

$$\underline{\Phi}(t) = \exp(\lambda_1 t)$$

Los valores característicos complejos se los expresa en términos de funciones de seno y coseno, amortiguadas.

2.2.4: EJEMPLO :

Sea la matriz \underline{A} definida por :

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 24 & 21 & 93 \\ 2 & -37 & -1 & 194 \\ -2 & 35 & 0 & -171 \\ -3 & 177 & 63 & 234 \end{bmatrix}$$

La forma en que los datos de entrada para este ejemplo particular se los ingresa en el

archivo [MATBAS.DATOS] se lo muestra en la tabla # 2.2:2.- Tener en cuenta que en la última fila del archivo se deja espacios en blanco porque se desea computar todas las opciones de este programa, como anteriormente se explicó.-

Tabla # 2.2:2

FORMA DE ENTRADA PARA EJEMPLO PARTICULAR [MATBAS.DATOS]

# de líneas	# de columna						
	1	5	10	15	20	25	30
1	Ejemplo de cap 2.2				4		
2	1.0	24.0		21.0	93.0		
3	2.0	-37.0		-1.0	194.0		
4	-2.0	-35.0		0.0	-171.0		
5	-3.0	177.0		63.0	234.0		
6	(en blanco)						

El programa de salida de este ejemplo particular se muestra en el archivo [MATBAS.-LISTADO], notar que \bar{x}_1 (s) esta dado por :

$$\bar{g}_{11}(s) = \frac{-67625.87 - 32187.98 s - 197.0 s^2 + s^3}{-468.59 - 41683.89 s - 31717.98 s^2 - 198 s^3 + s^4}$$

Y los correspondientes elementos de la Matriz Transición de estado son :

$$\begin{aligned} \bar{g}_{11}(t) = & - 0.0076 e^{-103.77 t} \\ & - 0.0020 e^{+303.09 t} \\ & - 0.6321 e^{-1.3138 t} \\ & + 1.6419 e^{-0.0133 t} \end{aligned}$$

$$\bar{g}_{12}(t) = \dots, \text{etc.}$$

Siendo los valores propios :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -103.774 \\ \lambda_2 &= 303.0991 \\ \lambda_3 &= -1.31380 \\ \lambda_4 &= -0.01133 \end{aligned}$$

2.2.5: LISTADO:

A continuación se presenta el listado de

MATBAS, conjuntamente con los archivos de datos y de salida para el ejemplo particular presentado en 2.2.4.-

~~REFERENCIAS:~~

- [] = W. BROGAN "MODERN CONTROL THEORY" PAG. 122
- [] = STANDARD MATHEMATICAL TABLES .PRESS. 1974
PAG 129.
- [] = DORF, E.U.A. , 1978 , FEI , PAG 392.-

LA MATRIZ A

CLM0000E+00	2.4000000E+01	2.1000000E+01	9.3000000E+01
CLM0000E+00	-3.7000000E+01	-1.0000000E+00	1.9400000E+02
CLM0000E+00	3.5000000E+01	0.0000000E+00	-1.7100000E+02
CLM0000E+00	1.7700000E+02	6.3000000E+01	2.3400000E+02

EL DETERMINANTE DE LA MATRIZ

CLM0000E+02

LA INVERSA DE LA MATRIZ

CLM0000E+02	-7.3443457E+02	-8.6183716E+02	3.6471756E+01
CLM0000E+00	-4.1967728E+01	-4.9250610E+01	2.0945406E+00
CLM0000E+01	8.2936172E+01	9.7354645E+01	-4.1399746E+00
CLM0000E-03	8.1122280E-06	-6.4007416E-03	2.1363485E-03

LOS COEFICIENTES DE LA MATRIZ SOLUCION

LA MATRIZ COEFICIENTE DE S#3

CLM0000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
CLM0000E+00	1.0000000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00
CLM0000E+00	0.0000000E+00	1.0000000E+00	0.0000000E+00
CLM0000E+00	0.0000000E+00	0.0000000E+00	1.0000000E+00

LA MATRIZ COEFICIENTE DE S#2

CLM0000E+02	2.4000000E+01	2.1000000E+01	9.3000000E+01
CLM0000E+00	-2.3500000E+02	-1.0000000E+00	1.9400000E+02
CLM0000E+00	3.5000000E+01	-1.9800000E+02	-1.7100000E+02
CLM0000E+00	1.7700000E+02	6.3000000E+01	3.6000000E+01

LA MATRIZ COEFICIENTE DE S#1

CLM0000E+04	1.1580000E+04	1.6980000E+03	4.5060000E+03
CLM0000E+03	1.1328016E+04	1.2499000E+04	1.6300000E+02
CLM0000E+02	-3.8540000E+04	-4.2567984E+04	4.4800000E+02
CLM0000E+02	1.9560000E+03	2.0280000E+03	-7.9843750E+00

LA MATRIZ COEFICIENTE DE S#0

CLM0000E+04	-3.4397962E+05	-4.0364962E+05	1.7083453E+04
CLM0000E+03	-1.9656461E+04	-2.3067000E+04	9.8403125E+02
CLM0000E+03	3.8844500E+04	4.5597102E+04	-1.9416719E+03
CLM0000E+00	2.0000000E+00	-2.0000000E+00	4.7578125E+00

EL POLINOMIO CARACTERISTICO SUBIENDO DE ACUERDO A LA POTENCIA DE S

-4.1683898E+04 -4.1683898E+04 -3.1717984E+04 -1.9800000E+02 1.0000000E+00

LOS VALORES PROPIOS DE LA MATRIZ

PARTE REAL	PARTE IMAGINARIA
-4.1683898E+04	0.0000000E+00
-4.1683898E+04	0.0000000E+00
-3.1717984E+04	0.0000000E+00
-1.9800000E+02	0.0000000E+00

LOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ TRANSICION DE ESTADO

LA MATRIZ COEFICIENTE DE EXP(-1.037742E+02)T

-1.2737834E-01	2.9757559E-01	8.1768632E-02	-1.2737834E-01
-4.7929192E-01	1.1196976E+00	3.0767357E-01	-4.7929192E-01
4.3691134E-01	-1.0206890E+00	-2.8046793E-01	4.3691134E-01
1.6853136E-01	-3.9372784E-01	-1.0818994E-01	1.6853136E-01

LA MATRIZ COEFICIENTE DE EXP(3.030991E+02)T

2.6441181E-01	1.4305842E-01	5.4345503E-02	2.6441181E-01
4.7607410E-01	2.5757694E-01	9.7849131E-02	4.7607410E-01
-4.1488409E-01	-2.2447050E-01	-8.5272491E-02	-4.1488409E-01
8.2973617E-01	4.4892365E-01	1.7053849E-01	8.2973617E-01

LA MATRIZ COEFICIENTE DE EXP(-1.313805E+00)T

2.7905273E-01	-8.8407135E+00	-9.9901209E+00	2.7905273E-01
2.7308762E-02	-8.6006242E-01	-9.7202009E-01	2.7308762E-02
-6.9822311E-02	2.2039557E+00	2.4905643E+00	-6.9822311E-02
2.4939179E-03	-5.5579066E-02	-6.2901497E-02	2.4939179E-03

LA MATRIZ COEFICIENTE DE EXP(-1.133958E-02)T

-4.1607666E-01	8.4000702E+00	9.8540106E+00	-4.1607666E-01
-2.4081826E-02	4.8278624E-01	5.6649518E-01	-2.4081826E-02
4.7743797E-02	-9.5877743E-01	-1.1248226E+00	4.7743797E-02
-5.8096647E-04	4.7904253E-04	5.9026480E-04	-5.8096647E-04

PROGRAMA DE RESPUESTA EN EL TIEMPO :
(RETIEM).

El programa RETIEM, determina la respuesta en el tiempo de sistemas lazo cerrado, definidos de la siguiente forma:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{b} u(t)$$

$$u(t) = K [r(t) - \underline{k}^T \underline{x}(t)]$$

$$y(t) = \underline{c}^T \underline{x}(t)$$

para una condición inicial $\underline{x}(0)$, y entrada $r(t)$, para t mayor ó igual a cero ($t \geq 0$), siendo su transformada de Laplace $R(s)$, una función racional en s , tal que el grado del denominador es de por lo menos mayor en uno al grado del numerador del sistema. El diagrama de bloques del sistema se lo muestra en la figura # 2.3:1.

RETIEM utiliza las siguientes subrutinas :

COCAPO : Calcula los coeficientes del polinomio característico.-

RAICRE : Calcula las raíces reales de un polinomio.

- COPORA** : Calcula los coeficientes polinomiales por medio de sus raíces.-
- MATRAE** : Calcula la Matriz Transición de Estado.

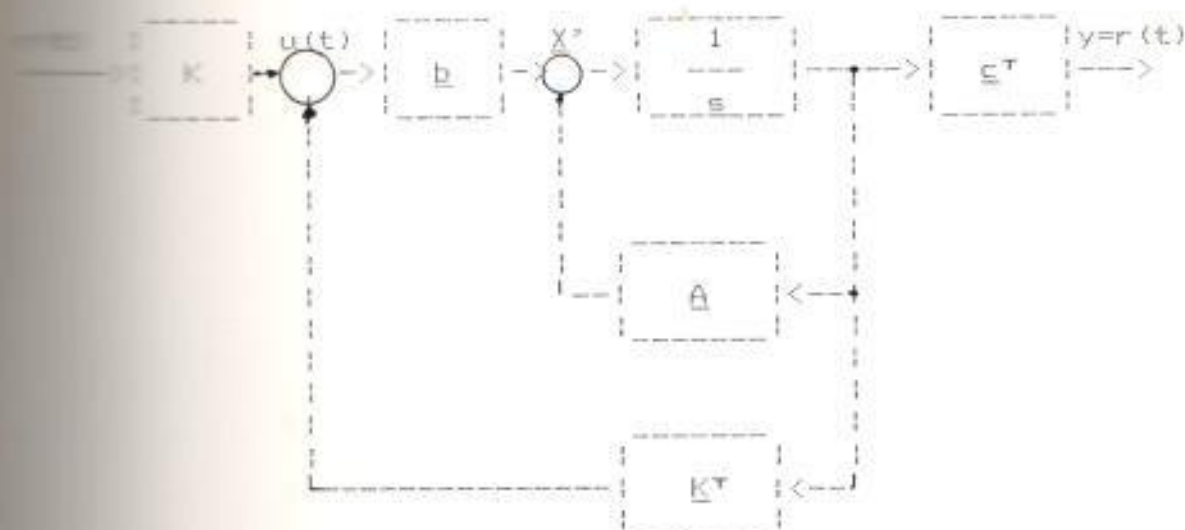


FIGURA * 2.3:1: DIAGRAMA DE BLOQUES DEL SISTEMA.

2.3.1: TEORIA :

Sea la transformada de Laplace de $r(t)$ dada por:

$$\mathcal{L} [r(t)] = R(s) = K_r \frac{N(s)}{D(s)}$$

donde :

$$N(s) = N_1 + N_2 s + \dots + N_k s^{k-1} + s^k$$

$$D(s) = D_1 + D_2 s + \dots + D_m s^{m-1} + s^m$$

$$y \quad m > k \geq 0$$

El método que se usa será el de formar un sistema dinámico de orden m , cuya respuesta a un conjunto específico de condiciones iniciales sea igual a $r(t)$.

Entonces se puede combinar este nuevo sistema con el original y encontrar la respuesta completa en forma cerrada mediante el uso de la subrutina MATRAE (revisar apéndice A).- Para este efecto, se usa variables de fase para representar este nuevo sistema de la siguiente forma :

$$\dot{\underline{x}}_r(t) = \underline{A}_r \underline{x}_r(t)$$

$$y_r(t) = \underline{c}_r^T \underline{x}_r(t)$$

donde :

$$\dot{\bar{X}}(t) = \bar{A} \bar{X}(t) + \bar{B} K [r(t) - \bar{Y}(t)]$$

estar representado de la siguiente manera

El sistema original para lazo cerrado

salida $y_r(t)$ será idéntica a $r(t)$.

Entonces la respuesta en el dominio

$$\bar{Y}_r(s) = \text{col } [0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$$

Si la condición inicial del sistema es

.....

$$G_r = \text{col } [K_1 N_1, K_2 N_2, \dots, K_p N_p, \dots, 0, \dots, 0]$$

Y_r

$$A_r = \begin{bmatrix} -D_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -D_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

aplicando la ley distributiva, se obtiene :

$$\dot{X}(t) = \underline{A} X(t) + \underline{b} K r(t) - \underline{b} K \underline{k}^T X(t)$$

aplicando la ley asociativa para la variable X , se llega a :

$$\dot{X}(t) = [\underline{A} - \underline{b} K \underline{k}^T] X(t) + \underline{b} K r(t)$$

en esta ecuación se denomina a :

$$\underline{A} - \underline{b} K \underline{k}^T = \underline{A}_k$$

matemáticamente, esto es:

$$\dot{X}(t) = \underline{A}_k X(t) + \underline{b} K r(t) \quad 2.3-3$$

Teniendo presente que la condición expuesta anteriormente se cumpla, esto es:

$$y_r(t) = r(t)$$

y,

$$y_r(t) = \underline{c}_r^T X_r(t)$$

Igualando las dos últimas ecuaciones y reemplazando en la ecuación 2.3-3, queda:

$$\underline{\dot{x}}(t) = \underline{A}_K \underline{x}(t) + \underline{b} K [\underline{c}_r^T \underline{x}_r(t)]$$

Escribiendo estas dos ecuaciones en la forma de matrices particionadas, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \underline{\dot{x}}(t) \\ \underline{\dot{x}}_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_K & \underline{b} K \underline{c}_r^T \\ 0 & \underline{A}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{x}_r(t) \end{bmatrix}$$

siendo su forma simplificada:

$$\underline{\dot{x}}_m(t) = \underline{A}_m \underline{x}_m(t)$$

donde:

$$\underline{A}_m = \begin{bmatrix} \underline{A}_K & \underline{b} K \underline{c}_r^T \\ 0 & \underline{A}_r \end{bmatrix}$$

y $\underline{x}_m(0)$, será:

$$\underline{x}_m(0) = \begin{bmatrix} \underline{x}^T(0) \\ - - - \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Igualmente si se realiza este análisis para la variable $y(t)$, donde:

$$y(t) = \underline{c}^T \underline{x}(t)$$

y teniendo presente que la condición expuesta anteriormente se cumpla, luego:

$$y_r(t) = \underline{c}_r^T \underline{x}_r(t)$$

Igualando las dos últimas ecuaciones y escribiéndola en forma de sus matrices particionadas, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ y_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^T & \\ 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_r(t) \end{bmatrix}$$

Escribiendo en la forma simplificada :

$$y_a(t) = c_a^T x_a(t)$$

Entonces la respuesta en el tiempo de $x(t)$ y $y(t)$ en este sistema aumentado esta dado por:

$$x_a(t) = \tilde{q}_a(t) x_a(0)$$

Donde $\tilde{q}_a(t)$ es la Matriz Transición de Estado (MTS) del sistema aumentado, y que se puede calcular mediante la subrutina MATRAE (ver apéndice A).

Debe tenerse en cuenta que, solamente el lado superior izquierdo $n \times n$ de $\tilde{q}_a(t)$ es utilizado, ya que se está interesado solamente en la respuesta en el tiempo del sistema original y no del vector de estado $x_r(t)$.-

2.3.2: FORMATO DE ENTRADA :

Los datos de entrada para este programa serán divididos en dos partes:

- 1.- Primero se describe el sistema básico de matrices para lazo cerrado, como \underline{A} , \underline{b} , \underline{c} , \underline{k} , y K .-
- 2.- La descripción de $r(t)$, con las condiciones iniciales $\underline{x}(0)$.-

Estos datos se almacenarán en el archivo [RETIEM.DATOS].-

Para familiarizarse más con el archivo de datos de entrada, se puede observar la tabla # 2.3:1.- En la misma, la primera línea de datos, contiene la identificación y el orden del sistema.- Las siguientes líneas contienen las matrices: \underline{A} , \underline{b} , \underline{c} , \underline{k} y a final la constante K ; continuando en la siguiente fila con las condiciones iniciales es decir $\underline{x}(0)$, que usualmente es de la forma de un vector fila.-

La función de entrada $r(t)$ es descrita por la transformada de Laplace $R(s)$; donde los polinomios del numerador $N(s)$ y denominador $D(s)$, pueden suministrarse tanto en la forma de raíces polinomiales como de coeficiente polinomiales.-

Para simplificar, se presenta el numerador $N(s)$ mediante sus coeficientes polinomiales y el denominador $D(s)$ en forma de sus raíces polinomiales.- Notar que el coeficiente del término de mayor grado tanto en los polinomios del numerador como en el denominador es la unidad y no necesita suministrárselo.-

Las raíces serán leídas con la parte real hacia la izquierda del archivo, es decir comenzando en la columna # 01 hasta la # 10, luego irá la parte imaginaria de la columna # 11 a la 20; solamente una raíz de un par complejo conjugado es necesaria.-

En este programa es necesario que el grado total del sistema más la entrada, esto es $n + m$, sea menor a 10.-

Si se desea la respuesta debido solamente a condiciones iniciales, entonces K_p puede ser ajustada a cero y puede suministrarse cualquier polinomio arbitrario para $N(s)$ y $D(s)$.- Puesto que, la subrutina MATRAE no realiza el cálculo cuando los valores propios son repetidos, es necesario que el sistema combinado con la entrada no tenga valores propios repetidos.-

TABLA # 2.3:1
FORMATO DE ENTRADA PARA RETIEM

LINEA	#COLUMNA	DESCRIPCION	FORMATO
01	01 - 20	Identificación	5 A 4
02	21 - 22	Grado del sistema	I 2
03	01 - 10	a11 Coeficientes	B F10.2
	11 - 20	a12 de la	
	21 - 30	a13 matriz A.	
	31 - 40	
	..etc..etc.....	
04	01 - 10	a21	B F10.2
	11 - 20	a22	
	...etc..etc.....	

TABLA : 2.3:1 (CONTINUACION)

#LINEA	#COLUMNA	DESCRIPCION	FORMATO
1	01 - 10	b1 Vector de	B F10.2
	11 - 20	b2 control	
	...etc...etc.....	
2	01 - 10	c1 Vector de	B F10.2
	11 - 20	c2 Salida	
	...etc..etc...	
3	01 - 10	k ₁ Coeficientes de	B F10.2
	11 - 20	k ₂ Realimentación.	
	
4	01 - 10	K Ganancia del Controlador	B F10.2
5	01 - 10	x ₁ (0) Condiciones	B F10.2
	11 - 20	x ₂ (0) Iniciales	
	...etc..etc.....	
6	01 - 10	K _r Ganancia de Entrada	B F10.2

TABLA : 2.3:1 (CONTINUACION)

#LINEA	#COLUMNA	DESCRIPCION	FORMATO
10	01	clave = P	A 1
11	02 - 03	k : Grado del N(s)	I 2
12	01 - 10	N ₂ Coeficientes	8F10.2
13	11 - 20	N ₂ del numerador	
14	
15	..etc..etc.....	
16	01	clave = F	A 1
17	11 - 20	M Grado del D(s)	I 2
18	01 - 10	Parte real de la primera raíz D(s).	8 F10.2
19	11 - 20	Parte Imaginaria de la primera raíz D(s).	8 F10.2
20	01 - 10	Parte real de la 2da. raíz del D(s).	8 F10.2
21	11 - 20	Parte imaginaria de la 2da. raíz de D(s).	8 F10.2
22	etc ...	etc

2.3.3: FORMATO DE SALIDA :

Cuando el programa RETIEM es ejecutado, este imprimirá los datos de entrada básicos: La identificación del problema, así como, las matrices: \underline{A} , \underline{b} , \underline{c} , \underline{k} , y la constante de ganancia K , luego se presentan las condiciones iniciales y la función de entrada $R(s)$.- El polinomio del numerador $N(s)$ y el del denominador $D(s)$, se enlistarán en ambas formas, es decir, en la forma de factores polinomiales ó como coeficientes polinomiales, independientemente de la forma que fueron ingresados.-

La respuesta en el tiempo $\underline{x}(t)$, es presentada en la forma de coeficientes vectoriales en forma natural, tal como :

$$\underline{x}(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + \alpha_{m+n} e^{\lambda_{m+n} t}$$

La función de salida $y(t)$, es representado en la forma de coeficientes escalares del mismo modo natural.-

3.3.4: EJEMPLO :

Sea el siguiente sistema de lazo cerrado :

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

donde :

$$u(t) = 5 \{ r(t) - [1.0 \quad 0.5 \quad 0.5] \underline{x}(t) \}$$

$$y(t) = [1.0 \quad 1.0 \quad 0.0] \underline{x}(t)$$

para condiciones Iniciales :

$$\underline{x}(0) = 0.0$$

Cuya función de entrada , está definida por:

$$R(S) = 4.0 \frac{1}{s} = \frac{4}{s}$$

Para una mejor comprensión y visualización del ingreso de los datos de este ejemplo particular en [RETIEM.DATOS], se muestra la tabla # 2.3:2.

TABLA # 2.3:2

DATOS DE ENTRADA PARA EJEMPLO PARTICULAR [RETIEM.DATOS]

# de línea	# de columna						
	1	5	10	15	20	25	30
1	EJEMPLO CAP # 2.3						3
2	1.0		3.0			0.0	
3	2.0		6.0			4.0	
4	-1.0		0.0			2.0	
5	0.0		0.0			1.0	
6	1.0		1.0			0.0	
7	1.0		0.5			0.5	
8	5.0						
9	0.0		0.0			0.0	
10	4.0						
11	P 0						
12	1.0						
13	F 1						
14	0.0						

Al ejecutar el programa RETIEM este generará un archivo de salida denominado [RETIEM.-LISTADO]; en el mismo se puede observar que:

$$\begin{aligned}
 X_1(t) = & -1.89 e^{+4.4 t} \cos 2.728 t. \\
 & +1.38 e^{+4.4 t} \operatorname{sen} 2.728 t. \\
 & -1.97 e^{-2.3 t}. \\
 & +3.87
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X_2(t) = & -0.89 e^{+4.4 t} \cos 2.728 t. \\
 & +3.28 e^{+4.4 t} \operatorname{sen} 2.728 t. \\
 & +2.18 e^{-2.3 t}. \\
 & -1.29
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y(t) = & -2.78 e^{+4.4 t} \cos 2.728 t. \\
 & +4.66 e^{+4.4 t} \operatorname{sen} 2.728 t. \\
 & +0.20 e^{-2.3 t}. \\
 & +2.58
 \end{aligned}$$

2.3.5: LISTADO:

A continuación se presenta el listado de RETIEM, conjuntamente con los archivos de entrada y de salida para el ejemplo particular presentado en 2.3.4.-

CONDICIONES DEL TIEMPO (RETIEN)

CONDICIONES DEL PROBLEMA - EJEMPLO CAP # 2.3

CONDICION T'

CONDICION = 3.000000E+00 0.000000E+00

CONDICION = 5.000000E+00 4.000000E+00

CONDICION = 8.000000E+00 2.000000E+00

CONDICION T''

CONDICION = 0.000000E+00 1.000000E+00

CONDICION T'''

CONDICION = 1.000000E+00 0.000000E+00

CONDICIONES DE RETROALIMENTACION

CONDICION = 5.000000E-01 5.000000E-01

CONDICION = 2.000000E+00

CONDICIONES INICIALES - X(0)

CONDICION = 0.000000E+00 0.000000E+00

CONDICION DE ENTRADA = 4.000000E+00

CONDICIONES DEL POLINOMIO R(S) - ASCENDIENDO DE ACUERDO A LA POTENCIA DE S

CONDICION =

CONDICIONES DEL POLINOMIO R(S) - ASCENDIENDO DE ACUERDO A LA POTENCIA DE S.

CONDICION = 1.000000E+00

COEFICIENTES DEL DENOMINADOR SON
PARTE DEL PARTE IMAGINARIA

COEFICIENTE 0.000000E+00

COEFICIENTES EN EL TIEMPO DE X(T)

COEFICIENTE DEL VECTOR DE $\text{EXP}(4.404752E+00)T \cdot \text{COS}(2.728322E+00)T$

COEFICIENTE -8.922470E-01 3.544788E+00

COEFICIENTE DEL VECTOR DE $\text{EXP}(4.404752E+00)T \cdot \text{SEN}(2.728322E+00)T$

COEFICIENTE 3.288019E+00 -1.393029E+00

COEFICIENTE DEL VECTOR DE $\text{EXP}(-2.309505E+00)T$

COEFICIENTE 2.182570E+00 -3.544788E+00

COEFICIENTE DEL VECTOR DE $\text{EXP}(0.000000E+00)T$

COEFICIENTE -1.290317E+00 -1.907349E-05

COEFICIENTES EN EL TIEMPO DE Y(T)

COEFICIENTE DEL VECTOR $\text{EXP}(4.404752E+00)T \cdot \text{COS}(2.728322E+00)T$

COEFICIENTE

COEFICIENTE DEL VECTOR $\text{EXP}(4.404752E+00)T \cdot \text{SEN}(2.728322E+00)T$

COEFICIENTE

COEFICIENTE DE $\text{EXP}(-2.309505E+00)T$

COEFICIENTE

COEFICIENTE DE $\text{EXP}(0.000000E+00)T$

COEFICIENTE

PROGRAMA DE GRAFICO DE RESPUESTA EN EL TIEMPO

(GRETI).

Anteriormente se había realizado el estudio de sistemas de control lineal en variables de estado para lazo cerrado cuyas ecuaciones eran:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{b} u(t)$$

$$u(t) = K [r(t) - \underline{k}^T \underline{x}(t)]$$

$$y(t) = \underline{c}^T \underline{x}(t)$$

Para condiciones iniciales $\underline{x}(0)$ y entrada de referencia $r(t)$.- El diagrama de bloques de este sistema se lo mostró en la figura # 2.3:1.-

2.4.1: TEORIA:

La meta básica del programa GRETI es bastante similar al programa RETIEM que fué estudiado en la sección anterior.-

Aquí sin embargo queremos determinar respuesta en el tiempo para funciones de entrada arbitrarias, las cuales no puedan tener una

función racional como transformada de Laplace.- Aún más, nosotros podemos obtener un despliegue gráfico de la respuesta y no prestarle atención a la expresión analítica de la respuesta en el tiempo para un sistema lazo cerrado.- Pero en ocasiones es deseable poseer tanto la expresión de la respuesta en el tiempo en forma cerrada así como el despliegue gráfico de la misma, para este efecto el programa RETIEM y GRETI se basan principalmente en subrutinas que le dan un amplio grado de flexibilidad a los mismos.-

Este programa GRETI se basa en el uso del algoritmo de Integración Numérica "Runge-Kutta" de cuarto grado.-

El programa GRETI, posee las siguientes subrutinas:

- CACURU : Calcula $u(t)$, en función de $r(t)$.
- INRUKU : Usa el algoritmo de Integración de Runge-Kutta.

- RETIRU : Calcula la respuesta en el tiempo usando Runge-Kutta
- DEAXBU : Computa $\underline{X}'(t) = \underline{A} \underline{X}(t) + \underline{b} u(t)$.
- YBVSX : Grafica ocho variables en el eje de las y versus X.

La descripción y contenido de estas subrutinas se encuentra en el apéndice A.-

La función de entrada $r(t)$ se la define insertando códigos como se indica en la subrutina CACURU.-

Aunque el programa RETIEM nos da la gráfica de la respuesta en el tiempo para sistemas lineales, este se puede modificar fácilmente e incluir sistemas no lineales variantes en el tiempo, mediante la apropiada modificación de la subrutina DEAXBU (ver apéndice A).-

3.4.2: FORMATO DE ENTRADA :

La forma de introducir los datos de entrada

para este programa es bastante similar a la de la sección anterior (RETIEM).- La primera parte contiene la descripción del sistema para lazo cerrado; la segunda parte contiene las condiciones iniciales y los parámetros tanto para el intervalo de tiempo, como para los gráficos que se utilizan en las subrutinas.- Este formato de entrada para mayor comprensión se lo muestra en la tabla # 2.4:1.-

TABLA # 2.4:1
FORMATO DE ENTRADA PARA GRESTI

LINEA	COLUMNA	DESCRIPCION	FORMATO
01	01 - 20	Identificación	5 A 4
	21 - 22	n : Grado del sistema	I 2
02	01 - 10	a11 Coeficientes	B F10.2
	11 - 20	a12 de la	
	21 - 30	a13 matriz "A".	
	...etc..	.etc.....	
03	01 - 10	a21	B F10.2
	11 - 20	a22	
	...etc...	.etc.....	

TABLA # 2.4:1 (CONTINUACION)

#LINEA	#COLUMNA	DESCRIPCION	FORMATO
10	01 - 10	b1 Vector de	B F10.2
	11 - 20	b2 control	
	
11	01 - 10	c ₁ Vector de	B F10.2
	11 - 20	c ₂ Salida...	
	...etc...etc.....	
12	01 - 10	k ₁ Coeficientes de	B F10.2
	11 - 20	k ₂ Realimentación.	
	
13	01 - 10	K Ganancia del	B F10.2
		Controlador	
14	01 - 10	x1(0) Condiciones	B F10.2
	11 - 20	x2(0) Iniciales	
	...etc...etc.....	
15	01 - 10	Tcero=Tiempo Inic.	B F10.2
	11 - 20	Tfin=Tiempo Final.	
	21 - 30	DT=Número de	
		iteraciones. #1.	
	31 - 40	FREC=Frecuencia	

$$N = (T_{fin} - T_{cero}) / [(DT) (FREC)] \leq 100$$

TABLA # 2.4:1 (CONTINUACION)

FILAS	COLUMNA	DESCRIPCION	FORMATO
14	05 - 04 05 - 08 06 - 12 07 - 16 07 - 20 07 - 24 08 - 28 08 - 32	Colocar aqui las variables que se van a graficar, sean estas: Y, R, U, E, I,9, 10.	8 A 4

En el archivo [GRESTI.DATOS], se tiene en la primera fila la identificación del problema y el grado del sistemas; en la segunda fila tenemos los coeficientes de la matriz \hat{A} , luego la matriz b , g , k , continuando con la constante de ganancia K y las condiciones iniciales.- Las siguientes filas contienen el intervalo de tiempo desde T_0 (T_{cero}) a T_{fin} (T_{final}) y el número de iteraciones ΔT ($\text{delta } T$).- Al final del archivo [GRESTI.DATOS], se indican las

variables que van a ser computadas.- Debe tenerse en cuenta que el número máximo de variables que pueden ser computadas es de ocho, que son:

- $y(t)$
- $r(t)$
- $u(t)$
- $e(t) = r(t) - y(t)$
- $X_i(t)$, donde $i = 1, 2, \dots, n$.-

Estas variables se representan en nuestro programa con los símbolos: Y, R, U, E, 1, 2, ..., n, con el formato de cuatro columnas por campo.- Si no se desea graficar ninguna variable se puede eliminar la última fila del archivo [GRESTI.DATOS].-

2.4.3: FORMATO DE SALIDA :

Este programa imprime:

- Encabezado, identificación del problema, grado del sistema.- - Luego continúa im-

primiendo las matrices A , b , c , k , las constantes K , y $x(0)$, y además,

- T_0 , T_f , Δt , frecuencia.-
- La respuesta en el tiempo de las variables $y(t)$, $r(t)$ y las $x_i(t)$; $i = 1, 2, \dots, n$; se imprimirán en la forma tabular, y finalmente graficará la respuesta en el tiempo de las variables enlistadas en la última fila del archivo [GRESTI.DATOS].

3.4.4: EJEMPLO :

En este ejemplo se desea determinar y computar la respuesta en el tiempo del error, definido por :

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

de la entrada $r(t)$, y además la variable de estado $x_2(t)$, para el siguiente sistema :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\begin{aligned} u(t) &= 5 (r(t) - [1 \ 0.5] \underline{x}(t)) \\ y(t) &= [1 \ 1] \underline{x}(t) \end{aligned}$$

Y el intervalo de tiempo en interés es de $0 \leq t \leq 4$.

El número de iteraciones $DT = 0.01$, y se imprime la salida cada 10 intervalos, esto es: $FREC = 10$; las condiciones iniciales son $\underline{x}(0) = \underline{0}$ y la función de entrada está dada por:

$$r(t) = \begin{cases} 5 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Para mayor visualización y comprensión del ingreso de los datos para este ejemplo particular en [GRESTI.DATOS], se muestra la tabla # 2.4:2:

TABLA # 2.4:2

DATOS DE ENTRADA PARA EJEMPLO PARTICULAR [GRESTI.DATOS]

NUMERO DE FILAS	NUMERO DE COLUMNAS			
	1	10	20	30
01	EJEMPLO CAP # 2.4		2	
02	0.0	1.0		
03	-1.0	-1.0		
04	0.0	1.0		
05	1.0	1.0		
06	1.0	0.5		
07	5.0			
08	0.0	0.0		
09	0.0	4.0	0.01	10.0
10		E R 2		

2.4.5: LISTADO:

A continuación se presenta el listado de GRESTI, conjuntamente con los archivos de entrada y de salida para el ejemplo particular presentado en 2.4.4.-

GRAFICA DE LA RESPUESTA EN EL TIEMPO...
 PROGRAMADO POR NICANOR ECHEVERRIA GARCIA

IDENTIFICANDO EL PROBLEMA - PROBLEMA GRESTI

UNIDAD

UNIDAD = 1.0000000E+00
 UNIDAD = -1.0000000E+00

UNIDAD

UNIDAD = 1.0000000E+00

UNIDAD

UNIDAD = 1.0000000E+00

COEFICIENTES DE RETROALIMENTACION

UNIDAD = 5.0000000E-01

UNIDAD RETO = 5.00000000E+00

CONDICIONES INICIALES

UNIDAD = 1.0000000E+00

TFIN = 4.000000
 FRECU = 100

TIME	U1	U(T)	Y1(T)	X2(T)
0.000000E+00	1.000000E+00	2.500000E+01	0.000000E+00	0.000000E+00
0.100000E+00	1.000000E+00	1.922379E+01	1.110628E-01	2.088354E+00
0.200000E+00	1.000000E+00	1.439497E+01	3.936133E-01	3.454784E+00
0.300000E+00	1.000000E+00	1.047694E+01	7.827774E-01	4.243669E+00
0.400000E+00	1.000000E+00	7.798210E+00	1.227446E+00	4.585825E+00
0.500000E+00	1.000000E+00	5.663985E+00	1.688823E+00	4.595962E+00
0.600000E+00	1.000000E+00	3.777242E+00	2.138744E+00	4.371615E+00
0.700000E+00	1.000000E+00	2.226958E+00	2.557939E+00	3.993340E+00
0.800000E+00	1.000000E+00	1.114115E+00	2.934357E+00	3.525640E+00
0.900000E+00	1.000000E+00	1.145430E+00	3.261672E+00	3.018484E+00
1.000000E+00	1.000000E+00	1.037860E+00	3.537893E+00	2.509069E+00
1.100000E+00	1.000000E+00	-1.811290E+01	3.653481E+00	-6.179779E-02
1.200000E+00	1.000000E+00	-1.307142E+01	3.550891E+00	-1.873213E+00

U(T) X1(T) X2(T)

...	-8.860369E+00	3.299725E+00	-3.055303E+00
...	-2.446572E+00	2.956505E+00	-3.734381E+00
...	-2.766537E+00	2.565706E+00	-4.024791E+00
...	-7.286351E-01	2.161067E+00	-4.026681E+00
...	7.276166E-01	1.767054E+00	-3.825152E+00
...	1.724200E+00	1.400380E+00	-3.490441E+00
...	2.227630E+00	1.071440E+00	-3.078732E+00
...	2.425329E+00	7.856887E-01	-2.633510E+00
...	2.742790E+00	5.447539E-01	-2.187103E+00
...	2.666226E+00	3.475322E-01	-1.762355E+00
...	2.480420E+00	1.910487E-01	-1.374266E+00
...	2.223166E+00	7.115579E-02	-1.031554E+00
...	1.929853E+00	-1.691205E-02	-7.381176E-01
...	1.622991E+00	-7.811904E-02	-4.941583E-01
...	1.229947E+00	-1.173134E-01	-2.973520E-01
...	1.854332E+00	-1.390225E-01	-1.436880E-01
...	8.879807E-01	-1.473166E-01	-2.816707E-02
...	5.923625E-01	-1.457400E-01	5.465499E-02
...	4.187809E-01	-1.372871E-01	1.102619E-01
...	2.620436E-01	-1.244147E-01	1.438919E-01
...	1.465240E-01	-1.090752E-01	1.603409E-01
...	5.421996E-02	-9.277111E-02	1.638542E-01
...	-1.214564E-02	-7.660836E-02	1.580750E-01
...	-5.828990E-02	-6.135909E-02	1.460385E-01
...	-4.787870E-02	-4.752409E-02	1.301997E-01
...	-1.862740E-01	-3.538099E-02	1.124796E-01
...	-1.186071E-01	-2.504183E-02	9.432650E-02
...	-1.199620E-01	-1.649469E-02	7.678252E-02

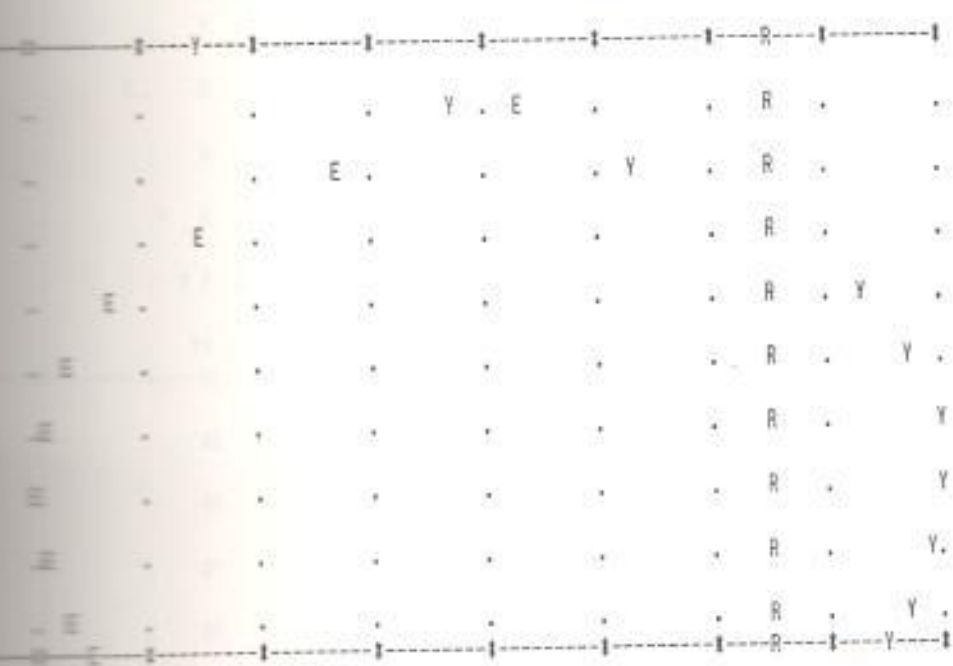
ANÁLISIS DE LA RESPUESTA EN EL TIEMPO....
 PREPARADO POR NICANOR ECHEVERRÍA GARCÍA

IDENTIFICANDO EL PROBLEMA - PROBLEMA GESTI

RESPUESTA DEL SISTEMA

VARIABLE	SÍMBOLO
ERROR	E
SALIDA	Y
ENTRADA	R

0.000E+00 5.49E-01 4.66E-01 1.48E+00 2.49E+00 3.51E+00 4.52E+00 5.54E+00 6.55E+00



PROGRAMA DE REALIMENTACION USANDO VARIABLES DE
ESTADO (REAVAR).

Este programa computa la función de transferencia de una planta, definida por :

$$G_P(s) = c^T \underline{\tilde{x}}(s) \underline{b}$$

$$\underline{\tilde{x}}(s) = [sI - A]^{-1}$$

donde A : Matriz de la planta.-

\underline{b} : El vector de control.-

\underline{c} : El vector de salida.-

El programa REAVAR, puede determinar la función de transferencia interna de la forma $\underline{x}_i(s) / u(s)$, donde \underline{x}_i es una cualquiera de las variable de estado, mediante la simple definición de una matriz ficticia \underline{c} .- Así, por ejemplo si se desea calcular la función de transferencia $\underline{x}_3(s) / u(s)$, entonces se seleccionada \underline{c} con :

$$c_3 = 1 \text{ y } c_j = 0 \text{ para } j \neq 3.-$$

Algunas de estas funciones de transferencia interna pueden ser determinadas al mismo tiempo.- Sin

sin embargo, el vector \underline{c} para la salida real y , siempre será calculado al final.- El polinomio del denominador de todas las funciones de transferencia de la forma $\underline{X}_i(s) / u(s)$ es siempre el polinomio característico de la planta, denotada por $D_p(s)$.- Si una función de transferencia de la forma: $\underline{X}_i(s) / \underline{X}_j(s)$ se necesitara, se hará una simple división de:

$$\frac{\underline{X}_i(s) / u(s)}{\underline{X}_j(s) / u(s)}$$

Si además de \underline{a} , \underline{b} y \underline{c} se suministrara el control de ganancia K , y el vector de coeficientes de realimentación \underline{k} , entonces el programa puede realizar los cálculos computacionales de lazo cerrado de la función de transferencia:

$$y(s) / r(s)$$

La función de transferencia equivalente de realimentación denotada por: $H_{eq}(s)$.

Este programa también puede usarse para diseños suministrando la función de transferencia para lazo cerrado deseada.- El control de ganancia y los

coeficientes de realimentación serán calculados mediante Heq(s).- El control de ganancia será seleccionado de manera que para una entrada determinada el resultado del error de estado sea cero.-

El programa REAVAR, utiliza las siguientes subrutinas:

COEPO : Calcula los coeficientes del polinomio característico.-

RAICE : Calcula las raíces reales de un polinomio.-

RESOLV : Resuelve un conjunto de ecuaciones simultáneas.-

TEORIA :

Este programa se basa en la realización de que si la planta está representada en variables de fase, entonces los resultados computacionales descritos anteriormente se los obtiene mediante una simple inspección[1].- Para una mejor ilustración de

estas características, consideremos la representación en variable de fase de un sistema de lazo abierto, definido mediante su función transferencia por:

$$G_P(s) = K \frac{N_P(s)}{D_P(s)} = \frac{c_1 + c_2 s + \dots + c_m s^{m-1}}{a_1 + a_2 s + \dots + s^n} \quad 2.5-1$$

El símbolo P , significa que está representado en forma de variables de fase.

$$\dot{\underline{x}}^P(t) = \underline{A}^P \underline{x}^P(t) + \underline{b}^P u(t)$$

$$y(t) = (\underline{c}^P)^T \underline{x}^P(t). \quad 2.5-2$$

donde :

$$\underline{b}^P = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]^T$$

$$\underline{c}^P = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_m \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T$$

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \end{bmatrix} \quad 2.5-3$$

Si se comparan las ecuaciones 2.5-1, 2.5-2 y 2.5-3, se puede notar que la función de transferencia de la planta puede ser determinada mediante simple inspección a partir de la representación en variable de fase.-

Una función de transferencia interna de la forma $\underline{X}_i(s) / u(s)$ puede ser determinada mediante la definición imaginaria ó ficticia de una matriz \underline{c} , con $c_i = 1$ y $c_j = 0$, para i diferente de j .-

Para efecto de cálculos para lazo cerrado la tarea puede realizarse similarmente mediante una simple inspección.- Si la expresión para lazo cerrado del control está dado por:

$$u(t) = K [r(t) - (k^P)^T \underline{x}^P(t)]$$

donde k^P es el vector coeficiente de realimentación en términos de variable de fase, entonces la representación del sistema será:

$$\begin{array}{l} \underline{\dot{x}}^P(t) = \end{array} \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ -(a_1 + Kk_1^P) & -(a_2 + Kk_2^P) & \dots & -(a_n + Kk_n^P) \end{array} \right]$$

$$\dots + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] r(t)$$

y:

$$y(t) = K [c_1 \dots c_m \ 0 \ \dots \ 0]^T \underline{x}^P(t)$$

Sin embargo la función de transferencia para lazo cerrado está dada por :

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{K [c_1 + c_2 s + \dots + c_m s^{m-1}]}{(a_1 + Kk_1 P) + (a_2 + Kk_2 P) s + \dots + (a_n + Kk_n P) s^{n-1} + s^n}$$

Los coeficientes del denominador de $y(s) / r(s)$ pueden ser fácilmente determinados a partir de las ecuaciones siguientes:

$$a_k = a_k + Kk_k P \quad , \text{ para } k = 1, 2, \dots, n$$

donde :

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{K (c_1 + c_2 s + \dots + c_m s^{m-1})}{a_{k1} + a_{k2} s + \dots + a_{kn} s^{n-1} + s^n}$$

Si aquí $k P$ y K son conocidos entonces $y(s) / r(s)$, puede ser determinado directamente.-

Similarmente si las a_k -es y a_{k1} -es son conocidas, entonces K y $k P$ pueden obtenerse también directamente.-

• fin de que la solución para K y $k P$ sea

única, el error de posición de estado estable puede ajustarse a cero, de modo que sea dada por:

$$K = \frac{a_{k1}}{c_1}$$

Además de las ventajas de la representación de variables de fase señalados, es fácil mostrar que la función de transferencia equivalente de realimentación $H_{eq}(s)$, es también fácilmente relacionada con los elementos de las variables de fase, mediante la siguiente ecuación:

$$H_{eq}(s) = \frac{k_1 r + k_2 r^2 s + \dots + k_n r^n s^{n-1}}{c_1 + c_2 s + \dots + c_m s^{m-1}}$$

La mayoría de las plantas a tratar no están descritas directamente en la forma natural de variables de fase, y aquí, no se recomienda que la representación de la planta sea limitada a la forma de variables de fase, ya que esto podría estropear la forma general de

Las matrices.- La técnica de variables de fase pueden usarse aún en este caso, mediante la transformación de la planta a variables de fase y entonces se transforman los coeficientes de realimentación llegando así al estado original de representación en variable de fase[2].- Kalman demuestra que esto es posible, es decir transformar un proceso controlable a variables de fase mediante una transformación no singular de variables de la forma:

$$\underline{x} = \underline{P} \underline{x}^P ,$$

é puesto que, \underline{P} es una matriz no singular:

$$\underline{x}^P = \underline{P}^{-1} \underline{x}$$

En términos de la transformación de la matriz \underline{P} , los elementos de la representación en variable de fase, pueden ser determinados mediante las siguientes ecuaciones:

$$\underline{A}^P = \underline{P}^{-1} \underline{A} \underline{P}$$

$$\underline{b}^P = \underline{P}^{-1} \underline{b}$$

$$\underline{c}^P = \underline{P} \underline{c}$$

Además, los coeficientes de realimentación en variables de fase, y las variables originales son relacionadas mediante las siguientes ecuaciones :

$$\underline{k}^P = \underline{P}^T \underline{k}$$

$$\underline{k} = (\underline{P}^T)^{-1} \underline{k}^P$$

Por lo tanto una vez conocida la matriz \underline{P} , el problema es completamente resuelto.-

Si los coeficientes del polinomio característico de \underline{A} , en otras palabras los a_i son conocidos, entonces \underline{P} , puede determinarse mediante el algoritmo que indica, que si los vectores \underline{P}_i , están definidos mediante las relaciones recursivas:

$$\underline{P}^n = \underline{b} \quad \text{y,}$$

$$\underline{P}^{n-i} = \underline{A} \underline{P}^{n-i+1} + a_{n-i+1} \underline{b}$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1$$

entonces, \underline{P} está definido por :

$$E = [p^1 \mid p^2 \mid \dots \mid p^n]$$

Este procedimiento es simple, y se lo realiza mediante el uso de un computador digital[3].-

Ya que el algoritmo involucra la transformación de la planta a variables de fase, es necesario que la planta sea controlable.- Además, la planta debe ser controlable, antes que cualquier técnica de función de transferencia pueda ser utilizada.- Por consiguiente, es importante chequear la controlabilidad de la planta para asegurar que los resultados obtenidos tengan sentido.- La controlabilidad debería ser chequeado aún, si se conoce que la planta física es controlable, puesto que el modelaje matemático puede destruir la propiedad de controlabilidad, especialmente si se ha usado alguna técnica de linearización.

La controlabilidad puede ser determinada mediante una prueba originalmente propuesta por Kalman, que establece que la planta:

$$\dot{X} = A X + b u$$

es controlable, si y solo si la matriz de controlabilidad $n \times n$, definida por:

$$M_c = [b \quad Ab \quad A^2b \quad \dots \quad A^{n-1}b]$$

es no singular.- Matemáticamente, esto es:

$$\det [M_c] \neq 0$$

Sin embargo, aún cuando el determinante de M_c sea diferente de cero, todavía queda el problema que si la matriz M_c es mal acondicionada, puede ser difícil de invertir.- A fin de chequear esta posibilidad, la matriz M_c puede invertirse mediante el procedimiento numérico de inversión.- Si se multiplica M_c^{-1} por M_c , el resultado debería ser la matriz identidad I .- El grado por el cual este producto se desvía de I es una medida de no controlabilidad de la planta.-

Si el máximo valor de la desviación absoluta es despreciable, entonces la planta se i-

dentifica como numéricamente no controlable.-

La terminología usada indica que, aunque la planta es teóricamente controlable, esta puede ser numéricamente no controlable, debido a que M_c no puede ser invertida con exactitud mediante el algoritmo de inversión.-

Aunque la controlabilidad numérica de la planta depende obviamente del esquema de inversión numérico utilizado, una amplia variedad de métodos de inversión puede ser experimentado con solo pequeños cambios en los resultados.-

El algoritmo computacional permite un simple chequeo para validar los resultados obtenidos.- Este doble chequeo computacional se basa en hecho de que el denominador $D_k(s)$, puede determinarse mediante una de las dos siguientes expresiones:

$$D_k(s) = D_p(s) + K N_h(s)$$

$$D_k(s) = \det [sI - A + K b k^T]$$

Un error normalizado se obtiene mediante la división de la diferencia entre los dos valores de un coeficiente de $D_k(s)$, por el valor del coeficiente.- El máximo de los valores absolutos de este error normalizado, sobre todos los coeficientes de $D_k(s)$ es una indicación de la precisión del cálculo de lazo cerrado.- Debido a la no semejanza de las técnicas matemáticas usadas en las dos ecuaciones para $D_k(s)$, este procedimiento provee un simple y significativo chequeo en la precisión de los resultados, el cual puede ser usado para asistir en la determinación de la validez de los resultados en la situación discutida anteriormente sobre el concepto de no controlabilidad numérica.-

FORMATO DE ENTRADA :

Los formatos de entrada y salida en forma general para este programa REAVAR, son discutidos en esta y la siguiente subsección respectivamente.- En esta subsección se

explicará un ejemplo específico presentado en 2.5.4, especialmente en las tablas # 2.5:1 y 2.5:2.-

La operación del programa se divide en tres partes :

- 1) Parte Básica
- 2) Parte Lazo - abierto
- 3) Parte Lazo - cerrado.

Durante la parte básica, las matrices A y b , son leídas y chequeada su controlabilidad.- En la parte de sistema lazo abierto explicaremos los cálculos computacionales de lazo abierto discutida anteriormente, los cuales incluyen la determinación de $D_p(s)$, E , y $N_p(s)$.- La parte de lazo cerrado varía dependiendo de que tipo de cálculo para lazo cerrado se desea.- Además, en esta parte se realiza el chequeo de doble precisión.- Es posible ejecutar un número deseado de cálculos tanto para lazo abierto y de lazo cerrado como parte de un problema básico siempre que la planta no sea cambiada.

Los formatos de entrada y salida se presentan en tres divisiones similares.- Debido a este hecho y más aún para simplificar el procedimiento, la discusión de los formatos de entrada y salida están divididos como se muestra a continuación.-

2.5.2.1: ENTRADA BASICA:

La entrada para la parte básica del programa consiste de un conjunto de líneas las cuales incluyen: la identificación del problema, así como también especifica el grado de la planta n y, los elementos de las matrices A , b , c .- Estas líneas se incluirán en todos los problemas independientemente de que cálculos computacionales se van a realizar, sean estos para lazo abierto o cerrado.- En la tabla # 2.5:1, se muestra una descripción en detalle de la preparación del archivo de lectura en la parte básica.-

TABLA # 2.5:1 :

FORMATO DE ENTRADA BASICO PARA REAVAR

REGISTRO	COLUMNA	DESCRIPCION	FORMATO
01	01 - 20	Identificación	4 A 5
	21 - 22	n:grado del sistema	I 2
02	01 - 30	a_{11} elementos de \underline{A}	BF10.0
	31 - 30	a_{12}	
 etc.	
03	01 - 30	a_{21}	BF10.0
	31 - 30	a_{22}	
 etc.	
04	01 - 30	b_{11} elementos de \underline{b}	BF10.0
	31 - 30	b_{12}etc.	

2.5.2.2: ENTRADA PARA LAZO ABIERTO:

Los datos de entrada para la parte de lazo abierto del programa, consiste solamente de las matrices \underline{c} , que especifican para cuáles funciones de transferencia los polinomios del numerador son deseados.- El usuario debería

anular la matriz ficticia c usada para obtener la función de transferencia interna.-

Los elementos de cada matriz c son desplazados una o más líneas, dependiendo del valor de n , de la misma manera como b .- En la tabla # 2.5:2, se muestra una descripción en detalle de la preparación del archivo de lectura en la fase lazo abierto.-

TABLA # 2.5:2 :

FORMATO DE ENTRADA PARA LA PARTE LAZO ABIERTO DE REAVAR

NOMBRE DE COLUMNA	DESCRIPCION	FORMATO
01 - 20	$(c_1)^2$ Elementos de la 1ª matriz c .	BF10.0
02 - 20	$(c_2)^2$	
..... etc.	
.....	similarmente para	
.....	cada matriz fic-	
.....	ticia c .	

Tabla # 2.5:2 (CONTINUACION)

COLUMNA	DESCRIPCION	FORMATO
100 - 20	c ₁ elementos de la matriz \underline{c} real	BF10.0
100 - 20	c ₂	
..... etc.	
100 - 20	Líneas en blanco.-	

Cualquier número de matrices \underline{c} pueden ser incluidas, respetando las siguientes dos reglas simples:

- 1) La última matriz \underline{c} puede ser completamente cero, esto es: $\underline{c} = 0$; esta matriz se utiliza para señalar el final de los cálculos para lazo abierto, ya que con esta matriz no se realiza ningún cálculo computacional.-

Una vez definida la matriz \underline{c}

igual a cero, esta puede ser fácilmente eliminada colocando una o más líneas en blanco en la cubierta del archivo dependiendo del valor de n , (recordar que para n menor ó igual a ocho una línea es usada, y para valores de n mayor a ocho y menores ó iguales a 16 dos líneas son usadas y así sucesivamente).-

- 2) La matriz real \underline{c} , físicamente debería aparecer siempre antes de la matriz \underline{g} en blanco.- Esta última regla es muy necesaria ya que K , será computada apropiadamente para que el error de estado estable sea cero.-

3.5.2.3: ENTRADA PARA LAZO CERRADO:

El programa es capaz de ejecutar tres tipos de cálculos para lazo cerrado los cuales son indicados

mediante el signo de la clave A, P ó F respectivamente.- Se realizarán uno de estos tres cálculos computacionales, en los cuales:

A : sirve para un análisis de lazo cerrado.-

P y F : se utilizan para diseño.-

Se pueden combinar a la vez los tres tipos.-

Si se desea realizar un análisis "A", el programa debería tener en los datos de entrada los valores de K y k ; con estos parámetros K y k , el programa determinará los coeficientes del polinomio característico $D_K(s)$, y el numerador de $H_{eq}(s)$, denotado por $N_K(s)$; (recordar que el polinomio del denominador de $H_{eq}(s)$ es igual al numerador de $G_P(s)$; esto es $N_P(s)$), que serán presentados en forma

factorizada y se presentarán sus raíces.

Mediante la variación de los parámetros K y k , es posible observar los efectos de tales cambios en la función de transferencia $y(s) / r(s)$.- Una forma para este procedimiento es utilizar la gráfica de la trayectoria de las raíces de $1 + KG(s) Heq(s)$ en función de K .- Además, como $G_p(s)$ y $Heq(s)$ son conocidas en la forma factorizada, la trayectoria de las raíces será fácilmente bosquejadas manualmente.-

Los datos de entrada para el primero de los dos modos de diseño "P" es el polinomio característico $D_K(s)$.-

Con esta información el programa computa K , k y determina el numerador del polinomio $Heq(s)$.-

En el segundo modo "F", los datos de entrada son la localización de los polos para lazo cerrado, cuya

respuesta será igual que en el modo anterior K , \underline{k} y $H_{eq}(s)$.- Recordar que en el modo de análisis, los polinomios $D_K(s)$ y $N_H(s)$, están dados siempre en forma factorizada y no factorizada.- Un resumen de estos tres modos de cálculos para la parte de lazo cerrado son dados en la tabla # 2.5:3.-

Hay que recordar que K es siempre seleccionado para tener error de estado estable cero para una entrada de paso.- Si otra condición se utilizara para seleccionar K , entonces una forma será la reescalar K y \underline{k} en forma manual; así, por ejemplo si se desea obtener la ganancia d. c., que sea diez veces más, entonces nosotros deberíamos simplemente multiplicar k por diez y \underline{k} dividir para diez.- Este procedimiento permite al denominador de $y(s) / r(s)$ que no cambie pero el numerador quede multiplicado por

diez como queríamos.-

TABLA # 2.5:3

RESUMEN DE LOS CALCULOS PARA LAZO CERRADO.

	TIPO	ENTRADAS	SALIDAS
	ANALISIS	K, \underline{k}	$N_h(s), D_k(s)$
	DISEÑO	$D_k(s)$	$N_h(s), K, \underline{k}$ no factorizadas
	DISEÑO	$D_k(s)$	$N_h(s), K, \underline{k}$ factorizadas.

Cada cálculo de lazo cerrado está representado por un conjunto de dos o más líneas en el archivo de datos, cuyo formato depende de cuál de los tres tipos de cálculos para lazo cerrado vaya a utilizarse.- Una descripción en detalle de la preparación del archivo de lectura para la parte de lazo cerrado se muestra en las tablas # 2.5:4, 2.5:5 y 2.5:6.-

TABLA # 2.5:4

FORMATO DE ENTRADA PARA LA PARTE DE
LAZO CERRADO TIPO ANALISIS MODO A

NOMBRE Y COLUMNA		DESCRIPCION	FORMATO
01	02	A	A 1
03	04 - 10	K : Ganancia	E10.0
05	06 - 10	k_1	B E10.0
	07 - 20	k_2	
 etc.	

TABLA # 2.5:5

FORMATO DE ENTRADA PARA LA PARTE DE
LAZO CERRADO TIPO DISEÑO MODO "P".

NOMBRE Y COLUMNA		DESCRIPCION	FORMATO
01	02	P	A 1
03	04 - 10	aK_1	BE10.0
	05 - 20	aK_2	
 etc.	

TABLA # 2.5:6
 FORMATO DE ENTRADA PARA LA PARTE DE
 LAZO CERRADO TIPO DISEÑO MODO "F".

FILAS	COLUMNA	DESCRIPCION	FORMATO
01	01	F	A 1
02	02 - 20	Parte real del primer polo de $y(s) / r(s)$.	2E10.0
03	03 - 20	Parte imaginaria del primer polo de $y(s) / r(s)$.	2E10.0
04	04 - 20	Parte real del segundo polo de $y(s) / r(s)$.	2E10.0
05	05 - 20	Parte Imaginaria del segundo polo de $y(s) / r(s)$.	2E10.0
06	06 etc.	

Tener presente que el coeficiente a_{kD+1} de s^D , es asumido siempre como la unidad y no se incluye en el archivo de datos de entrada.- Estos conjuntos, uno por cada calculo, de alguna manera o en algún orden deberían ser combinados para formar los datos de entrada para la parte de lazo cerrado del programa

REPARAR.- Así por ejemplo si se desea realizar tres cálculos de análisis "A" y dos cálculos de diseño "F"; se debería realizar entonces cinco conjuntos de archivos de datos, uno para cada cálculo, usando el formato apropiado.- Así, estos conjuntos de datos deberían entonces ser combinados colocando los tres conjuntos para el cálculo de análisis primero; luego los dos conjuntos de datos de diseño para lazo cerrado, ó los conjuntos de análisis y diseño deberían ser entre mezclados de alguna forma, con tal que aparezcan como una sola unidad.-

Notar que la primera fila en el archivo de lectura, para cada tipo de cálculo para lazo cerrado, tiene solamente una letra la cual es situada en la primera columna para que se posicione el valor de la clave ("A" , "P" o "F").- La fila restante en cada conjunto de datos depende de los datos de entrada que se requieren para el tipo de cálculo deseado.-

Una simple fila en blanco es colocada en el

archivo de lectura, después del conjunto de cálculos para lazo cerrado deseado; esta se utiliza para señalar el fin de los datos de entrada para lazo cerrado del sistema.- Cuando esta fila en blanco es leída, el programa encontrará que el valor de la clave es cero y retornará a la sección básica de entrada para buscar si algún otro problema se resolverá.-

El programa se detendrá mediante el indicador de fin de fila.- Aún, si no se desea los cálculos para lazo cerrado, esta fila en blanco debería todavía ser incluida.- En este caso habrá dos o más filas en blanco al final del archivo de datos de entrada.- En la subsección 2.5.4, se presenta un ejemplo ilustrativo de la preparación del archivo de entrada para un específico problema.-

FORMATO DE SALIDA :

Igualmente que en la subsección 2.5.2, la

operación de salida se dividirá en tres partes:

- 1) Básica
- 2) Lazo abierto
- 3) Lazo cerrado

Se comenzará explicando una por una:

2.5.3.1: SALIDA BASICA :

La salida básica imprimirá: la identificación del problema y las matrices \hat{a} y \hat{b} ; para que el usuario visualice la información que ingresó, a fin de evitar resultados no requeridos.- Sin embargo para problemas en los cuáles el sistema es no controlable o numéricamente no controlable (ver subsección 2.5.1), se añadirán notas a la salida básica a fin de indicar esta complicación.- Se debe recordar que aún cuando la planta sea no controlable todos los cálculos com-

putacionales de lazo abierto y/o lazo cerrado son normalmente ejecutados.- En el caso de tener no contrabilidad numérica, la desviación máxima de la matriz $M_e \cdot M_e^{-1}$ desde la matriz identidad, también será enlistada para información del usuario.-

2.5.3.2: SALIDA LAZO ABIERTO :

La salida de lazo abierto es compuesta por el denominador de la función de transferencia de la planta $D_p(s)$, y los diversos polinomios del numerador asociados con la función de transferencia de la planta; además, también se enlistará alguna función de transferencia interna deseada.-

Los coeficientes de $D_p(s)$, así como también todos aquellos de los otros polinomios serán enlistados con el coeficiente del término constante

primero.- Los coeficientes de $D_p(s)$ al igual que las raíces de $D_p(s)$ también se enlistarán.- Los diversos coeficientes del numerador se identificarán en la impresión con cada matriz asociada \underline{c} .- Cada polinomio del numerador será listado tanto en la forma factorizada como en la forma no factorizada.-

2.3.3.3: SALIDA LAZO CERRADO:

Esta parte tiene exactamente la misma forma para cada uno de los tres tipos posibles de cálculos para lazo cerrado.- El valor de la clave es la primera información enlistada, acompañado con el cálculo computacional del polinomio del numerador de $H_{eq}(s)$, es decir $N_k(s)$, los coeficientes de realimentación \underline{k} , la ganancia K y el denominador de $y(s)/r(s)$, es decir $D_k(s)$.- Se debe tener presente que, tanto el $N_k(s)$ como el $D_k(s)$ se enlistarán en

la forma factorizada y no factorizada.-

Al final de la información que concierne a la parte de salida para lazo cerrado se imprimirá el valor del error normalizado máximo (revisar la subsección 2.5.1).-

Se recuerda que este número es una indicación de la exactitud numérica del programa y se obtiene por la comparación entre el método de la matriz y el de la función de transferencia para encontrar $D_k(s)$.- Si uno ó más cálculos computacionales de lazo cerrado son requeridos, entonces en la salida se enlistará cada uno de estos cálculos, uno tras otro.-

UN EJEMPLO :

En esta subsección se discute la aplicación del programa REAVAR para un simple ejemplo de

tercer grado, no trivial.- Este ejemplo es presentado a fin de clarificar minuciosamente la preparación de los datos de entrada y la interpretación de lo enlistado por el programa.- Aquí se sugiere al usuario se refiera a las subsecciones anteriores mientras se esta leyendo esta, a fin de obtener un completo entendimiento del programa REAVAR.-

Se tiene una planta cuya representación en variables de estado, esta dada por :

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & -3.0 & 0.0 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 1.0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1.0 \quad 1.0 \quad 0.0] \underline{x}(t)$$

El diagrama de bloques de esta planta se lo muestra en la figura # 2.5:1.- En base a esta información nosotros podemos preparar la parte básica de entrada de datos que se encuentra en el archivo [REAVAR.DATOS].-

Esta información se proveerá sin importar que calculos se ejecutarán, sean estos para lazo abierto o cerrado.-

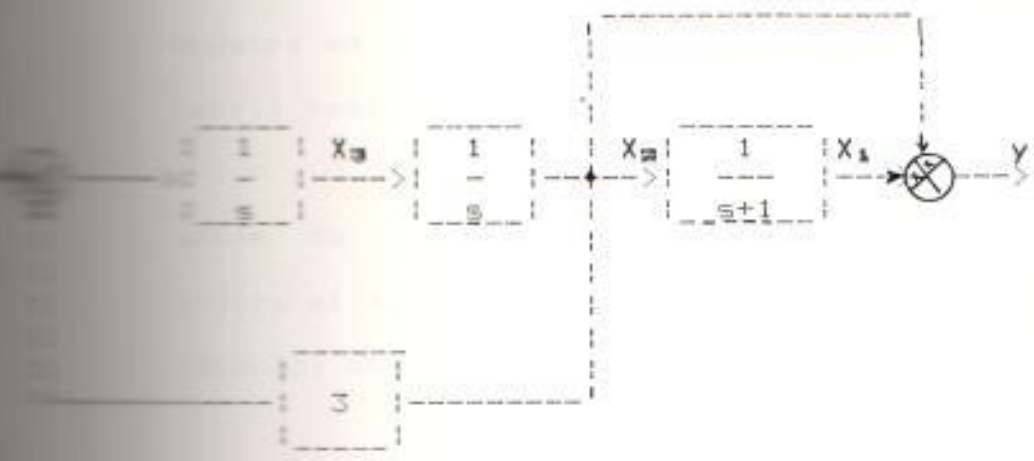


FIGURA # 2.5:1 :

DIAGRAMA DE BLOQUES DE LA PLANTA

En la parte de cálculos para lazo abierto, se desea obtener la función de transferencia interna $X_3(s) / u(s)$ y además la función de transferencia de la planta $y(s) / u(s)$.- Sin embargo es necesario formar una matriz ficticia C , la cual se utiliza para encontrar la función de transferencia interna, que esta definida por :

$$\underline{c}^t = \text{col} [0.0 , 0.0 , 1.0]$$

En conclusión los datos de entrada para la parte de lazo abierto toman la forma, como se muestra en la tabla # 2.5:7.- Notar que la matriz real \underline{c} , definida por: $\underline{c} = \text{col} [1:0 , 1.0 , 0.0]$, se desplaza justamente hasta antes de la fila en blanco, la cual identifica el fin de la entrada de datos para cálculos de lazo abierto.-

En un problema práctico, se debería normalmente correr el programa de una vez, es decir sin los cálculos para lazo cerrado, de esta manera, solo una línea en blanco se necesitaría para los datos de entrada para lazo cerrado.- A fin de poseer información de lazo cerrado disponible para la especificación de la función de transferencia $y(s) / r(s)$, se define la ecuación 2.5-5.-

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{s(s+2)}{[(s+1)^2 + 1^2](s+2)}$$

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{s(s+2)}{s^3 + 4s^2 + 6s + 4} \quad 2.5-5$$

Puesto que $D_K(s)$ se conoce tanto en la forma factorizada o no factorizada, uno de los modos de diseño para lazo cerrado debería usarse para encontrar K y k_c .- A fin de ilustrar la preparación de los datos de entrada que corresponden a la parte de lazo cerrado, así como el modo de diseño utilizado se muestra la tabla # 2.5:7.-

TABLA # 2.5:7

CONDICIONES DE ENTRADA PARA EJEMPLO PARTICULAR [REAVAR.DATOS]

# línea	# columna						
	1	5	10	15	20	25	30
1	Ejemplo uno					3	
2	-1.0		1.0			0.0	
3	0.0		0.0			1.0	
4	0.0		-3.0			0.0	
5	0.0		0.0			1.0	
6	0.0		0.0			1.0	
7	1.0		1.0			0.0	
8	(EN BLANCO)						
9	A						

TABLA : 2.5:7 (CONTINUACION)

# líneas	# columna						
	1	5	10	15	20	25	30
10	2.0						
11	0.5		0.0		1.5		
12	P						
13	4.0		6.0		4.0		
14	F						
15	1.0		1.0				
16	2.0						
17	(EN BLANCO)						

Además, el modo de análisis para lazo cerrado es utilizado, haciendo que:

$$K = 2.0$$

$$\underline{k} = \text{col } [0.5, 0, 1.5]$$

Estos valores de K y \underline{k} son seleccionados, con la ventaja de producir la función de

transferencia deseada $y(s)/r(s)$.- Este problema resulta un poco artificial ya que ambos modos de diseño se utilizan cuando solamente uno es necesario, el modo de análisis está corriendo al mismo tiempo.- Aquí el uso de los tres modos de lazo cerrado es estrictamente para propósitos ilustrativos y no debería ser interpretado como una utilización típica del programa.-

La respuesta completa de salida para este programa se muestra en la subsección 2.5.5.- Puesto que no hay indicación de no controlabilidad en la salida básica, esta puede fácilmente asumir que la planta es controlable y por lo tanto se justifica el uso del programa.- La parte que corresponde a la salida de lazo abierto proporciona todas las funciones de transferencia de lazo abierto deseadas.- La función de transferencia de la planta será :

$$G(s) = \frac{s + 2}{s^3 + s^2 + 3s + 3}$$

$$G(s) = \frac{s + 2}{[s^2 + (\sqrt{3})^2] (s + 1)}$$

Mientras la función de transferencia interna $z(s)/u(s)$, para el ejemplo es:

$$\frac{z(s)}{u(s)} = \frac{s^2 + s}{s^3 + s^2 + 3s + 3} = \frac{s}{[s^2 + (\sqrt{3})^2]}$$

La salida lazo cerrado de los dos modos de diseño "P" ó "F", indica que el K y \underline{k} necesitados para producir la función de transferencia deseada $y(s) / r(s)$ son :

$$K = 2.0$$

$$\underline{k} = \text{col} [0.5 , 0.0 , 1.5]$$

La salida de el modo de análisis, de otra manera, confirma esos valores de K y \underline{k} , en efecto, suministra el resultado deseado.-

El error normalizado máximo para cada uno de los modos de diseño es extremadamente

pequeño, indicando que la precisión de los resultados es muy aceptable.-

LISTADO:

A continuación se presenta el listado de RECURSOS, conjuntamente con los archivos de entrada y de salida para el ejemplo particular presentado en 2.5.4.-

REFERENCIAS:

1. E. L. MELSA " AN ALGORITHM FOR THE ANALYSIS AND DESIGN OF LINEAR STATE VARIABLE FEDBACK SYSTEMS " PROCEEDINGS OF THE 1967 IEEE CONFERENCE ON CIRCUITS AND SYSTEMS, NEW YORK, 1967.-
2. E. L. MELSA " MATHEMATICAL DESCRIPTION OF LINEAR CONTROL SYSTEMS ", SIAM CONTROL VOL I 3 2, 1963.-
3. R. DEBROUWER " COMMENT ON ' ON THE TRANSFORMATION TO (STATE VARIABLE) CANONICAL FORM ', " IEEE TRANS. ON AUTOCNTROL, VOL AC-11 No. 3, 1966.-

CONJUGADO: PARTE REAL PARTE IMAGINARIA

-0.000000E+00 0.000000E+00

0.000000E+00 0.000000E+00

CONJUGADO: PARTE REAL PARTE IMAGINARIA

CONJUGADO: 0.000000E+00 0.000000E+00

CONJUGADO: MENOR EN ORDEN ASCEDENTE DE ACUERDO A LA POTENCIA DE S.

CONJUGADO: 0.000000E+00

CONJUGADO: PARTE REAL PARTE IMAGINARIA

-0.000000E+00 0.000000E+00

.....

CONJUGADO: PARTE REAL PARTE IMAGINARIA

CONJUGADO: 0.000000E+00

CONJUGADO: MENOR EN ORDEN ASCEDENTE DE ACUERDO A LA POTENCIA DE S. -

CONJUGADO: 1.500000E+00

CONJUGADO: PARTE REAL PARTE IMAGINARIA

-0.000000E-01 -2.8867513E-01

-0.000000E-01 2.8867513E-01

CONJUGADO: PARTE REAL PARTE IMAGINARIA

CONJUGADO: 1.500000E+00

CONJUGADO: 0.000000E+00

CONJUNTO DE VALORES EN ORDEN ASCENDENTE DE ACUERDO A LA POTENCIA DE S.

CONJUNTO DE VALORES EN ORDEN ASCENDENTE DE ACUERDO A LA POTENCIA DE S.

CONJUNTO DE VALORES EN ORDEN ASCENDENTE DE ACUERDO A LA POTENCIA DE S.

CONJUNTO DE VALORES EN ORDEN ASCENDENTE DE ACUERDO A LA POTENCIA DE S.

CONJUNTO DE VALORES EN ORDEN ASCENDENTE DE ACUERDO A LA POTENCIA DE S.

CONJUNTO DE VALORES EN ORDEN ASCENDENTE DE ACUERDO A LA POTENCIA DE S.

CONJUNTO DE VALORES EN ORDEN ASCENDENTE DE ACUERDO A LA POTENCIA DE S.

CONJUNTO DE VALORES EN ORDEN ASCENDENTE DE ACUERDO A LA POTENCIA DE S.

CONJUNTO DE VALORES EN ORDEN ASCENDENTE DE ACUERDO A LA POTENCIA DE S.

CONJUNTO DE VALORES EN ORDEN ASCENDENTE DE ACUERDO A LA POTENCIA DE S.

CONJUNTO DE VALORES EN ORDEN ASCENDENTE DE ACUERDO A LA POTENCIA DE S.

CONJUNTO DE VALORES EN ORDEN ASCENDENTE DE ACUERDO A LA POTENCIA DE S.

CONJUNTO DE VALORES EN ORDEN ASCENDENTE DE ACUERDO A LA POTENCIA DE S.

CONJUNTO DE VALORES EN ORDEN ASCENDENTE DE ACUERDO A LA POTENCIA DE S.

CONJUNTO DE VALORES EN ORDEN ASCENDENTE DE ACUERDO A LA POTENCIA DE S.

CONJUNTO DE VALORES EN ORDEN ASCENDENTE DE ACUERDO A LA POTENCIA DE S.

CONJUNTO DE VALORES EN ORDEN ASCENDENTE DE ACUERDO A LA POTENCIA DE S.

	PARTE REAL	PARTE IMAGINARIA
	-0.000000E+00	0.000000E+00
	-0.000000E+00	-1.000000E+00
	-0.000000E+00	1.000000E+00

0.00E+00

EN ORDEN ASCENDENTE DE ACUERDO A LA POTENCIA DE S.

1.500000E+00

	PARTE REAL	PARTE IMAGINARIA
	-0.000000E-01	-2.8867513E-01
	-0.000000E-01	2.8867513E-01

0.00E+00

1.500000E+00

0.00E+00

EN ORDEN ASCENDENTE DE ACUERDO A LA POTENCIA DE S.

4.000000E+00 1.000000E+00

	PARTE REAL	PARTE IMAGINARIA
	-0.000000E+00	0.000000E+00
	-0.000000E+00	-1.000000E+00
	-0.000000E+00	1.000000E+00

0.00E+00

PROGRAMA DE INDICE DE OBSERVABILIDAD :

(INDOBS).

El programa INDOBS, calcula el índice de observabilidad de un sistema Lineal de la forma :

$$\dot{x}(t) = A x(t) \quad 2.6-1$$

$$y(t) = c x(t) \quad 2.6-2$$

donde $x(t)$ es el vector de estado de orden n , y $y(t)$ es el vector de salida de orden m .

El índice de observabilidad se utiliza en los programas INDOBS y COMCAS, descritos en las secciones 2.6 y 2.8 respectivamente, para determinar el grado del compensador a necesitarse.

El programa INDOBS, utiliza las siguientes subrutinas:

HERMTC : Transforma una matriz a la forma Hermitica.

MULT : Encuentra el producto de dos matrices.

TEORIA :

El índice de observabilidad del sistema descrito anteriormente, es el mínimo entero ν , tal que la matriz Q_ν este definida por:

$$Q_\nu = \begin{bmatrix} - \\ \vdots \\ \xi^T \\ - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | \\ | \\ A^T \xi^T \\ | \\ \dots\dots\dots \\ | \\ (A^T)^{\nu-1} \xi^T \\ | \\ - \end{bmatrix}$$

tiene rango n [1].-

en general :

$$\frac{n}{m} \leq \nu \leq n - m + 1$$

La matriz Q_i , $i = 1, 2, \dots$, se calculará y el rango se lo determinará mediante la subrutina HERMIT (ver apéndice A).-

Si el rango de Q_j es n , mientras que el rango de Q_{j-1} es menor que n ; entonces el índice de observabilidad ν , es igual a j .-

Por lo tanto, si el rango de Q_n es menor que n , entonces el sistema es considerado no obser-

tabla.-

FORMATO DE ENTRADA :

Todos los datos de entrada se encuentran en el archivo denominado [INDOBS.DATOS], que en su primera línea contiene la identificación, el grado del sistema y la dimensión del vector $y(t)$.-

Como en todos los formatos usuales, en las siguientes n líneas contendrán los coeficientes de la matriz \hat{A} y las subsiguientes m líneas contendrán los coeficientes de la matriz \hat{c} .- Para una mejor comprensión se puede observar la tabla # 2.6:1.-

TABLA # 2.6:1

FORMATO DE ENTRADA PARA INDOBS.

POSICIÓN	DESCRIPCIÓN	FORMATO
01 - 04	Identificación del problema	S A 4
05 - 06	Grado del sistema	I 2
07 - 08	Grado de \hat{c} .	I 2

Tabla = 2.6:1 (CONTINUACION)

COLUMNA	DESCRIPCION	FORMATO
100 - 10	a11	BF10.3
100 - 20	a12	
100 - 30	etc.....	
100 - 10	a21	BF10.3
100 - 20	a22	
100 - 30	etc.....	
100 - 10	c11	BF10.3
100 - 20	c12	
100 - 30	etc.....	
100 - 10	c21	BF10.3
100 - 20	c22 etc.	

Salida: FORMATO DE SALIDA :

La salida del programa INDOBS quedará almacenada en el archivo [INDOBS.LISTADO], el cual será de la siguiente manera:

Comenzará imprimiendo el encabezado, la

identificación del problema, luego presentará las matrices \hat{A} y \underline{c} tal como fueron ingresadas en el archivo [INDOBS.DATOS], y al final imprimirá la respuesta de nuestro programa que dependerá de:

1) Si el sistema es no observable, el programa escribirá el siguiente mensaje:

(\hat{A} , \underline{c}) NO ES OBSERVABLE

2) Si el sistema es Observable, escribirá el Índice de Observabilidad, entonces el mensaje será:

INDICE DE OBSERVABILIDAD = I

Ejemplo:

Para una prueba del programa INDOBS, se considera el sistema descrito por las ecuaciones # 2.6-1 y 2.6-2, en donde las matrices \hat{A} y \underline{c} , están definidas por :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$$

$$c = [-4 \quad 1]$$

Como se discutió anteriormente, este programa determina el índice de observabilidad.

SOLUCION: Primero calculo la matriz Q_y , esto es:

$$Q_y = [c^T ; A^T c^T ; \dots ; (A^{n-1})^T c^T]$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, realizando el calculo de Q_y , se tiene que :

$$\frac{n}{m} \leq y \leq n-m+1$$

como $n = 2$ y $m = 1$, para este ejemplo específico, se tiene que:

$$\frac{2}{1} \leq y \leq 2-1+1$$

$$2 \leq y \leq 2$$

con el valor de $y = 2$, la matriz Q_y será:

$$Q_2 = [c^T \quad A^T c^T]$$

Entonces, se necesita calcular la matriz transpuesta de A . Matemáticamente, esto

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

ahora el producto de $A^T \cdot c^T$, será:

$$A^T c^T = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Obteniéndose finalmente la matriz Q_2 definida

por:

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Debe tenerse en cuenta que en Q_2 , la segunda columna es el doble de la primera, luego el sistema es inobservable.- Para una mejor comprensión del archivo de entrada para este ejemplo particular se muestra la tabla # 2.6:2.

TABLA # 2.6:2

ARCHIVO DE ENTRADA PARA EJEMPLO PARTICULAR [INDOBS.DATOS]

# línea	# columna						
	1	5	10	15	20	25	30
1	Ejemplo CAP # 2.6					2	1
2	0.0	1.0					
3	8.0	-2.0					
4	4.0	1.0					

LISTADO:

A continuación se presenta el listado de
INGRESOS, conjuntamente con los archivos de
datos y de salida para el ejemplo particular
presentado en 2.6.4.-

REFERENCIAS:

1. "INGENIERIA DE CONTROL", PRENTICE/HALL,
MELB. 1968. -

PROGRAMA DE DISEÑO DE OBSERVADORES DE ESTADO :

(DIOBES).

El programa DIOBES, se utiliza para diseñar el observador de Luenberger para una determinada función de transferencia de lazo cerrado cuando algunas de las variables de estado son inaccesibles[1].-

TERCERA :

El estudio se basa en una planta que esta representada mediante las siguientes ecuaciones:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{b} u(t) \quad 2.7-1$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C} \underline{x}(t) \quad 2.7-2$$

$$y^*(t) = \underline{c}^T \underline{x}(t) \quad 2.7-3$$

donde $y^*(t)$, es la variable de salida que va a ser controlada, y $\underline{y}(t)$, representa la salida medible ó accesible.- Normalmente $y^*(t)$ debería ser un miembro de $\underline{y}(t)$ pero no necesariamente.-

... aquí se está interesado en calcular $y^*(s)$ / $y^*(t)$ mediante el uso solamente de la salida realzada $y(t)$.-

El primer paso del observador de "Luenberger", es colocar un compensador en la trayectoria de realimentación, el cual servirá para proporcionar información acerca de los estados no mensurables.- Entonces, el sistema general toma la forma que se muestra en la figura # 2.7:1.-

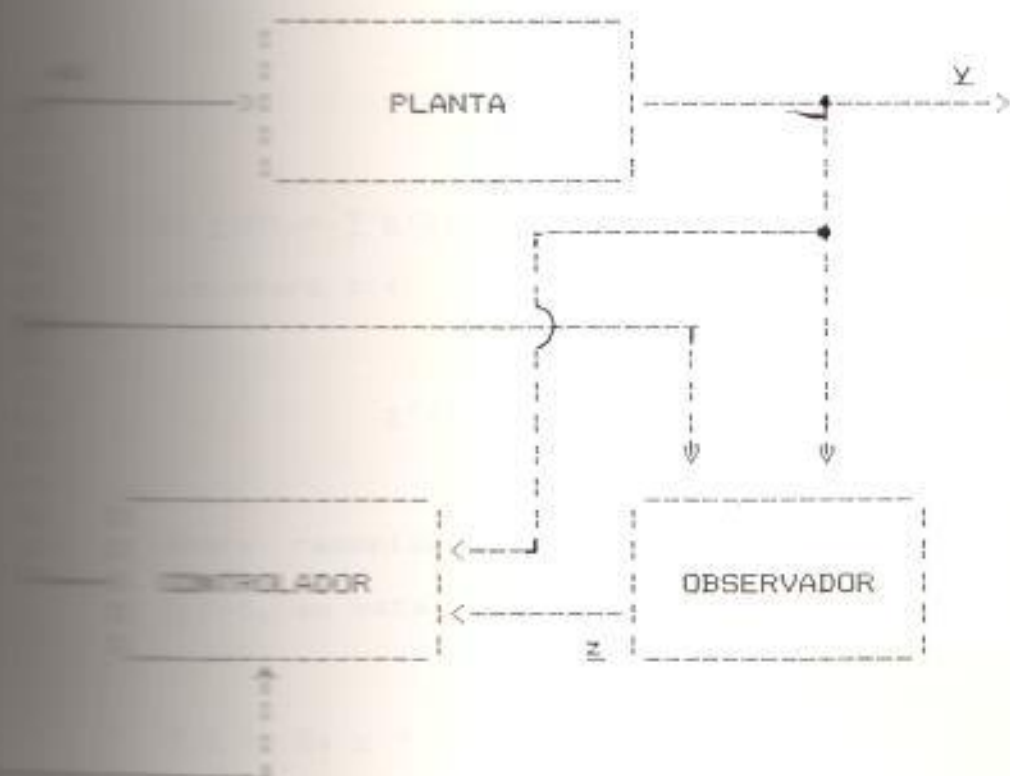


DIAGRAMA DE BLOQUES DEL OBSERVADOR.

El observador de realimentación está descrito mediante la ecuación:

$$\dot{z}(t) = E z(t) + G_1 y(t) + G_2 u(t) \quad 2.7-4$$

Se desea diseñar un compensador tal que se pueda escribir en la forma:

$$U^T I = h^T z + a^T y \quad 2.7-5$$

Para obtener esto, se fuerza $z(t)$ a ser una transformación lineal de $x(t)$, esto es:

$$z(t) = I x(t)$$

Si $z(0) = I x(0)$, entonces esta condición se satisfará si:

$$\dot{z}(t) = I \dot{x}(t)$$

Ahora reemplazando las ecuaciones 2.7-4 y 2.7-1, en esta última se tiene:

$$E z + G_1 y + G_2 u = I [A x + b u]$$

$$Ez + G_1 y + G_2 u = I A X + I b u$$

Reemplazando:

$$z = I X$$

$$y = C X$$

entonces se obtiene que:

$$E I X + G_1 C X + G_2 u = I A X + I b u \quad 2.7-6$$

Aplicando la ley asociativa a la variable X .

Se obtiene, que:

$$(E I + G_1 C) X + G_2 u = I A X + I b u$$

Comparando miembro a miembro, se puede decir

que:

$$E I + G_1 C = I A \quad 2.7-7$$

Además:

$$G_2 = I b \quad 2.7-8$$

Además, teniendo presente que la ecuación

2.7-5 también debe satisfacerse, se tiene

$$k^T \underline{x} = h^T \underline{I} \underline{x} + g^T \underline{C} \underline{x}$$

Si que esto es válido para cualquier valor de \underline{x} , se tendrá que:

$$k^T = h^T \underline{I} + g^T \underline{C} \quad 2.7-9$$

Las ecuaciones 2.7-7, 2.7-8 y 2.7-9, tienen por lo menos una solución (y en general tendrán un número infinito de soluciones)

2.7-6 Los valores característicos de \underline{E} no son iguales a los valores característicos de \underline{A} .

2.7-7 La dimensión de \underline{z} es mayor o igual que $\nu-1$, donde ν es el índice de observabilidad discutido en la sección 2.6.-

El procedimiento completo para diseñar el observador es de la siguiente manera:

2) Se selecciona $y^*(t) / r(s)$, y resolvemos para K y k , mediante el uso del programa REVAR.

3) Se determina el índice de observabilidad mediante el uso del programa INDOBS y se selecciona E , para satisfacer las propiedades anteriormente mencionadas.

4) Se resuelven las ecuaciones 2.7-7, 2.7-8 y 2.7-9 para obtener G_1 , G_2 , h , q ; ya que es el objetivo principal del programa DIOBES.

5) El sistema final estará dado por :

$$\dot{X} = A X + b u \quad 2.7-10$$

$$\dot{z} = E z + G_1 y + G_2 u \quad 2.7-11$$

$$u = K [r - h^T z - q^T y] \quad 2.7-12$$

$$y^* = c^T X \quad 2.7-13$$

$$y = C X \quad 2.7-14$$

El programa DIOBES, utiliza las siguientes subrutinas:

COPOA: Cálcula los coeficientes polinomiales a partir de las raíces.-

RAICE: Cálcula las raíces reales un polinomio.

RESLSI: Resuelve un conjunto de ecuaciones lineales simultáneas.-

FORMATO DE ENTRADA :

Los datos de entrada se encontrarán almacenados en el archivo [DIOMBES.DATOS], el cual contiene en la primera línea: la identificación del problema, además el grado de la planta n , la dimensión del vector de salida m , y el grado del observador denotado por L .

En las siguientes filas de dicho archivo se encuentran los coeficientes de las matrices A , B , C , y k con el formato usual.- A continuación de todos los coeficientes se encuentra la matriz E asumida en la forma de variables de fase, y es especificada mediante su polinomio característico (se puede

Modificar el programa para aceptar otro tipo de matriz E).- Este polinomio puede suministrarse de dos formas:

- 1) P , por los coeficientes polinomiales, y
- 2) P , mediante los factores polinomiales.

Recordar, que si el modo de coeficientes polinomiales es seleccionado, el coeficiente del término de mayor grado se considera la unidad y no necesita ser suministrado.- Para una mejor comprensión del formato utilizado en este programa se mostrará un resumen del mismo en la tabla # 2.7:1

TABLA # 2.7:1

FORMATO DE ENTRADA PARA DIOBES

Columnas	DESCRIPCION	FORMATO
01 - 04	Identificación del Pro.	5 A 4
05 - 06	n: Grado de Planta ≤ 10	I 2
07 - 08	m: Dimensión del vector de salida.	I 2
09 - 10	L: Grado del Observador	I 2

Tabla # 2.7:1 (CONTINUACION)

FILAS-COLUMNAS	DESCRIPCION	FORMATO
101 100 - 10	a_{11} Elementos de \underline{A}	BF10.3
102 100 - 20	a_{12}	
... etc.	
103 100 - 10	a_{21}	BF10.3
104 100 - 20	a_{n2}	
... etc.	
105 100 - 10	b_{11} Matriz de control	BF10.3
106 100 - 20	b_{12}	
... etc.	
107 100 - 10	c_{11} Matriz de salida	BF10.3
108 100 - 10	c_{22}	
... etc.	
109 100 - 10	k_1	BF10.3
110 100 - 20	k_2	
... etc.	
111 100 - 10	OPCION = F (Factores Polinomiales)	A 1

TABLA # 2.7:1

(..... continuación)

INDICADORES	DESCRIPCION	FORMATO
01 - 10	Parte Real. 1ª Raíz	BF10.3
02 - 20	Parte Imaginaria.	
03 - 10	Parte Real. Última	BF10.3
04 - 20	Parte Imag. Raíz.	

FORMATO DE SALIDA :

Los datos de salida se encuentran almacenados en el archivo denominado [DI0BES.LISTADO], que usualmente contendrá :

- Encabezado.
- Identificación del problema.
- Las matrices A , b , C , y K .
- El polinomio característico de la matriz E , el mismo que se enlistará de las dos formas factorizada o no factorizada, independientemente de cual fué la forma que se in-

gresaron en el archivo denominado
INDOBS.DATDS1.-

- Al final imprimirá los elementos computados
en este programa, es decir: G_1 , G_2 , h y
 z .

COMO EJEMPLO :

Para probar el programa INDOBS, se considera
el sistema de quinto orden definido por las
ecuaciones 2.7-1 y 2.7-2, donde:

$$E = \begin{bmatrix} 2.0 & -1.00 & -1.0 & 3.00 & 0.0 \\ -7.0 & 4.00 & 8.0 & 11.0 & 1.0 \\ 0.0 & -1.0 & 4.0 & 0.0 & 3.0 \\ 0.0 & -1.0 & 8.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 3.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Y que solamente x_1 , x_3 y x_5 son accesibles,
de modo que:

$$y^* = y_1 = x_1$$

$$\underline{y^*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}$$

Como se explicó anteriormente para diseñar el observador, es necesario:

- 1) Definir la función de transferencia deseada $y^*(s) / r(s)$, la cual en este caso es:

$$\frac{y^*(s)}{r(s)} = \frac{1}{s^5 + 4s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 20s + 8}$$

Mediante el programa REAVAR, se obtienen los siguientes parámetros.-

$$K = -0.050352953.$$

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 206.03333 \\ -8.476293 \\ -778.32642 \\ -125.59148 \\ -297.8981 \end{bmatrix}$$

Se debe tener en cuenta que, las variables de estado para el diseño requerido son x_2 y x_4 , pero ninguna de ellas son accesibles.

- 2) Determinar el índice de observabilidad y , mediante el programa INDOBS.- Este muestra que $y = 2$, y por lo tanto se necesitará una matriz E de primer orden.- A partir del programa REAVAR se puede apreciar que los valores característicos de A son todos complejos, por lo tanto se selecciona E , de modo que tenga un valor característico en $s = -2$, es decir:

$$\det (sI - E) = s + 2.$$

3) Ahora, se está listo para obtener:

G_1 , G_2 , h y g , resolviendo las ecuaciones: 2.7-07, 2.7-08 y 2.7-09.-

Para mejor comprensión del archivo de entrada para este ejemplo particular se muestra la tabla # 2.7:2.-

TABLA # 2.7:2

ARCHIVO DE ENTRADA PARA EJEMPLO PARTICULAR [DIOMBES.DATOS]

	# columna					
	5	10	15	20	25	30
01	Ejemplo CAP # 2.7					5 3 1
02	2.0	-1.00	-1.0	3.00	0.0	
03	-2.0	4.00	8.0	11.0	1.0	
04	2.0	-1.0	4.0	0.0	3.0	
05	2.0	-1.0	8.0	1.0	0.0	
06	2.0	1.0	0.0	3.0	0.0	
07	2.0	0.0	0.0	0.0	1.0	
08	2.0	0.00	0.0	0.0	0.0	
09	2.0	0.00	1.0	0.0	0.0	
10	2.0	0.00	0.0	0.0	1.0	
11	2.0	-8.47629	-778.3264	-125.5914	-297.896	

Al ejecutar el programa DIOBES este generará un archivo de salida denominado [DIOBES.-LISTADO].

4) Generar el sistema final mediante el archivo [DIOBES.DATOS], el mismo que estará dado por :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -2 z + [-23.294 \quad 0.00 \quad 754.5725] y \\ &+ 118.87451. \\ \dot{u} &= -0.0503529 (r - [243.5913 \quad 1024.75 \\ &- 416.77051] y + z). \end{aligned}$$

LISTADO:

A continuación se presenta el listado de DIOBES, conjuntamente con los archivos de datos y de salida para el ejemplo particular presentado en 2.7.4.-

REFERENCIAS:

1. LIENBERGUER "OBSERVERS FOR MULTIVARIABLE SYSTEMS,"
 TRANS. ON AUTO. CONTROL, VOL AC-11, 1966
 # 190 A 197.

PROGRAMA DE DISEÑO DE COMPENSACION EN CASCADA

(COMCAS).

EL programa COMCAS, se utiliza para diseñar un compensador en cascada a fin de conseguir una determinada función de transferencia para lazo cerrado, cuando algunas de las variables de estado son inaccesibles[1].-

2.8.1: TEORIA :

La representación de la planta esta dada por las siguientes ecuaciones :

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{b} u(t) \quad 2.8-01$$

$$y^*(t) = \underline{c}^T \underline{x}(t) \quad 2.8-02$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C} \underline{x}(t) \quad 2.8-03$$

donde : $y^*(t)$, es la variable de salida que se va a controlar y $\underline{y}(t)$ representa la salida accesible.

En este método se añade un compensador en cascada para obtener la flexibilidad requere-

rida en el sistema, de modo que se necesita solo la salida accesible.- El grado del compensador es $\gamma-1$ donde γ , es el índice de observabilidad[2].-

El sistema ahora toma la forma mostrada en la figura # 2.8:1, cuyo conjunto de ecuaciones será:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{b} u \quad 2.8-01$$

$$\dot{\underline{z}} = \underline{D} \underline{z} + \underline{e} w \quad 2.8-04$$

$$u = K \underline{f}^T \underline{z} \quad 2.8-05$$

$$w = r - \underline{k}_1^T \underline{x} - \underline{k}_2^T \underline{z} \quad 2.8-06$$

aquí: la constante K , y los vectores \underline{k}_1 y \underline{k}_2 son seleccionados para obtener una función de transferencia de lazo cerrado de grado

$$(n + \gamma + 1)$$

Aún no se ha resuelto el problema de requerir los estados no accesibles.- Para este efecto, se considera la transformación lineal de \underline{z} , de la forma :

$$y = z + I \dot{x} \quad 2.8-07$$

y,

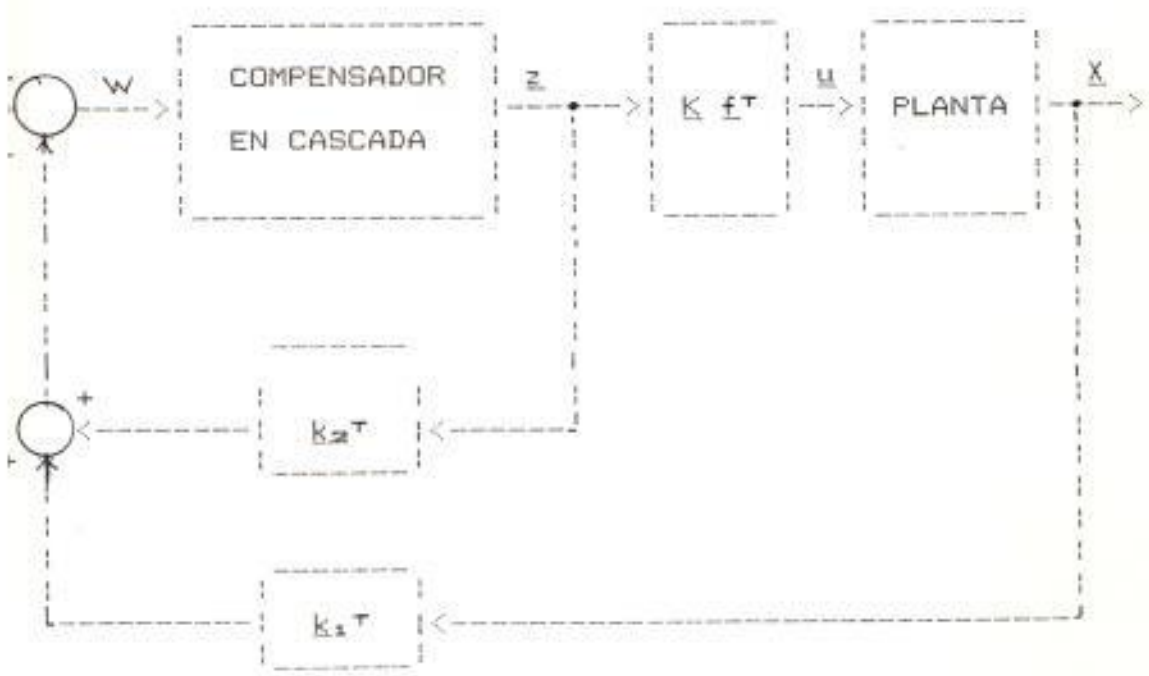
$$y' = z' + I \dot{x}'$$

Reemplazando en esta última ecuación los valores z' y \dot{x}' dados en las ecuaciones 2.8-01 y 2.8-04 respectivamente, se tiene:

$$y' = (D z + e w) + I (A x + b u)$$

esto es :

$$y' = D z + e w + I A x + I b u \quad 2.8-08$$



2.8:1 : DIAGRAMA DE BLOQUES DEL COMPENSADOR.

Reemplazando en la ecuación 2.8-08, el valor de w dado en la ecuación 2.8-06, se tiene que:

$$\underline{v}' = \underline{D} \underline{z} + \underline{e} (r - \underline{k}_1^T \underline{X} - \underline{k}_2^T \underline{z}) + \underline{IAX} + \underline{Ibu}$$

ó,

$$\underline{v}' = \underline{D} \underline{z} + \underline{e}r - \underline{e} \underline{k}_1^T \underline{X} - \underline{e} \underline{k}_2^T \underline{z} + \underline{IAX} + \underline{Ibu}$$

Aplicando la ley asociativa para las variables \underline{X} y \underline{z} respectivamente, se obtiene:

$$\underline{v}' = (\underline{D} - \underline{e} \underline{k}_2^T) \underline{z} + (\underline{IA} - \underline{e} \underline{k}_1^T) \underline{X} + \underline{Ibu} + \underline{e}r$$

y como: $\underline{z} = \underline{v} - \underline{IX}$, de la ecuación 2.8-07, se tiene que:

$$\underline{v}' = (\underline{D} - \underline{e} \underline{k}_2^T) (\underline{v} - \underline{IX}) + (\underline{IA} - \underline{e} \underline{k}_1^T) \underline{X} + \underline{Ibu} + \underline{e}r$$

ó

$$\underline{v}' = (\underline{D} - \underline{e} \underline{k}_2^T) \underline{v} + [\underline{IA} - \underline{e} \underline{k}_1^T - (\underline{D} - \underline{e} \underline{k}_2^T) \underline{I}] \underline{X} + \underline{Ibu} + \underline{e}r$$

2.8-09

si se hace que:

$$\underline{\Xi} = \underline{IA} - \underline{e} \underline{k}_1^T - (\underline{D} - \underline{e} \underline{k}_2^T) \underline{I}, \text{ entonces:}$$

$$\underline{v}' = (\underline{D} - \underline{ek}_2^T) \underline{v} + \underline{eX} + \underline{I}bu + \underline{er} \quad 2.8-10$$

Ahora, si se aplica esta transformación a la ecuación 2.8-05, se obtiene:

$$u = K [\underline{f}^T \underline{v} + \underline{e}^T \underline{X}] \quad 2.8-11$$

donde:

$$\underline{e}^T = - \underline{f}^T \underline{I} \quad 2.8-12$$

Como se desea seleccionar una matriz \underline{I} , tal que \underline{e} y \underline{e}^T solo dependan de la salida accesible \underline{y} , entonces:

$$\underline{eX} = \underline{G} \underline{C} \underline{X} = \underline{G} \underline{y}, \quad \text{y,}$$

$$\underline{e}^T \underline{X} = \underline{q} \underline{C} \underline{X} = \underline{q} \underline{y}$$

Luego debemos encontrar \underline{I} , \underline{G} y \underline{q} para satisfacer las ecuaciones:

$$\underline{I}A - \underline{ek}_1^T - (\underline{D} - \underline{ek}_2^T) \underline{I} = \underline{G} \underline{C} \quad 2.8-13$$

$$- \underline{f}^T \underline{I} = \underline{q} \underline{C} \quad 2.8-14$$

Ahora, se puede escribir la ecuación del com-

pensador definido en la ecuación 2.8-10 de la siguiente forma :

$$\underline{y}' = (\underline{D} - \underline{ek}_2^T) \underline{y} + \underline{G} \underline{y} + \underline{Ib} u + \underline{er}$$

pero como:

$$u = K [\underline{f}^T \underline{y} + \underline{q}^T \underline{y}]$$

se tendrá que:

$$\underline{y}' = (\underline{D} - \underline{ek}_2^T) \underline{y} + \underline{G} \underline{y} + \underline{Ib} K [\underline{f}^T \underline{y} + \underline{q}^T \underline{y}] + \underline{er}$$

$$\underline{y}' = (\underline{D} - \underline{ek}_2^T + \underline{Ib} K \underline{f}^T) \underline{y} + (\underline{G} + \underline{Ib} K \underline{q}^T) \underline{y} + \underline{er}$$

Escribiendo esta última ecuación en la forma

$$\underline{y}' = \underline{\bar{D}} \underline{y} + \underline{\bar{G}} \underline{y} + \underline{er} \quad 2.8-15$$

donde:

$$\underline{\bar{D}} = \underline{D} - \underline{ek}_2^T + \underline{Ib} K \underline{f}^T \quad 2.8-16$$

$$\underline{\bar{G}} = \underline{G} + \underline{Ib} K \underline{q}^T \quad 2.8-17$$

Aquí, \bar{G} : se le denomina la matriz de los coeficientes de realimentación de lazo mayor.-

g : se le denomina el vector de los coeficientes de realimentación de lazo menor.-

Ahora el procedimiento completo seguido para un diseño será:

- 1) Encontrar γ usando INDOBS, y seleccionar \underline{D} , \underline{f} , y \underline{e} ; para un compensador arbitrario.
- 2) Seleccionar $y^*(s)/r(s)$, para un sistema aumentado de grado $(n+\gamma-1)$ y encontrar K , \underline{k}_1 y \underline{k}_2 mediante el programa REAVAR.
- 3) Resolver las ecuaciones 2.8-13 y 2.8-14 para obtener \underline{I} , \underline{G} , y \underline{g} , que es el propósito principal del programa COMCAS.
- 4) Luego el sistema final estará dado por :

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{b} u$$

2.8-01

$$\underline{y}' = \bar{D} \underline{x} + \bar{G} \underline{y} + e r \quad 2.8-15$$

$$u = K [f^T \underline{y} + g^T \underline{y}] \quad 2.8-18$$

donde \bar{D} y \bar{G} están definidas mediante las ecuaciones 2.8-16 y 2.8-17, respectivamente.

El programa INDOBS, utiliza la siguiente subrutina:

ECULSI: Resuelve un conjunto de ecuaciones simultáneas.-

2.8.2: FORMATO DE ENTRADA:

Los datos de entrada se almacenarán en el archivo denominado [COMCAS.DATOS], el cual contiene en la primera línea la identificación del problema, el grado de la planta, dimensión del vector de salida estimado y el grado del compensador a suministrarse.- En las siguientes líneas $n+m+y+4$ se suministrarán las matrices A , b , C , D , e , f , $[k_1^T ; k_2^T]$ y la constante K en el formato usual; para una mejor comprensión se muestra la

tabla # 2.8:1, en la cuál se presentan todos los datos de entrada con su respectivo formato.

TABLA # 2.8.1
 FORMATO DE ENTRADA PARA COMCAS

EAS #COLUMNAS	DESCRIPCION	FORMATO
01 - 20	Identificación del Pro.	5 A 4
21 - 22	N: Grado de la planta	I 2
23 - 24	M: Dimensión de Salida	I 2
25 - 26	$\gamma-1$: Grado del compens	I 2
01 - 10	a_{11}	BF10.3
11 - 20	a_{12}	
..etc..	
01 - 10	a_{01}	BF10.3
11 - 20	a_{02}	
..etc..	
01 - 10	b_1	BF10.3
11 - 20	b_2	
..etc..	
01 - 10	c_{11}	BF10.3
11 - 20	c_{12}	
..etc..	

TABLA # 2.8:1 (CONTINUACION)

LINEA	#COLUMNA	DESCRIPCION	FORMATO
M+2	01 - 10	C_{m1}	BF10.3
	11 - 10	C_{m2}	
	..etc..	
M+3	01 - 10	d_{11}	BF10.3
	11 - 20	d_{12}	
	..etc..	
M+v+1	01 - 10	d_{v1}	BF10.3
	11 - 20	d_{v2}	
	..etc..	
M+v+2	01 - 10	e_1	BF10.3
	11 - 20	e_2	
	..etc..	
M+v+3	01 - 10	f_1	BF10.3
	11 - 20	f_2	
	..etc..	
M+v+4	01 - 10	k_{11} (componentes de	BF10.3
	11 - 20	k_{12} K_1 .)	
	21 - 30	k_{21} (componentes de	
	31 - 40	k_{22} K_2 .)	
M+v+5	01 - 10	K	BF10.3

2.8.3: FORMATO DE SALIDA :

En el instante que el programa COMCAS empiece a ejecutarse, generará un archivo denominado [COMCAS.LISTADO], el cual mostrará en su primera línea la identificación del problema, luego enlistará las matrices A , b , C , D , e , f , $[k_1^T ; k_2^T]$, y la constante K , presentadas igualmente como fueron ingresados en el archivo [COMCAS.DATOS].

Luego continuará imprimiendo la matriz \bar{D} , con el vector de los coeficientes de realimentación de lazo menor denotado por g y, la matriz de los coeficiente de realimentación de lazo mayor denotada por \bar{G} .

2.8.4: EJEMPLO

Para probar el programa COMCAS, se utiliza una planta de cuarto grado definida mediante las ecuaciones 2.8-01, 2.8-02 y 2.8-03, con una salida escalar cuyas matrices y vectores estan dados por:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0.00 & 1.000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.00 & 0.856 & -2.737 & -8.212 \\ 0.00 & 1.000 & -0.521 & -0.0077 \\ 0.00 & 1.000 & 0.0000 & -20.00 \end{bmatrix}$$

$$\underline{b}^T = [0.00 \quad 0.000 \quad 0.0000 \quad 20.00 \quad 1]$$

$$\underline{c}^T = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.00 & 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.00 & 0.000 & 0.0000 & 1.00 \end{bmatrix}$$

$$y^* = y(t) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \underline{x}(t).$$

Ahora utilizando INDOBS se determina fácilmente que $\gamma = 2$, entonces se necesitará un compensador de primer orden.- Las matrices \underline{D} , \underline{e} , y \underline{f} pueden ahora seleccionarse arbitrariamente, la forma usada fué:

$$\underline{D} = \underline{0}$$

$$\underline{f} = \underline{1} = \underline{e}$$

Ahora, se tiene un sistema de orden quinto (sistema aumentado).- Para que este sistema aumentado sea resuelto, se debe encontrar el

vector k y la constante K , mediante REAVAR, para una función de transferencia dada por:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{675 (s + 0.495)}{(s+0.5)(s+20)(s+15)[(s+1.5)^2+1.5^2]}$$

los cuáles fueron:

$$k_1 = [1.0 \quad 0.468 \quad -0.721 \quad -0.191 \quad -2.064 \quad 1^T$$

$$K = - 8.2972183$$

Aquí, recién se utiliza COMCAS para encontrar \bar{D} , \bar{G} y q .- La forma de ingresar estos datos de entrada en el archivo [COMCAS.DATOS] para mayor comprensión se lo muestra en la tabla # 2.9:2.

Al ejecutar el programa DIOBES este generará un archivo de salida denominado [DIOBES.-LISTADO1.

TABLA # 2.8:2

DATOS DE ENTRADA PARA EJEMPLO PARTICULAR [COMCAS.DATOS]

línea	# columna						
	1	5	10	15	20	25	30
01	Ejemplo CAP # 2.7			4	3	1	
02	0.00	1.000			0.0000		0.0000
03	0.00	-0.856			-2.737		-8.212
04	0.00	1.000			-0.521		0.0077
05	0.00	0.000			0.0000		-20.00
06	0.00	0.000			0.0000		20.000
07	1.00	0.000			0.0000		0.0000
08	0.00	1.000			0.0000		0.0000
09	0.00	0.000			0.0000		1.0000
10	0.00						
11	1.00						
12	1.00						
13	1.00	0.4680			-0.720	-0.1910	-2.064
14	-8.297						

En el archivo [DIOMBES.LISTADO] se encuentra que :

$$\bar{D} = 16.874496$$

$$q = 0.48449606 \quad -0.2630615 \quad 0.0892522$$

$$\bar{G} = 7.17562777 \quad -5.6167078 \quad 1.3218699$$

Ahora, se procede a generar el sistema del compensador.- Matemáticamente, esto es:

$$\underline{Y}^s = \begin{bmatrix} \\ 16.87 \\ \end{bmatrix} \underline{y} + \begin{bmatrix} 7.17 \\ -5.62 \\ 1.32 \end{bmatrix} \underline{y} + \begin{bmatrix} \\ 1 \\ \end{bmatrix} r$$

Y,

$$u(t) = -8.3 \{ [1 \ 1] \underline{y}(t) + [0.4845 \\ -0.263 \quad + 8.925] y(t) \}$$

2.8.5: LISTADO:

A continuación se presenta el listado del programa COMCAS, conjuntamente con los archivos de entrada y salida para el ejemplo particular tratado en el subcapítulo 2.8.4.-

REFERENCIAS :

J. FERGUSON AND Z. REKASIUS " OPTIMAL LINEAL CONTROL SYSTEMS WITH INCOMPLETE STATE MESUREMENTS ", IEEE TRANS. ON AUTO. CONTROL VOL AC-14, N° 2, ABRIL 1969.-

K. OGATA " INGENIERIA DE CONTROL ", PRENTICE/HALL, 1982, PAG # 876.

PROGRAMA DE INTRODUCCION AL CONTROL OPTIMO

(INCOPT).

En esta sección se ha de considerar primeramente el diseño de sistemas de control óptimo basados en el índice de comportamiento cuadrático.- El sistema de control que se ha de considerar está representado por:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{u} \quad 2.9-01$$

donde:

\underline{x} : Vector de estado (vector n-dimensional).

\underline{u} : Vector de control (vector r-dimensional).

\underline{A} : Matriz constante de $n \times n$.

\underline{B} : Matriz constante de $n \times r$.

Al diseñar sistemas de control, frecuentemente interesa elegir el vector de control $\underline{u}(t)$ tal que se haga mínimo un índice de comportamiento dado.- Se puede probar que los índices de comportamiento cuadráticos en que los límites de integración son 0 y α , están dados por:

$$J = \int_0^{\infty} L(\underline{x}, \underline{u}) dt$$

donde $L(\underline{x}, \underline{u})$ es una función cuadrática de \underline{x} y \underline{u} , que cumplen la ley de control lineal, es decir:

$$\underline{u}(t) = -\underline{K}\underline{x}(t) \quad 2.9-02$$

donde \underline{K} es una matriz de $r \times n$.

Por tanto, el diseño de sistemas de control óptimo basados en estos índices de comportamiento cuadráticos, se reduce a la determinación de los elementos de la matriz \underline{K} .

Primero se ha de tratar el problema de la optimización de parámetros; es decir, la determinación de los valores óptimos de parámetros del sistema.- Específicamente se considera un sistema inicial desplazado.

$$\underline{x}' = \underline{A}\underline{x}, \quad \underline{x}(0) = \underline{\xi}$$

donde \underline{A} tiene un parámetro ó varios parámetros ajustables.- Se desea transferir al origen cualquier estado inicial haciendo mínimo el índice de compor-

tamiento cuadrático, esto es:

$$J = \int_0^{\infty} \underline{x}' \underline{Q} \underline{x} \, dt$$

donde \underline{Q} es una matriz simétrica real positiva definida (o positiva semidefinida).- Entonces el problema se convierte en el de determinar él o los valores de Q de los parámetros, para hacer mínimo el índice de comportamiento.- Luego se ha de considerar el problema de control óptimo basado en el índice de comportamiento cuadrático y determinar la ley de control.- Es decir, se considera el problema de determinar el vector de control óptimo $\underline{u}(t)$ para el sistema descrito por:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{u}$$

y el índice de comportamiento dado por

$$J = \int_0^{\infty} (\underline{x}' \underline{Q} \underline{x} + \underline{u}' \underline{R} \underline{u}) \, dt \quad 2.9-03$$

donde \underline{Q} una matriz simétrica real positiva semidefinida (o positiva semidefinida), \underline{R} es una matriz simétrica real positiva semidefinida y \underline{u} no tiene restricción.-

Como se indicó anteriormente, la ley de control dada en la ecuación 2.9-02 es la ley de control óptimo.- Por tanto, si se determinan los elementos desconocidos de la matriz K de manera que se haga mínimo el índice de comportamiento, entonces $u(t) = -K X(t)$ es óptima para cualquier estado inicial $X(0)$.- En la Figura # 2.9:1, se puede observar el diagrama de bloques que muestra la configuración óptima.-



FIGURA # 2.9.1

SISTEMA DE CONTROL OPTIMO

Ahora se resuelve el problema de optimización.- Reemplazando la ecuación 2.9-02 en la 2.9-03, se obtiene:

$$X' = A X - B K X = (A - B K) X$$

En el desarrollo siguiente, se supone que la matriz

($A - BK$) es estable ó que lo valores propios tienen parte reales negativas.- Ahora, reemplazando la ecuación 2.9-02 en la 2.9-03, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 J &= \int_0^{\infty} (\underline{x}' Q \underline{x} + \underline{x}' K' R K \underline{x}) dt \\
 &= \int_0^{\infty} \underline{x}' (Q + K' R K) \underline{x} dt
 \end{aligned}$$

Seguindo la discusión dada al resolver el problema de optimización de parámetro se hace

$$\underline{x}' (Q + K' R K) \underline{x} = - \frac{d}{dt} (\underline{x}' P \underline{x})$$

entonces, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \underline{x}' (Q + K' R K) \underline{x} &= - \underline{x}' P \dot{\underline{x}} - \dot{\underline{x}}' P \underline{x} \\
 &= - \underline{x}' [(A-BK)' P + P (A-BK)] \underline{x}
 \end{aligned}$$

Comparando ambos miembros de esta última ecuación, y teniendose presente que la misma debe ser válida para cualquier \underline{x} .- Entonces:

$$(A-BK)' P + P (A-BK) = - (Q + K' R K) \quad 2.9-04$$

Por el segundo método de Liapunov si $A - BK$ es una matriz estable, existe una matriz P positiva definida que satisface la ecuación 2.9-04.- Entonces, notando que $\dot{X}(0) = 0$, se puede escribir el índice de comportamiento

$$J = \dot{X}^T(0) P X(0) \quad 2.9-05$$

Se puede indicar los pasos del diseño como sigue:

1. Se determina la matriz P que satisface la ecuación 2.9-04 en función de K .
2. Se sustituye la matriz P en la ecuación 2.9-05.- Entonces el índice de comportamiento se hace en función de K .
3. Se determinan los elementos de K de modo que se haga mínimo el índice de comportamiento J .- Para hacer mínimo el índice de comportamiento J con respecto a los elementos K_{ij} de K , se hace que dJ/dK_{ij} igual a cero y se hallan los valores óptimos de K_{ij} .-

Se dispone de un método mejor para el diseño de

sistemas de control óptimo.- Como se supone que R es una matriz simétrica real positiva definida, se puede escribir que:

$$R = I' I$$

donde I es una matriz no singular.- Entonces se puede escribir la ecuación 2.9-04 como

$$(A' - K'B')P + P(A - BK) + Q + K'I'IK = 0$$

que se puede poner en la forma

$$A'P + PA + [IK - (I')^{-1}B'P]J'[IK - (I')^{-1}B'P] - PBR^{-1}B'P + Q = 0$$

Para hacer mínimo a J con respecto a K hay que hacer mínimo:

$$X' [IK - (I')^{-1}B'P]J'[IK - (I')^{-1}B'P]X$$

con respecto a K .- Como este valor es no negativo, el índice se produce cuando es cero o cuando

$$IK = (I')^{-1}B'P$$

Por tanto,

$$\underline{K} = \underline{I}^{-1} (\underline{I}')^{-1} \underline{B}' \underline{P} = \underline{R}^{-1} \underline{B}' \underline{P} \quad 2.9-06$$

La ecuación 2.9-06 da la matriz óptima \underline{K} . - La matriz \underline{P} en la ecuación 2.9-06 debe satisfacer la ecuación 2.9-04, ó la ecuación reducida siguiente:

$$\underline{A}' \underline{P} + \underline{P} \underline{A} - \underline{P} \underline{B} \underline{R}^{-1} \underline{B}' \underline{P} + \underline{Q} = 0 \quad 2.9-07$$

A esta última ecuación recibe el nombre de Matriz reducida de Riccati.

FILTRO DE KALMAN:

Se tiene un sistema representado mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \underline{X}' &= \underline{A} \underline{X} + \underline{B} \underline{U} \\ \underline{Y} &= \underline{C} \underline{X} \end{aligned}$$

que gráficamente se lo muestra en la figura # 2.9:2

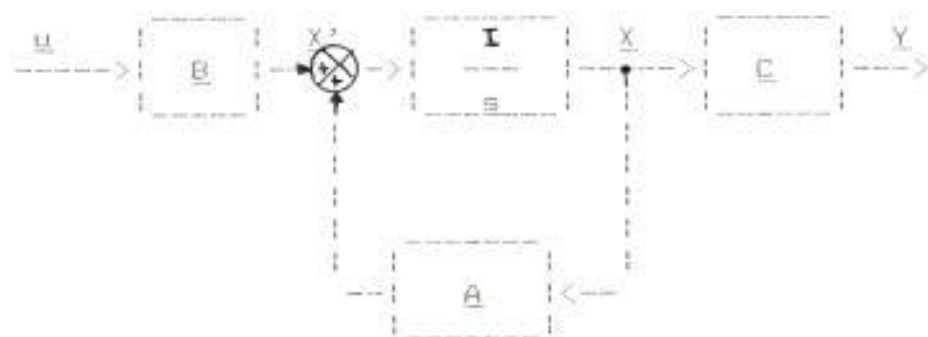
Para realizar el estudio del filtro de Kalman primero

se añaden disturbios de entrada $y(t)$ al vector $u(t)$.
 Matemáticamente, esto es:

$$\dot{X} = A X + B (u + y)$$

Para medir este ruido se incluye en la expresión de salida del sistema un estimador del vector-ruido, denotado por $w(t)$, esto es:

$$Y = C X + w$$



2.9:2 : REPRESENTACION DEL SISTEMA DE CONTROL

Se debe tener presente que se está tratando con un sistema de múltiple salidas.- Estas salidas pueden ser divididas dentro de dos clases; salidas de control y

salidas medibles ó de medida.- Por las salidas de control se refiere a las cantidades físicas que el sistema controla, Ej: Posición, Temperatura.-

Por las salidas de medida se entenderá por las cantidades físicas que pueden ser directamente medidas en el sistema pero que no sean las variables controladas de origen, Ej: Velocidad en un sistema de posicionamiento.

En términos simples, el Filtro de Kalman se utiliza para estimar en base de la medida del ruido, el valor de la Variable de Estado de un sistema estocástico sujeto a disturbios de entrada.- El modelo del sistema toma ahora la forma mostrada en la figura # 2.9:3.

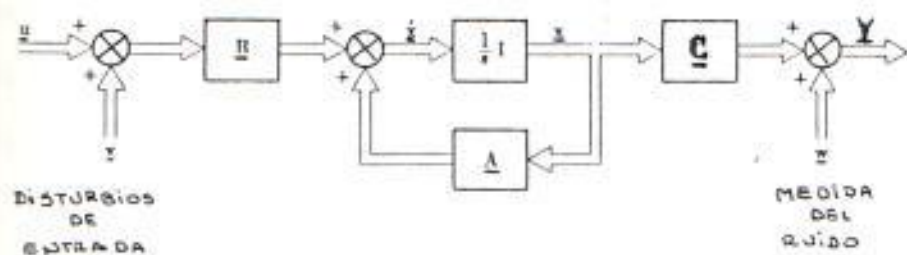


Fig. # 2.9:3 : REPRESENTACION DEL SISTEMA INCLUYENDO LOS DISTURBIOS EN LA ENTRADA Y LA MEDIDA DEL RUIDO.

El problema es entonces encontrar un procedimiento de lazo cerrado que genere una entrada de Control Optimo $u(t)$, en términos de la salida $Y(t)$.

La solución asume que todas las variables de Estado están disponibles y por consiguiente, se empleará directamente las técnicas discutidas más adelante.- En otras palabras se encuentra primero los coeficientes de realimentación asumiendo que todas las variables de estado pueden ser medidas exactamente.

A fin de utilizar este resultado es necesario reconstruir las variables de Estado en alguna forma desde el medible ruido el cual será solamente la salida estable del sistema.- El dispositivo que acompaña este trabajo es el del Filtro de Kalman.- Usando el ruido medible $Y(t)$ como entrada, el Filtro de Kalman generará estimadores de todas las variables de estado.- Estos estimadores son denotados por $\hat{X}(t)$.-

El Filtro de Kalman toma una simple estructura semejante al del sistema original.- Además, la técnica utilizada para resolver el problema de estimación mediante el Filtro de Kalman, está muy

relacionada con las técnicas utilizadas para resolver los problemas de control.- En efecto, es posible diseñar este problema como uno denominado: " Problema de Control Dual ".

Esos estimadores son entonces utilizados en el momento, como si fuese la variable de Estado a fin de generar el control óptimo, esto es:

$$\underline{u}(t) = - \underline{K}^T \underline{x}(t)$$

La completa representación del sistema se lo muestra en la figura # 2.9.4.-

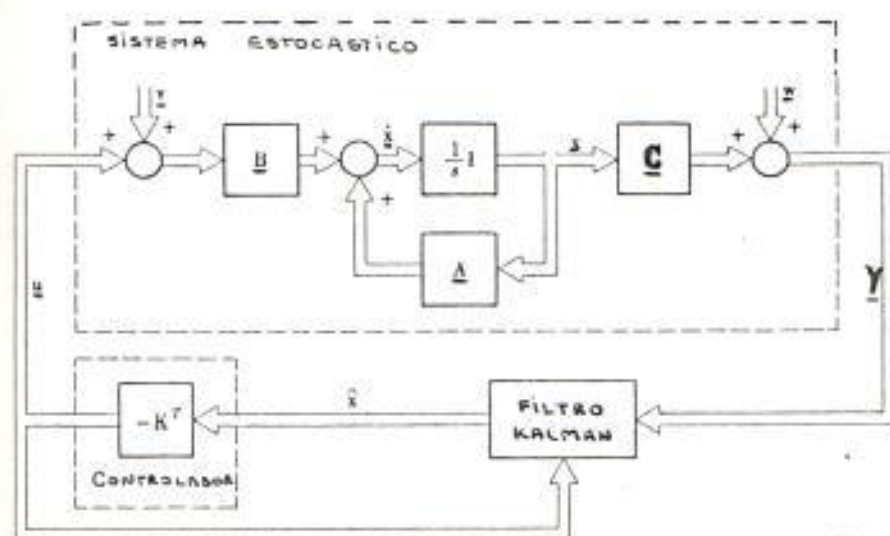


FIG. # 2.9:4 : ESTRUCTURA OPTIMA PARA EL PROBLEMA DE CONTROL LINEAL.

Se asume que las señales de ruido \underline{v} y \underline{w} son un proceso gauseano estacionario con medio zero.- Además, las señales \underline{v} y \underline{w} son independientes, esto es:

$$E \{ \underline{v}(t) \underline{w}^T (t + \tau) \} = 0$$

El último requerimiento es que los disturbios de entrada y salida sean ruido blanco, esto significa que la correlación entre las funciones pueda ser escrito como:

$$E \{ \underline{v}(t) \underline{v}^T (t + \tau) \} = \underline{Q} \delta(\tau)$$

$$E \{ \underline{w}(t) \underline{w}^T (t + \tau) \} = \underline{P} \delta(\tau)$$

donde $\delta(t)$ es la función DELTA DIRAC.- Por ejemplo el elemento de la i -ésima fila y la j -ésima columna de \underline{Q} es igual a:

$$E \{ v_i(t) v_j (t + \tau) \}$$

Ahora, con estas definiciones anteriores se procede a determinar la solución del problema.- Para esto, se define un sistema lineal dinámico, muy similar al del sistema original, esto es:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{K} [\underline{Y} - \underline{C} \underline{x}(t)] + \underline{B} u(t) \quad 2.9-08$$

donde: $\underline{Y}(t)$: es la entrada,

$\underline{x}(t)$: es la salida,

$$\underline{K} = \underline{R}^{-1} \underline{C} \underline{P} \quad 2.9-09$$

y

\underline{P} : es la solución de estado estable de una matriz ecuación de RICCATI:

$$\underline{P} = \underline{A} \underline{P} + \underline{P} \underline{A}^T - \underline{P} \underline{C}^T \underline{R}^{-1} \underline{C} \underline{P} + \underline{B} \underline{Q} \underline{B}^T \quad 2.9-10$$

Se observan tres características importantes del Filtro de Kalman:

- 1) La estructura del sistema es simple y bien definida.
- 2) La estructura del Filtro es cerrada semejante al del sistema original.
- 3) Las técnicas matemáticas utilizadas para determinar el Filtro de Kalman (resolver la matriz ecuación de RICCATI) son similares a las usadas en la solución al problema de control lineal óptimo.

Existe similitud entre las ecuaciones 2.9:06 y 2.9:07 con las 2.9-09 y 2.9-10, repetidas aquí,

$$\underline{K} = \underline{I}^{-1} (\underline{I}')^{-1} \underline{B}' \underline{P} = \underline{R}^{-1} \underline{B}' \underline{P} \quad 2.9-06$$

$$\underline{A}' \underline{P} + \underline{P} \underline{A} - \underline{P} \underline{B} \underline{B}^{-1} \underline{B}' \underline{P} + \underline{Q} = 0 \quad 2.9-07$$

que son las ecuaciones del control óptimo del sistema

$$\underline{\dot{X}} = \underline{A} \underline{X} + \underline{B} \underline{u}$$

con índice de comportamiento:

$$J = \int_0^{\infty} (\underline{X}' \underline{Q} \underline{X} + \underline{u}' \underline{P} \underline{u}) dt \quad 2.9-03$$

A fin de ilustrar la relación entre estas dos problemas más claramente, se considera el control óptimo de un sistema lineal ficticio, representado por las siguientes ecuaciones:

$$\underline{\dot{X}} = \underline{A} \underline{X} + \underline{C} \underline{u} \quad 2.9-11$$

sujeto a un índice de comportamiento:

$$J = \int_0^{\infty} [\underline{X}' (\underline{B} \underline{Q} \underline{B}') \underline{X} + \underline{u}' \underline{P} \underline{u}] dt \quad 2.9-12$$

Si ahora se realiza la apropiada substitución en el problema de control original, entonces las ecuaciones # 2.9-09 y 2.9-10, vienen a ser:

$$\underline{K} = \underline{R}^{-1} \underline{C}^T \underline{P}^{-1} \quad 2.9-13$$

y

$$-\underline{P} = \underline{A} \underline{P} + \underline{P} \underline{A}^T - \underline{P} \underline{C}^T \underline{R}^{-1} \underline{C} \underline{P} + \underline{B} \underline{Q} \underline{B}^T \quad 2.9-14$$

Estas ecuaciones son idénticas al del filtro de Kalman excepto por el signo negativo en el lado derecho de la matriz ecuación de RICCATI.- Sin embargo, a fin de llegar a una igualdad en los resultados es necesario asumir que la ecuación 2.9-12 describe un sistema en las cuales el tiempo corre en reversa.- Con estas modificaciones las ecuaciones # 2.9-13 y 2.9-14 son idénticas en medios matemáticos.

Aquí, se puede ver que \underline{K} puede ser obtenida como la matriz coeficiente de Realimentación de un problema de control para el sistema descrito en la ecuación # 2.9-11, con el tiempo corriendo en reversa y, el índice de comportamiento dado por la ecuación #

solución de estado Estable, se puede ajustar \underline{P} y \underline{P} a cero, formando la ecuación reducida de RICCATI; desde la ecuación reducida de RICCATI se puede encontrar la ecuación Kalman en el dominio de frecuencia para el Problema del Control Dual.-

No es importante encontrar la magnitud absoluta de \underline{Q} y de \underline{P} , ya que \underline{Q} y \underline{P} determinan el índice de comportamiento en el problema del Control Dual; solamente es importante la magnitud relativa.- La estructura óptima completa para el problema de control estocástico se muestra en la figura # 2.9:5.

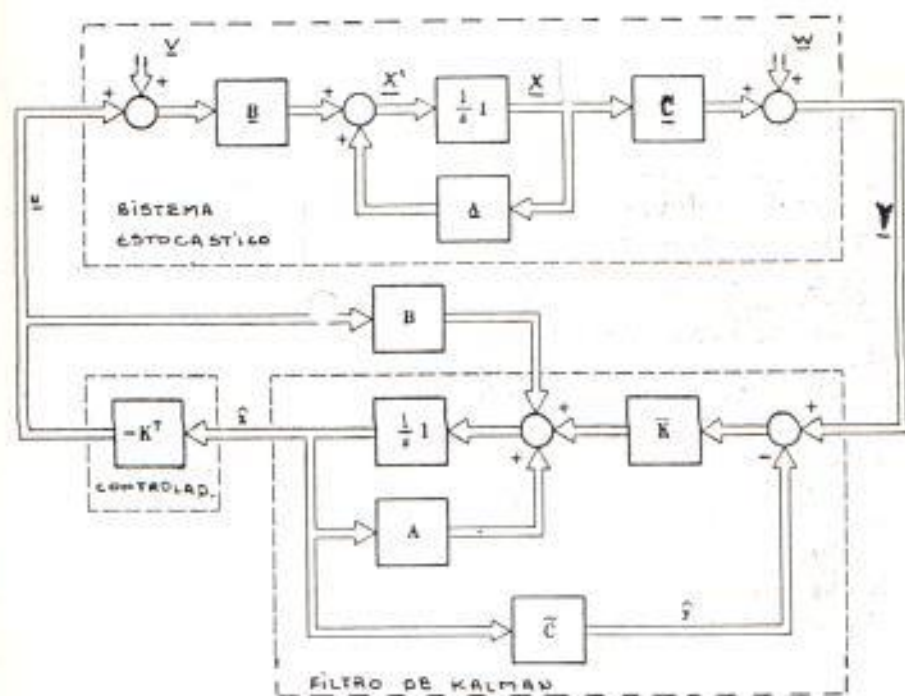


Fig. # 2.9:5 : ESTRUCTURA OPTIMA COMPLETA PARA EL PROBLEMA ESTOCASTICO DE CONTROL

Aquí, el ruido medible $\underline{y}(t)$ se utiliza mediante la estructura del Filtro de Kalman para generar $\underline{x}(t)$.- En término de este estimador del sistema de estado, el control óptimo es formado mediante el uso de la matriz de realimentación \underline{K} .- El programa INCOPT, se utiliza para determinar la ganancia de las matrices:

$$\underline{k}_e = \underline{R}^{-1} \underline{B}^T \underline{P}$$

$$\text{y : } \underline{K}_r = (\underline{R})^{-1} \underline{C} \underline{\bar{P}}$$

donde : $\underline{\bar{P}}$ y \underline{P} satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales de RICCATI [1]:

$$\underline{P}' = -\underline{A}^T \underline{P} - \underline{P} \underline{A} + \underline{P} \underline{B} \underline{R}^{-1} \underline{B}^T \underline{P} - \underline{Q}, \quad \underline{P}(t_r) = \underline{P}_r$$

$$\underline{\bar{P}}' = \underline{A} \underline{\bar{P}} + \underline{\bar{P}} \underline{A}^T - \underline{\bar{P}} \underline{C}^T \underline{R}^{-1} \underline{C} \underline{\bar{P}} + \underline{B} \underline{Q} \underline{B}^T, \quad \underline{\bar{P}}(t_0) = \underline{P}_0$$

Además de calcular el valor estado estable de \underline{k}_e ó \underline{K}_r , el programa INCOPT también imprimirá un número especificado de valores de \underline{k}_e ó \underline{K}_r igualmente espaciados en el intervalo $(t_0 \leq t \leq t_r)$.-

2.9.1: TEORIA:

El programa en si realiza un cambio de variable $\tau = t_r - t$, en la ecuación di-

ferencial de $P(t)$ para ponerla en la misma forma de la ecuación $P(t)$.- Bajo este cambio de variable, la ecuación queda:

$$P'(\tau) = A^T P(\tau) + P(\tau) A - P(\tau) B R^{-1} B^T P(\tau) - Q$$

Donde : $P(\tau = 0) = P_0$

La similitud de esta ecuación con la ecuación de $P(t)$, se aprovechará para resolver la ecuación de $P(t)$.

Así:

$$\begin{aligned} E &= A^T, & \Omega_1 &= Q \\ E &= B, & \Omega_2 &= R \\ D &= I, & Y_0 &= P_0 \end{aligned}$$

Y si resolvemos $P'(t)$, en este caso:

$$\begin{aligned} E &= A, & \Omega_1 &= \bar{Q} \\ E &= C^T, & \Omega_2 &= \bar{R} \\ D &= B, & Y_0 &= P_0 \end{aligned}$$

Pero en estos casos, solo la ecuación:

$$\underline{V}' = \underline{FV} + \underline{VF}' - \underline{VE}\underline{\Omega}_2^{-1} \underline{E}' \underline{V} + \underline{D}\underline{\Omega}_1 \underline{D}'$$

$$\underline{V}(0) = \underline{V}_0$$

será resuelta.- Notar que en ambos casos \underline{K}_e ó \underline{K}_s está definido por:

$$\underline{K} = \underline{\Omega}_2^{-1} \underline{E}' \underline{V}_0$$

Juego:

$$\underline{V}' = \underline{FV} + \underline{VF}' - \underline{VEK} + \underline{D}\underline{\Omega}_1 \underline{D}'$$

El programa define \underline{F} , \underline{E} , \underline{D} y \underline{V}_0 de acuerdo a la opción deseada por el usuario e integrando numéricamente la ecuación diferencial para \underline{V} , de acuerdo a la regla matemática siguiente:

$$\underline{V}(t_k + \text{EPS}) = \underline{V}(t_{k+1}) = \underline{V}'(t_k) * \text{EPS} + \underline{V}(t_k)$$

donde: $\text{EPS} = 0.01$, si solo se desea la solución de estado estable.

$\text{EPS} = 0.005$, si se desea el valor de \underline{K}_s en el intervalo $t_0 \leq t \leq t_f$.

Si se necesita el valor de \underline{K} como un número

específico de valor igualmente espaciados en el intervalo dado, K será impreso en el intervalo de integración L , donde:

$$L = \frac{200 * (t_e - t_o)}{NPT}$$

NPT : Es el número de puntos en la respuesta transiente.

Aquí la cantidad de la derecha es redondeada al entero más cercano.

El programa INCOPT, utiliza la siguiente subrutina:

ECUSIM : Resuelve un conjunto de ecuaciones Simultáneas

2.9.2: FORMATO DE ENTRADA :

El archivo de datos de entrada para el programa INCOPT, es dividido en dos partes :

- 1) Entrada básica.
- 2) Opción deseada.

El completo formato de entrada se resume en las tablas # 2.9:1, 2.9:2 y 2.9:3.- En esta subsección se discutirá por separado cada una de estas partes.- Se debe recordar que la dimensión de las matrices involucradas son: A $n \times n$; B $n \times m$; C $L \times n$.

2.9.2-1: ENTRADA BASICA :

La entrada básica contiene la identificación del problema y las matrices A , B y C .- Esta subsección es la misma, prescindiendo de cuál de las dos ecuaciones de RICCATI serán resueltas.

La línea de control $n+m+L+1$, indica la ecuación a resolverse en el programa sea esta de estado estable ó la solución transiente.-

TABLA # 2.9:1

FORMATO DE ENTRADA BASICA PARA INCOPT

LINEAS	#COLUMNAS	DESCRIPCION	FORMATO
	01 - 20	Identificación del Pro.	5 A 4
	21 - 22	n: Grado de A \leq 10	I 2
	23 - 24	m: # de entradas \leq 10	I 2
	25 - 26	L: # de salidas a Observarse \leq 10.	I 2
	01 - 10	a ₁₁ Elementos de A	BF10.3
	11 - 20	a ₁₂	
	..etc..	
	01 - 10	a ₂₁	BF10.3
	11 - 20	a ₂₂	
	..etc..	
	01 - 10	b ₁ Matriz de control	BF10.3
	11 - 20	b ₂	
	..etc..	
	01 - 10	b ₂₁	BF10.3
	11 - 20	b ₂₂	
	..etc..	
+1	01 - 10	c ₁₁ Matriz de salida.	10.3
	11 - 10	c ₂₂	
	..etc..	
+2	01 - 10	c ₂₁	BF10.3
	11 - 20	c ₂₂	
	..etc..	BF10.3

TABLA # 2.9:1

(... CONTINUACION ...)

LINEAS	#COLUMNAS	DESCRIPCION	FORMATO
L+1	01	OPCION	A 1
	11 - 20	t_0	F10.3
	21 - 30	t_*	F10.3
	31 - 33	NPT	I 3

Si en la línea de control se fija C , entonces se calculará K_c y si se fija F , se obtendrá K_c .- Ahora si se sitúa un espacio en esta línea de control, el programa regresará a leer otro conjunto de entradas básicas.- Luego continúa con dos variables que son las correspondientes t_0 y t_* , que por definición son el tiempo inicial y final, respectivamente para la respuesta transiente deseado.

NPT, es el número de puntos en la respuesta transiente a ser

impreso.- Se obtiene el valor de estado estable de K_e ó K_f , haciendo NPT igual a cero.

Después de encontrar K_e y K_f ; el programa leerá otra línea de control.- Pero, calculará tanto K_e y K_f con un solo conjunto de entradas básicas.

2.9.2.2: DATOS DE CONTROL :

Si en la línea de control en el archivo [INDOBS.DATOS], colocamos una C ó F, que representa nuestra opción que se quiere ejecutar en el programa, luego se tiene que ingresar las matrices R , Q y $P(t_*)$.- Para una mejor comprensión del ingreso de los datos en lo que concierne a la parte de control se muestran las tablas # 2.9:2 y 2.9:3 respectivamente.

TABLA # 2.9:2

FORMATO DE ENTRADA DE CONTROL MODOS "C" PARA INCOPT

LINEAS	#COLUMNAS	DESCRIPCION	FORMATO
	01 - 10	r_{11} Matriz de control	BF10.3
	11 - 20	r_{21}	
	..etc..	
	01 - 10	r_{21} Elementos de A	BF10.3
	11 - 20	r_{22}	
	..etc..	
+1	01 - 10	q_{11} Matriz de Estado	BF10.3
	11 - 20	q_{12}	
	..etc..	
+2	01 - 10	q_{21}	BF10.3
	11 - 20	q_{22}	
	..etc..	
+n+1*	01 - 10	$p_{11}(t_r)$	BF10.3
	11 - 20	$p_{12}(t_r)$	
	..etc..	
+n+2*	01 - 10	$p_{21}(t_r)$	BF10.3
	11 - 10	$p_{22}(t_r)$	
	..etc..	
etc.	

TABLA # 2.9:3

DATOS DE ENTRADA DE CONTROL MODO "F" PARA INCOPT.

LINEAS	#COLUMNAS	DESCRIPCION	FORMATO
1	01 - 10 11 - 20 ..etc..	r_{11} = Matriz de covarianza de rui- do de salida	BF10.3
2	01 - 10 11 - 20 ..etc..	r_{21} r_{22}	BF10.3
+1	01 - 10 11 - 20 ..etc..	q_{11} q_{12}	BF10.3
+2	01 - 10 11 - 20 ..etc..	q_{21} q_{22}	BF10.3
+M+1	01 - 10 11 - 20 ..etc..	$p_{21}(t_0)$ $p_{22}(t_0)$	BF10.3
etcetc.....	

: todos estas líneas son incluidas solo si $NPT > 0$.

Si $NPT \leq 0$, las líneas desde $1+m+1$ a $m+2n$ son omitidas.-

2.9.3: FORMATO DE SALIDA :

El formato básico de salida del programa INCOPT, consiste de la identificación del problema y de las matrices \hat{A} , \hat{B} y \hat{C} ; que son mostradas con el fin de visualizar los datos de entrada para no obtener resultados no requeridos.-

Además, enlistará la solución transiente ó la solución de estado estable de las ecuaciones de RICCATI, de acuerdo a la opción que se haya seleccionado.

2.9.4: EJEMPLO :

Consideremos el sistema lineal de segundo grado dado por:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \underline{u}(t)$$

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \underline{x}(t)$$

Sea

$$Q = \bar{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \bar{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Se calculará:

K_c (ganancia de control óptimo) y,

K_f (ganancia del filtro) para estado estable.

Cuyo resultado es :

$$K_c = \begin{bmatrix} 3.57 \cdot 10^{-1} & 2.28 \cdot 10^{-1} \\ 6.49 \cdot 10^{-1} & 4.27 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix}$$

$$K_f = \begin{bmatrix} 2.1020479 & 7.78 \cdot 10^{-1} \\ 1.9682340 & 7.23 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix}$$

El completo archivo [INCOPT.DATOS], para este ejemplo particular se lo muestra en la tabla # 2.9:4.

TABLA # 2.9:4

DE ENTRADA PARA EJEMPLO PARTICULAR [INCOPT.DATOS]

LINEA	# COLUMNAS						
	1	5	10	15	20	25	30
1	EJEMPLO CAP # 2.9 2 2 2						
2	-1.0	0.0					
3	1.0	-2.0					
4	1.0	0.0					
5	2.0	1.0					
6	1.0	9.0					
7	3.0	2.0					
8	C						
9	1.0	0.0					
0	-1.0	2.0					
1	1.0	1.0					
2	1.0	1.0					
3	F						
4	1.0	0.0					
5	-1.0	2.0					
6	1.0	1.0					
7	1.0	1.0					

2.9.5: LISTADO:

A continuación se presenta el listado del programa INCOPT, conjuntamente con los archivos de entrada y salida, para el ejemplo particular presentado en 2.9.4.-

REFERENCIAS:

: SCHULTZ AND MELSA " STATE FUNTIONS AND LINEAR CONTROL SYSTEMS ", McGRAW-HILL, 1967, PAG # 264 A 275.-

C A P I T U L O I I I

METODOS BASADOS EN LA FUNCION DE TRANSFRENCIA (DOMINIO DE FRECUENCIA).

I : INTRODUCCION :

En este capítulo se examinarán tres programas los cuáles se usan para resolver ciertos problemas computacionales asociados con la función de transferencia .-

Estos programas calculan la respuesta de frecuencia, el lugar de las raíces y el desarrollo de la expansión por fracciones parciales de una función racional.-

El programa RESFRE, discutido en la subsección 3.2, obtiene el gráfico de la respuesta de frecuencia de una función de transferencia racional en un rango

especifico de frecuencia.- En conclusión, el programa RESFRE obtiene la gráfica deseada de la respuesta de frecuencia, tanto en coordenadas de BODE, así como en el polar de NYQUIST.-

El programa LUGERA, discutida en la subsección 3.3, obtiene el lugar geométrico de las raíces.-

Además, se puede optar por examinar minuciosamente solo una pequeña sección rectangular deseada de toda la trayectoria de las raíces.

El programa de expansión por fracciones parciales EXFPAR se usa para obtener la expansión por fracciones parciales de una función de transferencia racional.- Este programa será explicado en la subsección 3.4, y se lo utiliza en funciones de transferencia con múltiples raíces reales aunque las raíces complejas son asumidas simples.-

RESPUESTA DE FRECUENCIA (RESFRE):

El programa RESFRE, se lo utiliza para encontrar la respuesta de frecuencia de una función de transferencia racional $G(s)$, de la forma[1]:

$$G(s) = K \frac{A(s)}{B(s)}$$

donde :

$$\frac{A(s)}{B(s)} = \frac{a_1 + a_2s + \dots + a_ms^{m-1} + s^m}{b_1 + b_2s + \dots + b_ns^{n-1} + s^n}$$

La respuesta de frecuencia puede ser presentada gráficamente de dos formas :

- 1) DIAGRAMA DE BODE y/o
- 2) DIAGRAMA DE NYQUIST.

3.2.1: TEORIA :

La función compleja $G(jw)$ puede ser computada para valores específicos de w , por la simple sustitución algebraica de jw por s [2].- Si

se escribe $G(j\omega)$ en forma de coordenadas rectangulares, se tiene que:

$$G(j\omega) = R(\omega) + j X(\omega)$$

donde $R(\omega)$ y $X(\omega)$ son valores reales, entonces la magnitud y fase de $G(j\omega)$ estan dadas por :

$$|G(\omega)| = [R^2(\omega) + X^2(\omega)]^{1/2}$$

$$\xi(\omega) = \text{arc tan } \frac{X(\omega)}{R(\omega)}$$

Este programa interpolará linealmente o logarítmicamente valores de frecuencia entre dos valores extremos ó, se pueden suministrar valores discretos de frecuencia.-

El programa RESFRE, utiliza las siguientes subrutinas:

COREMA: Compara y reemplaza los elementos de una matriz.

NDANGU: Normaliza un ángulo entre -180° a 180° .

RAICRE: Calcula las raíces reales de un polinomio.-

EVAPOL: Evalúa un polinomio.-

COPORA: Calcula los coeficientes polinomiales a partir de las raíces.-

SEMLOG: Nos da la grafica logaritmica o semi-logaritmica.-

RELGRA: Relaciona graficos X vs Y.-

3.2.2: FORMATO DE ENTRADA :

Los datos de entrada para el programa RESFRE, se los dividirá en tres partes:

- 1) ENTRADA BASICA
- 2) OPCIONES
- 3) VALORES DE w.-

Para una mejor comprensión se presenta la tabla # 3.2:1, en la que se encuentran los datos de entrada en forma general y completa.- Se considerará cada una de

estas partes por separado.-

TABLA # 3.2:1

FORMATO DE ENTRADA PARA RESFRE

#LINEA	#COLUMNA	DESCRIPCION	FORMATO
01	01 - 20	Identificación del prob.	5 A 4
02	01 - 10	K = ganancia	BE10.0
03	01	Opción : P	A 1
	02 - 03	m = Grado de A(s)	I 2
04	01 - 10	a ₁ = Coefic. de A(s)	BE10.0
	11 - 20	a ₂	
	21 - 30	etc.....	
05	01	Opción F	A 1
	02 - 03	n = Grado de B(s)	I 2
06	01 - 10	Parte real de la 1 ^{ra} raíz de B(s).	BE10.0
	11 - 20	Parte imag. de la 1 ^{ra} raíz de B(s).	
07	01 - 10	Parte real de la 2 ^{da} raíz de B(s).	BF10.0
	11 - 20	Parte imag. de la 2 ^{da} raíz de B(s).	
08	01 - 10	Wmin = Valor de frecuencia mínima.-	2E10.0
	11 - 20	Wmax = Valor de frecuencia máxima.-	

TABLA # 3.2:1 (CONTINUACION)

#LINEA	#COLUMNA	DESCRIPCION	FORMATO
n+6	21 - 23	NOMEG = Número de valores de frecuencia; Nomeg \leq 500.-	4 1 3
	24 - 25	Inutilizado	
	26	KNOW = 0 Interpolación Logarítmica.- = 2 Interpolación Lineal.- = 3 Valores discretos.-	
	27 - 28	Inutilizado.-	
	29	NBODE = 0 Gráfico de Bode. = 1 Sin Bode.-	
	30 - 31	Inutilizado.-	
	32	NYQST = 0 Gráfico Nyquist = 1 Sin Nyquist	
n+7	01 - 10	WFREQ (1) Esta opción se utiliza WFREQ (2) si KNOW=1 etc.....	BE10.0

3.2.2.1: ENTRADA BASICA:

Como se ha mantenido en todos los programas, consiste en la identificación del problema y la descripción de la función racional $G(s)$.- Recordar que tanto el numerador como el denominador puede suministrarse en la forma de factores polinomiales "F" ó como coeficientes polinomiales "P"; además, debe tenerse en cuenta que si el modo "P" es seleccionado, el coeficiente del término de grado mayor en los dos polinomios debe ser la unidad.- Para simplificar y clarificar este concepto en la tabla # 3.2:1, se consideró el polinomio del numerador $A(s)$ en el modo de coeficientes polinomiales "P", y el polinomio del denominador $B(s)$ en el modo de factores polinomiales "F".-

3.2.2.2: OPCIONES :

Se la utiliza para seleccionar cuál de los modos de valores de frecuencia se van ingresar, así como también para indicar cuál de los dos gráficos serán utilizados.-

El valor de KNOW, en la columna # 26 se utiliza para seleccionar que tipo de rango de frecuencia va a usarse.- Si KNOW = 0 los valores extremos de frecuencia se leerán en los dos campos de 10 columnas, y la interpolación logarítmica se usa para generar valores entre esos extremos; el número total de frecuencias a utilizarse se lo indica en la variable NOME6.-

Para KNOW = 2, el mismo procedimiento se utiliza excepto en que la interpolación lineal de

los valores de frecuencia se utiliza antes que la interpolación logarítmica .-

Cuando $KNOW = 1$, el programa leerá los valores de frecuencia de $NOMEG$ en las siguientes filas.- Tener en cuenta que la variable $NOMEG$ será menor o igual a quinientos.-

Las variables $NBODE$ y $NYQST$ se las utiliza para indicar cuál de los gráficos se desea en nuestra respuesta de frecuencia.-

Si $KNOW = 0$ los dos gráficos serán impresos como respuesta de frecuencia; en cambio si $KNOW = 1$, no se obtendrá ningún gráfico; y si $KNOW = 2$, solo se tendrá el gráfico de $NYQUIST$.- Las relaciones entre $NBODE$, $KNOW$ y $NYQST$ se las mostrará en la tabla # 3.2:2.-

TABLA # 3.2:2

UTILIDAD DE LAS GRAFICAS DE RESFRE

KNOW	BODE	NYQST
0	SI	SI
1	NO	SI
2	NO	NO

3.2.2.3: VALORES DE FRECUENCIA:

Esta parte se la utiliza solo cuando KNOW = 1, la cuál indica los valores discretos de frecuencia que serán leídos.-

El número máximo de valores leídos por fila es de ocho, si tuviésemos más de ocho se escribirán los sobrantes en la siguiente fila.

3.2.3: FORMATO DE SALIDA :

La respuesta de salida del programa RESFRE comenzará enlistando la identificación del problema, luego continúa con los coeficientes y las raíces del polinomio de $A(s)$, $B(s)$ y la ganancia K , esto se realiza con el fin de visualizar la información que ingresó para no obtener resultados inadecuados.-

La información real de la respuesta de frecuencia es listada en forma tabular con las siguientes partes:

- 1) Radián-frecuencia: Los valores de ω leídos cuando se usa ($KNOW = 1$), ó calculados por el programa cuando se utilizó ($KNOW = 0$, ó $KNOW = 2$).
- 2) Parte Real: $R(\omega)$; la parte real de $G(j\omega)$.-
- 3) Parte Imaginaria : $X(\omega)$; parte imaginaria de $G(j\omega)$.-

4) Magnitud : $|G(j\omega)|$; Magnitud de $G(j\omega)$.-

5) Fase (Radianes) : $\angle (w)$; El ángulo en radianes de $G(j\omega)$.-

6) Fase (Grados) : $\angle (w)$; El Angulo en grados de $G(j\omega)$.-

Si se requirió un gráfico de Bode haciendo que la variable KNOW = 0; la información que se encuentra en el campo de identificación del problema es repetido en el inicio de una nueva página y las gráficas de magnitud y fase son dadas.-

La gráfica de magnitud se sitúa en una escala log-log mientras que la gráfica de fase será en escala semi-log.- La unidad del ángulo de fase esta dada en grados.-

La subrutina que nos da el gráfico, automáticamente escala la gráfica de magnitud para que el despliegue sea lo más adecuadamente encuadrado; mientras que el

gráfico de fase es fijado graduando la ordenada, la escala de la abscisa se ajustará al juego de la gráfica de magnitud.-

Si fuese requerido ahora el gráfico de NYQUIST haciendo que $NYQST=0$, la información que se encuentra en el campo de la identificación del problema es repetida y luego se procederá a graficar el diagrama polar de NYQUIST.

3.2.4: EJEMPLO :

Aquí se desea determinar la respuesta de frecuencia de la función de transferencia siguiente :

$$G(s) = \frac{10 (s + 3)}{s (s + 2) (s^2 + s + 2)}$$

para el rango de frecuencias de $w = 0.1$ rad/seg a $w = 100$ rad / seg.- Además, se

obtendrá el gráfico de BODE y el NIQUIST.-

Se utilizará 100 valores de frecuencia, logarítmicamente espaciados desde 0.1 a 100.-

La entrada de datos para este ejemplo particular se encuentran en el archivo [RESFRE.DATOS], que se lo muestra en la tabla # 3.2:3.- El polinomio del numerador fue ingresado en forma de factores Polinomiales "F", mientras que el denominador se lo ingresó en forma de coeficientes Polinomiales "P".-

TABLA # 3.2:3

IS DE ENTRADA PARA EJEMPLO PARTICULAR [RESFRE.DATOS]

# LINEA	# COLUMNA							
	1	5	10	15	20	25	30	
1	EJEMPLD CAP # 3.2							
2	10.0							
3	F 1							

TABLA # 3.2:3 (CONTINUACION)

# LINEA	# COLUMNA							
	1	5	10	15	20	25	30	
4	3.0							
5	P 4							
6	0.0		4.0		4.0		3.0	
7	0.1		100.0		100			

3.2.5: LISTADO:

A continuación se presenta el listado de RESFRE, conjuntamente con los archivos de entrada y de salida para el ejemplo particular presentado en 3.2.4.-

REFERENCIAS :

- : K. OGATA. "INGENIERIA DE CONTROL MODERNO", PRENTICE/HALL, ESPAÑA 1982 , PAG # 406.
- : R. DORF. " SISTEMAS DE CONTROL AUTOMATICO ", EEI. 1978, PAG # 227.

PROGRAMA DEL LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES

(LUGERA).

El programa LUGERA se lo utiliza para obtener y graficar los ceros de la ecuación característica en función de K; [1], [2], [3], [4]; definida por :

$$1 + K G(s) = 0$$

donde $G(s)$, es una función de transferencia racional, de la forma:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

De modo que, se puede considerar el problema del lugar geométrico de las raíces obteniendo el polinomio:

$$D_K(s) = D(s) + K N(s)$$

La subrutina LUGERA utiliza las siguientes subrutinas:

RAICRE : Cálcula las raíces de un polinomio.-

COPORA : Cálcula los coeficientes polinomiales mediante las raices.-

RELGRA : Relaciona gráficos.-

3.3.1: TEORIA :

Si los polinomios de $N(s)$ y $D(s)$ son escritos en la forma:

$$N(s) = n_1 + n_2s + \dots + n_m s^{m-1} + s^m,$$

Y,

$$D(s) = d_1 + d_2s + \dots + d_n s^{n-1} + s^n$$

donde $m < n \leq 20$, entonces $D_K(s)$, esta dado por :

$$D_K(s) = (Kn_1 + d_1) + (Kn_2 + d_2) s + \dots + \dots + (K + d_{m+1}) s^m + \dots + s^n,$$

Conforme K varía, $D_K(s)$ es computado y la subrutina RAICRE se utiliza para descomponer en factores el polinomio $D_K(s)$.-

Para variar K , se lo realiza algebraicamente

mediante la progresión lineal, definida por:

$$K \text{ nueva} = 1.15 (K \text{ vieja} + 0.05)$$

Este procedimiento se creó para conducir a un espaciamiento uniforme entre las raíces. El uso de este procedimiento asume que los valores de K son solo positivos.- Si K también toma valores negativos, el valor algebraicamente más pequeño (menos negativo), debe ser usado como valor mínimo.- Por consiguiente, la subrutina comienza con el valor máximo (el menos negativo) volviéndose cada vez más negativo hasta que el límite más bajo sea alcanzado.-

Si valores positivos y negativos son deseados, entonces se corre el programa por separado, una vez solamente con los valores positivos y otra con solo los valores negativos.-

Cuando el rango de K deseado ha sido terminado, la subrutina RELGRA se utiliza para graficar la resultante de la trayectoria de

las raíces.- Este programa también tiene una opción, la cuál presenta un despliegue de solo una porción del gráfico completo del lugar geométrico de las raíces en una región rectangular especificada en el plano s.-

Esta opción que grafica solo una región rectangular del plano s, se la especifica por los parámetros σ_{max} , σ_{min} , W_{max} y W_{min} .- Solamente la porción del lugar geométrico de las raíces, la cuál se indica en esta región por los parámetros mencionados anteriormente, será graficada.- Cuando se selecciona esta opción, la progresión de los valores de ganancia se calcula mediante la ecuación siguiente:

$$K \text{ nueva} = 1.04 (K \text{ vieja} + 0.02)$$

Esta expresión conduce a un número más grande de valores de ganancia y por lo tanto se obtiene un gráfico más refinado.- El uso básico de esta opción es prestar más atención en aquellos intervalos que se esta interesado de la trayectoria completa de las raíces.-

3.3.2: FORMATO DE ENTRADA :

Los datos de entrada para el programa LUGERA están divididos en tres secciones:

- 1) Entrada Básica
- 2) Rango de ganancia
- 3) Opciones.

Se considerará cada una de estas partes por separado.- Para mejor comprensión, se presentará la tabla # 3.3:1, en la que se encuentran los datos de entrada en forma general y completa.-

TABLA # 3.3:1

FORMATO DE ENTRADA PARA LUGERA

#LINEA	#COLUMNA	DESCRIPCION	FORMATO
01	01 - 20	Identificación del problema.	S A 4
02	01	Modo P	A 1
	02 - 03	m = grado de N(s)	I 2
03	01 - 10	n ₁ = Coefic. de N(s).	BE10.0
	11 - 20	n ₂	
	..etc	

TABLA # 3.2:2

(..... continuación)

#LINEA	#COLUMNA	DESCRIPCION	FORMATO
04	01	Modo "F"	A 1
	02 - 03	n = grado de D(s)	I 2
05	01 - 10	Parte real. 1 ^{ra} raiz	8E10.0
	11 - 20	Parte imagin. D(s).	
06	01 - 10	Parte real. 2 ^{da} raiz	8E10.0
	11 - 20	Parte imag. D(s).	
	..etc... etc.....	
Penúl- tima	01 - 10	KMIN = mínimo valor de K.	8E10.0
	11 - 20	KMAX = máximo valor de K.	
Última	01	NOPT = 0 sin la Opción. NOPT = 0 con la Opción.	I 1
	02 - 10	Inutilizada.	9 x
	11 - 20	$\sigma_{\text{mín.}}$	4E10.0
	21 - 30	$\sigma_{\text{máx.}}$	
	31 - 40	$W_{\text{mín.}}$	
	41 - 50	$W_{\text{máx.}}$	

3.3.2.1: Entrada Basica:

La entrada básica contiene la identificación del problema y la descripción del polinomio $N(s)$ y $D(s)$.- Tanto el polinomio del numerador $N(s)$, como el del denominador $D(s)$ pueden ser ingresados en forma de :

- Coeficientes Polinomiales, ó
- Factores Polinomiales.

Debe tenerse en cuenta que, si seleccionamos ingresar los datos en la forma de coeficientes polinomiales, es decir en modo "P", el coeficiente del término de mayor grado se asume la unidad.-

Para simplicidad en la tabla # 3.3:1 se presenta el numerador $N(s)$ en la forma de Coeficientes Polinomiales, es decir en modo "P"; y el denominador en la forma de

factores Polinomiales, modo
"F".-

3.3.2.2: RANGO DE GANANCIA:

La siguiente fila que continúa después de haber ingresado todos los datos concernientes a la entrada básica, situará el rango de ganancia a ser investigado.- Si se desea ganancia negativa, el mínimo y máximo valor deberían ser intercambiados en la fila de datos.- Por consiguiente el valor más negativo será situado en el campo de columnas del # 11 al 20.- Recordar, que si se desea tanto valores de ganancia positivos como negativos, el programa correrá por separado.-

3.3.2.3: OPCION:

La última fila en el archivo de datos [LUGERA.DATOS], se utilizará para indicar si se va o no a usar la opción de examinar una parte del gráfico del lugar geométrico de las raíces en una región rectangular especificada.- Si esta opción se desee se colocará un entero diferente de cero en la columna número uno, prosiguiendo luego con los valores de r_{min} , r_{max} , W_{min} y W_{max} .- Si no deseáramos esta opción la línea quedará en blanco, es decir no se la utilizará.-

3.3.3: FORMATO DE SALIDA :

La respuesta de este programa quedará almacenada en el archivo [LUGERA.LISTADO], el cual comenzará enlistando la identificación del problema, luego el polinomio del numerador así como el del denominador; ambos

son impresos en la forma factorizada y no factorizada, independientemente de la forma que fueron ingresados.- El programa continuará enlistando el valor de ganancia máximo y mínimo, luego imprimirá toda la lista concerniente al valor de ganancia asociado con cada una de las raíces.-

Finalmente la subrutina RELGRA, se utilizará para formar el gráfico de la trayectoria del lugar geométrico de las raíces.- Si una región especificada del plano s , fuese seleccionada para un estudio particular, entonces solo dicha parte de la trayectoria de las raíces será graficada.-

3.3.4: EJEMPLO :

Para ilustrar este programa se desea encontrar el lugar geométrico de las raíces para una función de transferencia de lazo cerrado, dada por :

$$B(s) = \frac{s^2 + 2s + 4}{s(s + 4)(s^2 + 1.4 + 1)}$$

Para el rango de $K = 0$ hasta $K = 30$.- El archivo de datos para este ejemplo particular se lo muestra en la tabla # 3.3:2; en el cuál el polinomio $N(s)$ se ingresó en forma de Coeficientes Polinomiales, modo "P"; mientras que el polinomio del denominador $D(s)$ se lo ingresó en forma de factores Polinomiales, es decir en modo "F".-

TABLA # 3.3:2

DATOS DE ENTRADA PARA EJEMPLO PARTICULAR [LUGERA.DATOS]

# LINEA	# COLUMNA						
	1	5	10	15	20	25	30
01	EJEMPLO CAP # 3.3						
02	P 2						
03	4.0	2.00					
04	F 5						
05	0.0						
06	4.0						
07	6.0						
08	0.70	0.7141					
09	0.00	30.0					
10	(EN BLANCO).						

3.3.5: LISTADO:

A continuación se presenta el listado de LUGERA, conjuntamente con los archivos de entrada y de salida para el ejemplo particular presentado en 3.3.4.-

REFERENCIAS :

- [] : S. SHINNERS "MODERN CONTROL SYSTEM THEORY AND APLICATION", ADDISON-WESLWY, 2^{PA} EDICION, 1978
PAG # 249.
- [] : K. OGATA " INGENIERIA DE CONTROL MODERNO ", PREN-
TICE/HALL, ESPAÑA 1982, PAG # 342.
- [] : R. DORF " SISTEMAS DE CONTROL AUTOMATICO ",
E.E.I, 1978, PAG # 145.
- [] : J. D'AZZO Y C. HOUPIIS "SISTEMAS LINEALES DE CONTROL,
ANALISIS Y DISEÑO, CONVENCIONAL Y MODERNO, PARANINFO,
MADRID, 1977, PAG # 204.

3.4 : PROGRAMA PARA EXPANSION POR FRACCIONES PARCIALES

(EXFPAR)

El programa EXFPAR, determina la expansión por fracciones parciales del cociente de dos polinomios en s.- El polinomio del denominador puede tener raíces reales múltiples además, las raíces complejas son asumidas por el computador como simples, ya que automáticamente será calculada su conjugada.-

3.4.1: TEORIA :

El programa se basa en un algoritmo denominado "PDTTLE"[1].- Donde la función de transferencia racional de interés, está representada por:

$$G(s) = K \frac{A(s)}{B(s)}$$

Aquí, A(s) y B(s) son polinomios definidos matemáticamente por :

$$A(s) = a_1 + a_2 s + \dots + a_m s^{m-1} + s^m.$$

$$B(s) = b_1 + b_2 s + \dots + b_n s^{n-1} + s^n.$$

El grado de n será mayor que m , pero menor ó igual a nueve, esto es :

$$m < n \leq 9$$

Se puede representar el polinomio del denominador, $B(s)$, en forma factorizada, esto es:

$$B(s) = \prod_{i=1}^L (s - s_i)^{m_i}$$

donde L , es el número de raíces distintas de $B(s)$ y m_i es la multiplicidad de las i -ésima raíz de $B(s)$.- La función racional $G(s)$ representada en forma expandida por fracciones parciales, será:

$$G(s) = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^{m_i} \frac{R_{ij}}{(s - s_i)^j}$$

aquí, R_{ij} son los coeficientes del numerador del término de potencia j -ésima asociado con la i -ésima raíz en la expansión por fracciones parciales.- El programa EXFPAR, determinará los valores de los coeficientes

del numerador, es decir los R_{ij} .

Se empieza extrayendo el término de la potencia mayor de cada raíz de modo que:

$$G(s) = \sum_{i=1}^L \frac{R_{i m_i}}{(s - s_i)^{m_i}} + \frac{P(s)}{Q(s)}$$

donde : $R_{i m_i}$, se evalúa mediante la siguiente ecuación:

$$R_{i m_i} = \lim_{s \rightarrow s_i} \frac{K A(s)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^L (s - s_j)^{m_j}}$$

Y,

$$P(s) = K A(s) - \sum_{i=1}^L \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^L R_{i m_i} (s - s_i)^{m_i}$$

$$Q(s) = \prod_{i=1}^L (s - s_i)^{m_i - 1}$$

Si el factor común $\prod_{i=1}^L (s - s_i)$ se divide para $P(s)$ y $Q(s)$, una nueva función racional se generará denominada $G_1(s)$.- Matemáticamente, esto es :

$$G(s) = \sum_{i=1}^L \frac{R_{i m_i}}{(s - s_i)^{m_i}} + G_1(s)$$

El grado del polinomio del numerador de $G_1(s)$ es $n-L$, mientras que las raíces ahora toman una multiplicidad reducida en uno.- Si se tenía solo raíces simples en $G(s)$, esta no generará una nueva función $G_1(s)$.

Este algoritmo se repite hasta que todas las multiplicidades de las raíces sean cero.- El resultado toma la forma de una matriz de coeficientes del numerador de grado L por m_i .- Para una raíz simple solamente los elementos de $R_{i,1}$ serán diferentes de cero.-

Las raíces se asumen idénticas si tanto la parte real como la parte imaginaria no difieren a lo más en 0.005 (cinco milésimas), de lo contrario el computador las deter-

minará como raíces distintas.- Se debe recordar que no pueden haber más de nueve (9) raíces distintas, y, el máximo grado de multiplicidad es nueve (9).

3.4.2: FORMATO DE ENTRADA :

Para ejecutar el programa EXFPAR se tiene que ingresar los datos en el archivo denominado [EXFPAR.DATOS], el cuál contiene la identificación del problema y, la descripción de la función racional $G(s)$.- Como se explicó en la subsección 3.4.1, la función racional consistía de dos polinomios $A(s)$ y $B(s)$, los cuáles son el numerador y denominador de la función racional respectivamente; tanto el polinomio del numerador como el del denominador son ingresados en la forma de factores polinomiales (modo "F"), o en la forma de coeficientes polinomiales (modo "P").- Recordar que si se selecciona el modo "F", el coeficiente del término de mayor grado se asume la unidad.

Para mejor comprensión del formato de entrada general para EXFAPAR, se muestra la tabla # 3.4:1.-

TABLA # 3.4:1
FORMATO DE ENTRADA PARA EXFAPAR

#LINEA	#COLUMNA	DESCRIPCION	FORMATO
01	01 - 20	Identificación	S A 4
02	01 - 10	K = Ganancia	BF10.3
03	01	Modo = P	A 1
	02 - 03	m = Grado de A(s).	I 2
04	01 - 10	a ₁ = Coeficientes A(s)	BF10.3
	11 - 20	a ₂	
	..etc..etc.....	
05	01 - 10	Modo = F	I 1
	02 - 03	n = Grado de B(s).	I 2
06	01 - 10	parte real. 1ª raiz	BF10.0
	11 - 20	parte imag. de B(s).	
07	01 - 10	parte real 2ª raiz	BF10.0
	11 - 20	parte imag. de B(s).	
	..etc..etc.....	

En esta tabla el polinomio del numerador $A(s)$, se lo muestra en la forma de coeficientes polinomiales (modo "P") y el polinomio del denominador $B(s)$, se lo muestra en la forma de factores polinomiales (modo "F").- Es importante observar que las raíces múltiples son ingresadas una por una cada vez que aparecen en nuestra función racional $G(s)$.

3.4.3: FORMATO DE SALIDA :

El listado del programa EXFPAR se lo almacenará en el archivo [EXFPAR.LISTADO], en el cual se tiene primeramente la identificación del problema y los polinomios de la función racional $G(s)$, esto lo realiza a fin de visualizar la información que fué ingresada por el usuario para no obtener resultados no requeridos.- Tanto el polinomio del numerador $A(s)$, como el del denominador $B(s)$ son impresos en forma factorizada y no factorizada independientemente de la manera que fueron ingresados en el archivo

de datos de entrada.- Si las raíces del denominador son de grado múltiple, estas son enlistadas una sola vez, pero además se imprimirá junto a ellas la multiplicidad de cada raíz.

Se continúa enlistando el arreglo de los coeficientes del numerador de la expansión por fracciones parciales.- Los coeficientes del numerador son enlistados de la misma manera como las raíces del denominador.-

El primer coeficiente en una fila es el coeficiente del término de primer grado, el segundo coeficiente será el coeficiente del término de segundo grado, y así sucesivamente.

3.4.4: EJEMPLO :

Para probar el programa EXFPAR, se desea determinar la expansión por fracciones parciales de la función :

$$G(s) = \frac{655 (s^2 + 37s + 93)}{(s+2) [(s+3)^2 + 3^2] [(s+1)^2 + 2^2] (s+8)^2}$$

En este problema particular se tiene que el denominador contiene una raíz de segundo orden, un par de raíces complejas conjugadas y una raíz simple.- Para ilustrar la forma de ingresar los datos para este ejemplo particular se muestra la tabla # 3.4:2.

TABLA # 3.4:2

DATOS DE ENTRADA PARA EJEMPLO PARTICULAR [EXFPAR.DATOS]

# LINEA	# COLUMNA						
	1	5	10	15	20	25	30
01	EJEMPLO CAP # 3.4						
02	655.0						
03	P 2						
04	93.0		37.0				
05	F 7						
06	2.0						
07	8.0						
08	8.0						
09	3.0		3.0				
10	1.0		2.0				

Interpretando nuestro archivo [EXFPAR.-LISTADO], para este ejemplo particular se obtiene la expresión deseada en fracciones parciales de $G(s)$, esta es:

$$\begin{aligned}
 G(s) = & \frac{4.8322}{s + 8} + \frac{8.4207}{(s + 8)^2} + \\
 & + \frac{3.4203 + 7.2178j}{s + 3 + 3j} + \frac{3.4203 - 7.2178j}{s + 3 - 3j} \\
 & + \frac{8.36944}{s + 2} + \\
 & + \frac{10.0212 + 1.03732j}{s + 1 + 2j} + \frac{10.0212 - 1.03732j}{s + 1 - 2j}.
 \end{aligned}$$

3.4.5: LISTADO:

A continuación se presenta el listado de EXFPAR, conjuntamente con los archivos de entrada y de salida para el ejemplo particular presentado en 3.4.4.-

R E F E R E N C I A S :

- [1] : POTTLE C. " ON THE PARTIAL FRACTION EXPANSION OF A RATIONAL FUNCTION WITH MULTIPLE POLES BY DIGITAL COMPUTER ", IEEE TRANS. CIRCUIT THEORY, VOL CT-11, PAG # 161 A 162, MARZO DE 1964.

C A P I T U L O IV
PROBLEMAS DE DISEÑO

4.1 : INTRODUCCION :

En este capítulo se considerará un problema de diseño, y varios de análisis, los mismos que ilustran algunas maneras de utilizar los programas presentados en los dos capítulos anteriores, para analizar y diseñar sistemas de control lineal.

4.2: PROBLEMA QUE SE RESUELVE MEDIANTE VARIABLES DE ESTADO

4.2.1: DESCRIPCION:

En la sección 4.2 se presenta un problema que se resuelve mediante variables de estado, utilizando los programas MATBAS, RETIEM, GRETI, REAVAR, INDOBS y DIOBES para diseñar la dinámica de un submarino en forma simplificada, en el cuál se

C A P I T U L O I V

PROBLEMAS DE DISEÑO

4.1 : INTRODUCCION :

En este capítulo se considerará un problema de diseño, y varios de análisis, los mismos que ilustran algunas maneras de utilizar los programas presentados en los dos capítulos anteriores, para analizar y diseñar sistemas de control lineal.

4.2: PROBLEMA QUE SE RESUELVE MEDIANTE VARIABLES DE ESTADO

4.2.1: DESCRIPCION:

En la sección 4.2 se presenta un problema que se resuelve mediante variables de estado, utilizando los programas MATBAS, RETIEM, GRESTI, REAVAR, INDOBS y DIOBES para diseñar la dinámica de un submarino en forma simplificada, en el cuál se

Para simplificar las ecuaciones supondremos:

i) $\theta =$ es un ángulo pequeño,

ii) $v =$ velocidad es constante e igual a 25 pies/segundo.

Las variables de estado del submarino, considerando únicamente el control vertical son:

$$x_1 = \theta$$

$$x_2 = d\theta/dt.$$

$$x_3 = \alpha \text{ (ángulo de ataque)}.$$

Por esto, la ecuación diferencial vectorial de estado en forma simplificada para este sistema, cuando el submarino tiene una casco de albacore es:

$$\dot{x}(t) = \underline{A} x(t) + \underline{b} u(t)$$

$$y(t) = \underline{c} x(t).$$

donde:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ -0.0071 & -0.1110 & 0.1200 \\ 0.0000 & 0.0700 & -0.3000 \end{bmatrix}$$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ -0.0950 \\ 0.0720 \end{bmatrix}$$

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.000 & 0.000 \end{bmatrix}$$

$$u(t) = \delta_w(t)$$

Para condiciones iniciales iguales a cero, se desea determinar :

- 1) El Polinomio Característico $\Delta(s) = 0$,
- 2) Los Valores Característicos λ_i .
- 3) La Matriz Solución $\underline{\Phi}(s)$.
- 4) La Matriz Transición de Estado $\underline{\Phi}(t)$.
- 5) La Respuesta del Sistema para una orden escalón en el alerón de popa de 0.285

grados .

- 6) La Gráfica de la respuesta $y(t)$, y del error $e(t)$.
- 7) Diseñe un compensador en la trayectoria de realimentación.-

4.2.3: METODO DE SOLUCION:

Para realizar el cálculo de:

- 1) El Polinomio Característico $\Delta(s) = 0$,
- 2) Los Valores Característicos λ_i .
- 3) La Matriz Solución $\underline{Q}(s)$, y
- 4) La Matriz Transición de Estado $\underline{Q}(t)$.

Tabla # 4.2:1

DATOS DE ENTRADA DE LA DINAMICA
DE UN SUBMARINO PARA [MATBAS.DATOS2]

# de línea	# de columna						
	1	5	10	15	20	25	30
1	DINAMICA SUBMARINO			3			
2	0.0	1.0		0.0			
3	-0.0071	-0.111		0.12			
4	0.0	0.07		-0.3			
6	(en blanco)						

hago uso del programa MATBAS; luego se necesita ingresar los datos en nuestro archivo de datos denominado [MATBAS.DATOS2].- La forma en que estos datos son ingresados en el archivo [MATBAS.DATOS2], se lo muestra en la tabla # 4.2:1.

Al ejecutar el programa MATBAS este generará un archivo de salida denominado [MATBAS.-LISTADO2].- En el archivo de salida se obtuvo que:

1) Los Valores Propios son:

$$\lambda_1 = -0.3343$$

$$\lambda_2 = -0.0383 + 0.0700 j$$

$$\lambda_3 = -0.0383 - 0.0700 j$$

2) El Polinomio Característico es:

$$\Delta(s) = 0.00213 + 0.0320 s + 0.411 s^2 + s^3$$

3) Los correspondientes elementos de la Matriz Solución son:

$$\bar{q}_{11}(s) = \frac{0.0249 + 0.411 s + s^2}{0.0021 + 0.0320 s + 0.411 s^2}$$

$$\bar{q}_{12}(s) = \dots\dots\dots, \text{ etc.}$$

4) Y, los correspondientes elementos de la Matriz Transición de Estado son:

$$\begin{aligned} \bar{q}_{11}(t) = & -0.0078 e^{-0.3843t} \\ & + 1.0078 e^{-0.383t} * \cos 0.070 t \\ & + 0.5141 e^{-0.383t} * \text{sen } 0.070 t. \end{aligned}$$

$$\bar{q}_{12}(t) = \dots\dots\dots, \text{ etc.}$$

Ahora, para determinar la respuesta del sistema para una orden de escalón de 0.285, se utiliza el programa RETIEM.

Antes de generar el archivo de datos de entrada para RETIEM es importante tener presente que:

$$k^r = 0, \text{ y}$$

para obtener un entrada $u(t) = 0.285$ escalón

se tiene que hacer que $K = 0.285$ y,

$$r(t) = 1.0, \text{ luego}$$

$$R(s) = 1.0 / s.$$

TABLA # 4.2:2

DATOS DE ENTRADA DE LA DINAMICA
DE SUBMARINO PARA [RETIEM.DATOS2]

# de linea	# de columna						
	1	5	10	15	20	25	30
01	DINAMICA SUBMARINO			3			
02	0.0		1.0		0.0		
03	-0.0071		-0.111		0.12		
04	0.0		0.07		-0.3		
05	0.0		-0.095		0.072		
06	1.0		0.0		0.0		
07	0.0		0.0		0.0		
08	0.285						
09	0.0		0.0		0.0		
10	1.0						
11	P 0						
12	1.0						
13	F 1						
14	0.0						

Para este problema, nuestro archivo de entrada para RETIEM se le denominará [RETIEM.DATOS2].- La forma en que los datos de entrada son ingresados en el archivo [RETIEM.DATOS2], se lo muestra en la tabla # 4.2:2.

Al ejecutar el programa RETIEM se generará el archivo de salida denominado [RETIEM.-LISTADO2]; en este archivo de salida se obtuvo que:

$$\begin{aligned}y(t) = & - 0.10965 e^{-0.33434 t} \\ & + 2.76697 e^{-0.03832 t} * \cos 0.0700 t. \\ & + 0.99111 e^{-0.03832 t} * \text{sen } 0.0700 t. \\ & - 2.657331.\end{aligned}$$

Luego, para determinar la gráfica de la respuesta en el tiempo $y(t)$ y del error $e(t)$, se utiliza el programa GRETI; entonces se necesita ingresar los datos de entrada para GRETI en el archivo de datos denominado [GRETI.DATOS2].- La forma en que estos datos son ingresados en el archivo [GRETI.DATOS2], se lo muestra en la tabla # 4.2:3.

TABLA # 4.2:3
 DATOS DE ENTRADA DE LA DINAMICA
 DE SUBMARINO PARA [GRESTI.DATOS2]

NUMERO DE FILAS	NUMERO DE COLUMNAS			
	1	10	20	30
01	DINAMICA SUBMARINO			3
02	0.0	1.0	0.0	
03	-0.0071	-0.111	0.12	
04	0.0	0.07	-0.3	
05	0.0	-0.095	0.072	
06	1.0	0.0	0.0	
07	0.0	0.0	0.0	
08	0.285			
09	0.0	0.0	0.0	
10	-2.0	7.0	0.01	10.0
11		E R Y		

Al ejecutar el programa GRESTI se generará un archivo de salida denominado [GRESTI.-LISTADO2]; en este archivo se muestran los gráficos (ver subcapítulo 4.2.4).

Hasta este momento se han realizado los cálculos de análisis habiendo determinado los

requerimientos del 1) al 6) del subcapítulo 4.2.2, faltaría solamente la parte de diseño concerniente al requerimiento 7) de dicha subsección.

El procedimiento completo del diseño del compensador de realimentación, será:

- 1) Se selecciona un $y^*(s) / r(s)$ y se resuelve para k y k_c , mediante el uso del programa REAVAR; para este efecto se escogió un par de polos conjugados dominantes en $1.5 + 1.5j$ y otro en el eje sigma $\sigma = -0.5$.

Con estos valores procedo a ingresar los datos de entrada para el programa REAVAR en el archivo denominado [REAVAR.DATOS2].- La forma en que estos datos son ingresados en el archivo [MATBAS.DATOS2], se lo muestra en la tabla # 4.2:4.

Al ejecutar el programa REAVAR este generará un archivo de salida denominado [REAVAR.LISTADO2].

TABLA # 4.2:4
 DATOS DE ENTRADA DE LA DINAMICA
 DE SUBMARINO PARA [REAVAR.DATOS2]

# línea	# columna						
	1	5	10	15	20	25	30
01	DINAMICA SUBMARINO - 3						
02	0.00		1.0			0.0	
03	0.0071		-0.111			0.12	
04	0.0		0.07			-0.3	
05	0.0		-0.095			0.072	
06	1.0		0.0			0.0	
07	(EN BLANCO)						
08	F 3						
09	0.5						
10	1.5		1.5				
11	(EN BLANCO)						

En el archivo de salida se determinó que:

$$K = - 113.2858 , y$$

$$k^T = [0.92273974 \quad -1.96618044 \quad -2.9671993 \quad]$$

2) Se determina el índice de observabilidad mediante el uso del programa INDOBS; luego se necesita ingresar los datos en nuestro archivo de datos denominado [INDOBS.-DATOS2].- La forma en que estos datos son ingresados en el archivo [INDOBS.-DATOS2], se lo muestra en la tabla # 4.2:5.

TABLA # 4.2:5

DATOS DE ENTRADA PARA DE LA DINAMICA DE SUBMARINO PARA [INDOBS.DATOS].

# línea	# columna						
	1	5	10	15	20	25	30
1	DINAMICA SUBMARINO					3	1
2	0.0		1.0			0.0	
3	-0.0071		-0.111			0.12	
4	0.0		0.07			-0.3	
5	1.0		0.0			0.0	

Al ejecutar el programa INDOBS este generará un archivo de salida denominado [INDOBS.LISTADO2]; en el mismo se obtuvo que el índice de observabilidad $y = 3$.-

3) Ahora, se selecciona un E cumpliendo las siguientes reglas:

i) Los valores característicos de E no deben ser iguales a los valores característicos de A .-

ii) Que la dimensión del vector E debe ser como máximo de $y - 1$.

Bajo estas reglas, se determino:

i) $\lambda_F = 1.0$

ii) Dimensión será de uno.

4) Con los valores de k^T y E , se está listo para obtener el compensador necesario mediante el programa DIOBES.--

La forma en que estos datos son ingresados en el archivo [MATBAS.DATOS2], se lo muestra en la tabla # 4.2:6.

Al ejecutar el programa DIOBES, éste generará el archivo de salida denominado [INDOBS.-

LISTADO2]; en el mismo se obtuvo que el sistema final está dado por :

$$z' = -0.1 z + \begin{bmatrix} 0.0117 & -0.2354 \end{bmatrix} y + 0.186u$$

$$u = -113.2858 r - \begin{bmatrix} -0.94427 & +2.9671 \end{bmatrix} y + z$$

TABLA # 4.2:6

DATOS DE ENTRADA DE LA DINAMICA
DE SUBMARINO PARA [DIOBES.DATOS2]

# linea	# columna						
	1	5	10	15	20	25	30
01	DINAMICA SUBAMARINO			3	2	1	
02	0.0		1.0			0.0	
03	-0.0071		-0.111			0.12	
04	0.0		0.07			-0.3	
05	0.0		-0.095			0.072	
06	1.0		0.0			0.0	
07	0.09227		-1.9618			-2.9671	
08	P						
09	1.0						

4.2.4: LISTADO:

A continuación se presenta el listado de los siguientes archivos:

- [MATBAS.DATOS2]
- [MATBAS.LISTADO2]
- [RETIEM.DATOS2]
- [RETIEM.LISTADO2]
- [GRESTI.DATOS2]
- [GRESTI.LISTADO2]
- [REAVAR.DATOS2]
- [REAVAR.LISTADO2]
- [INDOBS.DATOS2]
- [INDOBS.LISTADO2]
- [DIOBES.DATOS2]
- [DIOBES.LISTADO2]

REFERENCIAS:

- [1]: C. HOFFMAN " TWO DETAILED PROBLEMS AND THEIR SOLUTION EMPLOYING DISCRETE STATE METHODS ", 1965, ILLINOIS.

3: PROBLEMA A RESOLVER MEDIANTE FUNCION DE TRANSFERENCIA

4.3.1: DESCRIPCION:

En este subcapítulo se ilustrará el uso de los programas RESFRE y LUGERA en la aplicación particularmente de la Teoría de Control Realimentado, que es el de mantener el movimiento de un barco a lo largo de una trayectoria recta.-

4.3.2: DEFINICION DEL PROBLEMA:

El timón automático de un barco sería una aplicación particularmente útil de la Teoría de Control de Realimentación.- En el caso de un barreminas, por ejemplo, es importante mantener el movimiento del barco a lo largo de una trayectoria recta.- Un sistema automático es capaz de mantener un error mucho más pequeño en la dirección deseada que la que pueda lograr el timonel quien hace correcciones en intervalos, infrecuentes.- Se ha desarrollado un modelo matemático del sistema del timón de un barreminas para un

barco que se mueve con velocidad constante y desviaciones pequeñas respecto de la trayectoria deseada [1].-

Para un barreminas de 180 pies de longitud, que se mueve a 13 pies/sec, la función de transferencia es:

$$G(s) = \frac{E(s)}{\delta(s)} = \frac{0.164 (s + 0.2) (-s + 0.32)}{s^2 (s + 0.25) (s - 0.009)}$$

donde:

$E(s)$: Es la transformada de Laplace para la desviación del barco respecto a la dirección deseada.-

$\delta(s)$: Es la transformada de Laplace para el ángulo de deflexión del timón.

Determinar:

i) La respuesta de frecuencia del barco:

$$\frac{E(j\omega)}{\delta(j\omega)} = ?$$

en coordenadas de bode.-

- ii) Obtener y graficar los ceros de la ecuación característica en función de k.-

4.3.3: METODO DE SOLUCION:

Para determinar la respuesta de frecuencia de la función de transferencia del barco, se utilizará el programa RESFRE.-

El programa RESFRE presentará la respuesta de frecuencia en forma tabular y luego graficará la misma, en coordenadas de Bode.-

La función de transferencia del barco es la siguiente:

$$G(s) = \frac{-0.164 (s + 0.2) (s - 0.32)}{s^2 (s + 0.25) (s - 0.009)}$$

para el rango de frecuencia de $w = 0.0001$ rad/seg. a $w = 10.0$ rad/seg.- Se utilizarán 200 valores de frecuencia logarítmicamente espaciados desde 0.0001 a 10.0 rad/seg.

Los datos de entrada para la función de transferencia del barco para RESFRE se encuentran en el archivo denominado [RESFRE.-DATOS2], que para mayor comprensión se lo muestra en la tabla # 4.3:1.

TABLA # 4.3:1

DATOS DE ENTRADA DEL BARCO PARA [RESFRE.DATOS2]

# LINEA	# COLUMNA						
	1	5	10	15	20	25	30
1	RESP. DE FREC BARCO						
2	-0.164						
3	F 2						
4	0.2						
5	-0.32						
6	F 4						
7	0.0						
8	0.0						
9	0.25						
10	-0.009						
11	0.0001		10.0		200		1

En esta tabla, tanto el polinomio del numerador como el del denominador fueron ingresados en forma de Factores Polinomiales " F ".-

Al ejecutar el programa RESFRE este generará un archivo de salida denominado [RESFRE.LISTADO2]; en el mismo se muestra la respuesta de frecuencia del barco(revisar 4.3.5).

Ahora, para obtener y graficar los ceros de la ecuación característica en función de K, se utiliza el programa LUGERA.-

El rango que debe variar K se escogió en $K = 0$ a $K = 50$.- Los datos de entrada para la función de transferencia del barco para LUGERA se encuentran en el archivo de entrada denominado [LUGERA.-DATOS2], que para mayor comprensión se lo muestra en la tabla # 4.3:2.- Tanto el polinomio de numerador como el del denominador fueron ingresados en forma de Factores Polinomiales " F ".

TABLA # 4.3:2

DATOS DE ENTRADA DEL BARCO PARA [LUGERA.DATOS2]

# LINEA	# COLUMNA						
	1	5	10	15	20	25	30
01	TRAY. RAIC. BARCO						
02	F 2						
03	0.20						
04	-0.32						
05	F 4						
06	0.0						
07	0.0						
08	0.25						
09	-0.009						
10	0.00		20.0				
11	9		-2.0		-4.5		4.5

Al ejecutar el programa LUGERA este generará un archivo de salida denominado [LUGERA.-LISTADO2]; en el mismo se muestra la trayectoria de las raices.-

4.3.4: LISTADO:

A continuación se presenta el listado de los archivos:

- [RESFRE.DATDS2]
- [RESFRE.LISTADO2]
- [LUGERA.DATDS2]
- [LUGERA.LISTADO2]

REFERENCIAS :

- [1] : J. GODCLOWSKY Y A. GELB, " DINAMICS OF AN AUTOMATIC SHIP STEERING SYSTEM ", PROC. OF THE JOINT AUTOMATIC CONTROL CONFERENCE UNIVERSITY OF WASHINGTON, 1966
PAG # 294 - 304.
PAG # 249.
- [2] : K. OGATA " INGENIERIA DE CONTROL MODERNO ", PRENTICE/HALL, ESPAÑA 1982, PAG # 342.
- [3] : R. DORF " SISTEMAS DE CONTROL AUTOMATICO ", E.E.I, 1978, PAG # 145.
- [4] : J. D'AZZO Y C. HOUPIS "SISTEMAS LINEALES DE CONTROL, ANALISIS Y DISEÑO, CONVENCIONAL Y MODERNO, PARANINFO, MADRID, 1977, PAG # 204.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES :

desarrollo de esta tesis hemos llegado a las siguientes conclusiones :

Los programas fueron realizados con el fin de permitir combinar algunos de ellos haciendo más versátil el uso de los mismos.

Los métodos utilizados en cada uno de los cálculos matemáticos resultaron ser de fácil aplicación y bastante buenos en exactitud.

En base a este trabajo los problemas de diseño pueden ser primeramente evaluados para observar su verdadero comportamiento y estar concientes de como realmente responde el sistema, para al final poder implementarlo luego de haber obtenido un diseño óptimo que cumpla todas las especificaciones originales.

Y a las recomendaciones siguientes:

Se debe intentar generar un paquete de programas secuencial al realizado en este proyecto, conocido con el nombre de mapas, con el fin de manejar los datos de manera que sea todavía más sencillo para un usuario

que no posea conocimientos básicos de computación.- En estos mapas se deben presentar un menú de opciones y cálculos ó análisis que se desean realizar.-

- El método planteado para resolver la matriz transición de estado no considera valores propios repetidos por lo tanto se puede realizar un estudio cuando estos son repetidos o complejos.-

- Se puede realizar en base de este soporte un programa de estudio de sensibilidad a la variación de los polos de lazo cerrado de un sistema lineal realimentado.- O, también realizar un programa para desacoplamiento de un sistema de múltiples entradas y múltiple salidas.

B I B L I O G R A F I A

1. B. D. O. ANDERSON Y J. B. MOORE, " LINEAR OPTIMAL CONTROL ", PRENTICE-HALL, INC ,1971.
2. CANALES ROBERTO R. Y RENATO BARRERA R, " ANALISIS Y DISEÑO DE SISTEMAS DINAMICOS Y CONTROL AUTOMATICO "., LIMUSA, 1980.
3. J. D'AZZO Y HOUPIS, " SISTEMAS LINEALES DE CONTROL, ANALISIS Y DISEÑO, CONVENCIONAL Y MODERNO ", PARANINFO, 1977.
4. R. DORF, " SISTEMAS DE CONTROL AUTOMATICO ", E.U.A. EEEI , 1978.
5. ELGERB, OLLEY, " LINEAR CONTROL THEORY ".
6. R. HAMMING W., " NUMERICAL METHODS FOR SCIENTISTS AND ENGINEERS ", MCGRAW-HILL, 1962.
7. H. HARRINSON Y G. BOLLINGER, " CONTROLES AUTOMATICOS ", TRILLAS, MEXICO, 1978.-
8. L. HUELSMAN, " CIRCUITS, MATRICES AND LINEAR VECTOR SPACES ", PRENTICE-HALL, 1972.
9. L. HUELSMAN, " BASIC CIRCUIT THEORY WITH DIGITAL COMPUTACION ", PRENTICE-HALL, 1972.

10. IBM., " MANUAL DE PROGRAMACION FORTRAN "
11. IBM., " MANUAL C.M.S. PARA IBM 4341.
12. E. KREISZIG., " ADVANCED ENGINEERS MATHEMATICS ",
THIRD EDITION, WILLEY, 1972.
13. D. D. McCRAKEN, " METODOS NUMERICOS Y PROGRAMACION
FORTRAN ", LIMUSA, MEXICO, 1979.
14. J. MELSA., " COMPUTER PROGRAMS FOR COMPUTATIONAL
ASSISTANCE ", MAGH, 1970.
15. W. L. OBREGON, " MODERN CONTROL SYSTEM "
16. K. OGATA., " INGENIERIA DE CONTROL MODERNO ".,
PRENTICE-HALL, ESPAÑA , 1982.
17. H. H. ROSENBROOK, " COMPUTER-AIDED CONTROL SYSTEM
DESIGN ", ACADEMIC PRESS , 1974.
18. RULE, " PROGRAMACION CON FORTRAN IV "
LIMUSA, MEXICO, 1970.
19. D. SCHULTZ, " STATE FUNTIONS AND LINEAR CONTROL
SYSTEMS ", McGRAW-HILL, 1967.
20. STANLEY M. SHINNERS, " MODERN CONTROL SYSTEM THEORY
AND APLICATION ", ADDISON-WESLEY, 2DA. EDICION, 1978.
21. JOHN TRUXAL, " SISTEMAS DE CONTROL AUTOMATICOS REA-
LIMENTADOS ",
22. W. A. WOLDVICH, " LINEAR MULTIVARIABLE SYSTEMS ",
SPRINGER VERLAG, NEW-YORK, 1974.
23. ZADEH Y DESOER, " LINEAR SYSTEM THEORY ", McGRAW-HILL,
1963.

24. ZADEH Y LOFTY, " LINEAR SYSTEM THEORY, THE STATE SPACE
APPROACH, MCGRAW-HILL, 1963.