

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL



FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

PROYECTO DE GRADUACIÓN

PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE:

**“MAGISTER EN EDUCACIÓN CON MENCIÓN ENSEÑANZA
DE LA MATEMÁTICA”**

TEMA

**“DISEÑO DE UNA METODOLOGÍA PARA LA GRAFICACIÓN DE
FUNCIONES RACIONALES A TRAVÉS DE TALLERES”**

AUTORES

**Dr. ANÍBAL MATTEUCCI LÓPEZ
Dr. VICTOR MANUEL BARROS**

Guayaquil - Ecuador

AÑO

2013

DEDICATORIA

A mi esposa, toda ella, gracias por su comprensión, cariño y lealtad, sigue siendo mi inspiración de amor...

*... ,a mis hijos que me dan el impulso para seguir viviendo, sea este un ejemplo a seguir avanzando en su progreso espiritual. **Aníbal***

A mi madre con mucho respeto, amor y orgullo dedico este trabajo por sus constantes desvelos y abnegación....

*... para Melba y para mi futuro hijo que son fuente de inspiración constante al concluir una de mis aspiraciones. **Víctor Manuel.***

AGRADECIMIENTO

Nuestro agradecimiento total a los profesores del Instituto de Ciencias Naturales y Matemáticas por sus sabias enseñanzas, orientaciones y don de gentes que supieron enrumbarnos con su estímulo a la consecución de esta maestría y de manera especial para nuestro director de tesis Ing. Marco Tulio Mejía.

De la misma manera a los directivos, profesores y estudiantes de los Colegios Espíritu Santo y Tnte. Hugo Ortiz por permitirnos realizar este trabajo y culminarlo eficazmente.

Aníbal y Víctor



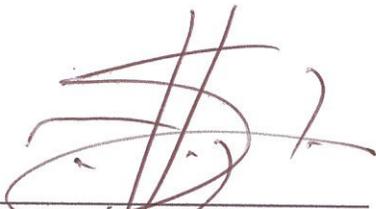
DECLARACIÓN EXPRESA

La responsabilidad por los hechos y doctrinas expuestas en este Proyecto de Graduación, nos corresponden exclusivamente; el patrimonio intelectual del mismo, corresponde exclusivamente a la **Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas, Departamento de Matemáticas** de la Escuela Superior Politécnica del Litoral.

Dr. Aníbal Matteucci López

Dr. Víctor Manuel Barros

TRIBUNAL DE GRADUACIÓN



MS.c Pablo Alvarez Zamora
PRESIDENTE DEL TRIBUNAL

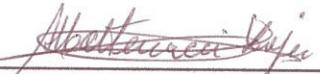


MSc Marco T. Mejía Coronel
TUTOR DEL PROYECTO



MS.c Jenny Veregas Gallo
VOCAL DEL TRIBUNAL

AUTORES DEL PROYECTO DE GRADUACIÓN


Dr. Aníbal Matteucci López


Dr. Víctor Manuel Barros

Tabla de Contenidos

	PÁG.
Portada.....	i
Dedicatoria.....	ii
Agradecimiento.....	iii
Declaración Expresa	iv
Firma del Tribunal de Graduación.....	v
Firma de los Autores del Proyecto de Graduación.....	vi
Índice general.....	vii
Índice de tablas.....	x
Resumen.....	xi
 CAPÍTULO I	
1.1 Planteamiento del problema.....	1
1.2 Formulación del problema.....	3
1.2.1 Objetivos.....	3
1.3 Justificación.....	4
Educación Ranking Mundial.....	5
 CAPÍTULO II	
2.1 Técnicas de Aprendizaje Activo en talleres de Aprendizaje cooperativo.....	7
2.1.1 Clases Expositivas.....	7
2.2 Problemas de las clases expositivas.....	9
2.3 El taller o grupos de estudio.....	11
2.3.1 Concepto de taller.....	12
2.3.2 El pasado en el presente del taller.....	14
2.3.3 Utilidad y necesidad del educativo.....	14
2.3.4 Objetivo general del taller educativo.....	16
2.3.5 Principios pedagógicos del taller.....	17
2.3.6 El rol del docente y del estudiante.....	19
2.4 Técnicas de aprendizaje cooperativo.....	20
2.4.1 Estructura tradicional VS aprendizaje cooperativo.....	21

2.5	Las funciones Racionales.....	23
CAPÍTULO III		
3	MATERIALES Y MÉTODOS UTILIZADOS.....	24
3.1	Diseño de la investigación	24
3.2	Tipos de investigación.....	25
3.3	Población y muestra.....	26
3.4	Procedimiento de la investigación.....	27
3.5	Métodos y técnicas de la investigación.....	27
3.6	Instrumentos de la investigación.....	28
3.7	Tratamiento y análisis.....	29
3.8	Recursos	30
CAPÍTULO IV		
4	LA PROPUESTA.....	31
4.1	Taller metodológico 1 en el aula de clases.....	32
4.2	Taller metodológico 1 de fijación para casa	36
4.3	Taller metodológico 2 Ecuaciones racionales.....	45
4.4	Taller metodológico 2 de fijación para casa	49
4.5	Taller metodológico 3 Inecuaciones	45
4.6	Taller metodológico 3 de fijación para casa	50
4.7	Taller metodológico 4 Técnicas de Graficación... ..	52
4.8	Taller metodológico 5 Técnicas de Graficación	58
4.9	Taller metodológico 6 Dominio de la funciones Racionales.....	64
4.10	Taller metodológico 7 Técnicas de Graficación.....	68
4.11	Taller metodológico 8 Asíntotas de las Funciones Racionales.....	73
4.12	Taller metodológico 9 Gráficos e intervalos de monotonía.....	77
4.13	Taller metodológico 10 Aplicaciones de las funciones racionales.....	81
CAPÍTULO V		
5	ANÁLISIS DE DATOS.....	86
	Regla de decisión para varianzas iguales.....	88
5.1	Diferenciación de medias del COMIL-2.....	88
5.2	Prueba de hipótesis para las varianzas del COMIL-2.....	89
5.3	Prueba de hipótesis para las diferencias de medias del COMIL-2.....	90
5.4	Diferenciación de medias del CES.....	92
5.5	Prueba de hipótesis para las varianzas del CES.....	92
5.6	Prueba de hipótesis para las diferencias de medias del CES.....	93

5.7 Prueba de hipótesis para la diferenciación de medias de las notas De los dos grupos de estudiantes de los dos colegios.....	94
5.8 Prueba de hipótesis para la diferenciación de medias de las notas De los diez talleres que se aplicaron a los estudiantes del grupo dos de los dos colegios.....	96
5.9 Diferencia de medias para los talleres	98
5.9.1 Talleres con varianzas iguales.....	99
5.9.2 Talleres con varianzas diferentes.....	100
5.10 Prueba de hipótesis de notas de las lecciones escritas de los estudiantes del grupo dos de los dos colegios.....	102
5.10.1 Diferencia de medias para la lección dos	110
Lecciones con varianzas diferentes.....	111
5.11 Conclusiones del análisis de las diferencias de medias.....	115
CONCLUSIONES.....	117
RECOMENDACIONES.....	119
BIBLIOGRAFÍA.....	120
ANEXOS.....	121

INDICE DE TABLAS

Tabla 2.4.1 Estructura tradicional VS aprendizaje cooperativo.....	21
Tabla 3.8 Ingresos y egresos.....	30
Tabla 4.1 Rúbrica para evaluación de taller 1 en aula.....	31
Tabla 4.2 Rúbrica para evaluación de taller 1 para casa.....	37
Tabla 4.3 Rúbrica para evaluación de taller 2 en aula.....	41
Tabla 4.4 Rúbrica para evaluación de taller 2 para casa.....	42
Tabla 4.5 Rúbrica para evaluación de taller 3 en aula.....	47
Tabla 4.6 Rúbrica para evaluación de taller 3 para casa	50
Tabla 4.7 Rúbrica para evaluación de taller 4 en aula.....	58
Tabla 4.8 Rúbrica para evaluación de taller 5	64
Tabla 4.9 Rúbrica para evaluación de taller 6	67
Tabla 4.10 Rúbrica para evaluación de taller 7.....	72
Tabla 4.11 Rúbrica para evaluación de taller 8.....	77
Tabla 4.12 Rúbrica para evaluación de taller 9	80
Tabla 4.13 Rúbrica para evaluación de taller 10.....	85
Tabla de prueba de hipótesis para establecer si las varianzas son iguales o Diferentes.....	98
Tabla de los talleres con varianzas iguales.....	99
Tabla de los talleres con varianzas diferentes.....	101
Prueba de hipótesis para determinar si varianzas de lecciones son Iguales o diferentes.....	109
Tabla de lección 2 de los dos colegios.....	110
Tabla de lección 1, 3, 4,5 de los dos colegios.....	111

RESUMEN

Con la intención de resolver la problemática se diseña un nuevo modelo con estrategias de aprendizaje basada en 20 Talleres de aprendizaje interactivos, 10 en el aula (trabajos grupales) como 10 de fijación en el hogar, se realizó en la unidad educativa “Espíritu Santo”; CES y el colegio Militar “Tente. Hugo Ortiz Garcés”; COMIL2 de Guayaquil. Estos talleres fueron diseñados con ayuda de expertos en la materia, profesores y las experiencias de más de 30 años de trabajo en la docencia, haciendo hincapié en las fallas que cometen los estudiantes al desarrollar los ejercicios y problemas. Los resultados podrán verificarse al finalizar el proyecto mediante la observación de estos, pues, se podrá comparar la eficacia de la metodología propuesta respecto de la tradicional y establecer conclusiones, tal vez replantear y proponer mecanismos de mejora. Se evaluó cada taller, por diferenciación de medias se sacaron conclusiones, para estar seguros se contrastó taller contra taller de las dos instituciones, se realizaron las pruebas de hipótesis, Se dividió la población de estudiantes de los dos colegios en dos grupos, Grupo 1: Estudiantes que aprendieron bajo la metodología tradicional, sin la modalidad de Talleres. Grupo 2: Estudiantes que aprendieron bajo la modalidad de Talleres. Con cada grupo se analizó: Prueba de hipótesis para diferenciación de medias de las notas finales de los dos grupos del Colegio Militar Teniente Hugo Ortiz. Y del Espíritu Santo. Prueba de hipótesis para diferenciación de medias de las notas de los dos grupos de estudiantes de los dos colegios. Prueba de hipótesis para diferenciación de medias para las notas de los 10 talleres que se aplicaron en el grupo 2 del COMIL2 y del CES. Prueba de hipótesis de las notas de las lecciones escritas de los estudiantes del grupo 2 de los dos colegios. Se confirmó que existe suficiente evidencia estadística con 95% de certeza para afirmar que la media de aprendizaje de los estudiantes que aprenden con talleres es mayor que la media de los estudiantes que aprenden sin talleres. Finalmente, con el propósito de observar la afinidad y coherencia de los resultados, se compararon las notas de 5 evaluaciones a los estudiantes que aprendieron con talleres en los dos colegios, se observó que existe suficiente evidencia estadística para afirmar que las medias de las lecciones aplicadas en el COMIL2 y en el CES son iguales, con un 95% de confiabilidad.

CAPÍTULO I

1. EL PROBLEMA

1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Las estadísticas de los dos últimos años en el rendimiento académico de la asignatura de Matemática de los estudiantes de III de bachillerato de los colegios CES y COMIL2, indican pobres resultados y poco aprendizaje de esta asignatura en sus múltiples capítulos.

Los resultados de la prueba de diagnóstico aplicada al inicio del período lectivo 2011 – 2012, indican que los estudiantes presentan bajo rendimiento escolar en la asignatura de Matemática en un contexto general y en particular en el tema de graficación de funciones reales.

Esto puede deberse a múltiples factores dentro del contexto educativo de cada institución. Uno de éstos, muy importante y trascendental podría ser el tema pedagógico, y como consecuencia de este, el aprendizaje del tema **graficación de funciones racionales** no está siendo significativo y consecuentemente sobreviene el bajo rendimiento en este tema.

Existen un sinnúmero de inconvenientes de base que están contribuyendo y alimentando el problema. Algunos de estos, podrían ser:

1. Falta de hábitos de estudio de los estudiantes
2. Problemas familiares
3. Falta de motivación
4. Estrategias Pedagógicas Inadecuadas

Posiblemente las estrategias pedagógicas inadecuadas estén contribuyendo en mayor volumen al pobre conocimiento del tema, pues así reflejan los resultados de las diferentes evaluaciones hechas por el ministerio de educación.

Con la intención de resolver la problemática se propone diseñar un nuevo modelo, con estrategias de aprendizaje basada en **Talleres de aprendizaje interactivos** apropiados a la época de los estudiantes. Probablemente con el diseño de estrategias adecuadas se logre un aprendizaje más eficaz.

Con este proyecto se diseña un conjunto de talleres interactivos para apoyar a los estudiantes a conseguir el conocimiento, tanto en el aula (trabajos grupales) como en el hogar (trabajos individuales)

Se supone que la clave de éxito estará en la eficacia del diseño, elaboración e implementación de los talleres interactivos para que el aprendizaje del tema de funciones racionales sea significativo en los estudiantes.

El mal social de hoy es el exceso de información al que están expuestos todos y específicamente nuestros estudiantes, creándose aparentemente grandes nexos y vínculos que se constituyen en amplios distractores de las mentes de los educandos.

Por esta razón, y con fin eminentemente educativo se debe también mirar este frente y buscar el refuerzo en el aprendizaje que puedan aportar las herramientas o Tics pedagógicas, con este propósito, se ayuda al trabajo de los estudiantes con el apoyo del software interactivo graph, programa que específicamente sirve para la graficación de funciones reales de todo tipo

Se piensa que las acciones descritas permitirán al estudiante mejorar los conocimientos de las funciones racionales de manera significativa y consecuentemente el estudiante se verá beneficiado de un mejor rendimiento académico y mejores notas en la asignatura de matemática.

Los resultados del planteamiento propuesto podrán verificarse al finalizar el proyecto mediante la observación de los resultados, pues se podrá comparar la eficacia de la metodología propuesta respecto de la tradicional y establecer conclusiones y tal vez replantear y proponer mecanismos de mejora.

A pesar de la pobre reestructuración que “expertos” han realizado a los programas del bachillerato, aumentando la intensidad horaria de ciencias

sociales y en contraparte disminuyendo la carga horaria de las materias de ciencias de tipo científico, cabe preguntarse entonces si esta reestructuración que no privilegia las ciencias, físicas, matemáticas ni químicas ayudará a mejorar el pobre nivel educacional. Se cree que esta investigación y otras son necesarias para desencadenar nuevas alternativas pedagógicas que contribuyan a la comprensión y aplicación de talleres interactivos en el proceso de interaprendizaje, y así posiblemente abrir un debate necesario para reformular las agendas programáticas del ministerio de educación.

Este estudio ayudará a realizar posteriores investigaciones que determinen una mejor manera de impartir las clases, apoyados de mejores conocimientos y modernas estrategias que mejoren la calidad de la educación.

Para eso se utilizará técnicas mixtas de recolección de la información como la exploración de los contenidos de matemática, el análisis de discurso y la entrevista personal.

1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Falta de mecanismos pedagógicos adecuados en el proceso de interaprendizaje de las Funciones Racionales en los estudiantes del III año de bachillerato de las Unidades Educativas Tnte. Hugo Ortiz Garcés y Espíritu Santo del Cantón Guayaquil, Provincia del Guayas, en el período lectivo 2011-2012.

1.2.1. OBJETIVOS

General: Diseñar un sistema metodológico para el área de Ciencias Exactas, a través de la aplicación de talleres interactivos, para lograr que los estudiantes aprendan significativamente el tema de Funciones Racionales.

1.2.2. ESPECÍFICOS

- Solicitar ayuda de expertos matemáticos en el tema de funciones para fortalecer el diseño científico de los talleres con modelos de funciones racionales acordes a la problemática actual.
- Recurrir a fuentes de información veraces que permitan obtener información actualizada que garantice éxito en la programación y ejecución del proyecto.
- Evaluar la aplicación de las estrategias de talleres, para coordinar nuevas alternativas que permitirán mejorar el proceso de interaprendizaje de matemática.
- Consular a pedagogos expertos en el diseño de talleres de trabajo cooperativo para enriquecer los talleres de aplicación.

1.3. JUSTIFICACIÓN

El presente trabajo de investigación es muy importante para los docentes del área de ciencias exactas, pues si del análisis de los resultados se deduce que el aprendizaje del tema de funciones racionales ha sido significativo, se pondrá de manifiesto que la metodología de aprendizaje mediante talleres cooperativos (AC) ha sido adecuada y por tanto podrá ser aplicada en el aprendizaje de otras temáticas de interés.

Así podrá implementarse en el aprendizaje de otras ramas de las ciencias exactas, así como en otros contextos y niveles de escolaridad de acuerdo a la factibilidad que exista en esos ambientes.

Del escenario en que se trabaja se conoce el enorme problema educativo del país; no sólo en las ciencias exactas; si no en todas las áreas de estudio, se palpa la falta de un buen nivel de conocimientos de los estudiantes, esto lo evidencian los resultados de las pruebas "SER" recientemente aplicadas en todo el país. Por estos hechos surge la necesidad de redescubrir e investigar nuevas e innovadoras estrategias de enseñanza y aprendizaje, así lo exigen los niños, jóvenes y profesionales reclamando la falta de preparación y

competencia no sólo a nivel regional si no que esto es más evidente por el fenómeno de globalización.

Basta dar un pequeño vistazo a los resultados de las competencias internacionales de conocimientos, veamos el siguiente artículo:

“Educación, ranking mundial



Arturo Jofré. La lucha por lograr mejores niveles en educación se ha transformado en una competencia internacional que cada tres años mide los resultados de estudiantes entre 15 y 16 años. Es una especie de campeonato mundial de la sub-17, pero centrada en el nivel de educación de cada país. Desde el año 2000, el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos de la Organisation for Economic Cooperation and Development (OECD) realiza esta evaluación en 57 países. La última medición, recién publicada, se realizó en ciencias, lectura y matemáticas.

Las estrellas son las mismas en todas las áreas clave. Corea del Sur es el país con mejores resultados en lectura, seguido por Finlandia, Hong Kong-China y Canadá. En matemáticas el mejor es Taiwán, seguido por Finlandia, Hong Kong y Corea del Sur. En el área científica el primero es Finlandia, seguido de Hong Kong, Canadá y Taiwán.

¿Qué pasó con América Latina? Participaron seis países y todos están bastante lejos de la media internacional en todas las pruebas. En ciencias y lectura, Chile obtuvo la mejor posición, en matemáticas la obtuvo Uruguay. Argentina, Brasil y Colombia: la mejor posición que logró alguno de ellos fue la número 50 de un total de 57 países.(pruebas PISA)”

Artículo tomado de:

http://www.larepublica.net/app/cms/www/index.php?pk_articulo=5352

En el país, muy pocos conocen de este certamen, es más, creemos que los funcionarios del ministerio desconocen este ámbito de competencias, bien sabemos que los países vecinos cuentan con un mejor nivel educativo, a pesar de ello están en los últimos lugares, el Ecuador ni siquiera participa de estas competencias.

Para la elaboración de este proyecto, siendo eminentemente de carácter educativo, prestarán especial colaboración las instituciones de carácter educativo, por un lado, la unidad educativa “Espíritu Santo”; CES y el colegio Militar “Tente. Hugo Ortiz Garcés”; COMIL2, de Guayaquil. Estas instituciones cooperan para este proyecto con la asistencia de su personal de directivos, profesores y especialmente los entes observables, los estudiantes.

El proyecto así elaborado es de interés tanto para directivos, profesores, padres de familia y estudiantes de las instituciones educativas ya mencionadas, pues con el planteamiento de este problema se busca dar solución a un gran problema educativo, la falta de conocimiento significativo en el plano de las funciones racionales y el bajo rendimiento académico que todos los años se presenta en la asignatura de matemáticas, remediar estos inconvenientes es de interés de todas las partes que conforman la estructura educativa.

Pocos son los trabajos de investigación realizados alrededor de la temática de las funciones racionales que se elabora, en el entorno realmente no se ha trabajado con la metodología de talleres cooperativos en este tema, es más, este tema casi no aparece en el pliego de contenidos que desarrollan las unidades de educación media de nuestro país, de ahí la importancia y seriedad que hay que dar al desarrollo de éste.

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO

2.1. TÉCNICAS DE APRENDIZAJE BASADO EN TALLERES – APRENDIZAJE COOPERATIVO (AC)

En la primera parte se mencionan algunas dificultades que los docentes han encontrado en el proceso de enseñar. Estos conflictos en consonancia con el prototipo actual de estudiante hacen que la tarea docente sea cada vez más difícil; por esta y otras razones se debe investigar y desarrollar nuevas alternativas pedagógicas que permitan enganchar el pensamiento del estudiante y llevarlo por una senda donde finalmente logre motivación intrínseca, tarea difícil, ¿verdad?

Un sabio en el estrado o un guía

En cada clase, cada profesor debe elegir entre ser un sabio en el estrado o un guía al lado de sus estudiantes: Al tomar esta decisión, el profesor debe recordar que el reto de la docencia no es cubrir el total del material sino ayudar a que sus estudiantes lo descubran:

El atractivo de las clases expositivas Pero ante estas adversidades se debe empezar por un análisis interno de los maestros y preguntarse si los inconvenientes educativos son por la pobre metodología aplicada durante el desarrollo de las clases. Puede ser que las respuestas a estas inquietudes estén muy cerca y que no se desea ver. Tal vez no se desea cambiar el viejo paradigma y metodología obsoleta de impartir clases.

2.1.1. LAS CLASES EXPOSITIVAS

La investigación sobre métodos docentes sugiere que si se quiere que los alumnos adquieran un aprendizaje más significativo, deben dedicar más tiempo a hacer pensar y a realizar tareas significativas para el aprendizaje, no simplemente sentarse y recibir información de forma pasiva. (McKeachie, 1986):

Los profesores parecen atraídos por la exquisitez de las clases expositivas, y estrellan su enseñanza en las rocas, en respuesta a la atractiva tentación de explicar todo lo que saben ante una audiencia que les adora, y enseñar tal y como ellos fueron enseñados. La clase expositiva tuvo su máximo apogeo cuando se asumió que una mente por enseñar es como una hoja de papel en blanco que espera a que el profesor escriba en ella, y que las mentes de los estudiantes son como vasijas vacías en las que los profesores vierten su sabiduría. Como consecuencia de éstas y otras suposiciones, los profesores imparten clases expositivas. Además, con frecuencias los profesores piensan en su trabajo en términos de tres actividades básicas:

1. **Impartir conocimiento**, es decir, el trabajo del profesor es dar y el trabajo del estudiante es recibir:
2. **Clasificar estudiantes**, es decir, decidir las calificaciones de los estudiantes
3. **Ordenar los estudiantes según categorías**, es decir, decidir quién ha alcanzado los requisitos para superar la asignatura o para graduarse:

A veces los profesores se sienten frustrados con este modelo de enseñanza y aprendizaje. Los estudiantes pueden no aprender lo que los profesores piensan que les están enseñando, los resultados en los exámenes pueden indicar que no han comprendido la materia en la forma esperada por los profesores. Además, los estudiantes hacen preguntas como ¿Entrará esto en el examen? para determinar si algo es o no importante, cuando lo que realmente importa es

si, en el ejercicio profesional, el concepto o el procedimiento se usa habitualmente.

2.2. LOS PROBLEMAS DE LA CLASE EXPOSITIVA

Se han encontrado un buen número de problemas con la aplicación de clases expositivas:

En primer lugar, la atención de los estudiantes ante la explicación del profesor decrece a medida que la exposición progresa. La investigación llevada a cabo por D.H. Lloyd en los años 60, en la Universidad de Reading mostró que el nivel de atención de los estudiantes durante la exposición sigue el siguiente patrón: cinco minutos de preparación, asimilación buena durante los cinco minutos siguientes, y confusión y aburrimiento, con muy bajo nivel de asimilación durante el resto de la exposición, con un cierto repunte de la atención al final de la exposición. Otro estudio, en los años 60, que analizaba el porcentaje de contenido que había sido incorporado por los estudiantes en sus notas, en diferentes intervalos de tiempo de clase, mostró que los estudiantes toman notas sobre el 41% del contenido que se les presenta durante los 15 primeros minutos, el 25% del contenido en los 30 primeros minutos, y sólo el 20% del contenido presentado durante los primeros 45 minutos (ver Penner 1984).

En segundo lugar, sólo las personas bien educadas, inteligentes y orientadas hacia el aprendizaje auditivo son capaces de sacar buen provecho de las clases expositivas. En general, poca cosa se recuerda de una exposición, excepto en el caso de oyentes con una educación e inteligencia superior a la media. Incluso en las mejores condiciones, cuando personas inteligentes y motivadas escuchan a un profesor brillante exponer un tema interesante, pueden producirse problemas serios para el aprendizaje.

En tercer lugar, las clases expositivas tienden a promover únicamente un aprendizaje de bajo nivel. Una amplia serie de estudios concluyen que, mientras que la clase expositiva es tan efectiva (aunque no más) para transmitir información como lectura u otros métodos, es claramente menos efectiva para

promover el pensamiento de alto nivel o el cambio de actitudes (Bligh 1972). Los talleres de discusión parecen más eficaces para desarrollar la capacidad de resolución de problemas de alto nivel y la actitud positiva hacia el curso. Los grupos de discusión son mejores para promover razonamiento de alto nivel, actitud positiva y motivación para el aprendizaje. En el mejor de los casos, la clase expositiva tiende a centrarse en aprendizaje de bajo nivel: cuando el material es complejo, detallado o abstracto, cuando los estudiantes tienen que analizar, sintetizar o integrar conocimiento, o cuando se pretende que retengan el conocimiento por largo tiempo, la clase expositiva no es un buen método. Para conseguir estos objetivos deben usarse talleres o grupos de aprendizaje cooperativo formal.

En cuarto lugar, la clase expositiva se basa en el supuesto de que todos los estudiantes requieren la misma información, que se presenta de forma oral e impersonal, a un ritmo prefijado, y sin diálogo con el presentador. A pesar de que los estudiantes tienen diferentes niveles de conocimiento en relación con la materia a impartir, la clase expositiva presenta la misma información a todos. El material correspondiente a una clase expositiva puede comunicarse con la misma eficacia mediante la lectura de un texto. Mientras que los estudiantes aprenden y asimilan información a ritmos diferentes, la clase expositiva avanza al ritmo marcado por el profesor: Si bien los estudiantes que escuchan con atención y procesan la información tendrán preguntas sobre el material (y necesitan las respuestas), la clase expositiva es una comunicación en una sola dirección. Además, el elevado número de estudiantes en clase hace difícil establecer preguntas de éstos y se producen malos entendidos, comprensión incorrecta, y lagunas que no pueden ser identificadas y corregidas. La clase expositiva impersonaliza el aprendizaje.

En quinto lugar, a los estudiantes no les gustan las clases expositivas. Los estudiantes prefieren los cursos y los temas en los que aprenden en grupos de discusión, en comparación con los que se trabajan mediante clases expositivas.

Finalmente, la clase expositiva se basa en una serie de suposiciones sobre las capacidades y estrategias cognitivas de los estudiantes: En concreto, se asume que todos los estudiantes aprenden escuchando, que tienen una buena capacidad memorística, que tienen todo el conocimiento previo requerido, que tienen la habilidad de tomar buenas notas en clase, y que no son susceptibles de verse desbordados por la cantidad de información. Estos son algunos obstáculos que hacen que la clase expositiva sea poco efectiva.

2.3. EL TALLER O GRUPOS DE ESTUDIO, LA ALTERNATIVA DE LOS ÚLTIMOS TIEMPOS

Una opción para desterrar los modelos tradicionales de la educación es abogar por un modelo en el que el desarrollo del talento de los estudiantes y profesores sea lo prioritario. Por tanto, cada vez hay más acuerdo en que los profesores deben pensar en su trabajo en términos de:

1. Ayudar a los estudiantes a construir su propio aprendizaje, lo cual requiere la implicación activa del profesor y de sus estudiantes.
2. Desarrollar las competencias y talentos de sus estudiantes: Las instituciones educativas deben hacer algo más que seleccionar, en los procesos de admisión, a los estudiantes más brillantes, y limitarse después a preparar a éstos durante los años en que maduran: Los profesores deben “añadir valor”, desarrollando el potencial de los estudiantes y transformarlos en individuos más sabios y comprometidos:

El aprendizaje cooperativo –**también denominado taller**- proporciona una alternativa al modelo de las vasijas vacías para la enseñanza y el aprendizaje, ya que estimula el desarrollo del talento de los estudiantes proporcionándoles un método cuidadosamente estructurado para implicarlos activamente en la construcción de su aprendizaje. Conseguir que los estudiantes se impliquen cognitiva, física, emocional y psicológicamente en el aprendizaje es un paso importante para transformar el carácter pasivo e impersonal de muchas clases escolares.

2.3.1. EL CONCEPTO DEL TALLER¹

“TALLER, en el lenguaje corriente, constituye el lugar donde se hace, se construye o se repara algo. Así, se habla de taller de mecánica, taller de carpintería, taller de reparación de electrodomésticos, etc.

Desde hace algunos años la práctica ha perfeccionado el concepto de taller extendiéndolo a la educación, y la idea de ser "un lugar donde varias personas trabajan cooperativamente para hacer o reparar algo, lugar donde se aprende haciendo junto con otros" esto dio motivo a la realización de experiencias innovadoras en la búsqueda de métodos activos en la enseñanza. Algunos autores tienen las siguientes definiciones al respecto”:

NATALIO KISNERMAN: Define el taller como unidades productivas de conocimientos a partir de una realidad concreta.

MELBA REYES: El taller como una realidad integradora, compleja, reflexiva, en que se unen la teoría y la práctica como fuerza motriz del proceso pedagógico.

NIDIA AYLWIN Y JORGE GUSSI BUSTOS: El taller es una nueva forma pedagógica que pretende lograr la integración de teoría y práctica...El taller es concebido como un equipo de trabajo.

GLORIA MIREBANT PEROZO: “Un taller pedagógico es una reunión de trabajo donde se reúnen los participantes en pequeños grupos o equipos para hacer aprendizajes prácticos según los objetivos que se proponen y el tipo de asignatura que los organice. Puede desarrollarse en un local, pero también al aire libre.

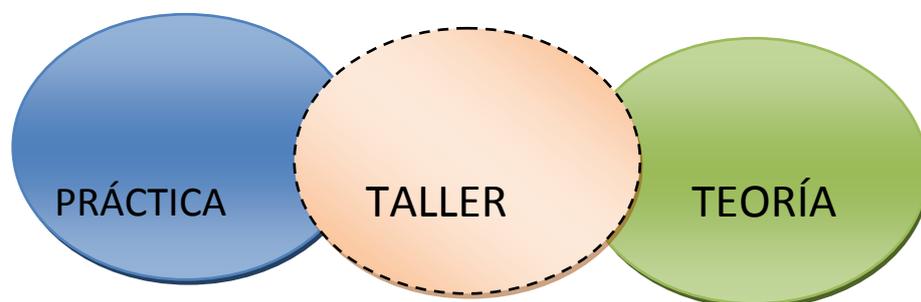
¹ Tomado textualmente de:

http://acreditacion.unillanos.edu.co/contenidos/NESTOR%20BRAVO/Segunda%20Sesion/Concepto_taller.pdf

El taller tiene como objetivo la demostración práctica de leyes, ideas, teorías, características y principios que se estudian, la solución de las tareas con contenido productivo.

Por eso el taller pedagógico resulta una vía idónea para formar, desarrollar y perfeccionar hábitos, habilidades y capacidades que le permiten al alumno operar con el conocimiento y al transformar el objeto, cambiarse a sí mismo”.

EZEQUIEL PROZECAUSKI: “concebimos los talleres como un medio y un programa, cuyas actividades se realizan simultáneamente al período de estudios teóricos como un intento de cumplir su función integradora. Estos talleres consisten en contactos directos con la realidad y reuniones de discusión en donde las situaciones prácticas se entienden a partir de cuerpos teóricos y, al mismo tiempo, se sistematiza el conocimiento de las situaciones prácticas. La ubicación de los talleres dentro del proceso docente, para una mayor comprensión se ha graficado de la siguiente manera:



MARÍA TERESA GONZÁLEZ CUBERES: “Me refiero al taller como tiempo - espacio para la vivencia, la reflexión y la conceptualización; como síntesis del pensar, el sentir y el hacer. Como el lugar para la participación y el aprendizaje.

Me gusta, agrega, la expresión que explica el taller como lugar de manufactura y mentefactura. En el taller, a través del interjuego de los participantes con la tarea, confluyen pensamiento, sentimiento y acción. El taller, en síntesis, puede convertirse en el lugar del vínculo, la participación, la comunicación y, por ende, lugar de producción social de objetos, hechos y conocimientos”.

2.3.2. EL PASADO EN EL PRESENTE DEL TALLER²

“La palabra taller proviene del francés “atelier”, y significa estudio, obrador, obraje, oficina. También define una escuela o seminario de ciencias a donde asisten los estudiantes. De una manera o de otra, el taller aparece, históricamente, en la Edad Media. En aquella época, los gremios de artesanos pasaron a ocupar el lugar de los mercaderes. Esta organización de trabajadores se continuó hasta el siglo XIX.

Los “maestros” artesanos eran miembros del gremio y llegar a serlo no era fácil. El “maestro” hábil en su oficio aceptaba en su taller a un cierto número de aprendices, quienes comenzaban su aprendizaje alrededor de los 12 años. Durante su entrenamiento, que podía prolongarse entre cinco y doce años, según la habilidad requerida, los aprendices compartían casa y comida con el “maestro”.

Entonces el taller en la antigüedad era un lugar de perfeccionamiento, en donde se aprendía, es decir, había un aprendiz este aprendizaje empezaba alrededor de los doce años y luego se iban perfeccionando hasta tener la condición de oficial y luego la de maestro, entonces el taller era un lugar de trabajo y de aprendizaje, luego este taller fue incorporándose a diferentes áreas

Y hoy también la utilizamos en la docencia como una técnica para mejorar la enseñanza aprendizaje.

2.3.3. UTILIDAD Y NECESIDAD DEL TALLER EDUCATIVO³

El taller educativo en la actualidad es una herramienta muy importante en la enseñanza aprendizaje ya que es utilizada mucho en el aula por parte de los docentes.

² Tomado textualmente de:

http://acreditacion.unillanos.edu.co/contenidos/NESTOR%20BRAVO/Segunda%20Sesion/Concepto_taller.pdf

³ Tomado textualmente de:

http://acreditacion.unillanos.edu.co/contenidos/NESTOR%20BRAVO/Segunda%20Sesion/Concepto_taller.pdf

“Mediante el taller, los docentes y los alumnos desafían en conjunto problemas específicos buscando también que el aprender a ser, el aprender a aprender y el aprender a hacer se den de manera integrada, como corresponde a una auténtica educación o formación integral. Saber - Saber Hacer: no es otra cosa que Acción fundamentada en el por qué, en la comprensión del mecanismo estructural productivo del objeto de conocimiento. Mediante el taller los alumnos en un proceso gradual o por aproximaciones, van alcanzando la realidad y descubriendo los problemas que en ella se encuentran a través de la acción - reflexión inmediata o acción diferida”

Según dice Néstor Bravo (Concepto_taller.pdf), el taller en el aspecto pedagógico es muy complejo porque está centrado directamente en el desarrollo de las capacidades intelectuales del estudiante, y como resultado de las vivencias que se tienen como parte de un grupo en el desarrollo del trabajo.

Aquí se forma parte de un equipo de trabajo en donde se aplica la teoría y la práctica en la resolución de los problemas que se presentan.

Se observa una estrecha correspondencia entre la teoría y la práctica. Se rescata la participación del estudiante en acciones que van relacionadas directamente con situaciones concretas y de la vida real, es decir, se pone énfasis más en la participación del alumno que la persuasión.

"En lo sustancial el taller es una modalidad pedagógica de aprender haciendo"; en este sentido el taller se apoya en el principio de aprendizaje formulado por Froebel en 1826: "Aprender una cosa viéndola y haciéndola es algo mucho más formador, cultivador, vigorizante que aprenderla simplemente por comunicación verbal de las ideas".

"El taller se organiza con un enfoque interdisciplinario y globalizador, donde el profesor ya no enseña en el sentido tradicional; sino que es un asistente técnico que ayuda a aprender. Los estudiantes aprenden haciendo y sus respuestas o soluciones podrían ser en algunos casos, más válidas que las del mismo profesor" Según Néstor Bravo (Concepto_taller.pdf),

2.3.4.OBJETIVOS GENERALES DE LOS TALLERES⁴

1. Promover y facilitar una educación integral e integrar simultáneamente en el proceso de aprendizaje el Aprender a aprender, el Hacer y el Ser.
2. Realizar una tarea educativa y pedagógica integrada y concertada entre docentes, estudiantes, instituciones y comunidad.
3. Superar en la acción la dicotomía entre formación teórica y experiencia práctica.
4. Superar el concepto de educación tradicional en el cual el estudiante ha sido un receptor pasivo, bancario, del conocimiento.
5. Facilitar que los estudiantes o participantes en los talleres sean creadores de su propio proceso de aprendizaje.
6. Producir un proceso de transferencia de tecnología social.
7. Hacer un acercamiento de contrastación, validación y cooperación entre el saber científico y el saber popular.
8. Aproximar comunidad - estudiante y comunidad - profesional.
9. Desmitificar la ciencia y el científico, buscando la democratización de ambos.
10. Desmitificar y alienar la concientización.
11. Posibilitar la integración interdisciplinaria.

⁴ Tomado textualmente de:

http://acreditacion.unillanos.edu.co/contenidos/NESTOR%20BRAVO/Segunda%20Sesion/Concepto_taller.pdf

12. Crear y orientar situaciones que impliquen ofrecer al estudiante y a otros participantes la posibilidad de desarrollar actitudes reflexivas, objetivas, críticas y autocríticas.
13. Promover la creación de espacios reales de comunicación, participación y autogestión en las entidades educativas y en la comunidad.

2.3.5. PRINCIPIOS PEDAGÓGICOS DEL TALLER

Como principios pedagógicos podemos decir que:

- a. El docente ya no tiene una jerarquía de saber todo sino que es un mediador.
- b. Hay una buena relación entre el profesor y estudiante.
- c. Hay una cooperación mutua entre los que forman el grupo.
- d. La competencia personal se transforma una producción de ayuda, se socializa el conocimiento a favor del grupo.
- e. Nacen nuevas formas de evaluación conjunta.

“Estos principios continúa **Ander Egg**, ponen de manifiesto el carácter autogestionario del sistema de taller. (esto es que pueden existir los denominados talleres no asistidos, que los pueden organizar los propios estudiantes para realizar ejercicios, trabajos prácticos, propuestas, que requieren acciones instrumentales así como pensar y reflexionar sobre la acción) - el taller educativo: ¿método, técnica o estrategia?- La estrategia pedagógica comprende: los objetivos, los métodos y las técnicas; en este sentido la estrategia es la totalidad, es la que da sentido de unidad integral a todos los pasos de la enseñanza y aprendizaje. Los talleres deben realizarse más como estrategia operativa que como simple método o técnica. La relación maestro - estudiante que se da en el taller, debe contemplarse entre las didácticas activas, con trabajo individualizado, en parejas o en grupos pequeños. Así, por ejemplo, el enfoque pedagógico piagetiano posibilita la unidad de acción y reflexión”.

Según este autor nos indica que la reflexión es sólo un medio de ver los problemas y no una manera de resolverlos, entonces será un proceso heurístico y no la forma de verificación. Con el grupo se sintetiza el hacer del estudiante, el sentir y el pensamiento que da cada uno de los integrantes del equipo en su proceso de aprendizaje.

De acuerdo a la psicología social y dinámica de grupo observamos que el taller tiene grandes efectos tanto pedagógicos, como terapéuticos ya que aquí se posibilita la comunicación, adquisición de conocimientos de una u otra manera, por la colectividad de pensamientos que fluyen a cada instante en la resolución del problema, el aprender a pensar y aprender a aprender.

En sí el taller pedagógico tiene mucha relevancia convirtiéndose en un gran paradigma educativo donde se integran las teorías del aprendizaje, técnicas activas y participativas que fluyen en el denominador común del constructivismo.

Esto hace que la acción educativa -en buena dimensión esto se logra con el taller- sea verdaderamente formativa antes que un simple proceso de instrucción que suministra datos o información fría como proceso de computación.

El taller pedagógico no es un acto solitario, sino que se complementa con la ayuda y colaboración de todos los integrantes del equipo, el medio donde se desenvuelven, la cultura de los alumnos, es decir aquí hay una integración social al desarrollarse las habilidades y competencias que demandan el interaprendizaje de los estudiantes.

Así mismo hay una promoción de la inteligencia en cada uno de ellos, también se elaboran y desarrollan las relaciones interpersonales aumentando la comunicación entre sus miembros.

La individualidad en el trabajo producían tristeza, fatiga, ansiedad, pocas ganas de realizar las tareas, en el taller, la interacción social produce diversión, seguridad en los juicios, argumentos efectivos, hay un aumento en la parte cognoscitiva ya que, el conocimiento se construye socialmente.

La metodología del taller es muy importante porque el saber, es un proceso vivo, dinámico que se construye con la interacción personal cuando se comparten las actividades que se hacen, lo que buscan y hacia dónde pueden llegar para encontrar la solución de un determinado problema que se les presente.

2.3.6. LOS SUJETOS DEL TALLER EDUCATIVO: EL ROL DEL DOCENTE Y LOS ESTUDIANTES

Funciones principales del coordinador:

Dentro de estas funciones el docente debe planificar siempre sus actividades a seguir en el taller, el organizar, ejecutar y evaluar el taller demanda mucha entereza y dedicación ya que son muchos los aspectos a seguir:

- Debe promover y proponer actividades que ayuden el vínculo grupal y la tarea a realizar.
- Debe ser tolerante, tratar de respetar las ideas y encausarlas para la construcción del conocimiento.
- Su lenguaje debe ser sencillo y flexible para que todos entiendan la orden y se interesen por participar.
- Ayuda en la exploración, el descubrimiento y la creatividad de los procesos para hallar nuevas soluciones.
- Monitorea constantemente para asegurarse que todos los integrantes del grupo participen.
- Retroalimenta contantemente para inducir la parte teórica a la resolución del problema.
- Debe respetar el tiempo reglamentario destinado para el taller.
- Favorece la autoevaluación, evaluación, coevaluación permanentemente.

De los estudiantes

El rol del estudiante ahora es diferente por las razones siguientes:

- Es un ser activo y dinámico
- Su deber es argumentar, juzgar, comunicarse de la mejor manera.
- Es autónomo para realizar su taller y participar en todo momento.
- El llega a tener una gran responsabilidad y compromiso sin necesidad de estar en coerción y amenazado.
- Habrá una colaboración y no competición personal.
- Habrá un clima de cordialidad y respeto al emitir una idea.
- El estudiante tendrá seguridad al emitir sus argumentos y juicios.
- No habrá imprevistos debido a la planificación colectiva de sus objetivos y acciones a realizar.
- La atención estará centrada en las diferentes actividades que se realizarán y no a la clase magistral del profesor.
- Las decisiones serán tomadas colectivamente y no en forma individual.
- Será la construcción del conocimiento y no el simple conductismo del siglo pasado.

2.4. TÉCNICAS DE APRENDIZAJE COOPERATIVO (AC).⁵

“Las técnicas de Aprendizaje Cooperativo (AC) nos ofrecen una colección de herramientas y criterios con gran potencial para la renovación del proceso de enseñanza-aprendizaje y más concretamente, nos permiten una excelente aproximación al replanteamiento de la enseñanza desde la óptica de los créditos ECTS (**European Credit Transfer System**) y del desarrollo de competencias. No en vano, estas técnicas son las que más se han consolidado en las instituciones de educación especialmente de nivel superior del mundo occidental en los últimos años. Tradicionalmente primero se expone la

⁵ *Bibliografía: Zaragoza, 17 y 18 de enero 2011 2 Javier Bará, Joan Domingo y Miguel Valero
javier.bara@upc.edu, joan.domingo@upc.edu, miguel.valero@upc.edu*

información y posteriormente se busca su aplicación en la resolución de una situación real (que de forma resumida llamaremos problema, para mantener la generalidad). En el recorrido que viven los estudiantes desde el planteamiento original del problema hasta su solución, trabajan de manera cooperativa, en pequeños grupos (usando técnicas específicas de AC), compartiendo en esa experiencia de aprendizaje la posibilidad de practicar y desarrollar habilidades y competencias genéricas de carácter transversal, y de observar y reflexionar sobre actitudes y valores que en el método convencional expositivo difícilmente podrían ponerse en evidencia. Si bien en el taller se hace una presentación conjunta de dos estrategias, AC y ABP (aprendizaje basado en problemas), es importante advertir que el uso del AC de forma aislada es una herramienta muy recomendable en aquellas disciplinas en las que, por el planteamiento del plan de estudios o por su carácter dogmático, el ABP no sea posible o sea difícil de desplegar”.

2.4.1. ESTRUCTURA TRADICIONAL VS. ESTRUCTURA APRENDIZAJE COOPERATIVO AC.

Podemos hacer una comparación de cómo se dan las clases con estructura tradicional y el aprendizaje colaborativo, observaremos las ventajas que tiene esta nueva estructura en la enseñanza aprendizaje. La forma procesual y su evaluación son las más interesantes por las razones expuestas en los artículos anteriores.

2.4.2. ASIGNATURA CON ORGANIZACIÓN TRADICIONAL

TEMARIO	CLASES	<ul style="list-style-type: none">• EXPOSICIONES DEL PROFESOR
----------------	---------------	--

	FUERA DE CLASES	<ul style="list-style-type: none"> • TRABAJO INDIVIDUAL
	EVALUACIÓN	<ul style="list-style-type: none"> • PRUEBA FINAL

MEJORAS EN LA EDUCACIÓN TRADICIONAL

TEMARIO + OTROS ELEMENTOS	CLASES	<ul style="list-style-type: none"> • EXPOSICIONES DEL PROFESOR+ ACTIVIDADES DE LOS ESTUDIANTES
	FUERA DE CLASES	<ul style="list-style-type: none"> • ESTUDIO INDIVIDUAL
	EVALUACIÓN	<ul style="list-style-type: none"> • EXÁMENES PARCIALES • TAREAS INDIVIDUALES

APRENDIZAJE COOPERATIVO

TEMARIO + OTROS ELEMENTOS	CLASES	<ul style="list-style-type: none"> • EXPOSICIONES DEL PROFESOR • ACTIVIDADES COOPERATIVAS DE LOS ESTUDIANTES
	FUERA DE CLASES	<ul style="list-style-type: none"> • ESTUDIO INDIVIDUAL • TRABAJO COOPERATIVO
	EVALUACIÓN	<ul style="list-style-type: none"> • EXÁMENES • TAREAS COOPERATIVAS • EVALUACIÓN CONTINUA

Fuente: Zaragoza, 17 y 18 de enero 2011 2 **Javier Bará, Joan Domingo y Miguel Valero**

javier.bara@upc.edu, joan.domingo@upc.edu, miguel.valero@upc.edu

2.5. LAS FUNCIONES RACIONALES

Para abordar lo exclusivo a las funciones racionales, es indispensable que los estudiantes de III de Bachillerato tengan como conocimientos previos, el dominio de los siguientes temas:

- I. Expresiones racionales.
- II. Operaciones con polinomios.
- III. Las reglas de factorización.
- IV. Resolución de ecuaciones e inecuaciones de variable real.
- V. Aplicar sin inconvenientes las técnicas de graficación de las funciones

reales. racionales; esto es, la función recíproca $f(x) = \frac{1}{x}$ y su variante

dado por el modelo $f(x) = \frac{1}{x^2}$

En esta faceta se pretende que los estudiantes logren los siguientes objetivos:

- i. Encontrar el dominio de una función racional
- ii. Determinar las ecuaciones de las asíntotas verticales de una función racional
- iii. Determinar las asíntotas horizontales u oblicuas de una función racional.
- iv. Graficar cualquier tipo de funciones racionales y comprobar con un graficador de funciones.

CAPITULO III

3. MATERIALES Y MÉTODOS UTILIZADOS

3.1. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

Para realizar la investigación, elaboración y ejecución de este proyecto educativo, la metodología escogida estuvo enmarcada dentro de la modalidad cuanti-cualitativa, ya que con las características del problema y objetivos descritos en el estudio, es un proyecto factible, apoyado por una investigación de campo.

3.1.1. MODALIDAD DE LA INVESTIGACIÓN

El desarrollo de la investigación realizada corresponde a la modalidad de proyecto factible o de intervención, ya que comprende la elaboración y desarrollo de una propuesta de un modelo operativo que va a solucionar problemas de la comunidad educativa de los Colegios Espíritu Santo y Tnte. Hugo Ortíz. Para su formulación y ejecución se apoya en las investigaciones de tipo documental y de campo que se ejecutaron.

Dentro de la estructura de este proyecto factible se deben tener en cuenta los siguientes pasos: Diagnóstico, Planteamiento y Fundamentación Teórica de la Propuesta, Procedimientos Metodológicos, Actividades y Recursos para su ejecución, análisis y conclusiones sobre la viabilidad del proyecto.

3.2. TIPOS DE INVESTIGACIÓN

3.2.1. Investigación de campo

La investigación de campo es importante para desarrollar el proyecto, ya que realizamos una serie de acciones como: talleres, entrevistas, encuestas, tanto a docentes, estudiantes y directivos de los colegios “Espíritu Santo y Tnte.

Hugo Ortíz” con el propósito de descubrir, explicar sus causas y efectos, entender su naturaleza e implicaciones, establecer los factores que lo motivan y permiten predecir su ocurrencia.

3.2.2. POR SU NATURALEZA

- **Investigación explorativa**

Este trabajo de investigación es exploratorio porque involucra a los directivos, maestros y estudiantes del III Curso del ciclo diversificado de los Colegios Espíritu Santo y Tnte. Hugo Ortíz”, ya que se ha observado falencias en la Enseñanza-aprendizaje de las funciones racionales, al no contar con una metodología adecuada en el área de matemática que les permita servir de apoyo hacia un aprendizaje significativo.

Los estudios preliminares se los realizó revisando la documentación con que contamos, toda clase de fuentes bibliográficas, los contactos directos con que se tiene, y que se aproximen al problema y den la posibilidad de contar con elementos objetivos.

- **Investigación Descriptiva**

A través de la descripción de la situación en estudio y relacionando las variables dependiente e independiente que se han planteado, se puede establecer una estrecha relación con los objetivos señalados y propuestos en este proyecto educativo.

- **Investigación aplicada**

Porque va a permitir resolver problemas prácticos que se presentan en el estudio de las funciones racionales y su graficación respectiva permitiendo dinamizar el proceso de aprender a aprender y mejorar la calidad educativa.

- **Investigación – Acción**

La investigación realizada pretende resolver el problema real y concreto. El objetivo consiste en mejorar la enseñanza –aprendizaje y producir cambios de calificaciones y actitudes en los estudiantes de los colegios Espíritu Santo y Tnte. Hugo Ortiz.

- **Investigación explicativa o confirmatoria**

A través de la investigación explicativa se dará a conocer los fenómenos que se producen en el poco dominio de las funciones racionales y su graficación por parte de los estudiantes y su actitud frente a la matemática.

- **Investigación cuantitativa**

La investigación se centra fundamentalmente en los aspectos observables y susceptibles de cuantificación de los fenómenos educativos que se producen en los colegios Espíritu Santo y Tnte. Hugo Ortiz, se utilizará una metodología empírico-analítica y de pruebas estadísticas para el análisis de datos.

- **Investigación cualitativa**

Se utilizó para la investigación una metodología interpretativa cuyo interés es el descubrimiento de nuevos conocimientos a través de un diseño de talleres metodológicos grupales e individuales de fijación y de acuerdo con el contexto.

3.3. POBLACIÓN Y MUESTRA

Población finita.- La población está integrada por dos directivos, dos expertos, en metodología y matemáticas, diez docentes y ciento doce estudiantes del Ciclo Diversificado del Colegio Espíritu Santo y Tnte. Hugo Ortiz”,

Total: 126 personas.

Población y Muestra

El universo de este proyecto está conformado por: Expertos en Metodología, Directivos, docentes de matemática, estudiantes del III Curso del Ciclo Diversificado de los colegios involucrados.

Según Rojas R. (1998), considera que: “la población o universo se refiere a la totalidad de individuos (personas o instituciones involucradas en la investigación”. Citado por Andino P. (2005) (p.86).

3.4. PROCEDIMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

Los pasos a aplicarse en los procesos de la investigación son:

- 1) Identificación del problema, sus causas y consecuencias.
- 2) Consultas bibliográficas relacionadas con el tema
- 3) Elaboración y aplicación de los instrumentos de investigación (talleres metodológicos)
- 4) Recolección de la información obtenida
- 5) Análisis de los resultados
- 6) Procesamiento de la información
- 7) Conclusiones y recomendaciones

3.5. MÉTODOS – TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE INVESTIGACIÓN

Métodos:

En el proceso investigativo de este proyecto educativo se hace necesario la utilización de varios métodos entre los cuales escogimos al método científico, el deductivo, el inductivo, y el de investigación-acción.

Técnicas

Se utilizará la observación directa con la cual evaluamos y registramos ciertos comportamientos y la observación indirecta que se hace presente en el uso del cuestionario de encuesta, útil en este tipo de trabajo de investigación que tiene un fin determinado y estará sujeto a un proceso de planificación, asignación de tareas y ejecución, por consiguiente apegado a la realidad.

Las encuestas a docentes y estudiantes que sirvieron para determinar la incidencia del aprendizaje en los estudiantes y las estrategias metodológicas, lo desactualizado de los maestros de matemática y para fortalecer los procesos de enseñanza aprendizaje a través de la elaboración de un nuevo diseño de talleres metodológicos.

Las entrevistas a las autoridades constan de 13 preguntas abiertas referentes al asesoramiento técnico pedagógico de dos expertos en metodología y matemática que avalan este proyecto.

3.6. INSTRUMENTOS DE INVESTIGACIÓN

Los instrumentos de recopilación de datos que se utilizaron en la investigación de este proyecto educativo para comprobar las variables independiente y dependiente que se plantean y que nos permiten llevar adelante este proyecto con coherencia, coordinación, fundamentos metodológicos y científicos, que permitan elaborar y posteriormente presentar una propuesta que esté acorde con la necesidad latente de potenciar el aprendizaje significativo en las funciones racionales.

La observación directa e indirecta: que las utilizamos fundamentalmente para obtener información primaria de los fenómenos que se investigan y para comprobar los planteamientos formulados en el proyecto.

Encuestas:

- Cerradas dirigidas a los maestros/as y alumnos/as.

Entrevistas:

- No estructurada o informal y discursiva dirigida a los docentes y autoridades.

3.7. TRATAMIENTO Y ANÁLISIS DE LOS DATOS

Luego de obtenida la información, los resultados de la investigación fueron procesados por diferenciación de medias y con la ayuda técnica de cuadros estadísticos, gráficos, etc. Los pasos más importantes son:

- 1) Revisión de encuestas, entrevistas y limpieza de los datos.
- 2) Elaboración de la base de datos computarizados en el programa Excel
- 3) Digitación de la información.
- 4) Tratamiento estadístico de la información por diferenciación de medias
- 5) Análisis de resultados.
- 6) Conclusiones y recomendaciones.

3.8. RECURSOS HUMANOS

Rectora	2
Experto en Matemática y metodología Msc. Eladio Oliveros Saúco (Cubano), y Vicerrectora del Colegio Espíritu Santo,	1
Personal docente	2
Asesor del Proyecto	10
Autores del Proyecto	1
	2

Materiales

Papel bond A4, 75 grs	1000
Textos y folletos de consulta	8
Fotocopias	600
Cámara fotográfica	1
Cartucho de impresora	4
Revelados fotográficos	2
Empastados	5

Suministros de oficina

Varios

Económicos

a. Ingresos

Cantidad	Concepto	Ingresos	Egresos	Saldo
\$550,00	Recursos Propios	\$550,00		
Total de Ingresos		\$550,00		\$550,00

b. Resumen de Ingresos y Egresos

Cantidad	Concepto	Ingresos	Egresos	Saldo
1000	Hojas bond A4, 75 grs	\$550,00	\$10,00	\$540,00
4	Textos		\$60,00	\$480,00
4	Folletos de consulta		\$60,00	\$420,00
600	Fotocopias		\$12,00	\$400,00
4	Cartuchos de tintas		\$80,00	\$183,00
2	Revelados fotográficos		\$23,00	\$160,00
5	Empastados		\$30,00	\$130,00
	Transporte		\$30,00	\$100,00
	Imprevistos		\$60,00	\$40,00
	Varios		\$40,00	\$0,00
Total de Ingresos y Egresos		\$550,00	\$55,00	\$0,00

CAPITULO IV

4. LA PROPUESTA

4.1. TALLERES METODÓLOGICOS

Taller grupal 1: ECUACIONES RACIONALES

Fecha: 20/04/2011

1. OBJETIVOS:

- a) Resolver ecuaciones y desigualdades con expresiones racionales
- b) Establecer el conjunto de verdad de un predicado

2. ACTIVIDADES

- **Nombre – calidad:** Se forman cuatro o cinco columnas, cada participante escribe en la pizarra su nombre y una característica personal que empiece con la última letra de su nombre. (se clasifican los participantes de acuerdo a sus características individuales)
- Se entregará material impreso con:
 - Ejercicios resueltos
 - Ejercicios propuestos
- Se realizará plenaria para verificar resultados y procesos que se aplicaron para el desarrollo de los ejercicios y problemas

Taller grupal 1.1: EXPRESIONES RACIONALES Fecha: 18/04/2011

Profesor: Víctor Barros

Tiempo: 90 min.

Grupo:

1. OBJETIVOS:

- Fijar el concepto de expresión racional.
- Simplificar expresiones racionales

2. ACTIVIDADES

DESARROLLO

I) ITEM DE IDENTIFICACIÓN (6min)

¿Cuáles de las siguientes expresiones son racionales?, justifique su respuesta.

a) $\frac{x^2 - \sqrt{2x}}{x+3}$	b) $x^2 + 3x - 2$	c) $\frac{x^{\frac{3}{2}} - 4}{x+1}$
d) $\frac{(x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}} - 1}{x+1}$	e) $\frac{2x + \sqrt{-9}}{x^4 - x^2}$	f) $\frac{2x + \sqrt{9x^4}}{x^4 - x^2}$
g) $\frac{2x - 8x^2}{x^4 - x^2}$	h) $\frac{\sqrt{x-2}}{x^2 - 2x}$	

II) ITEM DE VERDADERO-FALSO (12min)

Por simple inspección establezca el valor de verdad de las proposiciones.

a) $\frac{(z-c)^2}{c-z} = c-z$	b) $\frac{a^2 - 2ab + b^2}{b-a} = a+b$	c) $\frac{1}{2x+3} + \frac{1}{-2x-3} = 0$
d) $\frac{1}{x+y} = \frac{x-y}{y^2-x^2}$	e) $\frac{x^2-4}{2-x} = x+2$	f) $2 - \frac{-2x+8}{4-x} = 0$

III) ITEM DE SELECCIÓN (20 Min)

<p>1. Al simplificar la expresión $\frac{u^2 - v^2}{v-u} \cdot \frac{u+v}{v^2 - u^2}$ se obtiene:</p> <p>a) $\frac{v+u}{u-v}$</p> <p>b) $\frac{v+u}{v-u}$</p> <p>c) $\frac{v-u}{u+v}$</p> <p>d) $\frac{v-u}{u-v}$</p>	<p>2. Luego de simplificar la expresión $\frac{(m-1)^2}{m^2-1}$ se obtiene:</p> <p>a) 1</p> <p>b) $\frac{m-1}{m+1}$</p> <p>c) $\frac{m+1}{-m+1}$</p> <p>d) $-\frac{m+1}{m-1}$</p>
--	---

<p>3. El resultado de simplificar la expresión racional $\frac{x-5}{(x-4)x-5}$ es:</p> <p>a) $\frac{1}{x-4}$</p> <p>b) $x-5$</p> <p>c) $x+1$</p> <p>d) $\frac{1}{x+1}$</p>	<p>4. ¿Cuál de las siguientes expresiones está bien simplificada?</p> <p>a) $\frac{x-4}{x^2-16} = x+4$</p> <p>b) $\frac{50x^2-5x}{5x} = 10x^2-1$</p> <p>c) $\frac{5x-5}{5} = 5x$</p> <p>d) $\frac{z^2+2z}{2z} = \frac{z}{2}+1$</p>
---	--

IV) ITEM DE DE DESARROLLO (20 min)

Realice las transformaciones necesarias para simplificar las expresiones.

1. $\frac{ x-4 }{4-x}$	2. $2\frac{b-y}{y-b} - \frac{y-b}{b-y}$,	3. $\frac{1}{2x+3} \cdot \frac{1}{-2x-3}$
4. $\frac{m-1}{m+2 - \frac{m^2+2}{m - \frac{m-2}{m+1}}}$	5. $\frac{m-7}{m^2+m-6} + \frac{4m-5}{2m^2-5m+2} - \frac{3m-5}{2m^2+5m-3}$	

V) BONO: ITEM DE SELECCIÓN

Al simplificar la expresión algebraica $\frac{2x^2+(x+y)(y-x)+(-2)(-y)^2}{(x-3y)^2+16xy-10y(x+y)}$ se

obtiene:

- a) 1 b) 0 c) 1/3 d) -1 e) -1/3

RÚBRICA PARA LA EVALUACIÓN DEL TALLER

1. Desarrollo del taller: 60 min
2. Plenaria para observar los resultados: 30 min
3. Taller de fijación para la casa

I) ITEM DE IDENTIFICACIÓN

Ejercicio	Valoración	Reconoce las expresiones racionales	Reconoce las expresiones racionales y justifica a medias	Reconoce las expresiones racionales y justifica satisfactoriamente
		50%	75%	100%
(a)	0,5pts			
(b)	0,5pts			
(c)	0,5pts			
(d)	0,5pts			
(e)	0,5pts			
(f)	0,5pts			
(g)	0,5pts			
(h)	0,5pts			
Total	4pts			

II) ITEM DE VERDADERO – FALSO

Ejercicios	Valoración	No acierta la respuesta	Acierta la respuesta
(a)	1 pts	0%	100%
(b)	1 pts	0%	100%
(c)	1 pts	0%	100%
(d)	1 pts	0%	100%
(e)	1 pts	0%	100%
(f)	1 pts	0%	100%
Total	6 pts		

III) ITEM DE SELECCIÓN

Ejercicios	Valoración	Elige la respuesta correcta y no justifica	Elige la respuesta correcta y justifica a medias	Elige la respuesta correcta y justifica plenamente
		40%	60%	100%
(1)	2 pts			
(2)	2 pts			
(3)	3 pts			
(4)	3 pts			
Total	10pts			

IV) ITEMS DE DESARROLLO

Ejercicios	Valoración	Transforma las expresiones correctamente	Transforma correctamente y simplifica	Transforma, simplifica y opera correctamente	Transforma, simplifica, opera y obtiene la respuesta correcta

		25%	50%	75%	100%
1	2pts				
2	2pts				
3	2pts				
4	2pts				
5	2pts				
Total	10 pts.				

BONO) ITEMS DE DESARROLLO

Ejercicio	Valoración	Transforma las expresiones correctamente	Transforma correctamente e y simplifica	Transforma, simplifica y opera correctamente	Transforma, simplifica, opera y obtiene la respuesta correcta
		25%	50%	75%	100%
BONO	5				

TALLER 1 DE FIJACIÓN PARA LA CASA

Fecha: 18/04/2011

Profesores: Víctor Barros, Aníbal Matteucci

Objetivos:

- Fijar el concepto de expresión racional.
- Simplificar expresiones racionales

DESARROLLO

I) ITEM DE IDENTIFICACIÓN

¿Cuáles de las siguientes expresiones son racionales?, justifique su respuesta.

i) $\frac{x^2 - \sqrt{2}x}{x+3}$	j) $\frac{6+a^2-5a}{(3-a)(2-a)}$	k) $\frac{\sqrt{x^{\frac{3}{2}}-4}}{x+1}$
l) $\frac{(x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}-1}{x+1}$	m) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{-8}}{x^4-x^2}$	n) $\frac{2x+\sqrt{9\sqrt{x^4}}}{x^4+x^2}$
o) $\frac{2b-8y^2}{b^4-y^2}$	p) $\frac{\sqrt{(x-2)x}}{\sqrt{x^2-2x}}$	

II) ITEM DE VERDADERO-FALSO

Por simple inspección establezca el valor de verdad de las proposiciones.

g) $\frac{(2-m)^2}{m-2} = m-2$	h) $\frac{b-a}{a^2-2ab+b^2} = b-a$	i) $\frac{1}{2x-3} - \frac{1}{-3+2x} = 0$
j) $\frac{1}{x^2-y^2} = \frac{x-y}{y^3-x^3}$	k) $\frac{ x^2-4 }{x-2} = x+2$	l) $\frac{-x+4}{8-2x} + \frac{1}{2} = 0$

III) ITEM DE SELECCIÓN

<p>5. El resultado de simplificar la expresión racional $\frac{m+3}{(m-2)(m+3)}$, es:</p> <p>e) $\frac{1}{2-m}$</p> <p>f) $\frac{1}{m-2}$</p> <p>g) $m-2$</p> <p>h) $\frac{1}{m+1}$</p>	<p>6. El resultado de simplificar la expresión racional $\frac{m+2}{(m+2)m-3}$, es:</p> <p>i) $\frac{1}{m-3}$</p> <p>j) $\frac{1}{m-1}$</p> <p>k) $m-3$</p> <p>l) $\frac{1}{m-1}$</p>
<p>7. El resultado la expresión $\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1$, es:</p> <p>a) $1-2x+x^2$</p> <p>b) $\frac{(1+x)^2}{x^2}$</p> <p>c) $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$</p> <p>d) $\left(\frac{1}{x}+1\right)^2$</p>	<p>8. El resultado la expresión $\frac{a^2+b^2}{a-b}$, es:</p> <p>a) $a+b$</p> <p>b) $\frac{a^2-b^2}{a-b}$</p> <p>c) $\frac{2b^2}{a-b} + a+b$</p> <p>d) Ninguna</p>

IV) ITEM DE DE DESARROLLO

Realice las transformaciones necesarias para simplificar las expresiones.

6. $\frac{3ax - xa}{a^2x - 2ax^2}$	7. $\frac{(x+4)^2}{-4-x}$	8. $\frac{\sqrt{2} + x}{x^2 - 2}$
9. $\frac{4x^3 - 9x}{10x^4 + 11x^3 - 6x^2}$	10. $\frac{4x^2 + 11x + 6}{x^2 - 7x - 18} \div (8x + 6)$	
11. $\frac{(a^2 - 6a + 5)}{(a^2 - 15a + 56)} \div \frac{(a^2 + 2a - 35)}{a^2 - 5a - 24}$	12. $\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x^2 + 2x - 3} + \frac{1}{x^2 + 4x + 3}$	
13. $\frac{(\sqrt{x} - 1)(x^2 - 3x + 2)}{(x - 1)^2}$		

RUBRICA PARA LA EVALUACION DEL TALLER

I) ITEM DE IDENTIFICACIÓN

ejercicios	valoración	Reconoce las expresiones racionales	Reconoce las expresiones racionales y justifica satisfactoriamente
		50%	100%
(a)	0,5pts		
(b)	0,5pts		
(c)	0,5pts		
(d)	0,5pts		
(e)	0,5pts		
(f)	0,5pts		
(g)	0,5pts		
(h)	0,5pts		
total	4pts		

II) ITEM DE VERDADERO – FALSO

Ejercicios	valoración	No acierta la respuesta	Acierta la respuesta
(a)	1 pts	0%	100%
(b)	1 pts	0%	100%
(c)	1 pts	0%	100%
(d)	1 pts	0%	100%
(e)	1 pts	0%	100%
(f)	1 pts	0%	100%
total	6 pts		

III) ITEM DE SELECCIÓN

Ejercicios	Valoración	Elige la respuesta correcta y no justifica	Elige la respuesta correcta y justifica a medias	Elige la respuesta correcta y justifica plenamente
		30%	70%	100%
(1)	2 pts			
(2)	2 pts			
(3)	3 pts			
(4)	3 pts			
total	10pts			

IV) ITEMS DE DESARROLLO

Ejercicios	Valoración	Transforma las expresiones correctamente	Transforma correctamente y simplifica	Transforma, simplifica y opera correctamente	Transforma, simplifica, opera y obtiene la respuesta correcta
		25%	50%	75%	100%
1	2,5pts				
2	2,5pts				
3	2,5pts				
4	2,5pts				
5	2,5pts				
6	2,5pts				
7	2,5pts				
8	2,5pts				
Total puntaje	20 pts.				

Taller grupal 2: ECUACIONES RACIONALES

Fecha: 20/04/2011

1. OBJETIVOS:

- c) Resolver ecuaciones y desigualdades con expresiones racionales
- d) Establecer el conjunto de verdad de un predicado

2. ACTIVIDADES

DESARROLLO

I) ITEMS DE EMPAREJAMIENTO (5min)

Por simple observación, halle el conjunto solución de cada ecuación o desigualdad.

q) $2x - 4 = 6$	$x = 0$
r) $\frac{2x - 6}{x - 3} = 2$	$x = \pm 1$
s) $ x + 2 = 0$	$x = 5$
t) $\frac{x^2 - 1}{3} = 0$	$x = -2$
u) $\frac{(x - 5) \cdot (1 + x)}{x + 1} = 0$	$X = 3$

II) ITEM DE IDENTIFICACIÓN (10 min)

1. Para que valores de x no están definidas las expresiones:	
a) $\frac{5x^2 - 10}{x}$	
b) $(2x - 2)x$	
c) $\frac{5}{4 + x^2}$	
d) $\frac{x - 4}{(x - 7)(x + 3)}$	
e) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$	

2. Para que valores de x están definidas las siguientes expresiones:	
f) $\frac{(2x + 3)^2}{1 - x^2}$	
g) $\frac{(2x - 2)x}{1 - x^2}$	
h) $\frac{x^2 + 2}{1 + x^2}$	
i) $\frac{x^3 - 343}{x - 7}$	

j) $\frac{x^2 - 6x + 3}{3 - x}$	
---------------------------------	--

III) ITEM DE VERDADERO-FALSO (10)

3. El conjunto de verdad del predicado $p(x): \frac{4(x-2)}{x-3} + \frac{3}{x} = \frac{-3}{x-3}$ es:

$$Ap(x) = \left\{ \frac{1 + \sqrt{37}}{4} \right\}$$

- a) verdadero
- b) falso

4. El conjunto de verdad del predicado $p(x): \frac{x^2 + 17}{x^2 - 1} = \frac{x-2}{x+1} - \frac{5}{1-x}$ es:

$$Ap(x) = \left\{ x/x = \frac{5}{3} \right\}$$

- c) verdadero
- d) falso

IV) PREGUNTAS DE DESARROLLO (20 min)

1. Sea $\mathbb{R} = \mathbb{R}$, determine el conjunto de verdad de los siguientes predicados:

- $p(x): \frac{3}{2}x - 2(x+1) = 3(x+7) + \frac{x+1}{3}$
- $q(x): \frac{x^2 + 2x - 8}{x-2} + \frac{16x}{x-4} = \frac{x^2}{x-4}$
- $r(x): \frac{x^2 + 17}{x^2 - 1} = \frac{x-2}{x+1} - \frac{5}{1-x}$
- $s(x): \left| \frac{2}{1-x} \right| - 3 = 0$
- $u(x): \frac{x-a}{a-b} - \frac{x+b}{a+b} = \frac{a-x}{a+b} - 2 \frac{x-b}{a-b}$
- $u(x): \frac{x-a}{a-b} - \frac{x+a}{a+b} = \frac{b-x}{a+b} - 2 \frac{x-b}{a-b}$

BONO (5 min)

5. BONO. Al resolver la ecuación $\frac{5}{x+3} + 3 = \frac{8+x}{x+3}$ se obtiene $x=-3$; ¿es coherente esta respuesta?

- Si, exponga su criterio
- No, porqué

RUBRICA PARA LA EVALUACION DEL TALLER

1. Desarrollo del taller: 50 min
2. Plenaria para observar los resultados:40 min
3. Taller de fijación para la casa

ITEM DE EMPAREJAMIENTO				
ejercicios	valoración	Reconoce las expresiones racionales	Reconoce las expresiones racionales y justifica a medias	Reconoce las expresiones racionales y justifica satisfactoriamente
		50%	75%	100%
(a)	1 pts			
(b)	1 pts			
(c)	1 pts			
(d)	1 pts			
(e)	1 pts			
total	5pts			
ITEM DE IDENTIFICACION				
ejercicios	valoración	Reconoce las expresiones racionales	Reconoce las expresiones racionales y justifica a medias	Reconoce las expresiones racionales y justifica satisfactoriamente
		50%	75%	100%
(a)	1 pts			
(b)	1 pts			
(c)	1 pts			
(d)	1 pts			
(e)	1 pts			
(f)	1 pts			
(g)	1 pts			
(h)	1 pts			
(i)	1 pts			

(j)	1 pts			
total	10pts			
ITEM DE VERDADERO – FALSO				
ejercicios	Valoración	No acierta la respuesta	Acierta la respuesta	
(a)	2.5pts	0%	100%	
(b)	2.5pts	0%	100%	
total	5pts			

ITEMS DE DESARROLLO					
EJERCICIO	Valoración	Transforma las expresiones correctamente	Transforma correctamente y simplifica	Transforma, simplifica y opera correctamente	Transforma, simplifica, opera y obtiene la respuesta correcta
		25%	50%	75%	100%
1	5pts				
2	5pts				
3	5pts				
4	5pts				
Total – puntaje	20 pts.				

TALLER 2 DE FIJACIÓN PARA LA CASA ECUACIONES RACIONALES

Fecha: 20/04/2011

Objetivos:

- e) Resolver ecuaciones y desigualdades con expresiones racionales
- f) Establecer el conjunto de verdad de un predicado

ACTIVIDADES

DESARROLLO

i. ITEMS DE EMPAREJAMIENTO

Por simple observación, halle el conjunto solución de cada ecuación

v) $3x - 18 = -3$	$-\frac{3}{2}$
w) $4 = (x + 5) - x$	$x = 5$
x) $\frac{(2x + 3)^2}{3 - 2x} = 0$	Φ
y) $\frac{x^2 - 1}{1 - x^2} = 0$	$x = 3$
z) $\frac{2}{x + 5} = \frac{1}{4}$	$x = \pm 1$

ii. ITEM DE IDENTIFICACIÓN

6. Para que valores de x no están definidas las expresiones:	
k) $\frac{4x^2 + 6}{2x}$	
l) $(3x + 7) - x$	
m) $\frac{2 - x}{4 + x^2}$	
n) $\frac{x + 4}{x^2 - 3x - 28}$	
o) $\frac{x + 6}{x^2 - 3}$	

7. Para que valores de x están definidas las siguientes expresiones:	
p) $\frac{(x + 3)^2}{16 - x^2}$	
q) $\frac{(2x - 2)x}{1 + x^2}$	
r) $\frac{x^2 + 4}{(1 + x)(4 + x)}$	
s) $\frac{x - 4}{x^3 - 64}$	

t) $\frac{6x+3}{3-x} - \frac{2}{x-3}$	
---------------------------------------	--

iii. ITEM DE VERDADERO-FALSO

8. El conjunto de verdad del predicado $p(x): \frac{(x-2)}{2} + \frac{1}{3}(x-2) = 5$ es:

$$Ap(x) = \{x/x = 8\}$$

- e) verdadero
- f) falso

9. El conjunto de verdad del predicado $p(x): \frac{3x+5}{2} + 6 - \frac{3x+5}{4} = \frac{2(3x+5)}{5}$ es:

$$Ap(x) = \left\{x/x = \frac{5}{3}\right\}$$

- g) verdadero
- h) falso

iv. Preguntas de desarrollo

Sea $\mathbb{R} = \mathbb{R}$, determine el conjunto de verdad de los siguientes predicados:

- $r(x): \left| \frac{2-x}{1-x} - 1 \right| - 4 = 0$
- $s(x): \frac{4x^3 - 9x}{10x^4 + 11x^3 - 6x^2} = 1$
- $t(x): \frac{4}{x+4} + \frac{1}{x+3} + \frac{3}{1+x} = 0$
- $u(x): \frac{1}{x-1} + \frac{12x^2 - 4x}{4x^2 - 11x - 3} + \frac{3x^2 + 8x - 3}{x^2 - 9} = 0$

RUBRICA PARA LA EVALUACION DEL TALLER 2 DE FIJACIÓN

b) ITEM DE EMPAREJAMIENTO				
		Reconoce las expresiones racionales	Reconoce las expresiones racionales y justifica a medias	Reconoce las expresiones racionales y justifica satisfactoriamente
ejercicios	valoración	50%	75%	100%
(a)	1 pts			
(b)	1 pts			
(c)	1 pts			
(d)	1 pts			
(e)	1 pts			
Total	5pts			

c) ITEM DE IDENTIFICACION				
		Reconoce las expresiones racionales	Reconoce las expresiones racionales y justifica a medias	Reconoce las expresiones racionales y justifica satisfactoriamente
ejercicios	valoración	50%	75%	100%
(a)	1 pts			
(b)	1 pts			
(c)	1 pts			
(d)	1 pts			
(e)	1 pts			
(f)	1 pts			
(g)	1 pts			
(h)	1 pts			
(i)	1 pts			
(j)	1 pts			
Total	10pts			

d) ITEM DE VERDADERO – FALSO			
		No acierta la respuesta	Acierta la respuesta
Ejercicios	Valoración		
(a)	2.5pts	0%	100%
(b)	2.5pts	0%	100%
Total	5pts		

e) ITEMS DE DESARROLLO					
		Transforma las expresiones correctamente	Transforma correctamente y simplifica	Transforma, simplifica y opera correctamente	Transforma, simplifica, opera y obtiene la respuesta correcta
EJERCICIO	valoración	25%	50%	75%	100%
1	5pts				
2	5pts				
3	5pts				
4	5pts				
Total puntaje	- 20 pts.				

TALLER GRUPAL 3: INECUACIONES

Objetivos:

- a) Resolver inecuaciones con expresiones racionales
- b) Establecer el conjunto de verdad de un predicado

DESARROLLO

I) ITEMS DE EMPAREJAMIENTO (6min)

Una con una línea los predicados de la izquierda con los correspondientes conjuntos solución de la derecha. El conjunto referencial es IR.

- | | |
|----------------------------|---------------|
| a) $2 x+4 =0$ | $\{x/x > 1\}$ |
| b) $2x-6 \leq 0$ | $IR - \{3\}$ |
| c) $x^2+2 \leq 0$ | $X = -4$ |
| d) $\frac{x^2-1}{x+1} > 0$ | $x \leq 3$ |
| e) $ x-3 > 0$ | Φ |
| f) $ 3x-3 \leq 0$ | $x=1$ |

II ITEM DE VERDADERO Y FALSO

Sea IR el conjunto referencial, determine la veracidad o falsedad de las proposiciones. Justifique su respuesta:	
a) $-x > -y \rightarrow x > y$	
b) $p(x): x+4 \leq -5 \Leftrightarrow Ap(x) = IR$	
c) $\left \frac{x^2+2}{x+1} \right = \frac{x^2+2}{ x+1 }$	
d) $p(x): -5 \leq 4-3x \leq 2 \rightarrow Ap(x) = \{x/x \in [\frac{2}{3}; 3]\}$	
e) $q(x): \frac{-x+1}{x+2} > 0 \rightarrow Aq(x) = \{x/x \in (-2,1)\}$	

II) ITEM DE SELECCIÓN (20)

Sea $Re = \mathbb{R}$ el conjunto referencial, analice la resolución de cada inecuación y determine cuál está bien resuelta.

$$\begin{array}{l}
 a) \left\{ \begin{array}{l} 4-2x > 1+x, \\ -2x-x > 1-x, \\ -3x > -3 \\ x > \frac{-3}{-3} \\ x > 1 \\ x \in (1, +\infty) \end{array} \right. \quad b) \left\{ \begin{array}{l} \frac{2x-1}{x+2} > 1, \\ 2x-1 > x+2 \\ 2x-x > 2+1 \\ x > 3 \\ x \in (3, +\infty) \end{array} \right. \quad c) \left\{ \begin{array}{l} x^2-1 > 0, \\ x^2 > 1 \\ \sqrt{x^2} > \sqrt{1} \\ x > 1 \\ x \in (1, +\infty) \end{array} \right. \quad d) \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2-1}{x-1} > 0, \\ \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} > \\ x+1 > 0 \\ x > -1 \\ x \in (-1, +\infty) \end{array} \right. \quad e) \left\{ \begin{array}{l} x^4 < x^2, \\ x^4 - x^2 < 0 \\ x^2(x^2-1) < 0 \\ x^2(x-1)(x+1) < 0 \\ (x-1)(x+1) < 0 \\ -1 < x < 1 \\ x \in (-1, 1) \end{array} \right.
 \end{array}$$

III) PREGUNTAS DE DESARROLLO (20 min)

Sea $Re = \mathbb{R}$ el conjunto referencial, determine el conjunto de verdad de los siguientes predicados:		
1	$p(x): \frac{2x^3 - 2x}{1 - x^2} < 1$	
2	$q(x): \frac{x-1}{1-x} + \frac{1-x}{x-1} > 0$	
3	$r(x): x^3 \leq x$	
4	$t(x): 2x+4 \leq 10$	
5	$t(x): \frac{3}{2}x + 3 x-2 \leq 3$	

BONO. Al resolver la inecuación $\left| 3\frac{x-1}{x+3} - 4\frac{x}{x+3} \right| \leq 3$ se obtiene $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$; ¿es coherente esta respuesta?

RUBRICA PARA LA EVALUACION DEL TALLER

- Desarrollo del taller: 60 min
- Plenaria para observar los resultados: 30 min
- Taller de fijación para la casa

I) ITEM DE EMPAREJAMIENTO			
		No empareja correctamente	Empareja correctamente
Ejercicios	valoración	0%	100%
(a)	0,5 pto	0%	100%
(b)	0,5 pto	0%	100%
(c)	0,5 pto	0%	100%
(d)	0,5 pto	0%	100%
(e)	0,5 pto	0%	100%
(f)	0,5 pto	0%	100%
Total	3pts		

II) ITEM DE VERDADERO - FALSO					
Ejercicios	Valoración	No acierta la respuesta	Acierta la respuesta y no justifica	Acierta la respuesta Y justifica a medias	Acierta la respuesta y justifica plenamente
(a)	1 pto	0%	30%	70%	100%
(b)	1 pto	0%	30%	70%	100%
(c)	1 pto	0%	30%	70%	100%
(d)	2pts	0%	30%	70%	100%
(e)	2pts	0%	30%	70%	100%
Total	7 pts				

III) ITEM DE SELECCIÓN						
			Analiza correctamente dos literales	Analiza correctamente tres literales	Analiza correctamente cuatro literales	Analiza correctamente todos los literales
Total	10pts	20%	40%	60%	80%	100%

IV) ITEMS DE DESARROLLO					
		Transforma las expresiones correctamente	Transforma correctamente e y simplifica	Transforma, simplifica y opera correctamente	Encuentra el conjunto de verdad correctamente
Ejercicios	Valoración	25%	50%	75%	100%
1	4pts				
2	4pts				
3	4pts				
4	4pts				
5	4pts				
Total - puntaje	20 pts.				

BONO				
		No realiza ningún cálculo o realiza cálculos inadecuados	Realiza cálculos adecuados pero no concluye	Realiza cálculos adecuados y justifica claramente
Total	5pts	0%	60%	100%

TALLER GRUPAL 3: INECUACIONES FIJACION PARA LA CASA

Objetivos:

- Resolver inecuaciones y desigualdades con expresiones racionales y valor absoluto.
- Establecer el conjunto de verdad de un predicado

DESARROLLO

I) ITEMS DE EMPAREJAMIENTO

Una con una línea los predicados de la izquierda con los correspondientes conjuntos solución de la derecha. El conjunto referencial es IR.

- | | |
|----------------------------|-----------------------|
| a) $ -x-4 =0$ | $\{x/x > 1\}$ |
| b) $12-6x \leq 0$ | $IR - \{3\}$ |
| c) $x^2 + 5 \leq 0$ | $x=-4$ |
| d) $\frac{x^2+1}{x+1} < 0$ | $x \geq 3$ |
| e) $ 3-x > 0$ | ϕ
\emptyset |
| | $\{x/-x > 1\}$ |

b) ITEM DE VERDADERO- FALSO

10. Determine por simple inspección la veracidad o falsedad de las proposiciones:	
a) $6 \geq x \Leftrightarrow -6 \leq x \leq 6$	
b) $ x+1 \leq -2 \Leftrightarrow Ap(x) = IR$	
c) $\frac{1}{4+x^2} \geq 0 \Leftrightarrow Ap(x) = \phi$	
d) $\left(\frac{1}{x} > \frac{1}{y}\right) \rightarrow (x > y)$	
$\left \frac{x^2+4}{x+1}\right = \frac{x^2+4}{ x+1 }$	

III) PREGUNTAS DE DESARROLLO

Sea $\mathbb{R} = \mathbb{R}$, determine el conjunto de verdad de los siguientes predicados:

- $r(x): |x-1| \geq \frac{x+1}{2}$
- $s(x): \left| \frac{2}{1-x} - 3 \right| - 3 = 0$
- $t(x): \left| \frac{1}{x+2} + 4 \right| = -2$
- $r(x): |x+2| \geq \frac{x-1}{2}$

RUBRICA PARA LA EVALUACION DEL TALLER

I) ITEMS DE EMPAREJAMIENTO

		No empareja correctamente	Empareja correctamente
ejercicios	valoración	0%	100%
(a)	1 pts		
(b)	1 pts		
(c)	1 pts		
(d)	1 pts		
(e)	1 pts		
Total	5pts		

II) ITEM DE VERDADERO – FALSO			
		No acierta la respuesta 0%	Acierta la respuesta 100 %
ejercicios	Valoración		
(a)	3pts		
(b)	3 pts		
(c)	3 pts		
(d)	3 pts		
(e)	3 pts		
Total	15pts		

III) ITEMS DE DESARROLLO

		Transforma las expresiones correctamente	Transforma correctamente y simplifica	Transforma, simplifica y opera correctamente	Transforma, simplifica, opera y obtiene la respuesta correcta
EJERCICIO	valoración	25%	50%	75%	100%
1	5pts				
2	5pts				
3	5 pts				
4	5 pts				
Total – puntaje	20 pts.				

TALLER GRUPAL 4: TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

Profesor: Víctor Barros- Aníbal Matteucci

CURSO: III DE BACH. A

Tiempo: 90 min

Taller grupal 4: TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

Fecha: 20/04/2011

Objetivos:

- Identificar los tipos de funciones
- Describir las características de las funciones

I) **ITEM DE IDENTIFICACIÓN.** Relacione cada gráfica con la función enumerada que más se asemeje. Coloque la letra en el cuadro correspondiente

II)

A. Función Raíz

B. Función constante

C. Función recíproca

D. Función lineal

E. Función cuadrática

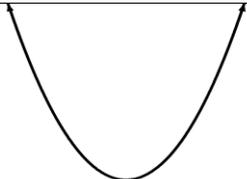
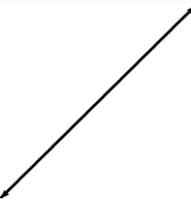
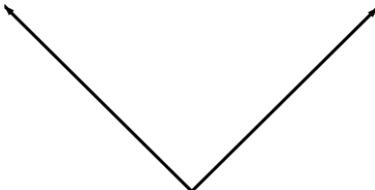
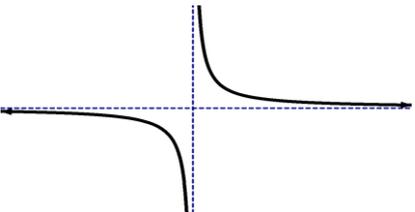
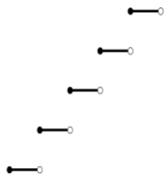
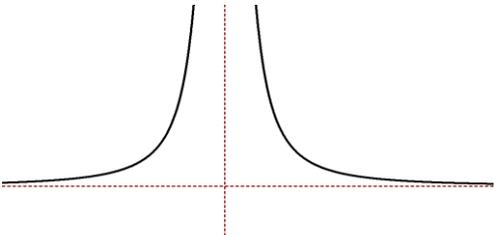
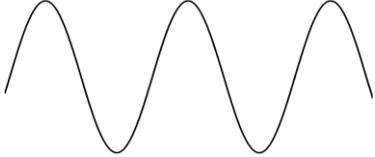
F. Función entero mayor

G. Función cúbica

H. Función valor absoluto

I. Función periódica

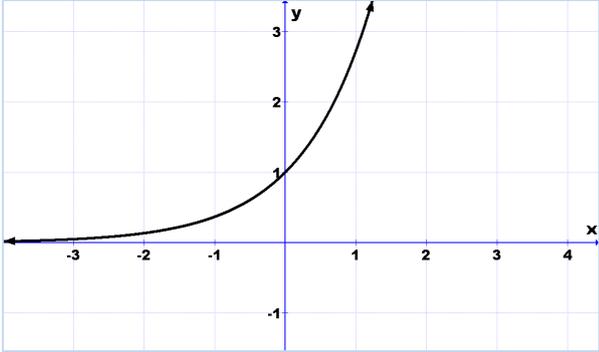
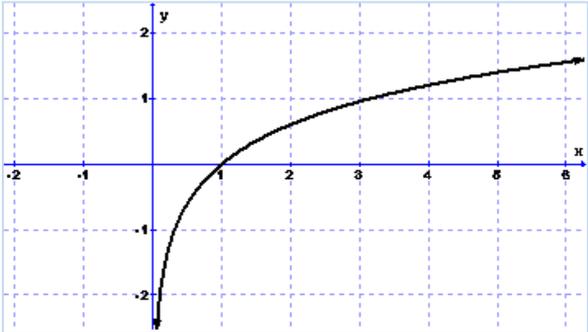
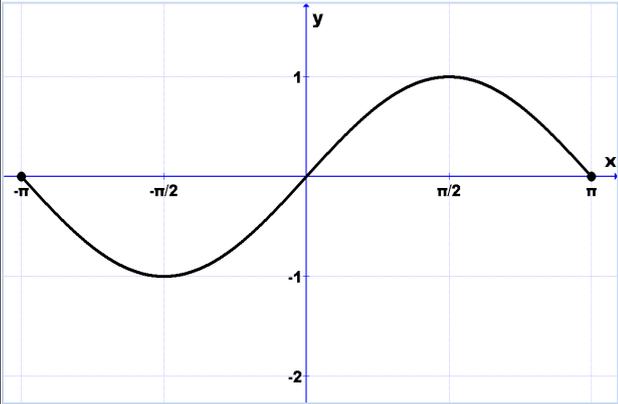
J. Función recíproco al cuadrado

III) ITEM DE DESARROLLO. EN LOS RECUADROS APARECE UNA FUNCIÓN. UTILÍCELA PARA DETERMINAR:

- (A) El dominio y el rango.
- (B) Los intervalos donde es creciente, decreciente o constante.
- (C) Si es par, impar o de ninguna clase de estas.
- (D) Las intersecciones con los ejes, si existen.
- (E) El signo de la función
- (F) Las ecuaciones de las asíntotas (si existen)

GRÁFICAS	
1)	
2)	

<p>3)</p>		
<p>4)</p>		
<p>5)</p>		

<p>6)</p>		
<p>7)</p>		
<p>8)</p>		

9)		
10)		
BONO		

RUBRICA PARA LA EVALUACION DEL TALLER

1. Desarrollo del taller: 50 min
2. Plenaria para observar los resultados: 40 min
3. Taller de fijación para la casa

I) ITEM DE IDENTIFICACIÓN			
Ejercicios	valoración	No identifica la función	Identifica correctamente la función
		0%	100%
(a)	1 pto		
(b)	1 pto		

(c)	1 pto		
(d)	1 pto		
(e)	1 pto		
(f)	1 pto		
(g)	1 pto		
(h)	1 pto		
(i)	1 pto		
(j)	1 pto		
Total	10 pts		

II) ITEM DE DESARROLLO							
Ejercicios	Valor	Determina dominio y rango	Determina los intervalos de monotonía	Reconoce la paridad de la función	Determina las intersecciones con los ejes.	Determina el signo de la función	Escribe correctamente las ecuaciones de las asíntotas
		20%	20%	10%	20%	20%	10
1)	3 pts						
2)	3 pts						
3)	3 pts						
4)	3 pts						
5)	3 pts.						
6)	3 pts						
7)	3 pts						
8)	3 pts						
9)	3 pts						
10)	3 pts.						
Total – puntaje	30 pts.						
Ejercicio	Valor	Determina dominio y rango	Determina los intervalos de monotonía	Reconoce la paridad de la función	Determina las intersecciones con los ejes.	Determina el signo de la función	Escribe correctamente las ecuaciones de las asíntotas
BONO	5pts.	20%	20%	10%	20%	20%	10
Total	5 pts.						

TALLER GRUPAL 5: TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

Taller grupal 5: TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

Fecha: 13/05/2011

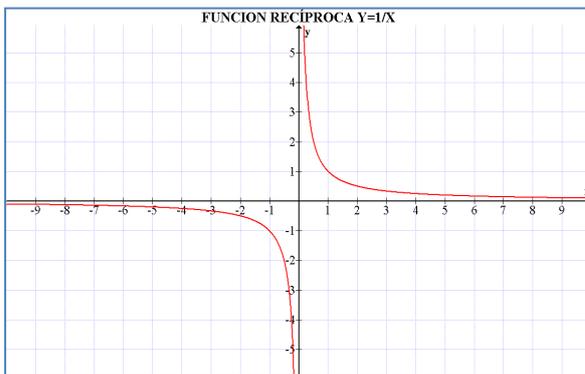
Objetivos:

- Aplicar las técnicas de graficación
- Recuerda las estrategias para graficar funciones

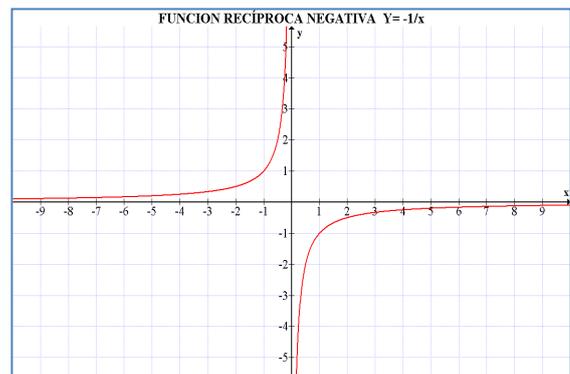
PARA GRAFICAR	DIBUJAR LA GRÁFICA DE F Y:	CAMBIO FUNCIONAL EN f(x)
Traslación vertical		
$y = f(x) + k, \quad k > 0$	Subir k unidades la gráfica de f	Sumar k unidades a f(x)
$y = f(x) - k, \quad k > 0$	Bajar k unidades la gráfica de f	Restar k unidades a f(x)
Traslación horizontal		
$y = f(x + h), \quad h > 0$	Correr la gráfica de f h unidades a la izquierda	Sumar k unidades a f(x)
$y = f(x - h), \quad h > 0$	Correr la gráfica de f h unidades a la derecha	Restar k unidades a f(x)
Compresión o Estiramiento		
$y = af(x), \quad a > 0$	Multiplicar por a cada coordenada de y en $y = f(x)$ Estirar verticalmente la gráfica de f(x) si $a > 1$. Comprimir verticalmente la gráfica de f(x) si $0 < a < 1$	Multiplicar f(x) por a
$y = f(ax), \quad a > 0$	Multiplicar por $\frac{1}{a}, a > 0$ cada coordenada de x en $y = f(x)$ Estirar la gráfica de f(x) horizontalmente si $0 < a < 1$.	Sustituir x por ax en f(x)

	Comprimir la gráfica de $f(x)$ horizontalmente si $a > 1$	
Reflexión en el eje x		
$y = -f(x)$	Reflejar la gráfica de f en el eje x	Multiplica $f(x)$ por -1
$y = f(-x)$	Reflejar la gráfica de f en el eje x	Sustituir x por $-x$
$y = -f(-x)$	Reflejar la gráfica de f respecto al origen	Sustituir x por $-x$ y Multiplica $f(x)$ por -1

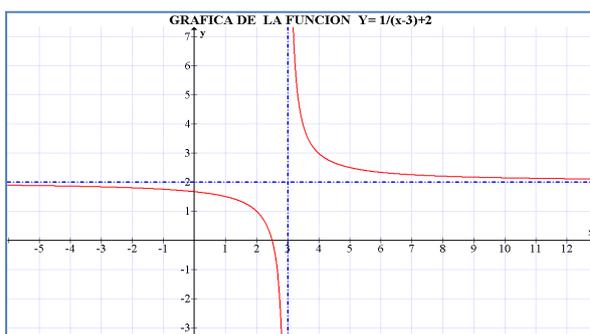
APLICACIÓN DE LAS TÉCNICAS.



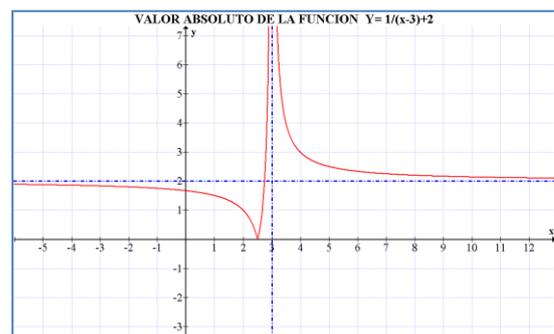
FUNCIÓN ORIGINAL



REFLEXION RESPECTO AL EJE X

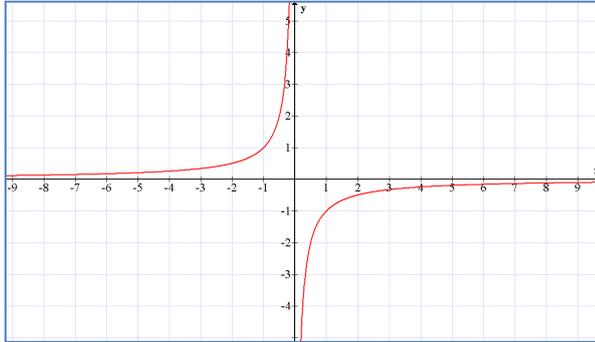


DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL Y VERTICAL



DEPLAZAMIENTO HORIZONTAL, VERTICAL Y VALOR ABSOLUTO

GRÁFICA



FUNCIÓN Y ASÍNTOTAS

Función $y = -\frac{1}{x}$

Asíntota horizontal

$y=0$

Asíntota vertical

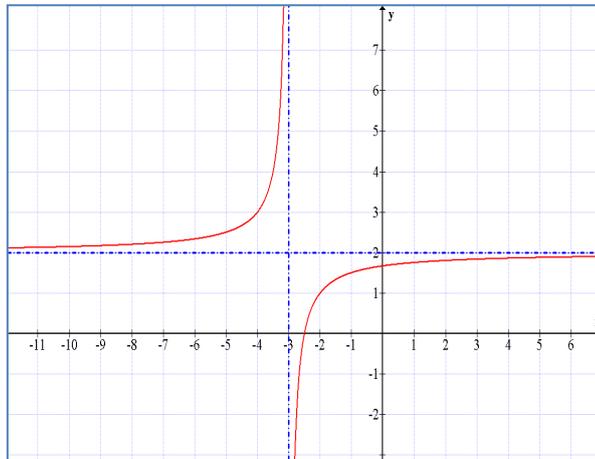
$X=0$

DESARROLLO DE ACTIVIDADES

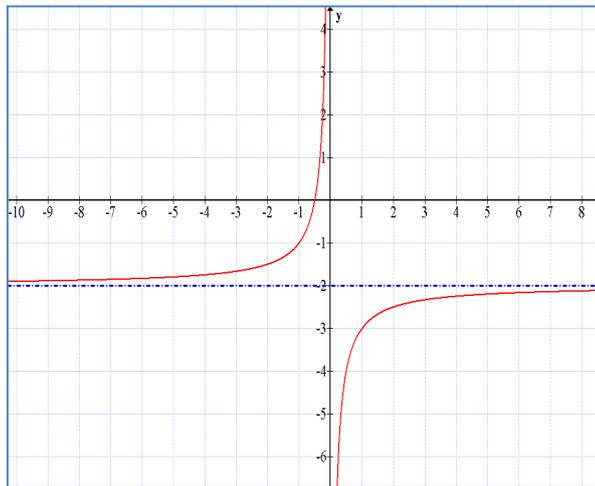
I) ÍTEM DE IDENTIFICACIÓN.

Relacione cada gráfica de la función recíproca con su respectiva ecuación y ponga las ecuaciones de las asíntotas.

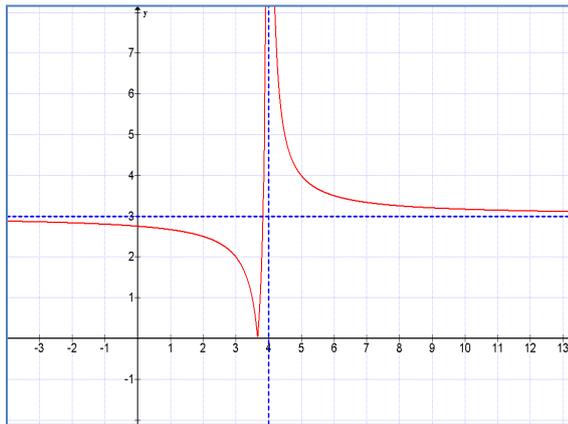
1)



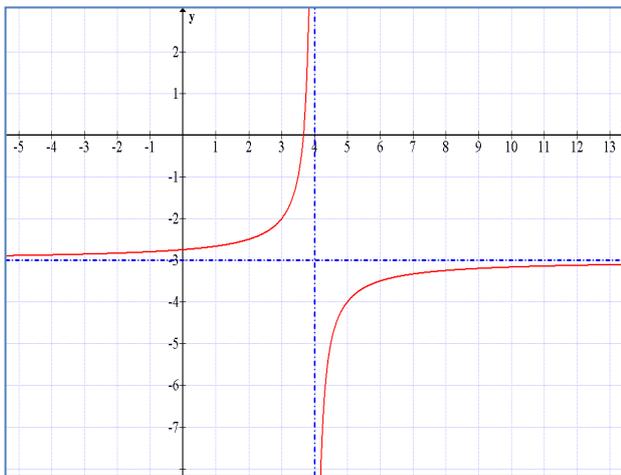
2)



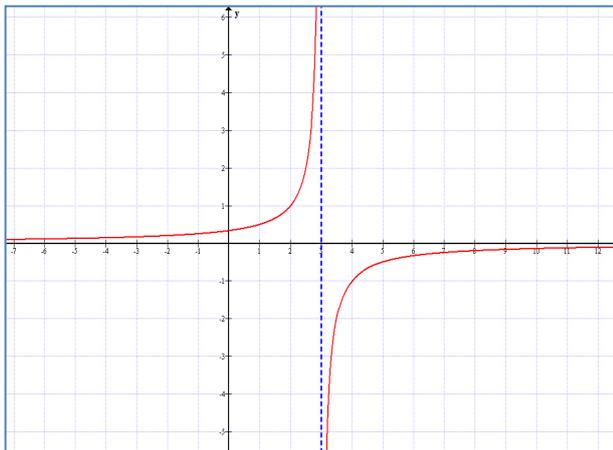
3)



4)



5)



ITEM DE DESARROLLO

UTILICE LAS TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN PARA TRAZAR BOSQUEJOS DE LAS FUNCIONES PASO A PASO.

a) $y = \frac{1}{x-3} + 4$

b) $y = \frac{2}{-x+4} - 3$

c) $y = \frac{1}{2x+4} + 1$

d) $y = \frac{2}{-x-4} - 3$

e) $y = \frac{-2}{4-x} - 3$

II) **BONO. TRACE LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN:** $y = \left| \frac{2}{x-4} - 3 \right|$

RUBRICA PARA LA EVALUACION DEL TALLER

- 1.- Desarrollo del taller: 50 min
- 2.- Plenaria para observar los resultados: 40 min
- 3.- Taller de fijación para la casa

III) ITEM DE IDENTIFICACIÓN				
		CONSTRUYE CORRECTAMENTE LA ECUACIÓN	ESCRIBE LA FUNCIÓN Y UNA ASÍNTOTA	ESCRIBE LA FUNCIÓN Y LAS DOS ASÍNTOTAS
Ejercicios	valoración	50%	75%	100%
(a)	3 pts			
(b)	3 pts			
(c)	3 pts			
(d)	3 pts			
(e)	3 pts			
Total	15 pts			

IV) ITEM DE DESARROLLO

		Grafica la función original	Realiza el alargamiento o contracción	Realiza el desplazamiento horizontal o vertical	Traza la gráfica completa correctamente.
Ejercicios	Valoración	25%	25%	25%	25%
a)	5 pts				
b)	5 pts				
c)	5 pts				
d)	5 pts				
e)	5 pts.				
Total puntaje	– 25 pts.				

BONO						
		Grafica la función original	Realiza el alargamiento o contracción	Realiza el desplazamiento horizontal o vertical	Aplica el valor absoluto	Traza la gráfica completa correctamente
EJERCICIO	valoración	25%	25%	25%	25%	25%
Total puntaje	– 5 pts.					

TALLER GRUPAL 6: DOMINIO DE UNA FUNCION RACIONAL

Profesor: Víctor Barros- Aníbal Matteucci

Grupo:

CURSO: III DE BACH. A

Tiempo: 90 min

Objetivo:

Hallar el dominio de funciones racionales.

RECUERDA LAS ESTRATEGIAS PARA GRAFICAR FUNCIONES

Sea la función racional: $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \dots + b_1 x + b_0}$,

donde p(x) y q(x) son funciones polinomiales y q(x) no es el polinomio cero.

El dominio de esta función es el conjunto de los números reales excepto aquellos valores para los que q(x) es cero. Por lo tanto para obtener el dominio de la función R(x), se resuelve la ecuación

$q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \dots + b_1 x + b_0 = 0$ y se excluyen estos valores del conjunto de los números reales:

Ejemplo: halle el dominio de la función $f_3(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{6x - 8x^3}$

Solución:

Resolvemos la ecuación: $6x - 8x^3 = 0$

$6x - 8x^3 = 0$	$2x = 0 \vee 3 - 4x^2 = 0$	$x = 0 \vee (\sqrt{3} + 2x) \cdot (\sqrt{3} - 2x) = 0$
$2x(3 - 4x^2) = 0$	$x = 0 \vee 3 - 4x^2 = 0$	$x = 0 \vee \sqrt{3} + 2x = 0 \vee \sqrt{3} - 2x = 0$
$2x = 0 \vee 3 - 4x^2 = 0$	$x = 0 \vee (\sqrt{3} + 2x) \cdot (\sqrt{3} - 2x) = 0$	$x = 0 \vee x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \vee x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Entonces el dominio de la función $f_3(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{6x - 8x^3}$ es el conjunto

$$\square - \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

Observación: Si la ecuación $q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \dots + b_1 x + b_0 = 0$ no tiene soluciones reales, o no tiene solución; el dominio será el conjunto de los números reales. Por ejemplo, para las funciones:

1. $f(x) = \frac{2x - 6}{2x^2 - x + 4}$ su dominio es IR, ya que la ecuación $2x^2 - x + 4 = 0$

no tiene soluciones reales

2. $f(x) = \frac{2 - x^2}{6}$ su dominio es IR, ya que la ecuación $6 = 0$ no tiene solución

f) ITEM DE DESARROLLO

Halle el mayor dominio de cada una de las siguientes funciones racionales:

- a) $f_1(x) = \frac{4-2x^2}{x+5}$
- b) $f_2(x) = \frac{1}{-x^2+4}$
- c) $f_3(x) = \frac{x+5}{x^2-x-12}$
- d) $f_4(x) = \frac{3x}{x^2-3}$
- e) $f_5(x) = \frac{3x}{3x^2-4}$
- f) $f_6(x) = \frac{2x+3}{x^2-4x+4}$
- g) $f_7(x) = \frac{2x-12}{x^2+4} - 3$
- h) $f_8(x) = \frac{-2+x^2}{4}$
- i) $f_9(x) = \frac{x+3}{x^2-9}$
- j) $f_{10}(x) = \frac{3-7x}{x^2+x+2}$
- k) $f_{11}(x) = \frac{4x^2+5x}{-x^2-x}$
- l) $f_{12}(x) = \frac{10+2x^2}{(x^3-x^2-2x)^2}$

III) Escriba las ecuaciones de las asíntotas verticales de cada una de las funciones anteriores.

IV) BONO. TRACE LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN: $y = \left| \frac{2}{x-4} - 3 \right|$

RUBRICA PARA LA EVALUACION DEL TALLER 7

- 1.- Desarrollo del taller: 50 min
- 2.- Plenaria para observar los resultados: 40 min
- 3.- Taller de fijación para la casa

V) ITEM DE DESARROLLO				
		Escribe la ecuación inicial	Resuelve correctamente la ecuación	Escribe correctamente el dominio de la función
Ejercicios	Valoración 1,5 punto	20%	60%	20%
(a)				
(b)				
(c)				
(d)				
(e)				
(f)				
(g)				
(h)				
(i)				
(j)				
Total	15 pts			

VI) ITEM DE DESARROLLO			
		Escribe correctamente las ecuaciones de las asíntotas	No escribe las ecuaciones de las asíntotas
Ejercicios	Valoración 0,5 punto	20%	60%
a)			
b)			
c)			
d)			
e)			
f)			
g)			
h)			
i)			
j)			
Total	15 pts		

VII) BONO				
		Traza la función básica	Realiza los desplazamientos correctos	Realiza la reflexión
Ejercicio	Valoración 2 puntos	20%	60%	20%
a)				
TOTAL				

TALLER GRUPAL 7: TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

Profesor: Víctor Barros –Aníbal Matteucci

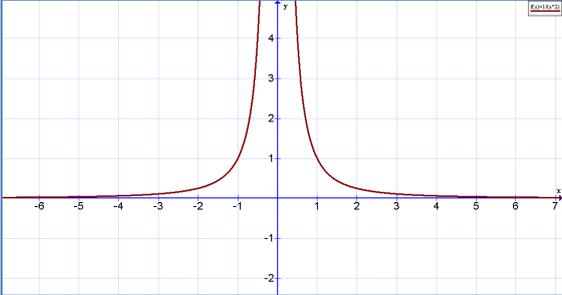
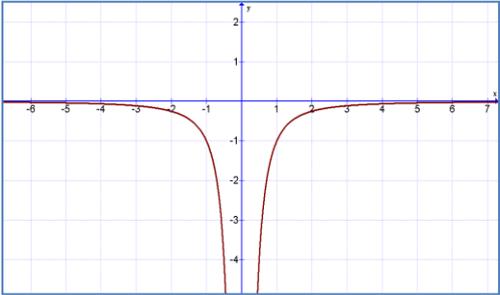
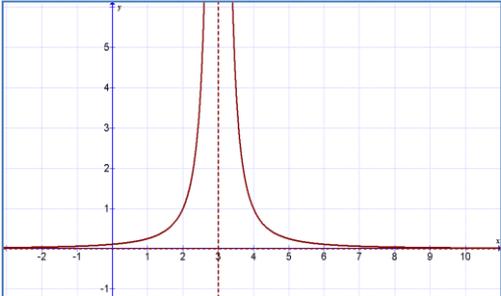
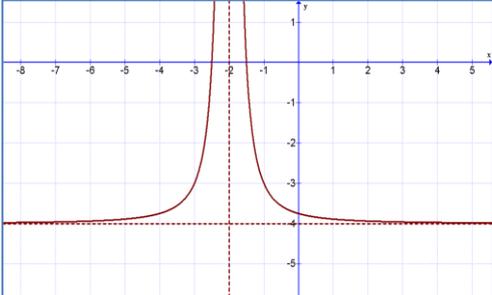
CURSO: III DE BACH. A

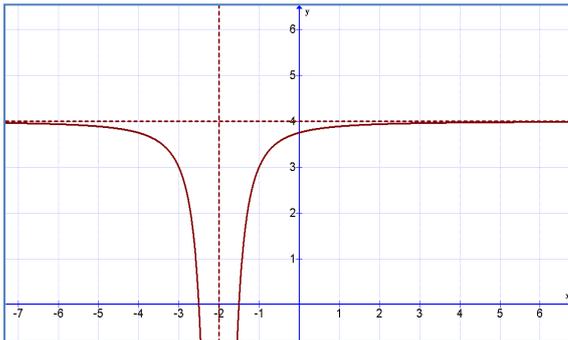
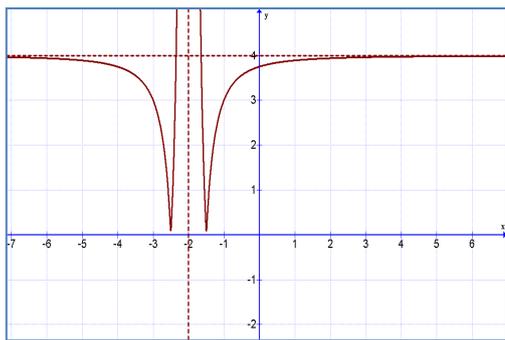
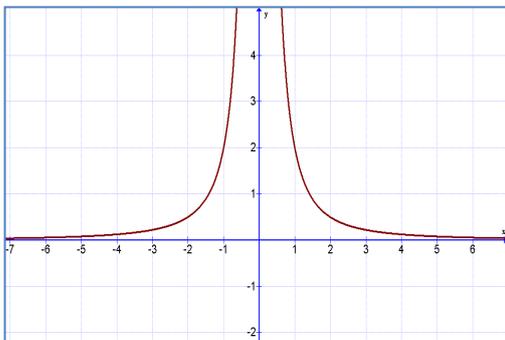
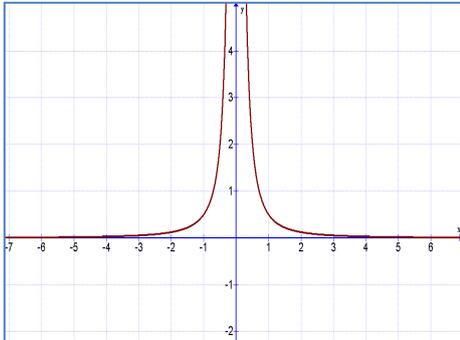
Tiempo: 90 min

Taller grupal 7: TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN

Fecha: 13/05/2011

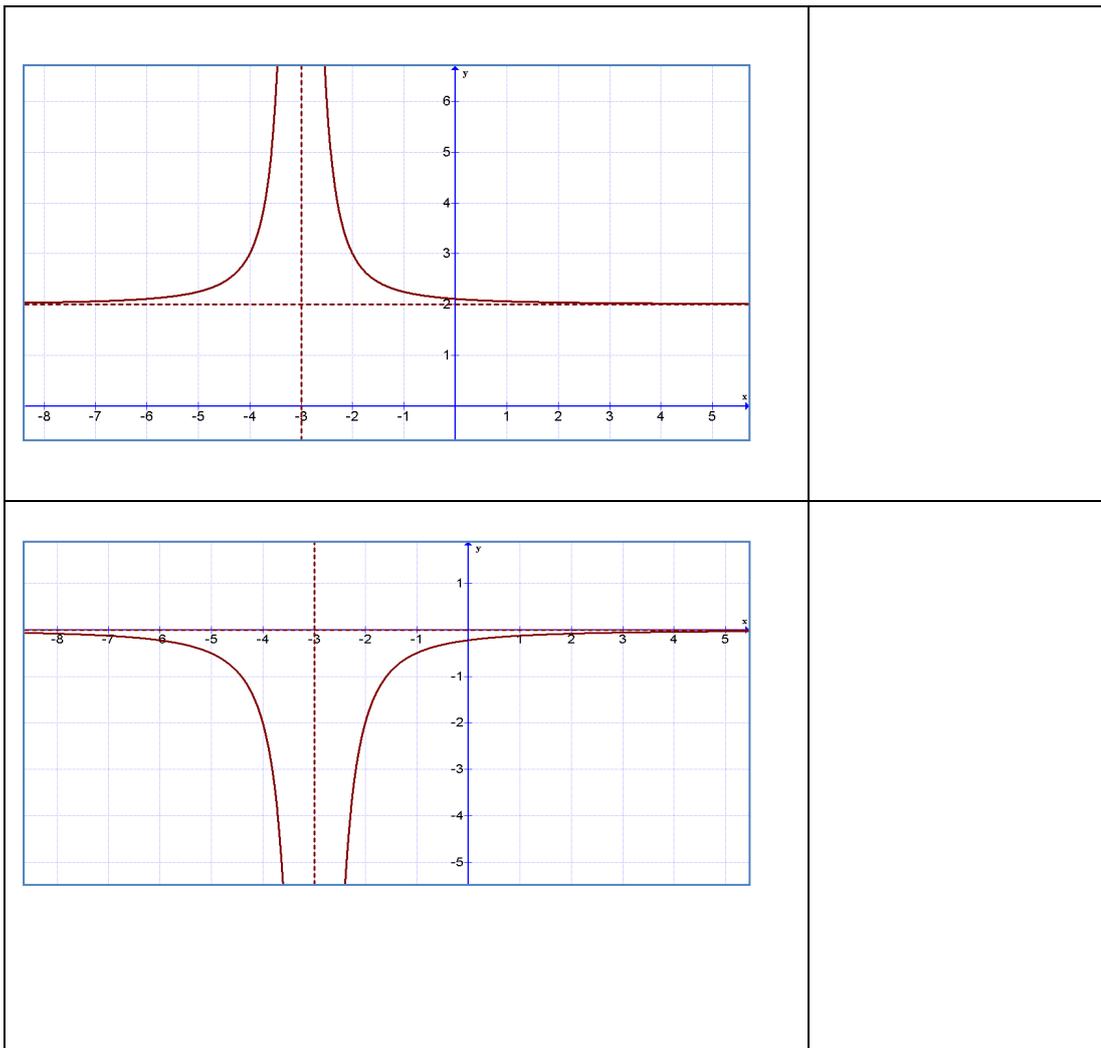
Objetivos: Aplicar las técnicas de graficación

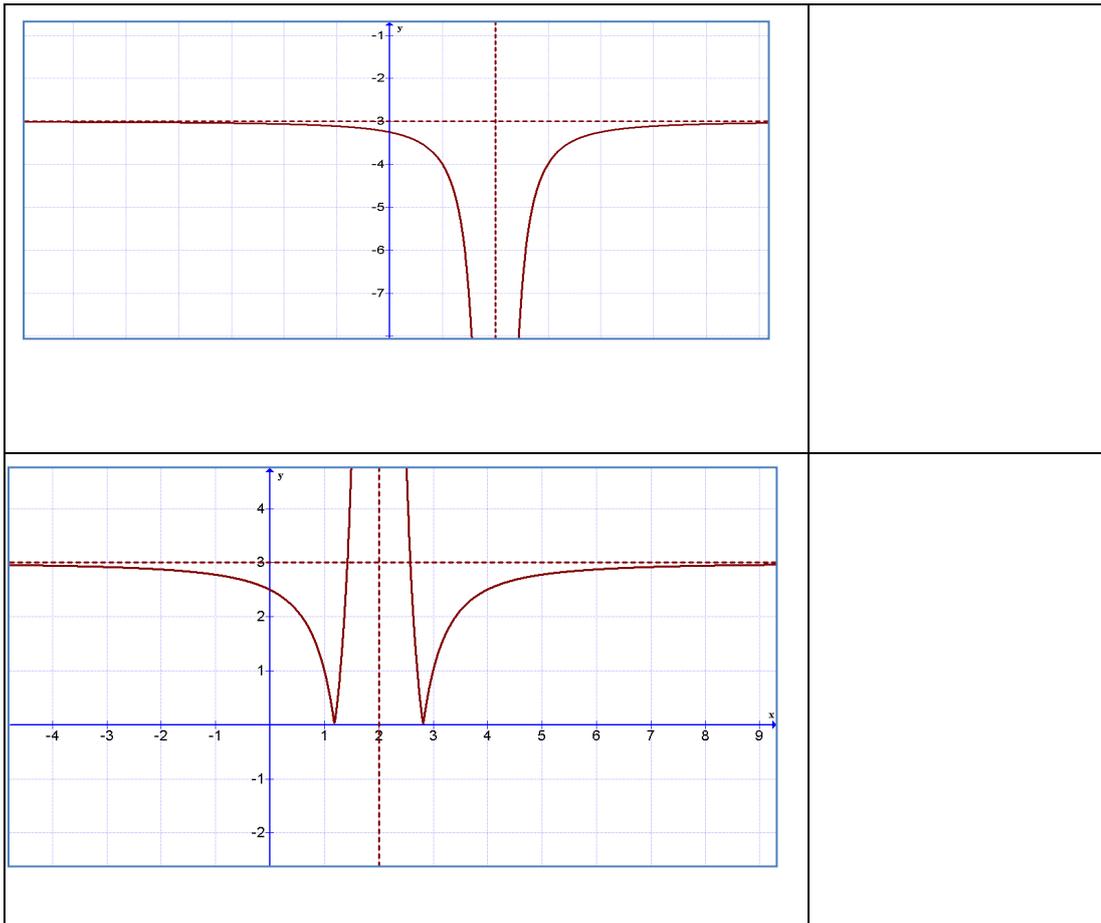
<p>Función original $y = \frac{1}{x^2}$</p> 	<p>Reflexión Respecto al eje X</p> $y = -\frac{1}{x^2}$ 
<p>Desplazamiento horizontal-derecha</p> $y = \frac{1}{(x-3)^2}$ 	<p>Desplazamiento horizontal-vertical</p> $y = \frac{1}{(x+2)^2} - 4$ 

<p>Desplazamiento vertical, horizontal e inversión</p> $y = -\frac{1}{(x+2)^2} + 4$ 	<p>Desplazamiento horizontal, vertical reflexión respecto al eje x.</p> $y = \left -\frac{1}{(x+2)^2} + 4 \right $ 
<p>Alargamiento $y = \frac{2}{x^2}$</p> 	<p>Contracción $y = \frac{1}{2x^2}$</p> 

DESARROLLO DEL TALLER

- l) En cada gráfica escriba las asíntotas, el dominio, el rango, la ecuación de la función





II) ITEM DE DESARROLLO

UTILICE LAS TÉCNICAS DE GRAFICACIÓN PARA TRAZAR BOSQUEJOS DE LAS FUNCIONES PASO A PASO.

a) $y = \frac{1}{(x-3)^2} + 4$

b) $y = \frac{1}{(-x+4)^2} - 3$

c) $y = \frac{1}{2(4+x)^2} + 1$

d) $y = 3 - \frac{1}{(-x-4)^2}$

e) $y = \frac{-2}{(4-x)^2} + 3$

III) Bono. Trace La Gráfica De La Función: $y = \left| \frac{1}{(x-4)^2} - 3 \right|$

RUBRICA PARA LA EVALUACION DEL TALLER

1.- Desarrollo del taller: 50 min

2.- Plenaria para observar los resultados:40 min

VIII) ITEM DE IDENTIFICACIÓN				
		Construye Correctamente la ecuación	Escribe Las Dos Asíntotas	Escribe el Dominio y el Rango
Ejercicios	valoración	50%	20%	30
(a)	5 pts			
(b)	5pts			
(c)	5 pts			
(d)	5 pts			
Total	20 pts			

3.- Taller de fijación para la casa

IX) ITEM DE DESARROLLO					
		Grafica la función original	Realiza el alargamiento o contracción	Realiza el desplazamiento horizontal o vertical	Traza la gráfica completa correctamente.
Ejercicio	valoración	25%	25%	25%	25%
a)	4 pts				
b)	4 pts				
c)	4 pts				
d)	4 pts				
e)	4 pts.				
Total – puntaje	20 pts.				

		Grafica la función original	Realiza el alargamiento o contracción	Realiza el desplazamiento horizontal o vertical	Aplica el valor absoluto	Traza la gráfica completa correctamente
Ejercicio	valoración	25%	25%	25%	25%	25%
Total puntaje	5 pts.					

Taller grupal 8: ASÍNTOTAS DE LAS FUNCIONES RACIONALES

Profesor: Víctor Barros – Aníbal Matteucci López

CURSO: III DE BACH. A

Tiempo: 90 min

Taller grupal 8: ASÍNTOTAS DE LAS FUNCIONES RACIONALES Fecha:

Objetivos:

- Identificar la existencia o no de asíntotas de una función racional.
- Hallar las ecuaciones de todas las asíntotas de una función racional

RECUERDA LAS ESTRATEGIAS PARA HALLAR LAS ASÍNTOTAS DE UNA FUNCIÓN RACIONAL.

Sea la función racional: $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \dots + b_1 x + b_0}$,

donde $p(x)$ es el polinomio de grado n y $q(x)$ es el polinomio de grado m y $q(x)$ no es el polinomio cero.

1. Para hallar las asíntotas verticales se resuelve la ecuación $q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \dots + b_1 x + b_0 = 0$ y cada una de las soluciones reales de esta ecuación representa una asíntota vertical

2. Hallar las asíntotas horizontales. Para esto se debe recordar los dos modelos y posibilidades que existen para que existan asíntotas horizontales:

a. Los modelos: $f(x) = \pm \frac{a}{x}$; $f(x) = \pm \frac{1}{x^2}$ o $f(x) = \pm \frac{a}{x^n}$ tienen como

asíntota horizontal la ecuación del eje x ($y=0$). Y lo mismo para cualquiera de los casos de la función $R(x)$ en que el grado de $p(x)$ sea menor al grado de $q(x)$; es decir $n < m$.

b. Si el grado de $p(x)$ y $q(x)$ son iguales; esto es $m=n$, la función tiene asíntota horizontal cuya ecuación se determina por la relación

$y = \frac{a_n}{b_m}$; por ejemplo la función $f(x) = \frac{4x^2 - 4x + 5}{x - 8x^2}$ tiene asíntota

horizontal $y = \frac{a_n}{b_m} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$

3. Hallar otro tipo de asíntota. Podría existir una asíntota oblicua o una curva asíntótica

a. Si $n > m$, tal que $n = m + 1$; existe asíntota oblicua, por ejemplo para la

función $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 8}$

$m = 1$ y $n = 2$; entonces existe asíntota oblicua; se la obtiene realizando la división de los polinomios; en este caso la asíntota oblicua tiene la ecuación $y = x + 4$ ya que del proceso de la división se obtiene:

$$\frac{x^2 - 4x + 5}{x - 8} = x + 4 + \frac{37}{x - 8}$$

b. El último caso es aquel en que puede existir una curva asíntótica; por

ejemplo la función $y = \frac{x^4}{x^2 - 2}$ puede descomponerse así

$$\frac{x^4}{x^2 - 2} = x^2 + 2 + \frac{4}{x^2 - 2}; \text{ y por tanto la función } y = x^2 + 2 \text{ es una curva}$$

asíntótica de la función original.

Halle las asíntotas de las funciones

Función	Asíntotas Verticales	Asíntotas Horizontales	Asíntota Oblicua u otro tipo de Asíntota
$f(x) = \frac{6x^2 - 7x - 3}{2x^2 - 7x + 6}$	$2x^2 - 7x + 6 = 0$ $(2x - 3)(x - 2) = 0$ $2x - 3 = 0 \vee x - 2 = 0$ $x = \frac{3}{2} \vee x = 2$	$y = \frac{6}{2} = 3$	No existen

$f(x) = \frac{6+2x-x^3}{2x^2-3}$	$2x^2 - 3 = 0$ $(\sqrt{2x} - \sqrt{3})(\sqrt{2x} + \sqrt{3}) = 0$ $\sqrt{2x} - \sqrt{3} = 0 \vee \sqrt{2x} + \sqrt{3} = 0$ $x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \vee x = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	<p>No existen</p>	<p>Realizando la división de los polinomios se obtiene.</p> $y = -\frac{1}{2}x$
$f_3(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{6x - 8x^3}$	$6x - 8x^3 = 0$ $2x(3 - 4x^2) = 0$ $2x(\sqrt{3} - 2x)(\sqrt{3} + 2x) = 0$ $x = 0 \vee x = \frac{\sqrt{3}}{2} \vee x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	<p>Como el grado del polinomio del denominador es mayor que el grado del polinomio del numerador, la asíntota horizontal es el eje x, y=0</p>	<p>No existe asíntota oblicua</p>
$f(x) = \frac{2x-6}{2x^2-x+4}$	<p>No tiene asíntotas verticales ya que la ecuación $2x^2 - x + 4 = 0$ no tiene soluciones reales</p>	<p>Como el grado del polinomio del denominador es mayor que el grado del polinomio del numerador, la asíntota horizontal es el eje x, y=0</p>	<p>No existe asíntota oblicua</p>

V) ITEM DE DESARROLLO

Halle las asíntotas de cada una de las siguientes funciones racionales:

a) $f_1(x) = \frac{4-2x^2}{x+5}$

b) $f_2(x) = \frac{2-3x^2}{-x^2+4}$

c) $f_3(x) = \frac{x+5}{-x^2+x+12}$

d) $f_4(x) = \frac{3x^3 - x + 1}{x^2 - 3}$

e) $f_5(x) = \frac{2x - 4x^2}{3x^2 - 4}$

f) $f_6(x) = \frac{2x + 3}{x^2 - 4x + 4}$

g) $f_7(x) = \frac{2x - 12}{x^2 + 4} - 3$

h) $f_8(x) = \frac{-2 + x^2}{4}$

i) $f_9(x) = \frac{3 - 7x}{x^2 + x + 2}$

j) $f_{10}(x) = \frac{4x^3 + 5x}{-x^2 - 4x}$

VI) **BONO.** Halle las asíntotas de la función: $y = \left| \frac{2x^2 - 3x^4}{x^2 - 4} \right|$

RUBRICA PARA LA EVALUACION DEL TALLER

- 1.- Desarrollo del taller: 50 min
- 2.- Plenaria para observar los resultados: 40 min
- 3.- Taller de fijación para la casa

X) ITEM DE DESARROLLO					
Ejercicios	Valoración 4 puntos	Halla las asíntotas verticales Inicial condición de no existencia	las o de	Escribe las asíntotas horizontales condición de no existencia	Escribe la asíntota oblicua o condición de no existencia
		40%		30%	30%
(k)					
(l)					

(m)				
(n)				
(o)				
(p)				
(q)				
(r)				
(s)				
(t)				
total	40 pts			

BONO

		Halla las asíntotas verticales Inicial o condición de no existencia	Escribe las asíntotas horizontales o condición de no existencia	Escribe la asíntota oblicua, otro tipo de asíntota o condición de no existencia
Ejercicios	Valoración 5 puntos	30%	30%	40%
total	5 pts			

TALLER GRUPAL 9: GRAFICAS E INTERVALOS DE MONOTONÍA

Profesor: Víctor Barros- Aníbal Matteucci

CURSO: III DE BA

Tiempo: 90 min

Fecha:

Objetivos:

- Determinar: asíntotas, dominio, intersecciones con los ejes, signo de la función.
- Bosquejar las funciones racionales de variable real.
- Determinar los intervalos de monotonía y el rango de las funciones racionales

RECUERDA LAS ESTRATEGIAS PARA TRAZAR LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN RACIONAL

Sea la función racional: $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \dots + b_1 x + b_0}$,

donde $p(x)$ es el polinomio de grado n y $q(x)$ es el polinomio de grado m y $q(x)$ no es el polinomio cero y x es una variable real.

1. Simplificar $R(x)$ a su mínima expresión.
2. Para hallar las asíntotas verticales se resuelve la ecuación $q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \dots + b_1 x + b_0 = 0$ y cada una de las soluciones reales de esta ecuación representa una asíntota vertical
3. Hallar las asíntotas horizontales. Para esto se debe recordar los dos modelos y posibilidades que existen para que existan asíntotas horizontales:

a. Los modelos: $f(x) = \pm \frac{a}{x}$; $f(x) = \pm \frac{1}{x^2}$ o $f(x) = \pm \frac{a}{x^n}$ tienen

como asíntota horizontal la ecuación del eje x ($y=0$). Y lo mismo para cualquiera de los casos de la función $R(x)$ en que el grado de $p(x)$ sea menor al grado de $q(x)$; es decir $n < m$.

b. Si el grado de $p(x)$ y $q(x)$ son iguales; esto es $m=n$, la función tiene asíntota horizontal cuya ecuación se determina por la

relación $y = \frac{a_n}{b_m}$; por ejemplo la función $f(x) = \frac{4x^2 - 4x + 5}{x - 8x^2}$

tiene asíntota horizontal $y = \frac{a_n}{b_m} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$

4. Hallar otro tipo de asíntota. Podría existir una asíntota oblicua o una curva asintótica

a. Si $n > m$, tal que $n = m + 1$; existe asíntota oblicua, por ejemplo

para la función: $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 8}$

$m=1$ y $n=2$; entonces existe asíntota oblicua; se la obtiene realizando la división de los polinomios; en este caso la asíntota oblicua tiene la ecuación $y = x + 4$ ya que del proceso

de la división se obtiene: $\frac{x^2 - 4x + 5}{x - 8} = x + 4 + \frac{37}{x - 8}$

- b. El último caso es aquel en que puede existir una curva asintótica; por ejemplo la función $y = \frac{x^4}{x^2 - 2}$ puede descomponerse así $\frac{x^4}{x^2 - 2} = x^2 + 2 + \frac{4}{x^2 - 2}$; y por tanto la función $y = x^2 + 2$ es una curva asintótica de la función original.

5. INTERSECCIONES CON LOS EJES

- a. INTERSECCION CON EL EJE X, Resolver la ecuación $f(x) = 0$
 b. INTERSECCIÓN CON EL EJE Y, Hacer $x=0$, en la función original

6. SIGNO DE LA FUNCIÓN

- a. Resolver la inecuación $f(x) > 0$ y $f(x) < 0$

VII) ITEM DE DESARROLLO

Trace paso a paso las gráficas de cada función racional.

Escriba: dominio, asíntotas, intersecciones con los ejes, el signo, los intervalos de monotonía y el rango de las funciones racionales.

a) $f_1(x) = \frac{3x^2 + x - 2}{1 - x - 2x^2}$

b) $f_2(x) = \frac{2x + 3}{x^2 - 4x + 4}$

c) $f_3(x) = \frac{2x - 4x^2}{3x^2 - 4}$

d) $f_4(x) = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{4 - x^2}$

VIII) BONO. TRACE LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN: $y = \left| \frac{2x^2 - 3x^4}{x^2 - 4} \right| - 4$

RUBRICA PARA LA EVALUACION DEL TALLER

1.-Desarrollo del taller: 50 min

2.-Plenaria para observar los resultados:40 min

3.-Taller de fijación para la casa

XI) ITEM DE DESARROLLO							
		Halla las asíntotas	Determina las intersecciones con los ejes	Determina el signo de la función	Traza la gráfica	Escribe el dominio y el rango	Describe los intervalos de monotonía
Ejercicios	Valoración 10 puntos	20%	10%	20%	20%	10%	20%
(u)							
(v)							
(w)							
(x)							
total	40 pts						

XII) ITEM DE DESARROLLO							
		Halla las asíntotas	Determina las intersecciones con los ejes	Determina el signo de la función	Traza la gráfica	Escribe el dominio y el rango	Describe los intervalos de monotonía
ejercicios	Valoración 5 puntos	20%	10%	20%	20%	10%	20%
(y)							
total	5 pts						

Taller grupal 10: APLICACIONES DE LAS FUNCIONES RACIONALES

Profesor: Aníbal Matteucci -Víctor Barros

Grupo:

CURSO: III DE BACH. A, B, C

Tiempo: 90 min

Objetivos:

1. Analizar situaciones problemáticas que pueden ser modelados mediante funciones racionales.
2. Trazar la gráfica de las funciones aplicando los criterios analizados en clases
3. Establecer conclusiones
4. Verificar los resultados aplicando el graficador de funciones GRAPH.

ACTIVIDADES

- Dinámica: Fábula de la cacería del león, el tigre y el chacal
- Se entregará material impreso con:
Problemas de aplicación de funciones racionales en la vida cotidiana.
- Se realizará plenaria para verificar resultados y procesos que se aplicaron para el desarrollo de los ejercicios y problemas
- Los grupos eligen uno de los modelos de funciones racionales y lo trabajan

BANCO DE PROBLEMAS

Grupo # 1

1. Temperatura en grados Celsius de un alimento luego de t horas de haber sido colocado en el refrigerador.

$$C(t) = \frac{20}{t^2 + 2t + 1}, \quad t \geq 0$$

- Trace la gráfica de la función $C(t)$
- ¿Cuál será la temperatura luego de 5 minutos?
- ¿Qué tiempo habrá transcurrido para que el alimento alcance una temperatura de -4°C ?
- Para que un helado sea degustado con exquisitez es necesario que se encuentre entre 2°C y 8°C . ¿Cuál es el tiempo que el alimento debe permanecer en refrigerador para que sea exquisito?

Grupo # 2

2. La densidad D de agua contaminada en un río varía con la temperatura T de acuerdo a la ley: $D(T)=T^2 - 5T + 80, \quad 0 \leq T \leq 10$

- ¿En qué unidades se expresa la variable D ?
- ¿Cuál es el dominio de la función $D(T)$?
- ¿De qué tipo de curva hace parte la gráfica de la función D ?
- ¿En qué circunstancias se encuentra mayor contaminación en el agua del río?

Grupo # 3

3. Un proyectil se dispara desde un acantilado 500 pies por arriba de la superficie del agua con una inclinación de 45° con la horizontal con una velocidad de escape de 400 pies por segundo. En Física, está establecido que la altura h del proyectil sobre el nivel del agua está dado por la relación:

$$h(t) = -\frac{32x^2}{(400)^2} + x + 500$$

Donde x es la distancia horizontal medida en pies del recorrido del proyectil medido desde la base del acantilado.

- Halle el dominio de la función
- Trace la gráfica de la función
- Encuentre la altura máxima que alcanza el proyectil
- ¿Qué tan lejos de la base del acantilado chocará el proyectil con el agua?

Grupo # 4

4. Costo mínimo de una lata. Reynolds Metal Company fabrica latas de aluminio en forma de cilindro con capacidad de 500 centímetros cúbicos (1/2 litro) la tapa y la base del envase se fabrican de una aleación de aluminio especial que cuesta \$ 0.05 por centímetro cuadrado. La cara

lateral de la lata se hace de un material que cuesta \$ 0.02 por centímetro cuadrado.

- Exprese el costo del material para la lata como una función del radio r de la lata.
- ¿Cuál es el costo para un radio de 6cm?
- Si el costo de fabricar el envase fue de \$ 2; ¿cuál es el radio del envase?
- Use un graficador para trazar la gráfica de la función costo $c = C(r)$
- ¿Cuál es el costo mínimo?

Grupo # 5

5. **Concentración de Droga.** La concentración C de cierta droga en la corriente sanguínea de un paciente luego de t horas de haber sido inyectada está dada por la relación

$$C(t) = \frac{t}{2t^2 + 1}$$

- ¿Cuál es el dominio de la función?
- Encuentre la asíntota horizontal de la función. ¿qué ocurre con la concentración de droga cuando t aumenta?
- Trace la gráfica de $C(t)$
- Determine el tiempo en que la concentración es más alta.
- ¿Cuál es la concentración luego $\frac{1}{2}$ hora?

Grupo # 6

6. **Gravedad.** En física se establece que la aceleración debida a la gravedad, g (metros/segundo²), a una altura de h metros sobre el nivel del mar, está dada por la relación:

$$g(h) = \frac{3.99 \times 10^{14}}{(6.374 \times 10^6 + h)^2}$$

Donde 6.374×10^6 es el radio de la Tierra en metros.

- ¿Cuál es la aceleración debida a la gravedad a nivel del mar?
- ¿cuál es la aceleración de la gravedad en la ciudad de QUITO?
- ¿La cumbre más alta del Ecuador es el Chimborazo, cuál es la aceleración de la gravedad allí?
- Encuentre la asíntota horizontal de $g(t)$
- Resuelva $g(t) = 0$ ¿Cómo interpreta este resultado?

Grupo # 7

7. **Modelo de Población.** Una rara especie de insecto que se descubrió en nuestra selva amazónica. Para proteger las especies del lugar, los ecologistas declaran al insecto en peligro de extinción y lo trasplantan en un área protegida. La población de insectos t mese después del experimento está dado por P .

$$p(t) = \frac{50(1+0.5t)}{(2+0.01t)}$$

- ¿Cuántos insectos se descubrieron? En otras palabras, cuál es la población de insectos al inicio?
- ¿Cuál será la población luego de 5 años?
- ¿qué tiempo deberá transcurrir para obtener una población de 12'000'000 de insectos?
- Determine la ecuación de la asíntota horizontal
- ¿Cuál es la población más grande que sustentaría el área protegida?

Grupo # 8

El precio p y la cantidad vendida x de cierto producto obedecen a la siguiente ecuación de demanda.

$$x = -20p + 500, \quad 0 \leq p \leq 50$$

- Exprese el ingreso R como una función de x
- ¿Cuál es el ingreso si se venden 20 unidades?
- ¿Qué cantidad x maximiza el ingreso?
- ¿Cuál es el ingreso máximo?
- ¿Qué precio debe cobrar la compañía para maximizar el ingreso?

RUBRICA PARA LA EVALUACION DEL TALLER

- Taller de fijación para la casa: trabajo en grupo de máximo 4 personas
- Plenaria: cada grupo tendrá 12 min para su exposición

TRABAJO ESCRITO (20 PUNTOS)

		Halla las asíntotas	Determina las intersecciones con los ejes	Determina el signo de la función	Traza la gráfica	Responde correctamente la mitad de las preguntas	Responde correctamente todas las preguntas
Ejercicios	Valoración 10 puntos	20%	10%	20%	30%	10%	10%
Total	20 pts	4	2	4	6	2	2

EXPOSICIÓN (20 PUNTOS)

No	Exposición	4 Todos	3 La mayoría	2 La mitad	1 Menos de la mitad	0 Ninguno	Max. puntaje
1	Puntualidad						2
2	los objetivos trazados son los adecuados						3
3	Utilizan material de apoyo						4
4	Exponen las ideas en forma clara y concisa						4
5	Dominan el auditorio con la exposición						3
6	Contestan todas las preguntas con certeza y seguridad						4

total 20

CAPITULO V

5. ANALISIS DE DATOS

En este capítulo se realizará las pruebas de hipótesis, las estimaciones e inferencias correspondientes.

El estudio se realizó en dos colegios de la ciudad de Guayaquil, El Colegio Militar Tente. Hugo Ortiz Garcés, COMIL2 y El Colegio Espíritu Santo, CES; en el año lectivo 2011 – 2012.

Con este propósito se dividió la población de estudiantes de los dos colegios en dos grupos, que se describen así:

Grupo 1: Número de estudiantes que aprendieron bajo la metodología tradicional, sin la modalidad de Talleres significativos.

Grupo 2: Número de estudiantes que aprendieron bajo la modalidad de Talleres significativos.

Con cada grupo de estudiantes se ha realizado el siguiente estudio de casos:

- 1) Prueba de hipótesis para diferenciación de medias de las notas finales de los dos grupos del Colegio Militar Teniente Hugo Ortiz.
- 2) Prueba de hipótesis para diferenciación de medias de las notas finales de los dos grupos del Colegio Espíritu Santo.
- 3) Prueba de hipótesis para diferenciación de medias de las notas de los dos grupos de estudiantes de los dos colegios.
- 4) Prueba de hipótesis para diferenciación de medias para las notas de los 10 talleres que se aplicaron en el grupo 2 del COMIL2 y del CES.
- 5) Prueba de hipótesis de las notas de las lecciones escritas de los estudiantes del grupo 2 de los dos colegios.

Notación. Se usará la siguiente terminología para designar las diferentes variables y constantes que se necesitan en este análisis.

n_1 : tamaño de la primera muestra

n_2 : tamaño de la segunda muestra

\bar{x}_1, \bar{x}_2 : Medias muestrales

μ_1, μ_2 : Medias poblacionales

S_1, S_2 : Varianzas muestrales

σ_1, σ_2 : Varianzas poblacionales

N, Z, t, F : Estimadores o estadígrafos

k : Grados de libertad

Para el análisis de casos (anexos 1 y 2) se tomaron en consideración cuatro grupos de estudiantes de las dos instituciones educativas, con poblaciones inferiores a 30 distribuidos de la siguiente forma:

- 1) Colegio Militar $\left\{ \begin{array}{l} \text{Estudiantes con talleres} = 23 \\ \text{Estudiantes sin talleres} = 26 \end{array} \right.$
- 2) Colegio Espíritu Santo $\left\{ \begin{array}{l} \text{Estudiantes con talleres} = 27 \\ \text{Estudiantes sin talleres} = 29 \end{array} \right.$

Para Muestras pequeñas ($n_1 < 30$; $n_2 < 30$) antes de realizar una prueba de hipótesis para la diferencia de medias, primero se debe probar si las varianzas poblacionales son iguales o diferentes, lo cual se hace con la prueba de hipótesis para el cociente de varianzas.

i) Si las **varianzas son iguales** se aplica la relación:

$$t_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \frac{[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)] \sqrt{n_1 + n_2 - 2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) (n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2)}} \quad \square \quad t_{n_1 + n_2 - 2}$$

REGLA DE DECISIÓN. Los valores se hallan de la tabla de distribución t con $k = n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad.

ii) Si las **varianzas son diferentes** se aplica la fórmula.

$$t_{\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \quad t_K$$

Para la regla de decisión los valores de la tabla se hallan en una distribución t con k grados de libertad, la relación de cálculo:

$$K = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}\right)^2}{\left(\frac{S_1^2}{n_1 - 1}\right)^2 \left(\frac{1}{n_1 + 1}\right) + \left(\frac{S_2^2}{n_2 - 1}\right)^2 \left(\frac{1}{n_2 + 1}\right)} - 2$$

I) Diferenciación de Medias COMIL.

Se plantea comparar si la propuesta metodológica de aprendizaje bajo la modalidad de talleres es más efectiva (en cuanto a aprendizaje significativo) que el aprendizaje sin la aplicación de talleres metodológicos.

Para este estudio se analizan los datos del **Anexo1**, correspondiente al grupo de estudiantes del Colegio Militar⁶:

Para el grupo 1 del Comil2, estudiantes que aprenden sin la aplicación de talleres metodológicos se tiene:

- $\mu_1 = 10,38 \rightarrow$ media
- $S_1 = 4,01 \rightarrow$ desviación típica
- $n_1 = 26 \rightarrow$ tamaño de la muestra

⁶ <http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/sedes/manizales/4030006/lecciones/capitulotres/tema6.html>
 Luis F. Rodríguez Ojeda. Probabilidad y Estadística Básica para Ingenieros. ICM, ESPOL. 2007
 William Mendenhall. Introducción a la Probabilidad y Estadística. Cengage Learning Editores, 2007

Para el grupo 2 del Comil2, estudiantes que aprenden bajo la modalidad de talleres metodológicos se tiene:

- $\mu_2 = 12,82 \rightarrow$ media
- $S_2 = 3,61 \rightarrow$ desviación típica
- $n_2 = 23 \rightarrow$ tamaño de la muestra

5.1. Prueba de hipótesis para las varianzas.

Como el tamaño de las muestras es pequeño (menos de 30), para decidir cuál es la estadística de trabajo adecuada para la prueba de hipótesis de la diferencia de medias, primero se debe probar si las varianzas poblacionales son iguales o no, se plantean las hipótesis:

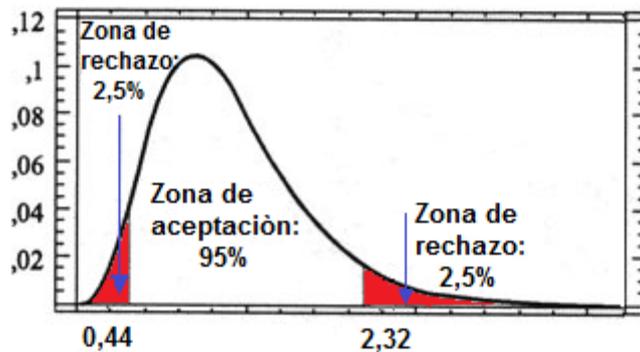
Hipótesis Nula: $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$

Hipótesis Alternativa: $H_a : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$

Región de Rechazo. Con una confiabilidad del 95 % en la tabla de la distribución F se encuentra los valores críticos con la relación $f_{\left(\frac{\alpha}{2}; n_1-1, n_2-2\right)} = z$:

$f_{(0,025;25,22)} = 2,32$.

$f_{(1-0,025;25,22)} = 0,44$



La estadística de trabajo es:

$$F = \frac{n_1(n_2-1)S_1^2\sigma_2^2}{n_2(n_1-1)S_2^2\sigma_1^2} = \frac{26(23-1)(4,20)^2}{23(26-1)(3,61)^2} = \frac{10090,08}{7493,4575} = 1,3465$$

El estadígrafo de prueba ($F=1,3465$) cae dentro de la región de aceptación, se confirma H_0 ; se concluye que las varianzas son iguales.

5.2. Prueba de hipótesis para diferenciación de medias del COMIL2.

Como se probó que las varianzas son iguales, se utiliza el estadístico t para realizar la prueba de diferenciación.

$$t_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \frac{[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)] \sqrt{n_1 + n_2 - 2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) (n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2)}};$$

$k = n_1 + n_2 - 2$, son los grados de libertad

Prueba de Hipótesis

Para este análisis se plantean las siguientes hipótesis:

Hipótesis Nula: H_0

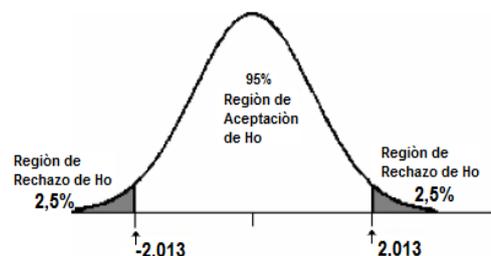
H_0 : “Los estudiantes que aprenden sin la aplicación de talleres metodológicos aprenden tanto como los estudiantes que aprenden bajo la modalidad de talleres metodológicos”; es decir: $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

Hipótesis alternativa: H_a

H_a : “Los estudiantes que aprenden sin la aplicación de talleres metodológicos no aprenden como los estudiantes que lo hacen con de talleres metodológicos”: $H_a : \mu_1 \neq \mu_2$

Región de rechazo

Para probar o negar la hipótesis Nula se ha tomado un nivel de significación del 5% ($\alpha = 0,05$)



Se determina los grados de libertad: $k = n_1 + n_2 - 2 = 26 + 23 - 2 = 47$

De acuerdo con los datos de la tabla de distribución T, con un nivel de significación $\alpha = 0,05$ y 47 grados de libertad, se obtiene $T_{0,025} = 2,0128956$; luego la región de rechazo corresponderá a los intervalos: $t < -2,013 \vee t > 2,013$, se rechaza. Ahora se establece las regiones de aceptación y de rechazo.

Se calcula el estadístico de prueba: $Z_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \frac{[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)] \sqrt{n_1 + n_2 - 2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) (n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2)}}$

$$Z_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \frac{[(10,38 - 12,82) - (\mu_1 - \mu_2)] \sqrt{26 + 23 - 2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{26} + \frac{1}{23}\right) [(26)(4,01)^2 + (23)(3,61)^2]}} = -2,18$$

Este valor está fuera de la región de aceptación de H_0 ; por lo tanto se acepta la hipótesis alternativa:

H_a : “Los estudiantes que aprenden sin talleres metodológicos no aprenden tanto como los estudiantes que aprenden bajo la modalidad de talleres metodológicos”; es decir: $H_a : \mu_1 \neq \mu_2$

5.3. Diferenciación de Medias en el Espíritu Santo (CES)

De los datos de la tabla de del **Anexo 2**, correspondiente al grupo de estudiantes del Colegio Espíritu Santo, se tiene:

1) Para el grupo de estudiantes que aprenden sin la aplicación de talleres metodológicos se ha obtenido:

- $\bar{X}_1 = 12,17$ media
- $S_1 = 5,043$ → desviación típica
- $n_1 = 29$ → tamaño de la muestra

2) Para el grupo de estudiantes que aprenden bajo la modalidad de talleres metodológicos se ha obtenido:

- $\overline{X}_2 = 14,67 \rightarrow$ media
- $S_2 = 3,98 \rightarrow$ desviación típica
- $n_2 = 27 \rightarrow$ tamaño de la muestra

5.4. Prueba de hipótesis para las varianzas.

Ya que el tamaño de las muestras es pequeño, para decidir cuál es la estadística de trabajo adecuada para la prueba de hipótesis de la diferencia de medias, primero se debe probar si las varianzas poblacionales son iguales o no, se plantean las hipótesis:

Hipótesis Nula: $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$

Hipótesis Alternativa: $H_a : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$

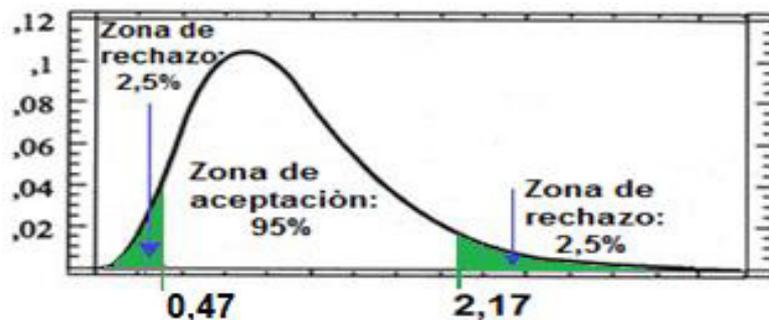
La estadística de trabajo es:

$$F = \frac{n_1(n_2-1)S_1^2 \cancel{\sigma_2^2}}{n_2(n_1-1)S_2^2 \cancel{\sigma_1^2}} = \frac{29(27-1)(5,043)^2}{27(29-1)(3,98)^2} = \frac{19175,614}{11975,342} = 1,60$$

Con una confiabilidad del 95 % en la tabla de la distribución F, se obtienen los valores límites que delimitan la región de aceptación de H_0 ,

Límite superior: =DISTR.F.INV(0.05/2;29-1;27-1) =2,17

Límite inferior: =DISTR.F.INV(1-0.05/2; 29-1;27-1) =0,47



El estadígrafo de prueba ($F=1,60$) cae dentro de la región de aceptación, se confirma H_0 ; se concluye que las varianzas son iguales.

5.5. Prueba de hipótesis para diferenciación de medias.

Como se probó que las varianzas son iguales, se utiliza la prueba de hipótesis para medias utilizando el estadístico de prueba t .

$$t_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \frac{\left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2) \right] \sqrt{n_1 + n_2 - 2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) (n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2)}} \sim t_{n_1 + n_2 - 2}$$

$k = n_1 + n_2 - 2$, son los grados de libertad.

Prueba de Hipótesis

Hipótesis Nula: H_0

H_0 : “Los estudiantes que aprenden sin la aplicación de talleres metodológicos aprenden más o tanto como los estudiantes que aprenden bajo la modalidad de talleres metodológicos”; es decir: $H_0 : \mu_1 \geq \mu_2$

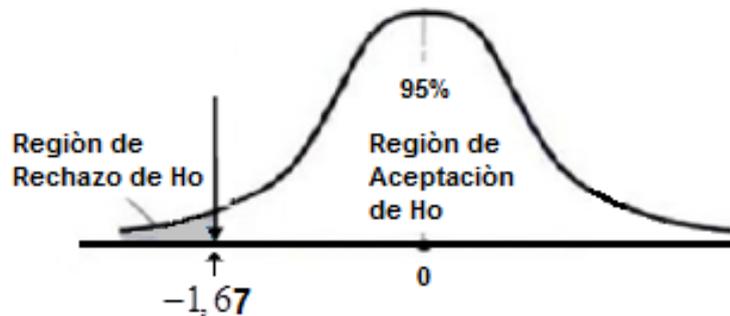
Hipótesis alternativa: H_a

H_a : “Los estudiantes que aprenden sin talleres metodológicos aprenden menos que los estudiantes que aprenden bajo la modalidad de talleres metodológicos”; es decir: $H_a : \mu_1 < \mu_2$

Región de rechazo

Se ha tomado un nivel de significación del 95% ($\alpha = 0,05$), con k grados de libertad: $k = n_1 + n_2 - 2 = 29 + 27 - 2 = 54$

De acuerdo a los datos de la tabla de la distribución T con $\alpha = 0,05$ y 54 grados de libertad; se obtiene $T_{0,05} = 1,67$; luego la región de rechazo corresponderá al intervalo: $t < -1,67$. Ahora se establece las regiones de aceptación y rechazo.



Ahora se calcula el estadístico de prueba:

$$t_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \frac{[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)] \sqrt{n_1 + n_2 - 2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) (n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2)}}; \quad t_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \frac{[(12,17 - 14,67) - (\mu_1 - \mu_2)] \sqrt{29 + 27 - 2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{29} + \frac{1}{27}\right) (29 \cdot (5,043)^2 + 27 \cdot (3,98)^2)}} = -2,014$$

Este valor está fuera de la región de aceptación de H_0 ; por lo tanto se rechaza H_0 y se acepta la hipótesis alternativa:

H_a : “Los estudiantes que aprenden sin talleres metodológicos aprenden menos que los estudiantes que aprenden bajo la modalidad de talleres metodológicos”; es decir: $H_a : \mu_1 < \mu_2$

5.6. Prueba de hipótesis para diferenciación de medias de las notas de los dos grupos de estudiantes de los dos colegios.

De acuerdo con los datos del **Anexo 3**, se tienen los siguientes datos para la prueba de hipótesis de diferencia entre medias:

Para el grupo de estudiantes que aprenden sin la aplicación de talleres metodológicos se ha obtenido:

- $\bar{X}_1 = 11,33$ media
- $S_1 = 4,63$ → desviación típica
- $n_1 = 55$ → tamaño de la muestra

Para el grupo de estudiantes que aprenden bajo la modalidad de talleres metodológicos se ha obtenido:

- $\bar{X}_2 = 13,82 \rightarrow$ media
- $S_2 = 3,89 \rightarrow$ desviación típica
- $n_2 = 50 \rightarrow$ tamaño de la muestra

Para la prueba de hipótesis de la diferencia de medias si las muestras se obtienen de poblaciones con distribuciones diferentes a la normal, pero $n_1 \geq 30$, $n_2 \geq 30$ y varianzas poblacionales desconocidas, se reemplaza la varianza

poblacional por la muestral y se utiliza:
$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \approx N(0,1)$$

Para este análisis se plantean las siguientes hipótesis:

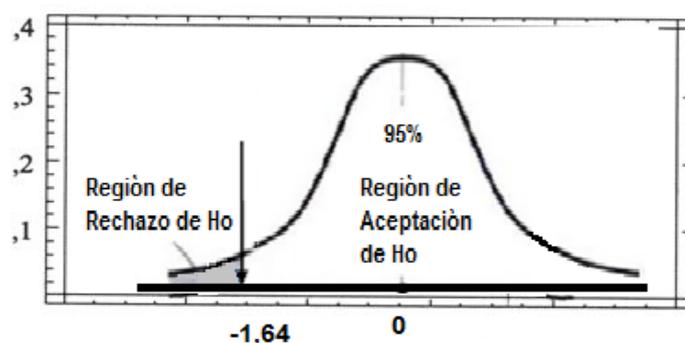
Hipótesis Nula: H_0

H_0 : “Los estudiantes que aprenden sin la aplicación de talleres metodológicos aprenden tanto o más que los estudiantes que aprenden bajo la modalidad de talleres metodológicos”; es decir: $H_0 : \mu_1 \geq \mu_2$

Hipótesis alternativa: H_a

H_a : “Los estudiantes que aprenden sin la aplicación de talleres metodológicos no aprenden menos que los estudiantes que aprenden bajo la modalidad de talleres metodológicos”; es decir: $H_a : \mu_1 < \mu_2$

Región de rechazo. De acuerdo con los datos de la tabla de distribución normal N, con un nivel de significación $\alpha = 0,05$ se obtiene $N_{0,05} = -1,64$; luego la región de rechazo corresponderá al intervalo: $Z < -1,64$.



Ahora se calcula el estadístico de prueba:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{(11,33 - 13,82) - 0}{\sqrt{\frac{(4,63)^2}{55} + \frac{(3,89)^2}{50}}} = -2,992$$

Entonces $Z = -2,992$ cae en la región de rechazo de H_0 ; por lo tanto se confirma la hipótesis alternativa:

H_a : “Los estudiantes que aprenden sin la aplicación de talleres metodológicos no aprenden tanto como los estudiantes que aprenden bajo la modalidad de talleres metodológicos”; es decir: $H_a : \mu_1 < \mu_2$

5.7. Prueba de hipótesis para diferenciación de medias para las notas de los 10 talleres que se aplicaron en el grupo 2 del COMIL2 y del CES.

En esta apartado se comparan los resultados de los talleres metodológicos aplicados a los estudiantes del COMIL2 y a del CES. Se realizará una diferenciación de medias con cada par de talleres para establecer si las medias son iguales o diferentes. Para este análisis sólo se toman en cuenta los resultados obtenidos por los estudiantes que aprendieron con talleres. De acuerdo con los datos del **Anexo 4**.

Descripción de los datos:

$n_1 = 23$: Tamaño de la muestra de los estudiantes del COMIL2

$n_2 = 27$: Tamaño de la muestra de los estudiantes del CES

$\alpha = 0,5$: Nivel de significación

S_1^2 : Varianza de la muestra del COMIL2

S_2^2 : Varianza de la muestra del CES

En consideración al pequeño tamaño de las muestras ($n_1 = 23; n_2 = 27$), antes de realizar la prueba de hipótesis para la diferencia de medias, se debe probar si las varianzas poblacionales son iguales o diferentes. Por eso planteamos la siguiente prueba de hipótesis:

Hipótesis Nula: $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$

Hipótesis Alternativa: $H_a : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$

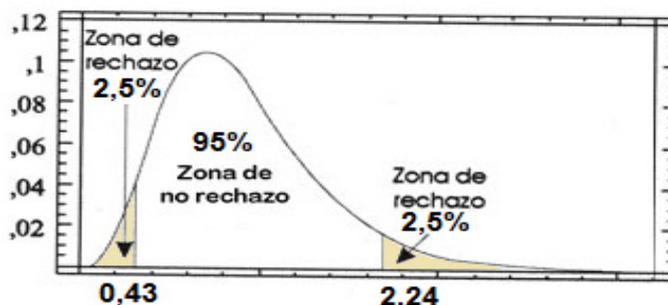
Para realizar la prueba de hipótesis para las varianzas, se considerará el estadígrafo: $F = \frac{n_1(n_2 - 1)S_1^2\sigma_2^2}{n_2(n_1 - 1)S_2^2\sigma_1^2}$

Región de Rechazo. Con una confiabilidad del 95 %, en la tabla de la distribución F con 23 grados de libertad en el numerador y 27 en el denominador, se calculan fácilmente con las funciones de Excel los valores críticos son:

Límite superior: =DISTR.F.INV(0.05/2;23-1;27-1) =2,24

Límite inferior: =DISTR.F.INV(1-0.05/2; 23-1;27-1;) =0,43

Estos resultados pueden observarse en la figura.



Ya que los valores del tamaño de las dos muestras no cambian para los resultados de los 10 talleres aplicados a los grupos de COMIL2 y del CES, además con el nivel de significación (95%) considerado, la región de rechazo y

la de no rechazo es la misma para los diez talleres, luego habrá que sólo determinar el valor del estadígrafo F para ver si cae dentro o fuera de la región de rechazo.

Para la estadística de trabajo se utiliza la expresión: $F = \frac{n_1(n_2 - 1)S_1^2\sigma_2^2}{n_2(n_1 - 1)S_2^2\sigma_1^2}$

Ahora para decidir si los resultados del estadístico de prueba caen dentro o fuera de la región de rechazo, se ha construido una tabla con todos los datos de interés en este análisis:

PRUEBA DE HIPOTESIS PARA ESTABLECER SI LAS VARIANZAS SON IGUALES O DIFERENTES										
Talleres	DATOS					$F = \frac{n_1(n_2 - 1)S_1^2\sigma_2^2}{n_2(n_1 - 1)S_2^2\sigma_1^2}$	Valores de tabla		DECISION	CONCLUSION
	α	n_1	n_2	S_1	S_2		Limite inferior	limite superior		
T1	0,05	23	27	5,99	7,789	0,595849226	0,433120357	2,244271991	dentro	varianzas iguales
T2	0,05	23	27	4,26	5,995	0,508631673	0,433120357	2,244271991	dentro	varianzas iguales
T3	0,05	23	27	2,62	6,472	0,165557568	0,433120357	2,244271991	fuera	varianzas diferentes
T4	0,05	23	27	13,50	3,432	15,57168317	0,433120357	2,244271991	fuera	varianzas diferentes
T5	0,05	23	27	15,75	2,019	61,22824239	0,433120357	2,244271991	fuera	varianzas diferentes
T6	0,05	23	27	15,09	2,892	27,40512959	0,433120357	2,244271991	fuera	varianzas diferentes
T7	0,05	23	27	17,36	2,785	39,14344851	0,433120357	2,244271991	fuera	varianzas diferentes
T8	0,05	23	27	20,17	3,778	28,70927418	0,433120357	2,244271991	fuera	varianzas diferentes
T9	0,05	23	27	3,36	5,748	0,344794101	0,433120357	2,244271991	fuera	varianzas diferentes
T10	0,05	23	27	8,45	4,167	4,276487592	0,433120357	2,244271991	fuera	varianzas diferentes

En la tabla se ha pintado la columna correspondiente al estadígrafo de prueba F. Se puede ver que solo los resultados de los talleres T₁ y T₂ están dentro de la región de aceptación, entonces se concluye que las varianzas para estos talleres son iguales con un 95% de certeza. En cambio los talleres del T₃ al T₁₀, sus resultados caen en la región de rechazo, entonces para este grupo de talleres las varianzas son diferentes.

5.8. DIFERENCIACIÓN DE MEDIAS PARA LOS TALLERES

Para los 10 talleres se tienen las siguientes declaraciones:

$n_1 = 23$: Tamaño de la muestra del COMIL2
 $n_2 = 27$: Tamaño de la muestra del CES
 } valores constantes

\bar{X}_1 : media del COMIL2

\bar{X}_2 : media del CES

S_1^2 : Varianza de la muestra del COMIL2

S_2^2 : Varianza de la muestra del CES

5.8.1. TALLERES CON VARIANZAS IGUALES

De los datos del **Anexo 5** para los talleres 1 y 2, se tiene la siguiente tabla.

TALLERES	COLEGIOS	Muestra	MEDIA	VARIANZA
T1	COMIL2	23	12,91	5,73
	CES	27	15,37	7,79
T2	COMIL2	23	13,52	4,08
	CES	27	14,93	5,99

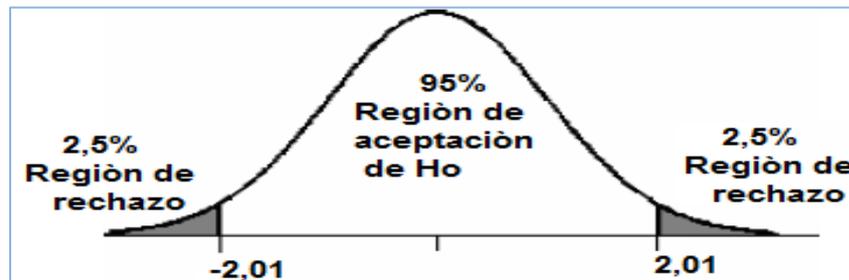
Las hipótesis que se plantean para este análisis son:

Hipótesis Nula: $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

Hipótesis Alternativa: $H_a : \mu_1 \neq \mu_2$

Región de Rechazo. Para los talleres 1 y 2; puesto que los grados de libertad y el nivel de confiabilidad son constantes, la región de rechazo y aceptación es la misma. Con una confiabilidad del 95 %, en la distribución t y con $k = n_1 + n_2 - 2 = 23 + 27 - 2 = 48$ grados de libertad. Calculando, resulta $k=48$. En

la tabla de distribución t de doble cola se obtienen los valores críticos: $t_{(0,05;48)} = \pm 2,01$. Estos resultados se observan en la figura



Cuando las **varianzas iguales**, el estadígrafo de cálculo para el taller 1:

$$t_{t_1} = \frac{[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)] \sqrt{n_1 + n_2 - 2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) (n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2)}} = \frac{[(12,91 - 15,37) - 0] \sqrt{23 + 27 - 2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{23} + \frac{1}{27}\right) [23 \cdot (5,73) + 27 \cdot (7,79)]}} = -3,24$$

Para el taller 2:

$$t_{t_2} = \frac{[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)] \sqrt{n_1 + n_2 - 2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) (n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2)}} = \frac{[(13,52 - 14,53) - 0] \sqrt{23 + 27 - 2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{23} + \frac{1}{27}\right) [23 \cdot (4,08) + 27 \cdot (5,99)]}} = -2,14$$

Por lo tanto se rechaza Ho; **las medias son diferentes** en los dos casos.

5.8.2. TALLERES CON VARIANZAS DIFERENTES

De los datos del **Anexo 6** correspondientes a los talleres del 3 al 10, se ha extraído la información más importante que se resume en la siguiente tabla:

TALLERES	COLEGIOS	MEDIA \bar{X}	VARIANZA: S^2
T3	COMIL2	14,48	2,51
	CES	14,48	6,47
T4	COMIL2	14,04	12,91
	CES	15,89	3,43
T5	COMIL2	15,26	15,06
	CES	15,59	2,02
T6	COMIL2	13,78	14,43
	CES	16,19	2,89
T7	COMIL2	12,00	16,61
	CES	14,26	2,78
T8	COMIL2	13,91	19,3
	CES	15,33	3,78
T9	COMIL2	16,00	3,22
	CES	15,26	5,75
T10	COMIL2	16,22	8,08
	CES	13,41	4,17

Las hipótesis son las mismas que para el caso anterior, se plantean así:

Hipótesis Nula: $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

Hipótesis Alternativa: $H_a : \mu_1 \neq \mu_2$

En todos los casos se usará un nivel de confiabilidad de 95%.

Para el estadígrafo de prueba utilizará la fórmula:

$$t_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

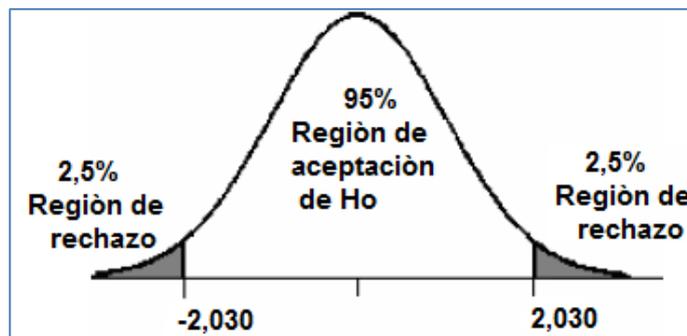
y para el cálculo del número de grados de libertad se utilizará la relación:

$$K = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}\right)^2}{\left(\frac{S_1^2}{n_1 - 1}\right)^2 \left(\frac{1}{n_1 + 1}\right) + \left(\frac{S_2^2}{n_2 - 1}\right)^2 \left(\frac{1}{n_2 + 1}\right)} - 2$$

Taller 3

Región de Rechazo. Para determinar la región de rechazo, se calcula primero el número de grados de libertad. Para mayor detalle de los cálculos para hallar los grados de libertad, se recomienda observar el **Anexo 7**. Para el taller3, el número de grados de libertad es: $K_3 = 35$

Con estos datos se calcula los valores críticos en la tabla de la distribución t de Student: $t_{0,05;35} = \pm 2,030$.



El valor del estadígrafo de prueba (ver detalle de cálculos en el anexo 8), es:

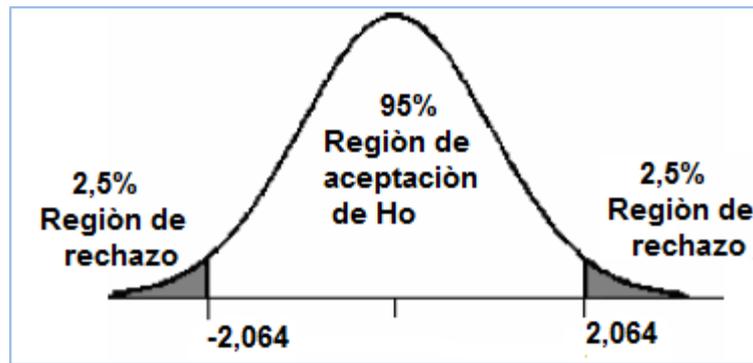
$$t_{T_3} = \frac{(14,48 - 14,48) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{2,51}{23} + \frac{6,47}{27}}} = 0$$

Este valor está **dentro** de la región de aceptación, por tanto se confirma que **las medias son iguales** con el 95% de certeza.

Taller 4

Región de Rechazo. Se calcula primero el número de grados de libertad, en este caso: $K_4 = 25$

Con estos datos se calcula los valores críticos en la tabla de la distribución t de Student: $t_{0,05;25} = \pm 2,064$.



Ahora se calcula el estadígrafo de prueba

$$t_{T_4} = \frac{(14,04 - 15,89) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{12,91}{23} + \frac{3,43}{27}}} = -2,2298$$

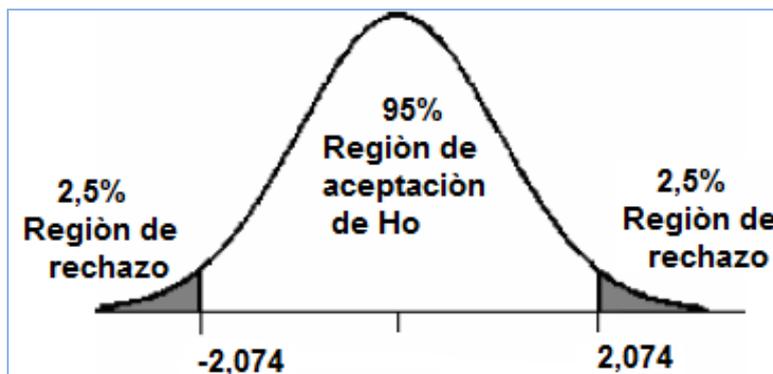
Este valor está **fuera** de la región de aceptación, por tanto se confirma que **las medias son diferentes** con el 95% de certeza.

Taller 5

Región de Rechazo. Se calcula primero el número de grados de libertad, en este caso: $K_5 = 22$

Los valores críticos en la tabla de la distribución t de Student, son:

$$t_{0,05;22} = \pm 2,074 .$$



Ahora se calcula el estadígrafo de prueba:

$$t_{T_5} = \frac{(15,26 - 15,59) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{15,06}{23} + \frac{2,02}{27}}} = -0,386$$

Este valor está **dentro** de la región de aceptación, por tanto se confirma que **las medias son iguales** con el 95% de certeza.

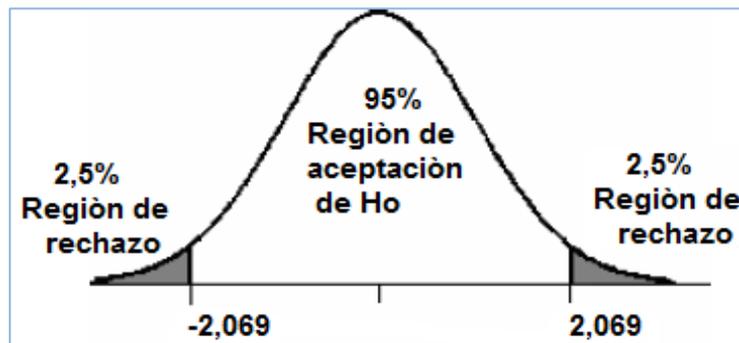
Taller 6

Región de Rechazo. Se calcula el número de grados de libertad, en este caso:

$$K_6 = 23$$

Los valores críticos en la tabla de la distribución t de Student, son:

$$t_{0,05;23} = \pm 2,069.$$



Ahora se calcula el estadígrafo de prueba

$$t_{T_6} = \frac{(13,78 - 16,19) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{14,43}{23} + \frac{2,89}{27}}} = -2,812$$

Este valor está fuera de la región de aceptación, por tanto se confirma **que las medias son diferentes** con el 95% de certeza.

Taller 7

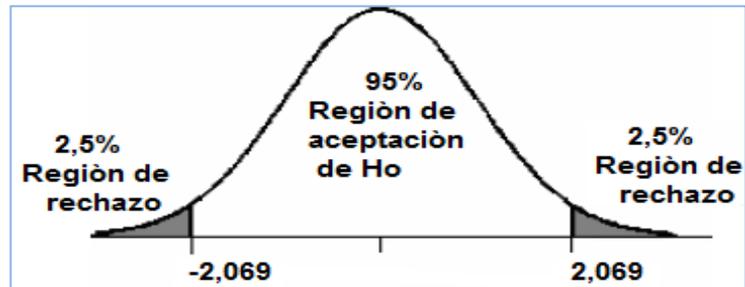
Región de Rechazo. Se calcula el número de grados de libertad, en este caso:

$$K_7 = 23$$

Los valores críticos en la tabla de la distribución t de Student, son:

$$t_{0,05;23} = \pm 2,069.$$

Ahora se calcula el estadígrafo de prueba.



$$t_{T_7} = \frac{(12,00 - 14,26) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{16,61}{23} + \frac{2,78}{27}}} = -2,488$$

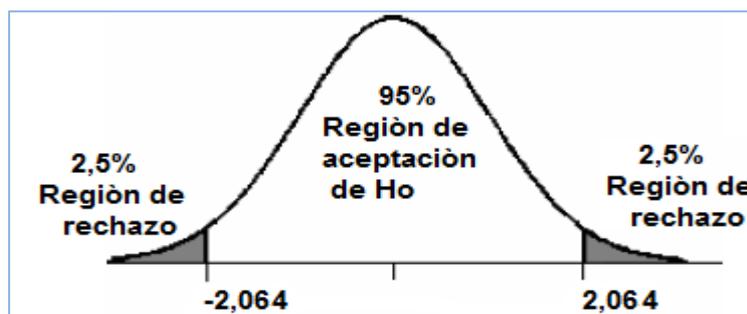
Este valor está **fuera** de la región de aceptación, por tanto se confirma que **las medias son diferentes** con el 95% de certeza.

Taller 8

Región de Rechazo. En este caso el número de grados de libertad, es: $K_8 = 24$

Los valores críticos en la tabla de la distribución t de Student, son:

$$t_{0,05;24} = \pm 2,064.$$



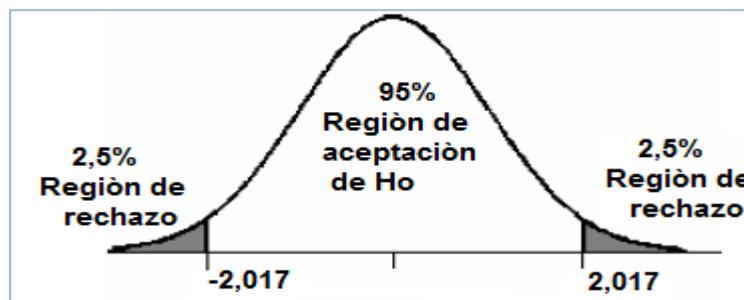
Ahora se calcula el estadígrafo de prueba

$$t_{T_8} = \frac{(13,91 - 15,33) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{19,3}{23} + \frac{3,78}{27}}} = -1,435$$

Este valor está **dentro** de la región de aceptación, por tanto se confirma que **las medias son iguales** con el 95% de certeza.

Taller 9

Región de Rechazo. Los grados de libertad en este caso son: $K_9 = 43$, Los valores críticos en la tabla de la distribución t de Student, son: $t_{0,05;43} = \pm 2,017$.



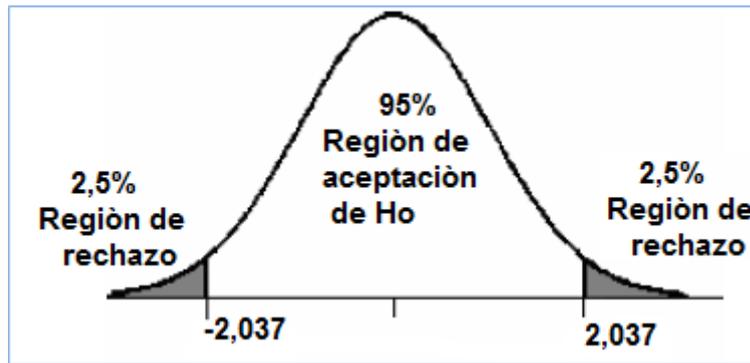
Ahora se calcula el estadígrafo de prueba

$$t_{T_9} = \frac{(16,00 - 15,26) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{3,22}{23} + \frac{5,75}{27}}} = 1,246$$

Este valor está **dentro** de la región de aceptación, por tanto se confirma que **las medias son iguales** con el 95% de certeza.

Taller 10

Región de Rechazo. Para este caso, los grados de libertad son: $K_{10} = 33$, Los valores críticos en la tabla de la distribución t de Student, son: $t_{0,05;33} = \pm 2,037$.



Ahora se calcula el estadígrafo de prueba

$$t_{T_{10}} = \frac{(16,22 - 13,41) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{8,08}{23} + \frac{4,17}{27}}} = 3,951$$

Este valor está **fuera** de la región de aceptación, por tanto se confirma **que las medias son diferentes** con el 95% de certeza.

5.9. PRUEBA DE HIPÓTESIS DE LAS NOTAS DE LAS LECCIONES ESCRITAS DE LOS ESTUDIANTES DEL GRUPO 2 DE LOS DOS COLEGIOS.

Aquí se comparan los resultados de las lecciones escritas aplicados a los estudiantes del COMIL2 y del CES que aprendieron con talleres (**ver anexo 9**), se realizará una diferenciación de medias de estos resultados para establecer si las medias son iguales o diferentes.

Descripción de los datos:

$n_1 = 23$: Tamaño de la muestra de los estudiantes del COMIL2

$n_2 = 27$: Tamaño de la muestra de los estudiantes del CES

$\alpha = 0,5$: Nivel de significación

S_1^2 : Varianza de la muestra del COMIL2

S_2^2 : Varianza de la muestra del CES

Prueba de hipótesis para las varianzas

Para muestras pequeñas ($n_1 = 23; n_2 = 27$), se debe probar si las varianzas poblacionales son iguales o diferentes antes de realizar la prueba de hipótesis para la diferencia de medias.

Se plantea la siguiente prueba de hipótesis:

Hipótesis Nula: $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$

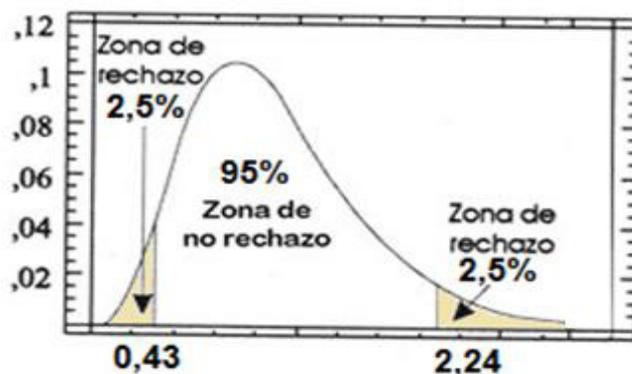
Hipótesis Alternativa: $H_a : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$

Región de Rechazo. Con una confiabilidad del 95 %, en los datos de la tabla F con 23 grados de libertad en el numerador y 27 en el denominador, se calculan fácilmente con las funciones de Excel los valores críticos son:

Límite superior: =DISTR.F.INV(0.05/2;23-1;27-1) =2,24

Límite inferior: =DISTR.F.INV(1-0.05/2; 23-1;27-1;) =0,43

Estos resultados se observan en la figura.



Ya que las muestras no cambian para los resultados de los 5 lecciones de los grupos de COMIL2 y del CES, y con el nivel de significación (95%), la región de rechazo y de aceptación es la misma para para todos los casos, luego habrá que sólo determinar el valor del estadígrafo **F** para ver si cae dentro o fuera de la región de rechazo.

Para la prueba de hipótesis se usará el estadígrafo: $F = \frac{n_1(n_2 - 1)S_1^2\sigma_2^2}{n_2(n_1 - 1)S_2^2\sigma_1^2}$

Ahora para decidir si los resultados del estadístico de prueba caen dentro o fuera de la región de rechazo, se ha construido una tabla con todos los datos de interés en este análisis:

PRUEBA DE HIPOTESIS PARA ESTABLECER SI LAS VARIANZAS DE LAS LECCIONES SON IGUALES O DIFERENTES										
lecciones	DATOS					$F = \frac{n_1(n_2 - 1)S_1^2\sigma_2^2}{n_2(n_1 - 1)S_2^2\sigma_1^2}$	Valores de tabla		DECISIÓN	CONCLUSIÓN
	α	n_1	n_2	S_1^2	S_2^2		Limite inferior	limite superior		
L1	0,05	23	27	7,29	2,809	6,784580403	2,24427	0,43312	fuera	varianzas diferentes
L2	0,05	23	27	21,2	17,76	1,433433954	2,24427	0,43312	dentro	varianzas iguales
L3	0,05	23	27	31,8	15,79	4,088643541	2,24427	0,43312	fuera	varianzas diferentes
L4	0,05	23	27	22,7	9,756	5,432108354	2,24427	0,43312	fuera	varianzas diferentes
L5	0,05	23	27	22,2	4,908	20,59727959	2,24427	0,43312	fuera	varianzas diferentes

En la tabla se han pintado los valores del estadígrafo F. el resultado de la lección 2 está dentro de la región de aceptación, se concluye que las varianzas son iguales con un 95% de certeza.

En cambio para las lecciones L₁, L₃, L₄ y L₅, los resultados caen en la región de rechazo, luego las varianzas son diferentes

5.9.1.DIFERENCIACIÓN DE MEDIAS PARA LA LECCION 2

Los datos de la lección 2, aparecen en la tabla.

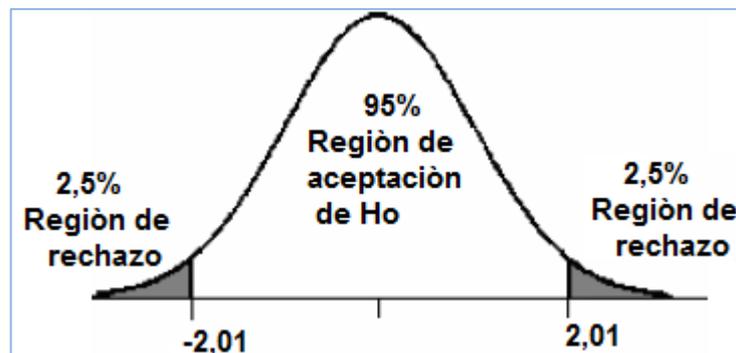
LECCION	COLEGIOS	MEDIA	VARIANZA
L2	COMIL2	11,174	21,187
	CES	13,148	17,756

Las hipótesis que se plantean para este análisis son:

Hipótesis Nula: $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

Hipótesis Alternativa: $H_a : \mu_1 \neq \mu_2$

Región de Rechazo. Para la lección 2, el nivel de significancia es del 95 %, y el número de grados de libertad es: $k = n_1 + n_2 - 2 = 23 + 27 - 2 = 48$. Con estos datos se obtienen los valores críticos de la tabla: $t_{(0,05;48)} = \pm 2,01$. Observa los datos en la figura.



Cuando las **varianzas iguales**, el estadígrafo de prueba, es:

$$t_{L_2} = \frac{[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)]\sqrt{n_1 + n_2 - 2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)(n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2)}} = \frac{[(11,17 - 13,15) - 0]\sqrt{23 + 27 - 2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{23} + \frac{1}{27}\right)[23 \cdot (21,18) + 27 \cdot (17,76)]}} = -0,224$$

Este valor cae dentro de la región de aceptación, entonces existe un 95% de confianza para establecer que **las medias son iguales**.

5.9.2. LECCIONES CON VARIANZAS DIFERENTES

Los datos de las lecciones con varianzas diferentes, se resumen en la siguiente tabla.

TALLERES	COLEGIOS	MEDIA: \bar{X}	VARIANZA: S^2
L1	COMIL2	16,52	7,29
	CES	16,93	2,81
L3	COMIL2	15,91	31,82
	CES	13,37	15,79
L4	COMIL2	13,65	22,66
	CES	14,15	9,76
L5	COMIL2	16,87	22,20
	CES	15,59	4,91

Las hipótesis se plantean así:

Hipótesis Nula: $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

Hipótesis Alternativa: $H_a : \mu_1 \neq \mu_2$

En todos los casos se usará un nivel de confiabilidad de 95%, se utilizará la fórmula:

$$t_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

para calcular el estadígrafo de prueba y para calcular los grados de libertad se utiliza la relación:

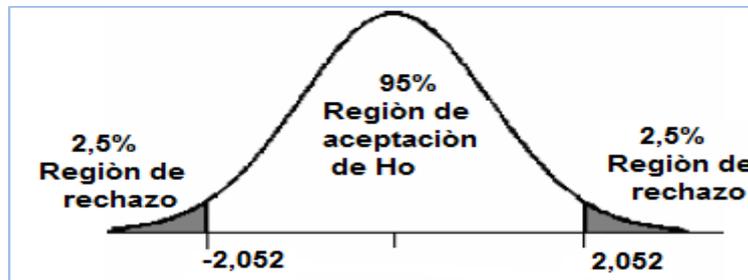
$$K = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1} \right)^2}{\left(\frac{S_1^2}{n_1 - 1} \right)^2 \left(\frac{1}{n_1 + 1} \right) + \left(\frac{S_2^2}{n_2 - 1} \right)^2 \left(\frac{1}{n_2 + 1} \right)} - 2$$

LECCIÓN 1

Región de Rechazo. Para determinar la región de rechazo, se calcula primero el número de grados de libertad, en este caso: $K_{L1} = 28$

Para observar todos los cálculos de los grados de libertad y los valores críticos de la región de rechazo puede ver tabla de datos del **Anexo 10**.

Con estos datos se calcula los valores críticos en la tabla de la distribución t de Student: $t_{0,05;28} = \pm 2,052$.



Para verificar los cálculos del estadígrafo de prueba, se puede revisar la tabla de datos del **Anexo 11**. El estadígrafo de prueba para el taller 1, es:

$$t_{L_1} = \frac{(16,52 - 16,93) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{7,29}{23} + \frac{2,81}{27}}} = -0,622831745$$

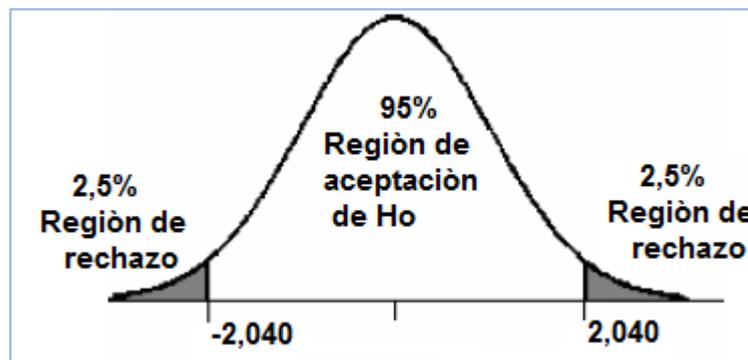
Este valor está **dentro** de la región de aceptación, por tanto se confirma que **las medias son iguales** con el 95% de certeza.

LECCIÓN 3

Región de Rechazo. Para delimitar la región de rechazo, se calcula primero el número de grados de libertad, (Ver anexo) en este caso: $K_{L3} = 32$

Luego se calcula los valores críticos en la tabla de la distribución t de Student:

$$t_{0,05;32} = \pm 2,040.$$



Ahora se calcula el estadígrafo de prueba

$$t_{L_3} = \frac{(15,91 - 13,37) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{31,82}{23} + \frac{15,79}{27}}} = 1,812415722$$

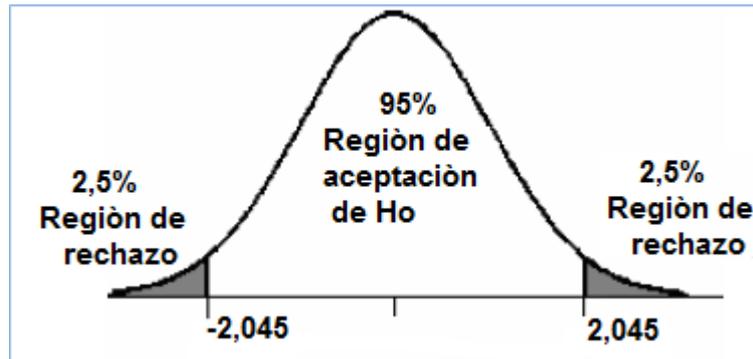
Este valor está **dentro** de la región de aceptación, por tanto se confirma que **las medias son iguales** con el 95% de certeza.

LECCIÓN 4

Región de Rechazo. Para delimitar la región de rechazo, se calcula primero el número de grados de libertad, (Ver anexo) en este caso: $K_{L4} = 29$

Luego se calcula los valores críticos en la tabla de la distribución t de Student:

$$t_{0,05;29} = \pm 2,045 .$$



Ahora se calcula el estadígrafo de prueba

$$t_{L4} = \frac{(13,65 - 14,15) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{22,66}{23} + \frac{9,76}{27}}} = -0,427402812$$

Este valor está **dentro** de la región de aceptación, por tanto se confirma que **las medias son iguales** con el 95% de certeza.

LECCIÓN 5

Región de Rechazo. Para delimitar la región de rechazo, se calcula primero el número de grados de libertad, (Ver anexo) en este caso: $K_{L5} = 24$

Luego se calcula los valores críticos en la tabla de la distribución t de Student:



$$t_{0,05;24} = \pm 2,069 .$$

Ahora se calcula el estadígrafo de prueba

$$t_{L_5} = \frac{(16,87 - 15,59) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{22,20}{23} + \frac{4,91}{27}}} = 1,192331525$$

Este valor también está **dentro** de la región de aceptación, por tanto se confirma que **las medias son iguales** con el 95% de certeza.

5.10. CONCLUSIONES DEL ANÁLISIS DE LA DIFERENCIACION DE MEDIAS

1. Se realizó prueba de hipótesis para comprobar si los estudiantes que aprenden con talleres aprenden más que aquellos que no aplican talleres. Con este fin se plantearon las hipótesis:

Hipótesis Nula: H_0

H_0 : “Los estudiantes que aprenden sin la aplicación de talleres aprenden tanto o más que los estudiantes que aprenden con talleres”; es decir: $H_0 : \mu_1 \geq \mu_2$

Hipótesis alternativa: H_a

H_a : “Los estudiantes que aprenden con talleres aprenden más que los estudiantes que no aplica talleres”; es decir: $H_a : \mu_1 < \mu_2$

Se confirmó que existe suficiente evidencia estadística con 95% de certeza para afirmar que la media de aprendizaje de los estudiantes que aprenden con talleres (μ_2) es mayor que la media de los estudiantes que aprenden sin talleres (μ_1), así se confirmó la hipótesis: $H_a : \mu_1 < \mu_2$. Esto se hizo comparando el aprendizaje adquirido por los estudiantes:

- i. Del Colegio Militar “Tente. Hugo Ortiz Garcés”, COMIL2
- ii. Del Colegio “Espíritu Santo”, CES
- iii. De los dos colegios COMIL” y CES

2. Luego se compararon los resultados de los 10 talleres de aprendizaje que fueron aplicados en los dos colegios. De este análisis, con un nivel de significancia de 95% se confirmó que 4 de los 10 talleres tienen medias iguales.

3. Finalmente, con el propósito de observar la afinidad y coherencia de los resultados, se compararon las notas de 5 lecciones escritas con las que se evaluaron a los estudiantes que aprendieron con talleres en los dos colegios. Aquí se observó que existe suficiente evidencia estadística para afirmar que las medias de las lecciones aplicadas en el COMIL2 y en el CES son iguales, con un 95% de confiabilidad.

CONCLUSIONES

- 1) Las pruebas de hipótesis realizadas con los dos grupos de estudiantes de los dos colegios (COMIL2 y CES), presentaron suficiente evidencia estadística para afirmar que el aprendizaje por talleres metodológicos resultó más significativo que el trabajo realizado con la metodología tradicional (sin la aplicación de talleres de aprendizaje)
- 2) En los dos colegios, la media simple de los resultados de los estudiantes bajo la modalidad de talleres, es mayor que la media de los estudiantes con aprendizaje sin talleres. El análisis por diferenciación de medias confirmó que el aprendizaje bajo talleres fue bastante significativo en comparación con el aprendizaje sin talleres.
- 3) Analizando en conjunto las dos instituciones CES y COMIL, nos indica que el aprendizaje basado en talleres fue más significativo que el aprendizaje sin talleres.
- 4) Los resultados revelan con 95% de eficacia que sólo 4 de los 10 talleres tienen concordancia de medias en las dos instituciones, tal vez esto se deba a algunas de las siguientes razones:
 - i) El diferente grado de conocimientos previos que tienen los estudiantes del colegio Militar Teniente Hugo Ortiz en comparación con los estudiantes del colegio espíritu Santo.
 - ii) Las propias diferencias individuales de los estudiantes. Actualmente, uno de los modelos con más aceptación es el de la existencia de una estructura múltiple de la inteligencia, es el modelo creado por Howard Gardner y se denomina Teoría de las Inteligencias Múltiples (MI). Esta teoría menciona que cada individuo tiene sus propias potencialidades en diferentes campos y esto contribuye a que los resultados de los

grupos del Comil y del Ces hayan tenido diferentes resultados en 6 de los 10 talleres.

- iii) Poco interés de los estudiantes en desarrollar con eficiencia los talleres de refuerzo en casa. (los resultados de las encuestas aplicadas a los estudiantes, así lo confirman)
- iv) A pesar que al principio el tiempo que se requiere para trabajar con la metodología de talleres es mayor que con la metodología tradicional, la compensación se evidencia en términos de aprendizaje.
- v) Los resultados de las encuestas aplicadas a los estudiantes, revelan que ellos aprende mucho más con actividades cooperativas que individuales.
- vi) La mayoría de los estudiantes creen que pueden mejorar su desempeño si el profesor aplica adecuadamente las estrategias de aprendizaje cooperativo.
- vii) El grado cultural de las familias que tienen accesos a estos institutos de educación influye para que los estudiantes no tengan pleno conocimiento de lo que significa el aprendizaje basado en talleres. Algunos piensan que trabajar en talleres es solamente observar lo que los más aptos realizan y que su contribución solo se limita a dar materiales o a realizar cálculos, no tienen plena concepción de lo que significa trabajar en talleres: “llegar al pleno conocimiento todo el grupo como objetivo principal”

RECOMENDACIONES

- i) Implementar esta metodología de trabajo en instituciones de educación media, dando facilidades y suficiente flexibilidad en términos de tiempo para su ejecución.
- ii) Las instituciones que adopten la modalidad de aprendizaje cooperativo basado en talleres, deberán planificar cuidadosamente sus actividades, tomando en consideración las bases epistemológicas apropiadas para su nuevo modelo de aprendizaje.
- iii) Antes de abordar y aplicar la metodología con los estudiantes, será conveniente ponerles al tanto de los principales conceptos del verdadero trabajo en equipo y especialmente el objetivo que se persigue cuando los maestros proponemos este tipo de metodología en el aula.
- iv) Procurar que en cada institución educativa se trabaje con la misma modalidad en todos los niveles de aprendizaje.
- v) Organizar los grupos de estudio de acuerdo a conveniencias de ubicación geográfica para facilitar las reuniones y se ejecute el trabajo de refuerzo.
- vi) Planificar la extensión de los talleres de acuerdo al tiempo y al ritmo de aprendizaje de los estudiantes, tomando en cuenta las diferencias individuales y los prerrequisitos.
- vii) Elaborar cuidadosamente la complejidad de los ejercicios para el desarrollo de los talleres, tomando en consideración la jerarquía y el nivel de preparación de los estudiantes.
- viii) Organizar los grupos de trabajo cooperativo considerando la diversidad de niveles de comprensión de los estudiantes, sus prerrequisitos y las habilidades específicas de los participantes, procurando desarrollar al máximo sus potencialidades.

BIBLIOGRAFÍA

- EDWIN J,VARBERG,DALE;RIGDON;Cálculo- Novena Edición- PURCELL, PEARSON EDUCACIÓN 2007
- ARTHUR GOODMAN-LEWIS HIRSCH -Algebra y trigonometría con geometría analítica, Primera edición- -PRENTICE HALL HISPANOAMERICANA,SA.
- SULLIVAN MICHAEL -Algebra y trigonometría Séptima edición- - PEARSON EDUCACIÓN, México, 2006.
- WILLIAM MENDENHALL. Introducción a la Probabilidad y Estadística. Cengage Learning Editores, 2007
- LUIS F. RODRÍGUEZ OJEDA. Probabilidad y Estadística Básica para Ingenieros. ICM, ESPOL. 2007
- INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMATICAS-ICM-Fundamentos de matemáticas para el bachillerato –ESPOL-2006
- MOISES VILLENA -El libro rojo de las matemáticas--INGRAF-2011

CITAS DE INTERNET

- <file:///C:/Users/HPDV4/Documents/FUNCIONES%20RACIONALES/funciones-rationales.htm>
- <file:///C:/Users/HPDV4/Documents/FUNCIONES%20RACIONALES/pasos-grafica-de-funciones-rationales.htm>
- <http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/sedes/manizales/4030006/lecciones/capitulotres/tema6.html>)
- Prueba de hipótesis para diferencia de medias
<http://www.youtube.com/watch?v=y1KR92K69lo>
- Prueba de hipótesis de una cola
- <http://www.youtube.com/watch?v=CwRMMV9Ha5w&feature=related>
- Varianza y desviación
<file:///C:/Users/HPDV4/Desktop/varianza%20desviacion%20t%27ipica.htm>
- Prueba de Hipótesis 1/8
<http://www.youtube.com/watch?v=jNcQJB8JREk&feature=related>.



ANEXOS

Anexo 1. DATOS COMIL 2

ESTUDIANTES CON TALLERES NOTA DEL EXAMEN		
Nº	NOMINA	NOTA
1	ANDRADE MACIAS PAOLA ESTEF	19
2	CARPIO VALENCIA STEVEN ALBERTO	15
3	CASTILLO RAMIRES JHONATAN	15
4	CHAPALVAY EDDI	12
5	CHIRIBOGA LOPEZ JOSEPH FABIAN	12
6	GONZALEZ AVILES CHRISTIAN	14
7	GUAMAN CUEVA ANDREINA CAR	12
8	LARA DANIEL	11
9	MADRID DIEGO	10
10	MIÑO TOMALÁ AYLIN	11
11	MURGUENZA AQUINO BRIGETTE	13
12	OCHOA CESAR	18
13	ORTIZ ANGELES	8
14	PILLAJO AARON	13
15	REQUENA ANDRES	19
16	RIVERA PEÑA HITLER	7
17	ROMAN CARLOS	12
18	RUGEL IVAN	19
19	SALAZAR JYMN	10
20	SALAZAR ROSADO STEVEN	12
21	SANCHEZ ANGIE	6
22	VELEZ ALVAREZ NICOLAS	12
23	VILLAREAL FERNANDO	15
	MEDIA	12,83
	DESV.	3,614

ESTUDIANTES SIN TALLERES NOTA DEL EXAMEN		
Nº	NOMINA	NOTA
1	ASPIASZU	7
2	BAZAN	7
3	CARPIO	11
4	CHALEN	4
5	CORDOVA	11
6	CORONEL	18
7	CUESTA	13
8	ESPINOZA	4
9	GARCIUA	6
10	GOMEZ	12
11	HERRERA	7
12	HARNISTH	9
13	MONAR	10
14	MORENO	7
15	MOSCOSO	12
16	OSAETA	7
17	PILOSO	10
18	POZO	11
19	QUIMI	11
20	RINCON	13
21	SUAREZ	20
22	SUCO	14
23	TOLEDO	14
24	VACA	16
25	VERA M	9
26	VERA N	7
	MEDIA	10,4
	DESV.	4,01

Anexo 2. DATOS DEL COLEGIO ESPIRITU SANTO-CES

ESTUDIANTES CON TALLER		
Nº	NOMINA	NOTA
1	AUHING	16
2	AVILES	19
3	CAICEDO	19
4	CAMPANA	15
5	CARRILLO	14
6	CUBILLO	16
7	CUZCO	18
8	DORADO	16
9	FREIRE	18
10	GARCIA	17
11	ICAZA	15
12	IDROVO	10
13	JIMENEZ A	12
14	JIMENEZ J	15
15	LARA	10
16	LEON	10
17	NARANJO	10
18	PARRA	15
19	PEREZ	12
20	PUGA	20
21	ROBLES	20
22	SALAZAR	20
23	TOBAR	14
24	TOLEDO	20
25	VELEZ	8
26	VEGA	7
27	WONG	10
	MEDIA	14,6666667
	DESV.	3,98072278

ESTUDIANTES SIN TALLER		
Nº	NOMINA	NOTA
1	ALVAREZ	10
2	AVILES	5
3	BETANCOURT	14
4	BRIONES	20
5	CARRERA	14
6	CASTRO	16
7	CHUCHUCA	20
8	CRESPO	17
9	DELGADO	7
10	GARCIA	15
11	GARCIA M.	6
12	GILER	13
13	GOMEZ	10
14	GONZAGA	8
15	HIDALGO	8
16	JURADO	12
17	LAINIZ	20
18	LLERENA	18
19	MENDOZA	10
20	OLINGI	7
21	QUEZADA	15
22	QUINTERO	19
23	RAMOS	11
24	RIVAS	15
25	TERAN	6
26	TINOCAO	14
27	TORO	3
28	VILLACRES	5
29	VILLEGAS	15
	MEDIA	12,1724138
	DESV.	5,04316345

Anexo 3. Datos de los estudiantes del Colegio Militar Tente. Hugo Ortiz Garcés y Del Colegio Espíritu Santo

ESTUDIANTES CON TALLERES		
Nº	NOMINA	NOT A
1	AUHING	16
2	AVILES	19
3	CAICEDO	19
4	CAMPANA	15
5	CARRILLO	14
6	CUBILLO	16
7	CUZCO	18
8	DORADO	16
9	FREIRE	18
10	GARCIA	17
11	ICAZA	15
12	IDROVO	10
13	JIMENEZ A	12
14	JIMENEZ J	15
15	LARA	10
16	LEON	10
17	NARANJO	10
18	PARRA	15
19	PEREZ	12
20	PUGA	20
21	ROBLES	20
22	SALAZAR	20
23	TOBAR	14
24	TOLEDO	20
25	VELEZ	8
26	VEGA	7
27	WONG	10
28	ANDRADE MACIAS PAOLA	19
29	CARPIO VALENCIA STEVEN	15
30	CASTILLO RAMIRES JHONATAN	15

ESTUDIANTES SIN TALLER		
Nº	NOMINA	NOT A
1	ALVAREZ	10
2	AVILES	5
3	BETANCOURT	14
4	BRIONES	20
5	CARRERA	14
6	CASTRO	16
7	CHUCHUCA	20
8	CRESPO	17
9	DELGADO	7
10	GARCIA	15
11	GARCIA M.	6
12	GILER	13
13	GOMEZ	10
14	GONZAGA	8
15	HIDALGO	8
16	JURADO	12
17	LAINAZ	20
18	LLERENA	18
19	MENDOZA	10
20	OLINGI	7
21	QUEZADA	15
22	QUINTERO	19
23	RAMOS	11
24	RIVAS	15
25	TERAN	6
26	TINOCALO	14
27	TORO	3
28	VILLACRES	5
29	VILLEGAS	15
30	ASPIASZU	7

31	CHAPALVAY EDDI	12
32	CHIRIBOGA LOPEZ JOSEPH	12
33	GONZALEZ AVILES CHRISTIAN	14
34	GUAMAN CUEVA ANDREINA	12
35	LARA DANIEL	11
36	MADRID DIEGO	10
37	MIÑO TOMALÁ AYLIN	11
38	MURGUENZA AQUINO BRIGETTE	13
39	OCHOA CESAR	18
40	ORTIZ ANGELES	8
41	PILLAJO AARON	13
42	REQUENA ANDRES	19
43	RIVERA PEÑA HITLER	7
44	ROMAN CARLOS	12
45	RUGEL IVAN	19
46	SALAZAR JYMN Y	10
47	SALAZAR ROSADO STEVEN	12
48	SANCHEZ ANGIE	6
49	VELEZ ALVAREZ NICOLAS	12
50	VILLAREAL FERNANDO	15
	MEDIA	13,82
	DESV	3,89

31	BAZAN	7
32	CARPIO	11
33	CHALEN	4
34	CORDOVA	11
35	CORONEL	18
36	CUESTA	13
37	ESPINOZA	4
38	GARCIUA	6
39	GOMEZ	12
40	HERRERA	7
41	HARNISTH	9
42	MONAR	10
43	MORENO	7
44	MOSCOSO	12
45	OSAETA	7
46	PILOSO	10
47	POZO	11
48	QUIMI	11
49	RINCON	13
50	SUAREZ	20
51	SUCO	14
52	TOLEDO	14
53	VACA	16
54	VERA M	9
55	VERA N	7
	MEDIA	11,33
	DESV	4,63

ANEXO 4

NOMINA DE ESTUDIANTES DEL COLEGIO MILITAR "TENTE HUGO ORTIZ GARCES"

RESULTADOS DE LA APLICACIÓN DE LOS TALLERES AÚLICOS III BACH. A 2011-2012

Nº	NOMINA	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T1	T8	T9	T10
1	ANDRADE MACIAS PAOLA ESTEF	10	15	17	19	14	11	9	14	19	11
2	CARPIO VALENCIA STEVEN ALBERTO	15	13	15	16	17	17	16	17	16	15
3	CASTILLO RAMIRES JHONATAN	17	17	16	14	18	16	13	18	14	20
4	CHAPALVAY EDDI	11	11	14	16	9	9	9	9	16	18
5	CHIRIBOGA LOPEZ JOSEPH FABIAN	13	12	14	16	17	17	16	17	15	17
6	GONZALEZ AVILES CHRISTIAN	13	12	14	16	15	13	11	15	16	17
7	GUAMAN CUEVA ANDREINA CAR	11	11	12	12	15	14	12	10	15	18
8	LARA DANIEL	12	13	14	14	10	9	8	10	14	16
9	MADRID DIEGO	10	15	15	14	14	14	14	13	14	11
10	MIÑO TOMALÁ AYLIN	13	12	14	16	20	18	16	20	19	17
11	MURGUENZA AQUINO BRIGETTE	17	17	16	15	14	13	12	15	14	20
12	OCHOA CESAR	12	13	14	15	18	17	15	12	18	16
13	ORTIZ ANGELES	10	15	15	15	20	17	14	20	15	11
14	PILLAJO AARON	12	13	12	11	15	13	11	11	15	16
15	REQUENA ANDRES	17	17	18	18	20	19	18	20	20	20
16	RIVERA PEÑA HITLER	17	17	12	6	7	7	6	7	14	20
17	ROMAN CARLOS	10	15	16	17	7	5	3	7	17	11
18	RUGEL IVAN	11	11	15	17	19	18	17	19	15	18
19	SALAZAR JYMNY	15	13	16	18	16	17	18	16	16	15
20	SALAZAR ROSADO STEVEN	15	13	14	14	20	17	14	20	18	15
21	SANCHEZ ANGIE	12	13	12	10	15	13	10	10	15	16
22	VELEZ ALVAREZ NICOLAS	13	12	13	5	13	9	5	13	15	17
23	VILLAREAL FERNANDO	11	11	15	9	18	14	9	7	18	18
	MEDIA	12,91	13,52	14,48	14,04	15,26	13,78	12,00	13,91	16,00	16,22
	DESV.	2,48	2,064	1,62	3,674	3,968	3,884	4,167	4,492	1,834	2,907

**NÓMINA DE LOS ESTUDIANTES DEL COLEGIO ESPIRITU SANTO
RESULTADOS DE LA APLICACIÓN DE LOS TALLERES AÚLICOS
III DE BACH-FIMA -A-2011-2012**

Nº	NOMINA	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10
1	AUHING CASTRO KEVIN ISRAEL	14	13	10	16	16	13	12	15	14	14
2	AVILES ZAVALA ERNESTO ANTONIO	14	16	15	16	16	14	14	15	16	14
3	CAICEDO TINOCO JORGE ANDRES	13	14	14	15	14	16	13	17	18	13
4	CAMPANA MONTUFAR MARIO ALBERTO	11	12	14	15	14	16	13	17	18	13
5	CARRILLO VASCONEZ JONATHAN DAVID	11	13	10	14	15	16	14	12	15	10
6	CUBILLO TORRES EDUARDO ANDRES	14	16	16	16	16	14	14	15	16	14
7	CUZCO ZUÑIGA JONATHAN ISRAEL	11	13	12	14	15	16	14	12	15	10
8	DORADO TRIVIÑO JUAN CARLOS	19	18	17	18	18	17	15	14	16	12
9	FREIRE QUINDE GONZALO ALEJANDRO	19	18	17	18	18	17	15	14	16	12
10	GARCIA PROAÑO LIBANO ANDRES	13	14	11	15	14	16	13	17	18	13
11	ICAZA PRECIADO KEVIN ALBERTO	16	11	12	13	14	15	12	14	10	13
12	IDROVO HUREL BYRON IVAN	18	17	17	18	16	19	17	18	17	17
13	JIMENEZ ARANA LUIS HUMBERTO	18	17	17	18	16	19	17	18	17	17
14	JIMENEZ JIMENEZ TOM ROGER	14	16	16	16	16	14	15	15	16	14
15	LARA JURADO ANDRES NAPOLEON	19	18	17	18	18	17	15	14	13	12
16	LEON VEGA MARCOS SAUL	18	17	17	18	16	19	17	18	17	17
17	NARANJO FIALLOS JULIO MIGUEL	13	14	16	15	14	16	13	17	18	13
18	PEREZ SALAZAR JOSUE DANIEL	14	16	16	16	16	14	15	17	16	14
19	PUGA CEVALLOS JULIO ANDRES	16	11	12	13	14	15	12	14	11	13
20	RIVERA ESCOBAR RONNY STEPHANO	16	11	12	13	14	15	12	14	11	13
21	ROBLES BELTRAN ROBERTO ANDRES	19	18	17	18	18	17	15	14	13	12
22	SALAZAR GUZMAN KEVIN AGUSTIN	18	17	17	18	16	19	17	18	17	17
23	TOBAR FAJARDO JEAM JAIRO	13	14	11	15	14	16	13	17	18	13
24	TOLEDO FAJARDO JEAM JAIRO	16	11	12	13	14	15	12	14	11	13
25	VELEZ FERNANDEZ JOSUE PAVEL	11	13	12	14	15	16	14	12	15	10
26	VERA GARCES RICRADO JOSE	18	17	17	18	16	19	17	18	17	17
27	WONG GRANDA WILLIAM JOAO	19	18	17	18	18	17	15	14	13	12
	MEDIA	15,37	14,93	14,48	15,89	15,59	16,19	14,26	15,33	15,26	13,41
	DESV.	2,84	2,50	2,59	1,89	1,45	1,73	1,70	1,98	2,44	2,08
	VARIANZA	7,79	5,99	6,47	3,43	2,02	2,89	2,78	3,78	5,75	4,17

ANEXO 5

DATOS PARA EL ANALISIS DE DIFERENCIACION DE MEDIAS TALLERES CON VARIANZAS IGUALES NOMINA DE ESTUDIANTES DEL COLEGIO MILITAR "TENTE HUGO ORTIZ" III DE BACH-A-2011-2012			
Nº	NOMINA	T1	T2
1	ANDRADE MACIAS PAOLA ESTEF	10	15
2	CARPIO VALENCIA STEVEN ALBERTO	15	13
3	CASTILLO RAMIRES JHONATAN	17	17
4	CHAPALVAY EDDI	11	11
5	CHIRIBOGA LOPEZ JOSEPH FABIAN	13	12
6	GONZALEZ AVILES CHRISTIAN	13	12
7	GUAMAN CUEVA ANDREINA CAR	11	11
8	LARA DANIEL	12	13
9	MADRID DIEGO	10	15
10	MIÑO TOMALÁ AYLIN	13	12
11	MURGUENZA AQUINO BRIGETTE	17	17
12	OCHOA CESAR	12	13
13	ORTIZ ANGELES	10	15
14	PILLAJO AARON	12	13
15	REQUENA ANDRES	17	17
16	RIVERA PEÑA HITLER	17	17
17	ROMAN CARLOS	10	15
18	RUGEL IVAN	11	11
19	SALAZAR JYMNY	15	13
20	SALAZAR ROSADO STEVEN	15	13
21	SANCHEZ ANGIE	12	13
22	VELEZ ALVAREZ NICOLAS	13	12
23	VILLAREAL FERNANDO	11	11
	MEDIA	12,91	13,52
	DESV.	2,45	2,06
	VARIANZA	5,73	4,08

ESTUDIANTES DEL COLEGIO ESPÍRITU SANTO

TALLERES CON VARIANZAS IGUALES

	NOMINA	T_1	T_2
1	AUHING CASTRO KEVIN ISRAEL	14	13
2	AVILES ZAVALA ERNESTO ANTONIO	14	16
3	CAICEDO TINOCO JORGE ANDRES	13	14
4	CAMPANA MONTUFAR MARIO ALBERTO	11	12
5	CARRILLO VASCONEZ JONATHAN DAVID	11	13
6	CUBILLO TORRES EDUARDO ANDRES	14	16
7	CUZCO ZUÑIGA JONATHAN ISRAEL	11	13
8	DORADO TRIVIÑO JUAN CARLOS	19	18
9	FREIRE QUINDE GONZALO ALEJANDRO	19	18
10	GARCIA PROAÑO LIBANO ANDRES	13	14
11	ICAZA PRECIADO KEVIN ALBERTO	16	11
12	IDROVO HUREL BYRON IVAN	18	17
13	JIMENEZ ARANA LUIS HUMBERTO	18	17
14	JIMENEZ JIMENEZ TOM ROGER	14	16
15	LARA JURADO ANDRES NAPOLEON	19	18
16	LEON VEGA MARCOS SAUL	18	17
17	NARANJO FIALLOS JULIO MIGUEL	13	14
18	PEREZ SALAZAR JOSUE DANIEL	14	16
19	PUGA CEVALLOS JULIO ANDRES	16	11
20	RIVERA ESCOBAR RONNY STEPHANO	16	11
21	ROBLES BELTRAN ROBERTO ANDRES	19	18
22	SALAZAR GUZMAN KEVIN AGUSTIN	18	17
23	TOBAR FAJARDO JEAM JAIRO	13	14
24	TOLEDO FAJARDO JEAM JAIRO	16	11
25	VELEZ FERNANDEZ JOSUE PAVEL	11	13
26	VERA GARCES RICRADO JOSE	18	17
27	WONG GRANDA WILLIAM JOAO	19	18
	MEDIA	15,37	14,93
	DESV.	2,84	2,50
	VARIANZA	7,79	5,99

ANEXO 6

DATOS PARA EL ANALISIS DE DIFERENCIACION DE MEDIAS

TALLERES CON VARIANZAS DIFERENTES

NOMINA DE ESTUDIANTES DEL COLEGIO "MILITAR TENIETE HUGO ORTIZ"

RESULTADOS DE LA APLICACIÓN DE LOS TALLERES EN EL AULA

Nº	NOMINA	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10
1	ANDRADE MACIAS PAOLA	17	19	14	11	9	14	19	11
2	CARPIO VALENCIA STEVEN	15	16	17	17	16	17	16	15
3	CASTILLO RAMIRES JHONATAN	16	14	18	16	13	18	14	20
4	CHAPALVAY EDDI	14	16	9	9	9	9	16	18
5	CHIRIBOGA LOPEZ JOSEPH	14	16	17	17	16	17	15	17
6	GONZALEZ AVILES CHRISTIAN	14	16	15	13	11	15	16	17
7	GUAMAN CUEVA ANDREINA	12	12	15	14	12	10	15	18
8	LARA DANIEL	14	14	10	9	8	10	14	16
9	MADRID DIEGO	15	14	14	14	14	13	14	11
10	MIÑO TOMALÁ AYLIN	14	16	20	18	16	20	19	17
11	MURGUENZA AQUINO BRIGETTE	16	15	14	13	12	15	14	20
12	OCHOA CESAR	14	15	18	17	15	12	18	16
13	ORTIZ ANGELES	15	15	20	17	14	20	15	11
14	PILLAJO AARON	12	11	15	13	11	11	15	16
15	REQUENA ANDRES	18	18	20	19	18	20	20	20
16	RIVERA PEÑA HITLER	12	6	7	7	6	7	14	20
17	ROMAN CARLOS	16	17	7	5	3	7	17	11
18	RUGEL IVAN	15	17	19	18	17	19	15	18
19	SALAZAR JYMNY	16	18	16	17	18	16	16	15
20	SALAZAR ROSADO STEVEN	14	14	20	17	14	20	18	15
21	SANCHEZ ANGIE	12	10	15	13	10	10	15	16
22	VELEZ ALVAREZ NICOLAS	13	5	13	9	5	13	15	17
23	VILLAREAL FERNANDO	15	9	18	14	9	7	18	18
	MEDIA	14,48	14,04	15,26	13,78	12,00	13,91	16,00	16,22
	DESV.	1,62	3,67	3,97	3,88	4,17	4,49	1,83	2,91
	VARIANZA	2,51	12,91	15,06	14,43	16,61	19,30	3,22	8,08

**NOMINA DE ESTUDIANTES DEL COLEGIO ESPIRITU SANTO
RESULTADOS DE LA APLICACIÓN DE LOS TALLERES EN EL AULA**

Nº	NÓMINA	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10
1	AUHING CASTRO KEVIN	10	16	16	13	12	15	14	14
2	AVILES ZAVALA ERNESTO	15	16	16	14	14	15	16	14
3	CAICEDO TINOCO JORGE	14	15	14	16	13	17	18	13
4	CAMPANA MONTUFAR MARIO	14	15	14	16	13	17	18	13
5	CARRILLO VASCONEZ JONATHAN	10	14	15	16	14	12	15	10
6	CUBILLO TORRES EDUARDO	16	16	16	14	14	15	16	14
7	CUZCO ZUÑIGA JONATHAN	12	14	15	16	14	12	15	10
8	DORADO TRIVIÑO JUAN	17	18	18	17	15	14	16	12
9	FREIRE QUINDE GONZALO	17	18	18	17	15	14	16	12
10	GARCIA PROAÑO LIBANO	11	15	14	16	13	17	18	13
11	ICAZA PRECIADO KEVIN	12	13	14	15	12	14	10	13
12	IDROVO HUREL BYRON	17	18	16	19	17	18	17	17
13	JIMENEZ ARANA LUIS	17	18	16	19	17	18	17	17
14	JIMENEZ JIMENEZ TOM	16	16	16	14	15	15	16	14

15	LARA JURADO ANDRES	17	18	18	17	15	14	13	12
16	LEON VEGA MARCOS	17	18	16	19	17	18	17	17
17	NARANJO FIALLOS JULIO	16	15	14	16	13	17	18	13
18	PEREZ SALAZAR JOSUE	16	16	16	14	15	17	16	14
19	PUGA CEVALLOS JULIO	12	13	14	15	12	14	11	13
20	RIVERA ESCOBAR RONNY	12	13	14	15	12	14	11	13
21	ROBLES BELTRAN ROBERTO	17	18	18	17	15	14	13	12
22	SALAZAR GUZMAN KEVIN	17	18	16	19	17	18	17	17
23	TOBAR FAJARDO JEAM	11	15	14	16	13	17	18	13
24	TOLEDO FAJARDO JEAM	12	13	14	15	12	14	11	13
25	VELEZ FERNANDEZ JOSUE	12	14	15	16	14	12	15	10
26	VERA GARCES RICRADO	17	18	16	19	17	18	17	17
27	WONG GRANDA WILLIAM	17	18	18	17	15	14	13	12
	MEDIA	14,48	15,89	15,59	16,19	14,26	15,33	15,26	13,41
	DESV.	2,59	1,89	1,45	1,73	1,70	1,98	2,44	2,08
	VARIANZA	6,47	3,43	2,02	2,89	2,78	3,78	5,75	4,17

ANEXO 7: TABLA DE CÁLCULO DE LOS GRADOS DE LIBERTAD K Y VALORES CRÍTICOS DEL ESTIMADOR Z PARA

TALLERES CON VARIANZAS DIFERENTES:
$$K = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1-1} + \frac{S_2^2}{n_2-1}\right)^2}{\left(\frac{S_1^2}{n_1-1}\right)^2 \left(\frac{1}{n_1+1}\right) + \left(\frac{S_2^2}{n_2-1}\right)^2 \left(\frac{1}{n_2+1}\right)} - 2$$

TALLERES	MEDIDAS	COMIL2 (N1 = 23)	CES (N2 = 27)	$\frac{S_1^2}{n_1-1}$	$\frac{S_2^2}{n_2-1}$	$\left(\frac{S_1^2}{n_1-1} + \frac{S_2^2}{n_2-1}\right)^2$	$\left(\frac{S_1^2}{n_1-1}\right)^2 \left(\frac{1}{n_1+1}\right)$	$\left(\frac{S_2^2}{n_2-1}\right)^2 \left(\frac{1}{n_2+1}\right)$		K	P	
T3	MEDI A: \bar{X}	14,48	14,48	0,286	1,610	3,596	0,003	0,093	0,096	35	0,050	2,030
	VAR : S^2	2,51	6,47									
T4	MEDI A: \bar{X}	14,04	15,89	7,576	0,452	64,454	2,391	0,007	2,399	25	0,050	2,064
	VAR : S^2	12,91	3,43									
T5	MEDI A: \bar{X}	15,26	15,59	10,309	0,157	109,541	4,428	0,001	4,429	22	0,050	2,074
	VAR : S^2	15,06	2,02									
T6	MEDI A: \bar{X}	13,78	16,19	9,465	0,321	95,766	3,733	0,004	3,736	23	0,050	2,069
	VAR : S^2	14,43	2,89									
T7	MEDI A: \bar{X}	12,00	14,26	12,541	0,297	164,809	6,553	0,003	6,556	23	0,050	2,069
	VAR : S^2	16,61	2,78									
T8	MEDI A: \bar{X}	13,91	15,33	16,931	0,550	305,582	11,945	0,011	11,955	24	0,050	2,064
	VAR : S^2	19,3	3,78									
T9	MEDI A: \bar{X}	16,00	15,26	0,471	1,272	3,038	0,009	0,058	0,067	43	0,050	2,017
	VAR : S^2	3,22	5,75									
T10	MEDI A: \bar{X}	16,22	13,41	2,968	0,669	13,223	0,367	0,016	0,383	33	0,050	2,037
	VAR : S^2	8,08	4,17									

ANEXO 8: TABLA DE CÁLCULO DEL ESTADÍGRAFO DE PRUEBA PARA LOS TALLERES DE VARIANZAS DIFERENTES.

$$Z_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

TALLERES	MEDIDAS	COMIL2	CES	$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$	$\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$	$Z_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$
T3	MEDIA	14,48	14,48	0,000	0,591	0,000
	VARIANZA	2,51	6,47			
T4	MEDIA	14,04	15,89	-1,850	0,830	-2,230
	VARIANZA	12,91	3,43			
T5	MEDIA	15,26	15,59	-0,330	0,854	-0,386
	VARIANZA	15,06	2,02			
T6	MEDIA	13,78	16,19	-2,410	0,857	-2,812
	VARIANZA	14,43	2,89			
T7	MEDIA	12,00	14,26	-2,260	0,908	-2,488
	VARIANZA	16,61	2,78			
T8	MEDIA	13,91	15,33	-1,420	0,990	-1,435
	VARIANZA	19,3	3,78			
T9	MEDIA	16,00	15,26	0,740	0,594	1,246
	VARIANZA	3,22	5,75			
T10	MEDIA	16,22	13,41	2,810	0,711	3,951
	VARIANZA	8,08	4,17			

ANEXO 9.

RESULTADOS DE LAS LECCIONES ESCRITAS DE LOS ESTUDIANTES DEL COMIL2 QUE APRENDIERON CON TALLERES

Nº	NOMINA	L1	L2	L3	L4	L5
1	ANDRADE MACIAS PAOLA ESTEF	11	11	20	17	20
2	CARPIO VALENCIA STEVEN ALBERTO	19	20	20	20	19
3	CASTILLO RAMIRES JHONATAN	20	12	20	18	20
4	CHAPALVAY EDDI	18	6	20	11	3
5	CHIRIBOGA LOPEZ JOSEPH FABIAN	17	12	20	15	20
6	GONZALEZ AVILES CHRISTIAN	17	6	20	7	20
7	GUAMAN CUEVA ANDREINA CAR	18	12	8	8	18
8	LARA DANIEL	16	8	4	8	11
9	MADRID DIEGO	11	10	8	20	20
10	MIÑO TOMALÁ AYLIN	17	12	16	15	19
11	MURGUENZA AQUINO BRIGETTE	20	7	12	8	9
12	OCHOA CESAR	16	18	20	20	20
13	ORTIZ ANGELES	11	12	14	7	13
14	PILLAJO AARON	16	14	20	14	20
15	REQUENA ANDRES	20	20	20	20	20
16	RIVERA PEÑA HITLER	20	6	6	6	18
17	ROMAN CARLOS	14	14	12	11	9
18	RUGEL IVAN	18	18	20	18	20
19	SALAZAR JYMNYY	15	6	20	19	20
20	SALAZAR ROSADO STEVEN	15	13	20	16	20
21	SANCHEZ ANGIE	16	6	6	10	13
22	VELEZ ALVAREZ NICOLAS	17	4	20	14	20

23	VILLAREAL FERNANDO	18	10	20	12	16
	MEDIA	16,522	11,174	15,913	13,652	16,870
	VARIANZA	7,293	21,187	31,819	22,662	22,200

RESULTADOS DE LAS LECCIONES ESCRITAS DE LOS ESTUDIANTES DEL CES QUE APRENDIERON CON TALLERES

Nº	NOMINA	L1	L2	L3	L4	L5
1	AUHING CASTRO KEVIN	15	16	14	12	17
2	AVILES ZAVALA ERNESTO	18	18	17	15	14
3	CAICEDO TINOCO JORGE	17	14	14	18	17
4	CAMPANA MONTUFAR MARIO	16	16	17	15	15
5	CARRILLO VASCONEZ JONATHAN	16	14	17	17	18
6	CUBILLO TORRES EDUARDO	18	3	16	16	19
7	CUZCO ZUÑIGA JONATHAN	19	15	15	17	18
8	DORADO TRIVIÑO JUAN	18	15	15	15	20
9	FREIRE QUINDE GONZALO	17	8	6	16	16
10	GARCIA PROAÑO LIBANO	18	16	12	17	15
11	ICAZA PRECIADO KEVIN	17	17	10	13	14
12	IDROVO HUREL BYRON	16	12	14	10	12
13	JIMENEZ ARANA LUIS	14	10	8	10	15
14	JIMENEZ JIMENEZ TOM	16	16	17	18	16
15	LARA JURADO ANDRES	16	4	7	10	14
16	LEON VEGA MARCOS	14	5	9	10	12
17	NARANJO FIALLOS JULIO	19	13	17	17	16
18	PEREZ SALAZAR JOSUE	16	9	10	8	12
19	PUGA CEVALLOS JULIO	16	10	4	12	14
20	RIVERA ESCOBAR RONNY	16	15	12	10	13
21	ROBLES BELTRAN ROBERTO	20	18	19	18	16
22	SALAZAR GUZMAN KEVIN	20	19	18	19	19
23	TOBAR FAJARDO JEAM	16	15	14	15	16
24	TOLEDO FAJARDO JEAM	20	17	19	17	19
25	VELEZ FERNANDEZ JOSUE	18	14	12	12	16
26	VERA GARCES RICRADO	15	14	13	12	14
27	WONG GRANDA WILLIAM	16	12	15	13	14
	MEDIA	16,926	13,148	13,370	14,148	15,593
	VARIANZA	2,809	17,756	15,789	9,756	4,908

ANEXO 10. TABLA DE CÁLCULO DE LOS GRADOS DE LIBERTAD K Y VALORES CRÍTICOS DEL ESTIMADOR Z PARA LAS

LECCIONES CON VARIANZAS DIFERENTES:
$$K = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1} \right)^2}{\left(\frac{S_1^2}{n_1 - 1} \right)^2 \left(\frac{1}{n_1 + 1} \right) + \left(\frac{S_2^2}{n_2 - 1} \right)^2 \left(\frac{1}{n_2 + 1} \right)} - 2$$

LECCIONES	MEDIDAS	COMIL2(n1=23)	CES(N2=27)	$\frac{S_1^2}{n_1 - 1}$	$\frac{S_2^2}{n_2 - 1}$	$\left(\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1} \right)^2$	$\left(\frac{S_1^2}{n_1 - 1} \right)^2 \left(\frac{1}{n_1 + 1} \right)$	$\left(\frac{S_2^2}{n_2 - 1} \right)^2 \left(\frac{1}{n_2 + 1} \right)$		K	P	
L1	MEDIA	16,52	16,93	2,418	0,304	7,405	0,244	0,003	0,247	28	0,050	2,052
	VARIANZA	7,293	2,809									
L3	MEDIA	15,91	13,37	46,019	9,588	3092,127	88,240	3,283	91,523	32	0,050	2,040
	VARIANZA	31,82	15,79									
L4	MEDIA	13,65	14,15	23,343	3,661	729,204	22,704	0,479	23,183	29	0,050	2,045
	VARIANZA	22,66	9,756									
L5	MEDIA	16,87	15,59	22,403	0,927	544,247	20,911	0,031	20,942	24	0,050	2,069
	VARIANZA	22,2	4,908									

ANEXO 11. TABLA DE CÁLCULO DEL ESTADÍGRAFO DE PRUEBA PARA LAS LECCIONES ESCRITAS DE VARIANZAS DIFERENTES:

$$Z_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

LECCIONES	MEDIDAS	COMIL2	CES	$\bar{X}_1 - \bar{X}_2$	$\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$	$Z_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$
L1	MEDIA	16,52	16,93	-0,404	0,649	-
	VAR	7,293	2,809			
L3	MEDIA	15,91	13,37	2,5427	1,403	1,812415722
	VAR	31,82	15,79			
L4	MEDIA	13,65	14,15	-0,496	1,16	-
	VAR	22,66	9,756			
L5	MEDIA	16,87	15,59	1,277	1,071	1,192331525
	VAR	22,2	4,908			

Anexo 12. Resultados de las encuestas del COMIL

CATEGORIAS

MA: Muy de acuerdo

DA: De acuerdo

ED: En desacuerdo

MD

: Muy en desacuerdo

No PREGUNTAS

Nº	Ítems	MA	DA	ED	MD
1	(1) Tus conocimientos básicos de álgebra han sido insuficientes para abordar el tema de funciones racionales	6	8	7	1
		MA	DA	ED	MD
2	(2)Te agrada tu grupo de trabajo para realizar los talleres de trabajo	10	5	4	3
		MA	DA	ED	MD
3	(3) ¿Asisten todos los integrantes de tu grupo a las reuniones de trabajo fuera del aula?	0	5	9	8
		MA	DA	ED	MD
4	(4) Prefieres trabajar solo y no en grupo	3	2	4	13
		MA	DA	ED	MD
5	(5) Trabajando en grupo aprendes mucho mejor	11	10	1	0
		MA	DA	ED	MD
6	(6) ¿Está usted de acuerdo en continuar trabajando los talleres con tu grupo de trabajo?	9	6	5	2
		MA	DA	ED	MD
7	(7) Está usted de acuerdo en que le faltaron prerrequisitos para abordar el tema de funciones racionales	10	11	1	0
		MA	DA	ED	MD
8	(8) El trabajo que presentan al profesor es elaborado por todos los integrantes del grupo	5	10	6	1
		MA	DA	ED	MD

9	(9) Entiendes todos los problemas que se proponen en el taller	0	8	11	3
		MA	DA	ED	MD
10	(10) Contribuyes con buenas ideas para la realización del taller	7	15	0	0
		MA	DA	ED	MD
11	(11) Realizas preguntas a tus compañeros de trabajo cuando no entiendes	11	8	2	0
		MA	DA	ED	MD
12	(12) Es apropiada la extensión de los talleres para el tiempo disponible.	5	9	6	1
		MA	DA	ED	MD
13	(13) ¿Crees que puedes mejorar tu desempeño en el equipo de trabajo?	11	6	3	2
		MA	DA	ED	MD
14	(14) ¿Sabes manejar apropiadamente el software para graficar funciones?	3	8	3	7
		MA	DA	ED	MD
15	(15) El software te ha permitido aprender de mejor forma la graficación de las funciones.	5	8	5	4
		MA	DA	ED	MD
16	(16) Definitivamente trabajar en talleres ha permitido mejorar tu aprendizaje	5	12	5	0

ANEXO 13. RESULTADOS DE LAS ENCUESTAS DEL CES

CATEGORIAS

MA: Muy de acuerdo

DA: De acuerdo

ED: En desacuerdo

Muy en desacuerdo

MD:

PREGUNTAS

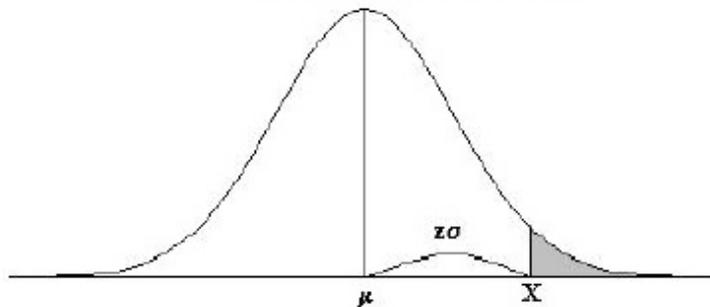
NO

Nº	Ítems	MA	DA	ED	MD
1	¿Crees que tus conocimientos básicos de álgebra han sido insuficientes para abordar el tema de funciones racionales?	8	9	6	4
		MA	DA	ED	MD
2	Te agrada tu grupo de trabajo para realizar los talleres de trabajo	16	5	3	3
		MA	DA	ED	MD
3	¿Asisten todos los integrantes de tu grupo a las reuniones de trabajo fuera del aula?	2	9	12	4
		MA	DA	ED	MD
4	Prefieres trabajar solo y no en grupo	2	4	6	15
		MA	DA	ED	MD
5	Trabajando en grupo aprendes mucho mejor	14	10	2	1
		MA	DA	ED	MD
6	¿Está usted de acuerdo en continuar trabajando los talleres con tu grupo de trabajo?	18	6	2	1
		MA	DA	ED	MD
7	Está usted de acuerdo en que le faltaron prerrequisitos para abordar el tema de funciones racionales	14	9	3	1
		MA	DA	ED	MD
8	El trabajo que presentan al profesor es elaborado por todos los integrantes del grupo	7	14	5	1
		MA	DA	ED	MD
9	Entiendes todos los problemas que se proponen en el taller	2	8	14	3
		MA	DA	ED	MD

10	Contribuyes con buenas ideas para la realización del taller	10	15	2	0
		MA	DA	ED	MD
11	Realizas preguntas a tus compañeros de trabajo cuando no entiendes	16	9	2	0
		MA	DA	ED	MD
12	Es apropiada la extensión de los talleres para el tiempo disponible.	10	9	7	1
		MA	DA	ED	MD
13	¿Crees que puedes mejorar tu desempeño en el equipo de trabajo?	14	10	2	1
14	¿Sabes manejar apropiadamente el software para graficar funciones?	4	10	8	5
		MA	DA	ED	MD
15	El software te ha permitido aprender de mejor forma la graficación de las funciones.	10	10	5	4
		MA	DA	ED	MD
16	Definitivamente trabajar en talleres ha permitido mejorar tu aprendizaje	12	13	1	1

TABLA 1: DISTRIBUCIÓN NORMAL

Áreas bajo la curva normal



Ejemplo:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

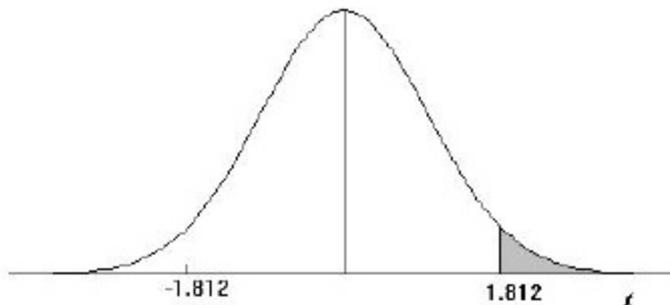
$$P[Z > 1] = 0.1587$$

$$P[Z > 1.96] = 0.0250$$

Desv. normal x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010

TABLA 2: DISTRIBUCIÓN t DE STUDENT

Puntos de porcentaje de la distribución t



Ejemplo

Para $\phi = 10$ grados de libertad:

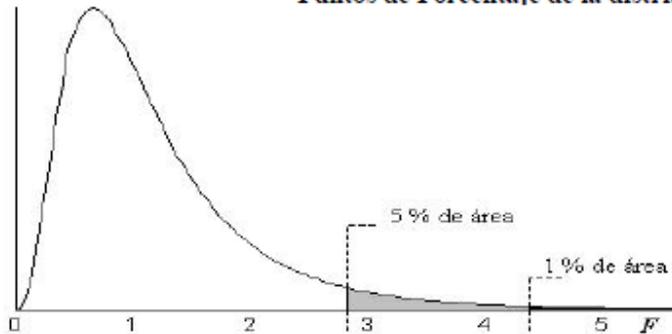
$$P[t > 1.812] = 0.05$$

$$P[t < -1.812] = 0.05$$

α Γ	0,25	0,2	0,15	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0005
1	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656	636,578
2	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,600
3	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924
4	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,768
24	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,689
28	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,660
30	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	0,679	0,848	1,045	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,290

TABLA 4: DISTRIBUCIÓN F DE FISHER

Puntos de Porcentaje de la distribución F



Ejemplo:

Para $n_1 = 9, n_2 = 12$ grados de libertad:

$P[F > 2.80] = 0.05$

$P[F > 4.39] = 0.01$

n_2	5% (normal) y 1% (negritas) puntos para la distribución de F																				n_2				
	n_1 grados de libertad (para el mayor cuadrado medio)																								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.08	3.01	2.95	2.90	2.85	2.82	2.79	2.74	2.70	2.65	2.61	2.57	2.53	2.51	2.47	2.46	2.43	2.42	2.40	11
	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.46	4.40	4.29	4.21	4.10	4.02	3.94	3.86	3.81	3.74	3.71	3.66	3.62	3.60	
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.72	2.69	2.64	2.60	2.54	2.51	2.47	2.43	2.40	2.37	2.35	2.32	2.31	2.30	12
	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.22	4.16	4.05	3.97	3.86	3.78	3.70	3.62	3.57	3.50	3.47	3.41	3.38	3.36	
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.63	2.60	2.55	2.51	2.46	2.42	2.38	2.34	2.31	2.28	2.26	2.23	2.22	2.21	13
	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	4.02	3.96	3.86	3.78	3.66	3.59	3.51	3.43	3.38	3.31	3.27	3.22	3.19	3.17	
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.57	2.53	2.48	2.44	2.39	2.35	2.31	2.27	2.24	2.21	2.19	2.16	2.14	2.13	14
	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.86	3.80	3.70	3.62	3.51	3.43	3.35	3.27	3.22	3.15	3.11	3.06	3.03	3.00	
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48	2.42	2.38	2.33	2.29	2.25	2.20	2.18	2.14	2.12	2.10	2.08	2.07	15
	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.73	3.67	3.56	3.49	3.37	3.29	3.21	3.13	3.08	3.01	2.98	2.92	2.89	2.87	
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.46	2.42	2.37	2.33	2.28	2.24	2.19	2.15	2.12	2.09	2.07	2.04	2.02	2.01	16
	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.62	3.55	3.45	3.37	3.26	3.18	3.10	3.02	2.97	2.90	2.86	2.81	2.78	2.75	
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.38	2.33	2.29	2.23	2.19	2.15	2.10	2.08	2.04	2.02	1.99	1.97	1.96	17
	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.52	3.46	3.35	3.27	3.16	3.08	3.00	2.92	2.87	2.80	2.76	2.71	2.68	2.65	
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34	2.29	2.25	2.19	2.15	2.11	2.06	2.04	2.00	1.98	1.95	1.93	1.92	18
	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.43	3.37	3.27	3.19	3.08	3.00	2.92	2.84	2.78	2.71	2.68	2.62	2.59	2.57	
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.34	2.31	2.26	2.21	2.16	2.11	2.07	2.03	2.00	1.98	1.94	1.91	1.89	1.88	19
	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.36	3.30	3.19	3.12	3.00	2.92	2.84	2.76	2.71	2.64	2.60	2.55	2.51	2.49	
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28	2.22	2.18	2.12	2.08	2.04	1.99	1.97	1.93	1.91	1.88	1.86	1.84	20
	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.29	3.23	3.13	3.05	2.94	2.86	2.78	2.69	2.64	2.57	2.54	2.48	2.44	2.42	
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.28	2.25	2.20	2.16	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.90	1.88	1.84	1.83	1.81	21
	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.24	3.17	3.07	2.99	2.88	2.80	2.72	2.64	2.58	2.51	2.48	2.42	2.38	2.36	
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.26	2.23	2.17	2.13	2.07	2.03	1.98	1.94	1.91	1.87	1.85	1.82	1.80	1.78	22
	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.18	3.12	3.02	2.94	2.83	2.75	2.67	2.58	2.53	2.46	2.42	2.36	2.33	2.31	
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.24	2.20	2.15	2.11	2.05	2.01	1.96	1.91	1.88	1.84	1.82	1.79	1.77	1.76	23
	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.14	3.07	2.97	2.89	2.78	2.70	2.62	2.54	2.48	2.41	2.37	2.32	2.28	2.26	
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.22	2.18	2.13	2.09	2.03	1.98	1.94	1.89	1.86	1.82	1.80	1.77	1.75	1.73	24
	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.09	3.03	2.93	2.85	2.74	2.66	2.58	2.49	2.44	2.37	2.33	2.27	2.24	2.21	
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.20	2.16	2.11	2.07	2.01	1.96	1.92	1.87	1.84	1.80	1.78	1.75	1.73	1.71	25
	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	3.06	2.99	2.89	2.81	2.70	2.62	2.54	2.45	2.40	2.33	2.29	2.23	2.19	2.17	
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.18	2.15	2.09	2.05	1.99	1.95	1.90	1.85	1.82	1.78	1.76	1.73	1.71	1.69	26
	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	3.02	2.96	2.86	2.78	2.66	2.58	2.50	2.42	2.36	2.29	2.25	2.19	2.16	2.13	
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.17	2.13	2.08	2.04	1.97	1.93	1.88	1.84	1.81	1.76	1.74	1.71	1.69	1.67	27
	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.99	2.93	2.82	2.75	2.63	2.55	2.47	2.38	2.33	2.26	2.22	2.16	2.12	2.10	
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.15	2.12	2.06	2.02	1.96	1.91	1.87	1.82	1.79	1.75	1.73	1.69	1.67	1.65	28
	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.96	2.90	2.79	2.72	2.60	2.52	2.44	2.35	2.30	2.23	2.19	2.13	2.09	2.06	
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.14	2.10	2.05	2.01	1.94	1.90	1.85	1.81	1.77	1.73	1.71	1.67	1.65	1.64	29
	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.93	2.87	2.77	2.69	2.57	2.49	2.41	2.33	2.27	2.20	2.16	2.10	2.06	2.03	
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.13	2.09	2.04	1.99	1.93	1.89	1.84	1.79	1.76	1.72	1.70	1.66	1.64	1.62	30
	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.91	2.84	2.74	2.66	2.55	2.47	2.39	2.30	2.25	2.17	2.13	2.07	2.03	2.01	
32	4.15	3.29	2.90	2.67	2.51	2.40	2.31	2.24	2.19	2.14	2.10	2.07	2.01	1.97	1.91	1.86	1.82	1.77	1.74	1.69	1.67	1.63	1.61	1.59	32
	7.50	5.34	4.46	3.97	3.65	3.43	3.26	3.13	3.02	2.93	2.86	2.80	2.70	2.62	2.50	2.42	2.34	2.25	2.20	2.12	2.08	2.02	1.98	1.96	