ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL

INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMATICAS

"El ESPACIO VECTORIAL DE LOS POLINOMIOS"

MONOGRAFIA

Previa la obtención del Título de:

MAGISTER EN EDUCACION MATEMATICA APLICADA A NIVEL MEDIO

Presentada por:

GLADYS M. CRIOLLO de CORONEL

Guayaquil - Ecuador

1994

ECIMIENTO

Agradezco a todas las Instituciones que hicieron posible la realización del Curso de Post-grado, y en especial al mentalizador Master Gâudencio Zurita.

D E C L A R A C I O N E X P R E S A

"La responsabilidad por los hechos, ideas y octrinas expuestas en esta monografía, me orresponden exclusivamente; y el patrimonio ntelectual de la misma, a la ESCUELA SUPERIOR OLITECNICA DEL LITORAL".

Reglamento de Exámenes y Títulos profesionales de a ESPOL).

....

Gladys M. Criollo de C.

DEDICATORIA

A MIS PADRES

A MI ESPOSO

A MIS HIJAS

A MIS HERMANOS

D E C L A R A C I O N E X P R E S A

'La responsabilidad por los hechos, ideas y octrinas expuestas en esta monografía, me orresponden exclusivamente; y el patrimonio ntelectual de la misma, a la ESCUELA SUPERIOR 'OLITECNICA DEL LITORAL".

Reglamento de Exámenes y Títulos profesionales de a ESPOL).

....

Gladys M. Criollo de C.

Master Gaudencio Zurita

Director de Monografía

I N T R O D U C C I O N

resente trabajo monográfico, está diseñado para servir un curso de Algebra Lineal, cuando los estudiantes an claro el concepto de espacio vectorial.

e las operaciones más importantes de Algebra Lineal in la adición y multiplicación por un escalar.

propiedades algebraicas básicas de la adición y la iplicación por escalar para vectores en R^n son válidas los espacios vectoriales de los polinomios. Uno de principales éxitos matemáticos del presente siglo, es gar al conocimiento de que existen muchos espacios oriales además de R^n.

ro de los espacios vectoriales diferentes de R_n estan espacios vectoriales de los polinomios P_n.

1965, Solomon W. Golomb, inventor de los "POLIOMIMOS" había estudiado en Harvard, publicó un libro damental sobre el tema, titulado POLYOMINOS.

polinomios, nacidos como un pasatiempo matemático más menos intrascendente, han terninado por convertirse en curso de los años en una área de investigación ortante dentro del análisis combinatorio.

estructura en sí de este trabajo monográfico está dada la siguiente manera. En el capítulo I denominado LIMINARES se dan las definiciones básicas del Algebra eal, tales como: vector, operación binaria, operación binaria, espacio vectorial, combinacion lineal.espaenerado, dependencia e independencia lineal, base y siónś del espacio vectorial y subespacio vectorial sus respectivas propiedades, se hace además de las alizaciones, sus respectivas ilustraciones en P_2 y

l capitulo II, denominado POLINOMIOS Y ORTOGONALIDAD an a conocer las definiciones e ilustraciones de cto interno real, norma de polinomios, vectores onales, construcción de conjuntos ortogonales, so de ortogonalización de Gram_Schmidt, proyección onal de polinomios y complenemto ortogonal de poli- s, con sus respectivas ilustraciones en P2.

espera de que el presente trabajo sirva de guia para alumno que tenga interés de profundizar sus imientos en lo que respecta al espacio vectorial de olinomios.

PRELIMINARES I

POLINOMIOS Y ORTOGONALIDAD II

CAPITULO I

PRELIMINARES

1.1 OPERACION BINARIA

Definición 1.1.1 Una función ϕ de $VxV \longrightarrow V$ es una operación binaria sobre un conjunto V, sí y solamente sí a cada par ordenado $(v_1,v_2) \in VxV$ le asigna uno y un sólo elemento en V; es usual denotar

$\phi(v_1,v_2) = v_1 * v_2$

Ejemplos

La suma sobre R es binaria

$\phi:(RxR) \longrightarrow R$

$\phi(x + y) = (x+y) \in R$

$\phi(2,3) = 2 + 3 = 5 \in R$

Nota: La definición de ϕ significa que toda operación binaria en V es clausurativa.

Existen también operaciones que no son binarias, cuando multiplicamos por ejemplo un número por un "vector".

Sean $v \in R$ y $\alpha \in Z$; aquí los vectores están en y los escalares en Z.

.V $\in$ R

(ZxR) ———> R, esta operación no es binaria

rque $\alpha \in Z$ y $V \in R$

2 EL CONCEPTO DEL ESPACIO VECTORIAL

finición 1.2.1.- Sea V un conjunto no vacio de ementos denominados vectores, sobre el cual estan finidas dos operaciones; una binaria llamada suma vectores + y otra no binaria denominada producto vector por escalar; V junto con las operaciones + y .) es un espacio vectorial, si y solamente cumple con las siguientes propiedades:

$\forall$ $v_1, v_2 \in V$ tal que $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$

ROPIEDAD CONMUTATIVA)

)-$\forall$ $v_1, v_2, v_3, \in V$ tal que $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$

ROPIEDAD ASOCIATIVA)

i)$\exists 0_v \in V$ $\forall$ $v \in V$ tal que $v + (0_v) = v$

XISTENCIA DEL ELEMENTO NEUTRO DE LA SUMA)

)$\forall$ $v, \in V$ $\exists(-v)$ tal que $v + (-v) = 0v$

XISTENCIA DEL INVERSO ADITIVO)

as siguientes propiedades se cumplen para la eración no binaria.

$\forall \alpha \in R$ $\forall$ $v_1, v_2 \in V$, $\alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$

RIMERA PROPIEDAD DISTRIBUTIVA)

i) $\forall$ $\alpha, \beta \in R$ $\forall$ $v \in V$ tal que $(\alpha+\beta)v_1 = \alpha v + \beta v$

SEGUNDA PROPIEDAD DISTRIBUTIVA)

ii) $\forall\ \alpha, \beta \in R \quad \forall\ v \in V$ tal que $(\alpha.\beta)\ v = \alpha(\beta.v)$

PROPIEDAD ASOCIATIVA DE LA MULTIPLICACION POR UN SCALAR)

iii) $\forall\ v \in V \quad 1.V = V$

PROPIEDAD DE LA IDENTIDAD MULTIPLICATIVA)

or definición de operación binaria se cumple la erradura de la suma entre vectores.

$v_1, v_2, \in V \qquad v_1 + v_2 = v_3 \Longrightarrow v_3 \in V$ y

a Cerradura de la multiplicación de vector por scalar se cumple también.

$\forall\ \alpha \in R \quad \forall\ v \in V \Longrightarrow \alpha\ (v) \in V$

<u>LUSTRACION DEL CONCEPTO DEL ESPACIO VECTORIAL</u>

Sea $V = P_2$ el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que 2, con las operaciones; binaria suma entre polinomios y producto de polinomios por escalar.

Sean $p_1(x) = (a_2x^2 + a_1x + a_0) \in P_2$

$p_2(x) = (b_2x^2 + b_1x + b_0) \in P_2$

Y sea la suma entre polinomios en P_2 definida como

$p_1(x) + p_2(x) = (a_2x^2 + a_1x + a_0) + (b_2x^2 + b_1x + b_0)$

$= (a_2+b_2)x^2 + (a_1+b_1)x + (a_0+b_0)$ y la

operación producto por escalar definida como.

$\alpha.p_1(x) = \alpha(a_2x^2 + a_1x + a_0)$

$\alpha.p_1(x) = \alpha.a_2x^2 + \alpha.a_1x + \alpha.a_0$ es polinomio en P2.

Para probar que P_2 (+,.) es un Espacio Vectorial necesitaremos un tercer polinomio en P_2, sea éste

$(x) = c_2x^2 + c_1x + c_o$

importante dar a conocer que de ahora en elante cuando nos vayamos a referir al vector o de los polinomios nos referiremos como el Op, eriendo expresar con esto que:

$= 0x^2 + 0x + 0$

iamente no vamos a verificar la cerradura de la na, pués ésta es una operación binaria.

ifiquemos la Propiedad Conmutativa de la suma de linomios en P_2 ; esto es:

$\forall\ p_1,\ p_2 \in P_2$ tal que $p_1 + p_2 = p_2 + p_1 \in P_2$

$p_1 + p_2 = (a_2x^2+a_1x+a_o)+(b_2x^2 + b_1x + b_o)$

$= (b_2x^2 + b_1x + b_o) + (a_2x^2+a_1x+a_o)$

$= (a_2 + b_2)x^2 + (b_1 + a_1)x + (b_o + a_o)$

$= (b_2 + a_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_o + b_o)$

$= (b_2x^2 + b_1x + b_o) + (a_2x^2+a_1x+a_o)$

$= p_2 + p_1$

ifiquemos la Propiedad Asociativa de la Suma

) $\forall\ p_1, p_2,$ y $p_3 \in P_2$ tal que

$_1+ p_2] + p_3 = p_1+[p_2 + p_3]$

$_1+p_2] + p_3 =[(a_2x^2+a_1x+a_o)+(b_2x^2+b_1x+b_o)]+(c_2x^2+c_1x+c_o)$

$= [(a_2+b_2)x^2 +(a_1+b_1)x +(a_o+b_o)] + (c_2x^2 + c_1x + c_o)$

$= [(a_2+b2+c_2)x^2 + (a_1+b1+c_1)x +(a_o+ b_o +c_o)]$

$=(a_2x^2+a_1x+a_o)+ [(b_2x^2+b_1x+b_o) + (c_2x^2+c_1x+c_o)]$

$= p_1+[p_2 + p_3]$

Existencia del Elemento Neutro de la Suma

i) $\exists\ 0p \in P_2 \quad \forall\ p \in P_2$ tal que $p + 0p = p$

$p + 0p = (a_2x^2 + a_1x + a_o) + (0x^2 + 0x + 0)$

$= (a_2 + 0)x^2 + (a_1 + 0)x + (a_o + 0)$

$= (a_2 x^2 + a_1x + a_o)$

$= p \in P_2$

Propiedad del Inverso Aditivo

) $\forall\ p \in P_2 \quad \exists\ -p \in P_2$ tal que $p + [-p] = 0p$

iendo $-p = -(0x^2 + 0x + 0)$

$p + [-p] = (a_2x^2 + a_1x + a_o) + (-a_2x^2 - a_1x - a_o)$

$= (a_2 - a_2)x^2 + (a_1 - a_1)x + (a_o - a_o)$

$= (0x^2 + 0x + 0)$

$= 0p$

rificaremos la Propiedad Distributiva de la suma

escalares por un vector.

$\forall\ p \in P_2 \quad \forall\ \alpha, \beta \in R$ tal que $(\alpha + \beta)p = \alpha p + \beta p$

$+ \beta)p = (\alpha + \beta)(a_2x^2 + a_1x + a_o)$

$= \alpha(a_2x^2 + a_1x + a_o) + \beta(a_2x^2 + a_1x + a_o)$

$= (\alpha.a_2x^2 + \alpha.a_1x + \alpha.a_o) + (\beta.a_2x^2 + \beta.a_1x + \beta.a_o)$

$= \alpha.p + \beta.p$

Propiedad Distributiva de la Suma de vectores

r un escalar

) $\forall\ p_1, p_2 \in P_2 \quad \forall\ \alpha \in R$ tal que $\alpha[p_1 + p_2] = \alpha p_2 + \alpha p_1 \in P_2$

$\alpha[p_1 + p_2] = \alpha[a_2x^2 + a_1x + a_o) + (b_2x^2 + b_1x + b_o)]$

$= \alpha(a_2x^2 + a_1x + a_o) + \alpha(a_2x^2 + a_1x + a_o)$

$= \alpha p_1 + \alpha p_2$

Propiedad Asociativa del Producto Escalar por un ctor

i) $\forall$ $p \in P_2$ $\forall$ $\alpha,\beta \in R$ tal que $\alpha(\beta p) = (\alpha\beta)p \in P_2$

$$\alpha(\beta p) = \alpha[\beta(a_2x^2 + a_1x + a_0)]$$
$$= (\alpha\beta)(a_2x^2 + a_1x + a_0)$$
$$= (\alpha\beta)p$$

propiedad del Idéntico Multiplicativo

ii) $\forall$ $p \in P_2$ $1 \in P_2$, $1p = p \in P_2$

$$1.p = 1(a_2x^2 + a_1x + a_0)$$
$$= a_2x^2 + a_1x + a_0$$
$$= p \in P_2$$

ora presentemos un ejemplo del cual P_2 es un caso rticular: Los polinomios P_n de grado menor o igual que Hemos probado que P_2 con sus correspondientes eraciones binaria de la suma entre polinomios y oducto de un escalar por un polinomio en P_2 es espacio vectorial; de igual manera podemos obar que $P_3, P_4, \ldots$ y así sucesivamente son pacios vectoriales.

gámoslo ahora con P_n, el conjunto de los linomios de grado menor o igual que $n \in Z^+$, con s correspondientes operaciones; una binaria llamada ma de polinomios en P_n, definida de la siguiente nera:

$p_1 = (a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0) \in P_n$

$p_2 = (b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1x + b_0) \in P_n$ son linomios típicos de grado menor o igual que n.

$+p_2 = (a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_o) + (b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots +$
$x + bx + b_o)$

$= (a_n+b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_1+b_1)x + (a_o + b_o);$

otra llamada producto de un polinomio vector por calar real definida como sigue $\alpha.p \in P_n$

$\alpha \in R \quad \forall\ p \in P_n$

$$\alpha.\ p = \alpha(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_o)$$
$$= \alpha.a_nx^n + \alpha.a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \alpha.a_1x + \alpha.a_o$$

mo vemos $\alpha.p$ también es un polinomio en P_n.

erificaremos si P_n con sus correspondientes eraciones de $(+,.)$ es un espacio ectorial; para lo cual necesitaremos tres olinomios típicos en P_n, como sigue:

$p_1 = (a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_o) \in P_n$

$p_2 = (b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1x + b_o) \in P_n$

$p_3 = (c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1x + c_o) \in P_n$

vamos a probar la cerradura de la suma, pués sta es una operación binaria .

erificaremos si se cumplen las siguientes ropiedades relacionadas con la suma de vectores

a Propiedad Conmutativa

) $\forall\ p_1, p_2 \in P_n$ tal que $p_1 + p_2 = p_2 + p_1 \in P_n$

$p_1 + p_2 = (a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_o) + (b_nx^n +$
$b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1x + b_o)$

$= (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_1+b_1)x + (a_o+b_o)$

$= \quad (b_n + a_n)x^n +(b_{n-1} \; +a_{n-1})x^{n-1}+...+(b_1+a_1)x+(b_o+a_o)$

$+p_2 \; =(b_nx^n +b_{n-1}x^{n-1} + \; ... + b_1x + b_o) + \; (a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + \; a_1x + a_o)$

$= p_2 +p_1$

Propiedad Asociativa de la Suma

) $\forall \; p_1,p_2,p_3 \in P_n$ tal que $[p_1+p_2] + p_3 =p_1+[p_2 + p_3]$

$_1+ p_2] + p_3= \; [(a_nx^n +...+ a_1x+a_o)+(b_nx^n+...+ b_1x + b_o)] +(c_nx^n + ... + c_1x + c_o)$

$= [(a_n \; + b_n)x^n +...+(a_1 + b_1)x +(a_o + b_o)] + (c_nx^n + ... + c_1x + c_o)$

$= [(a_n + b_n+ c_n)x^n +...+(a_1 + b_1+ c_1)x +(a_o+b_o+c_o)]$

$= (a_nx^n+...+a_1x+a_o)+[(b_nx^n+...+ b_1x + b_o)+ (b_nx^n + ... + b_1x + b_o)]$

$= p_1+[p_2 + p_3]$

a Propiedad del Elemento Idéntico de la suma

ii) $\exists \; 0_p \in P_n \; \forall \; p \; \in P_n$ tal que $p + 0_p = p \in P_n$

$+ 0_p = (a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + \; a_1x + a_o) + (0x^n + 0x^{n-1} + ... + 0x + 0)$

$= (a_n+0)x^n+(a_{n-1} +0)x^{n-1}+.. +(a_1+o)x+(a_o+0)$

$= (a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + \; a_1x + a_o)$

$= p$

La Propiedad del Inverso Aditivo

v) $\forall \; p \in \; P_n \quad \exists -p \in P_n$ tal que $p +[-p]= 0_p$

$p +[-p] = (a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + \; a_1x + a_o) + (-a_nx^n \; - a_{n-1}x^{n-1} - ... - \; a_1x - a_o)$

$= [(a_n - a_n)x^n + (a_{n-1} - a_{n-1})x^{n-1} \ldots + (a_1 - a_1)x$

$+ (a_o - a_o)]$

$= (0x^n + 0x^{n-1} + \ldots + 0x + 0)$

$= 0p$

a Propiedad Distributiva de la multiplicación de scalares por un vector

i) $\forall \; p \in P_n \quad \forall \; \alpha,\beta \in R$ tal que $(\alpha + \beta)p = \alpha p + \beta p$

$(\alpha + \beta)p = (\alpha+\beta)(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a0)$

$= \alpha(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o) +$

$\beta(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o)$

$= (\alpha a_n x^n + \alpha a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \alpha a_1 x + \alpha a_o) +$

$(\beta a_n x^n + \beta a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \beta a_1 x + \beta a_o)$

$= \alpha p + \beta p$

La Propiedad Distributiva de la suma de vectores por un escalar

vii) $\forall \; p_1, p_2 \in P_n \quad \forall \; \alpha \in R$ tal que

$\alpha[p_1 + p_2] = (\alpha p_2 + \alpha p_1) \in P_n$

$\alpha[p_1 + p_2] = \alpha[(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o)$

$+ (b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_o)]$

$= \alpha(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o) +$

$\alpha(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o)$

$= (\alpha p_2 + \alpha p_1) \in P_n$

La Propiedad Asociativa del Producto de escalares por un vector

ix) $\forall \; p \in P_n \quad \forall \; \alpha,\beta \in R$ tal que $\alpha(\beta p) = (\alpha\beta)p$

$\alpha(\beta p) = \alpha[\beta(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o)]$

$= (\alpha\beta)\ (a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_o)$

$= (\alpha\beta)p$

Propiedad del Elemento Idéntico de la ltiplicación

) $\forall\ p \in P_n \quad 1.p = p$

$1p = 1(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_o)$

$1p = 1(a_nx^n) + 1(a_{n-1}x^{n-1}) + \ldots + 1(a_1x + a_o)$

$1p = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_o$

$1p = p \in P_n$

mos probado que los polinomios de grado menor o ual que n constituyen un espacio vectorial.

3 <u>COMBINACION LINEAL Y ESPACIO GENERADO</u>

<u>finición 1.3.1</u>.-Sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vectores de un pacio vectorial V.

vector $v \in V$ es una combinación lineal de , $v_2, \ldots, v_n$, si y solamente sí, existen calares reales $c_1, c_2, \ldots c_n$ tales que $v = c_1.v_1 + .v_2 + \ldots c_n.v_n$

<u>r Ejemplo</u>

$x) = (8x^2 + 7x) \in P_2$ es una combinación lineal de ^{2} y $3x$ ya que:

$8x^2 + 7x = c_1(2x^2) + c_2(3x)$

$8x^2 = c_1(2x^2) \quad ===> c_1 = 4$

$7x = c_2(3x) \quad ===> c_2 = 7/3$

4 <u>ESPACIO GENERADO DE VECTORES</u>

<u>finición 1.4.1</u> .- Se dice que los vectores v_1

$_2, \ldots, v_n$ en un espacio vectorial V generan V si solamente sí todo vector de V se puede expresar mo una combinación lineal de ellos; de otra rma dicho, $\forall$ $v \in V$ existen escalares a_1, $, \ldots, a_n$ tales que:

$= a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n$

5 <u>DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL DE VECTORES</u>

<u>finición 1.5.1</u>.- Sea $v_1, v_2, \ldots, v_n$ n vectores de espacio vectorial V, con sus correspondientes eraciones, binaria suma de vectores y producto un escalar por un vector; además $c_1, c_2, ..c_n$ calares reales; se dice que los vectores v_1, $_2, \ldots, v_n$ son linealmente independientes en V si y lamente sí la única solución para la igualdad

$.v_1 + c_2.v_2 + \ldots + c_n v_n = 0$ es $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$

<u>emplo de Independencia Lineal</u>

a P_2, el espacio vectorial de los polinomios de ado menor o igual que 2, previamente tratado, ra lo cual .

$_1(x) = (x^2 + x + 2) \in P_2$; $p_2(x) = (2x^2 + x) \in P_2$ y

$_3(x) = (3x^2 + 2x + 2) \in P_2$ son polinomios particulares de

.

rificaremos si la única solución para la igualdad

$a_1 p_1(x) + a_2 p_2(x) + a_3 p_3(x) = 0$ implica $a_1 = a_2 = a_3 = 0$

mo única solución

$a_1(x^2 + x + 2) + a_2(2x^2 + x) + a_3(3x^2 + 2x + 2) = 0$

$==> a_1x^2 + a_1x + 2a_1 + 2a_2x^2 + xa_2 + 3a_3x^2 + 2a_3x + 2a_3=0$

$=>(a_1x^2 + 2a_2x^2 + 3a_3x^2)+(a_1x + a_2x + 2a_3x)+(2a_1+2a_3)=0$

$> x^2(a_1 + 2a_2 + 3a_3)+x(a_1 + a_2 + 2a_3) + (2a_1 +2a_3) = 0$

$==> a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0$

$a_1 + a_2 + 2a_3 = 0$

$2a_1 + 2a_3 = 0$

te es un sistema lineal de ecuaciones homogéneo e tiene tres ecuaciones y tres incógnitas a_1, , y a_3; lo que equivale a tener tres predicados , t_2 y t_3 con tres variables a_1,a_2 y a_3.

: $a_1 + 2a_2 + 3a3 = 0$

: $a_1 + a_2 + 2a_3 = 0$

: $2a_1 + 2a_3 = 0$

contremos el Conjunto Solución $At_1(a_1 + 2a_2 +3a3)$ $t_2(a_1 + a_2 + 2a_3) \wedge t_3(2a_1 + 2a_3) = At(\underline{a})$ del istema lineal.

a matríz aumentada y equivalente son:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

e donde obtenemos el siguiente conjunto solución

ıt(a) $=\{(a_1, a_2, a_3)/a_1= -a_3, a_2 =-a_3; a_3 \in R\}$ R^3

r lo que se concluye que; $p_1(x)$, $p_2(x)$ y $p_3(x)$

son linealmente independientes en P_2 ya que la

ica solución del sistema lineal de ecuaciones

es $a_1 = a_2 = a_3 = 0$

6 BASES Y DIMENSION DE UN ESPACIO VECTORIAL

finición 1.6.1.- Un conjunto de vectores $B= \{v_1,$ $,\ldots,v_n\}$ constituye una base para V si y lamente sí cumple con lo siguiente:

$B = \{v_1, v_2, \ldots , v_n\}$ es linealmente independiente V, y

) $B \{v_1, v_2, \ldots , v_n\}$ genera V

e puede probar que existe más de una base para mismo espacio vectorial , pero todas las bases un mismo espacio vectorial tienen igual número elementos.

$= \{1,x,x^2 \}$ es una base para P_2 y

$= \{ 2, 3x,x^2\}$ es otra base para P_2 ; pero las s bases tienen el mismo número de elementos, esto , 3.

finición de Dimensión .-Un número entero n es la mensión de un espacio vectorial V si y solamente , n es el número de vectores que tiene cualquier se de V.

el espacio vectorial V tiene una base finita, V cibe el nombre de Espacio Vectorial de Dimensión nita. En cualquier otro caso se dice que V es un Espacio Vectorial de dimensión infinita. Si {0}, diremos que V es de Dimensión Cero. P_n es espacio de dimensión (n + 1).

USTRACION DE BASE Y DIMENSION DE UN ESPACIO CTORIAL Vamos a verificar que $B= \{ x^2, x, 1 \}$ una base para el espacio vectorial de los linomios de grado menor o igual que dos.

ra que un conjunto de vectores sea una base ra el espacio vectorial de los polinomios de ado menor o igual que 2 debemos primero probar e cualquier polinomio en P_2 es una combinación neal de x^2, x y 1, y luego que B es linealmente dependiente en P_2.

$p(x) \in P_2$, existen constantes c_1, c_2, c_3 tales que

$(x) = c_1x^2 + c_2x + c_3(1)$

mernos un polinomio típico en P_2, sea este

$ax^2 + bx + c$, luego, $ax^2 + bx + c = c_1x^2 + c_2x + c3$

$=\Rightarrow \quad ax^2 = c_1x^2 \quad ===> \quad a= c_1$

$=\Rightarrow \quad bx = c_2x \quad ===> \quad b= c_2$

$=\Rightarrow \quad c = c_3 \quad ===> \quad c = c_3$

que quiere decir que cualquier polinomio, $ax^2 + x + c$ en P_2 es una combinación lineal de los linomios dados en el conjunto B.

erifiquemos ahora si B es linealmente

dependientes en P_2.

$(x^2) + c_2(x) + c_3(1) = 0x^2 + 0x + 0(1)$ (A)

solución única para (A) es $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, y $c_3 = 0$

que indica que $B = \{ x^2, x.1 \}$ es linealmente dependiente en P_2 y unido a lo previamente probado, ncluimos que B es una base para P_2

7 SUB -ESPACIO VECTORIAL

a H un sub-conjunto no vacío de un espacio ctorial V, H es un sub-espacio de V si y lamente sí H es en sí mismo un espacio ctorial, junto con las dos operaciones definidas el espacio vectorial V.

ra probar que H V es un subespacio de V, nto con las correspondientes operaciones, basta obar que se cumplen para H las propiedades ausurativas de la suma de vectores y la ltiplicación de escalares por vectores en H.

por ejemplo es un subespacio de P_3, pues todos los (x), $p_2(x) \in P_2$, también están en P_3; y $(p_1(x)$ $p_2(x)) \in P_2$ y $[\alpha.p1(x)] \in P_2$, α real.

CAPITULO 2

POLINOMIOS Y ORTOGONALIDAD

2.1 PRODUCTO INTERNO REAL

Definición2.1.1 .- Sea P_n el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n, decimos que en P_n hemos definido un producto interno, si y solamente sí , existe una función $\phi : P_n \times P_n \longrightarrow R$, que cumple con lo siguiente

(i) $\langle v,v\rangle > 0$ si $\neg(v = 0)$;

ii) $\langle v,v\rangle = 0$ si y solo sí $v = 0v$;

iii) $\langle v_1,v_2 + v_3\rangle = \langle v_1,v_2\rangle + \langle v_1,v_3\rangle \quad \forall\, v_1,v_2 \in V$

iv) $\langle v_1,v_2\rangle = \langle v_2,v_1\rangle \quad \forall \quad v_1,v_2 \in V$

vi) $\langle \alpha v_1,v_2\rangle = \alpha\langle v_1,v_2\rangle \quad \forall\, \alpha \in R \quad \forall\, v_1,v_2 \in V$

Es usual denotar a $\phi(v_1,v_2) = \langle v1,v_2\rangle \in R$

Se puede probar que para P_n, los Polinomios de grado menor o igual que n en el intervalo [a,b], la siguiente función ϕ define un producto interno:

$$\phi(v_1,v_2) = \int_a^b p_1(x)\, p_2(x)\, dx = \langle p_1,p_2\rangle, \quad p_1,p_2 \in P_2$$

Por Ejemplo, sean los polinomios $p_1(x) = 2x + 2$ y $p_2(x) = x$, polinomios de grado menor o igual que 1. Calcular el producto interno entre los polinomios p_1 y p_2.

Aplicaremos la definición previa de producto interno para polinomios, esto es

$\phi(v_1,v_2) = \langle v_1,v_2\rangle = \langle p_1(x),p_2(x)\rangle =$

$\phi(v_1,v_2) = \int_a^b p_1(x)p_2(x)\, dx =$; haciendo $a=0$ y $b=1$

$$\int_0^1 p_1(x)\, p_2(x)\, dx = \int_0^1 (2x+2)x\,dx = \int_0^1 (2x^2 + 2x)\,dx$$

$$\Longrightarrow \left[(2/3)x^3 + x^2\right] \Big|_0^1$$

$$\Longrightarrow [\, 2/3 + 1 - 0] = 5/3 = \langle p_1(x),p_2(x)\rangle = \langle 2x + 2,x\rangle$$

2.2 NORMA DE UN VECTOR

Definición 2.2.1.- Dado un espacio vectorial V con sus correspondientes operaciones, sobre el que se ha definido un producto interno, la norma de un vector $v \in V$ está dado por:

$$\|V\| = +\sqrt{\langle v,v\rangle}\ , \ \forall\, v \in V$$

Por Ejemplo

En caso de polinomios de grado menor o igual que 1 $p(x) = 2x + 2$

Calculemos la norma de $p(x)$; para lo cual tomamos el previamente definido producto interno, entre polinomios y obtenemos que

$\|p(x)\| = +\sqrt{<p(x),p(x)>} =$

$\|p(x)\| = \|2x + 2\| =$

$+\sqrt{\int_0^1 p(x)\, p(x)\, dx} = +\sqrt{\int_0^1 (2x+2)(2x+2)dx} = +\sqrt{\int_0^1 (2x+2)^2 dx}$

$= +\sqrt{\int_0^1 (4x^2 + 8x + 4)dx}$

$= +\sqrt{[\, 4/3x^3 + 4x^2 + 4x\,]\Big|_0^1}$

$= [\, 4/3 + 4 + 4]^{1/2} = [28/3]^{1/2}$

2.3 PROPIEDADES DE LA NORMA DE UN VECTOR

Se puede mostrar que $\forall \; v \in V$, se cumple que:

(i) $\|v\| > 0$ Si $\neg(v = 0)$

(ii) $\|v\| = 0$ Si $v = 0$

(iii) $\|\alpha v\| = |\alpha|\, \|v\|$

(iv) $\|v_1 + v_2\| < o = \|v_1\| + \|v_2\|$

$\forall\; v \in V,\; \| v/\|v\| \| = 1$

2.4 VECTORES ORTOGONALES

Definición2.4.1 .-Sea V un espacio vectorial con sus correspondientes operaciones; sobre el que se ha definido un producto interno; dos vectores $v_1, v_2 \in V$ son ortogonales; si y solamente sí $<v_1,v_2>=0$

2.4.1 TEOREMAS RELATIVOS A LA ORTOGONALIDAD

Teorema 1 En un espacio vectorial V, sobre el que se ha definido un producto interno, todo conjunto de vectores, no vacío, ortogonal en V es linealmente independiente en V. En particular, en un espacio vectorial de dimensión finita n (dim V = n), todo conjunto ortogonal de vectores que conste de n elementos, ninguno de los cuales es el vector cero, es una base para V.

(La demostración de este teorema la encontrará en : El texto, Cálculo de Apostol, Tomo 2 pag. 692 editorial Del Castillo 1980)

__Definición2.4.2__.- **El conjunto de vectores** $B=\{u_1,u_2,...u_n\}$ en V es un conjunto ORTONORMAL si y solamente sí

(i) $\langle u_i . u_j \rangle = 0, \ \forall\, i,j$, tal que $\neg\, (i = j)$ (1) y

(ii) $\langle u_i . u_i \rangle = 1$ (2)

Si sólo satisface (1), se dice que el conjunto es ortogonal

Proceso de Ortonormalización de Gram-Schmidt.

Sea H un sub-espacio de dimensión m de V. Entonces H tiene una base ortonormal.

__PROCESO DE ORTOGONALIZACION DE GRAM-SCHMIDT__

El proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt es de caracter constructivo, con el cual dada una base B cualquiera para un espacio vectorial V, se puede obtener una base ORTONORMAL.

Dijimos en lineas previas que si un conjunto de vectores B es ortogonal en un espacio vectorial V

3estos vectores son también linealmente independiente en V, pero que además la Independencia lineal de vectores no garantiza ortogonalidad.

Construyamos a partir del teorema 2.4.2.2 una base ORTONORMAL a partir de un conjunto de vectores linealmente independientes.

Partiremos de una base cualquiera $B=\{v_1,v_2,...v_n\}$ para el espacio vectorial V; pasaremos por una base ORTOGONAL $B_1=\{v_1',v_2',...v_n'\}$ y finalmente llegaremos a una base ORTONORMAL

$$B_2 =\{u_1,u_2,...u_n\}$$

Este proceso denominado de ortogonalización de Gram-Schmidt, se ejecuta en los siguientes pasos

PRIMER PASO

Dado $v_1 \in B$, hagamos

$v'1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|} = u_1$, recordemos que $\|v/\|v_1\|\|=1$

SEGUNDO PASO

Hágamos $v`_2=v_2-<v_2,u_1>u_1$

Probaremos que v`2 es ortogonal a u_1

$$\begin{aligned}<u_1,v'_2> &= <v_1,v_2 - <v_2,u_1>u_1> \\ &= <u_1,v_2> - <v_2,u_1> <u_1,u1> \\ &= <u_1,v_2> - <v_2,u_1> \\ &= <u_1,v_2> - <u_1,v_2> = 0\end{aligned}$$

Entonces u_1 y v_2 son ortogonales

Definimos $u_2 = \dfrac{v`_2}{\|v_2\|}$

TERCER PASO

Sea $v_3' = v_3 - \langle v_3,u_1\rangle u_1 - \langle v_3,u_2\rangle u_2$

$\langle u_1,v_3\rangle = \langle u_1,v_3\rangle - \langle u_1,v_3\rangle\langle u_1,u_1\rangle - \langle v_3,u_2\rangle\langle u_1,u_2\rangle$

$= \langle u_1,v_3\rangle - \langle u_1,v_3\rangle = 0$

Entonces $v`_3$ y u_1 son ortogonales

Probaremos que $v`_3$ es ortogonal a u_2

$\langle u_2,v_3\rangle = \langle u_2,v_3\rangle - \langle v3,u_1\rangle\langle u_1,u_2\rangle - \langle v_3,u_2\rangle\langle u_2,u_2\rangle$

$= \langle u_2,v_3\rangle - \langle v_3,u_2\rangle = 0$

Entonces v_3 y u_2 son ortogonales

Hagamos $u_3 = \dfrac{v`_3}{\|v`_3\|}$, con lo cual $\|u_3\| = 1$

Tenemos ya u_1, u_2 , y u_3 mutuamente ortogonales y con norma uno, esto es son ortonormales.

CUARTO PASO

Hagamos

$v'_4 = v_4 - \langle v_4,u_1\rangle u_1 - \langle v_4,u_2\rangle u_2 - \langle v_4,u_3\rangle u_3 - \ldots - \langle v4,u_4\rangle u_4$

.

.

.

$v'_k = v_k - \langle v_k,u_1\rangle u_1 - \langle v_k,u_2\rangle u_2 - \ldots \langle v_k,u_i\rangle u_i - \ldots \langle v_k,u_{k+1}\rangle u_{k-1}$

$$u_k = \frac{v'_k}{\|v'_k\|}, \qquad \|u_k\| = 1$$

Hemos así obtenido $B_2 = \{ u_1, u_2, \ldots, u_k\}$, que es una base ortonormal para V, pues $u_1, u_2, \ldots, u_k$ son mutuamente ortogonales y $\|u_1\| = \|u_2\| = \ldots = \|u_k\| = 1$

Nota: Esta prueba para cualquier $n \in Z^+$ se la hace por inducción

Ilustremos el Método de Gram-Schmidt

Construyamos una base ortonormal para $P_2\,[0,1]$

Partiremos de la base estandar para los Polinomios de grado menor o igual a 2, esto es $B=\{1,x,x^2\}$.

Pasaremos por una base $B_1=\{v'_1, v'_2, v'_3\}$ y finalmente llegaremos a una base ORTONORMAL $B_2=\{u_1,u_2,u_3\}$.

En lineas previas se definió al producto interno entre polinomios como la integral del producto de los polinomios en un intervalo dado.

Sabemos que $v_1 = 1$, $v_2 = x$ y $v_3 = x^2$

PRIMER PASO

Calculando la norma de v_1 tenemos que

$$\|\langle v_1,v_1\rangle\|^2 = \int_0^1 (1.1)dx= \int_0^1 1^2\, dx= x \Big|_0^1 = 1$$

De donde $u_1 = 1$

y la Norma de u_1 es $= 1$

SEGUNDO PASO

Hagamos $v`_2 = v2 - \langle v_2 u_1\rangle u_1$

$\langle v_2, u_1\rangle = \int_0^1 x(1)dx = \int_0^1 xdx = x^2/2 \Big|_0^1 = 1/2$

$v`2 = x - 1/2$

Probaremos que $v`_2$ y u_1 son ortogonales

Para lo cual debe ocurrir que el producto interno entre $\langle v`_2, u_1\rangle$ debe ser igual a cero.

$\langle v`_2, u_1\rangle = \int_0^1 (x-1/2)(1)dx =$

$\Longrightarrow \int_0^1 (x-1/2)dx = x2/2-1/2 \Big|_0^1 = 1/2 -1/2=0$

Por lo que $v`2$ y u_1 son ortogonales

$\|v`_2\| = +\left[\int_0^1 (x-1/2)_2\, dx\right]^{1/2} = \left[\int_0^1 (x2-x+1/4)dx\right]^{1/2} = 1/\sqrt{12} = 1/2\sqrt{3}$

De donde $u_2 = v`_2 / \|v`_2\|$

$u_2 = 2\sqrt{3}\,(x-1/2)/1/2\sqrt{3} = \sqrt{3}(2x-1)$

TERCER PASO

Hagamos $v`_3 = v_3 - \langle v_3 u_1\rangle u_1 - \langle v_3 u_2\rangle u_2$

Realizaremos los cálculos correspondientes a los productos internos.

$\langle v_3 , u_1\rangle = \int_0^1 x^2\, dx = x^3 \Big|_0^1 = 1/3$

$\langle v_3, u_2\rangle = \sqrt{3} \int_0^1 x^2\,(2x-1)\, dx = \sqrt{3} \int_0^1 (2x^3 - x^2)\, dx = \sqrt{3}/6$

Luego

$v`_3 = x^2 - 1/3 - \sqrt{3}/6[\sqrt{3}(2x-1)] = x^2 - x + 1/6$

Calculando la Norma de $v`3$, tenemos

$$\|v'_3\| = \left[\int_0^1 (x^2 - x + 1/6)dx \right]^{1/2} =$$

$$\|v'3\| = \left[\int_0^1 (x^4 - 2x^3 + 4\backslash 3x^2 - x/3 + 1/36)\right]^{1/2}$$

$$\|v'3\| = 1/\sqrt{180} = 1/6\sqrt{5}$$

De donde $u_3 = \dfrac{v`3}{\|v`3\|}$

$u3 = 6\sqrt{5}\ (x^2 - x + 1/6) = \sqrt{5}\ (x_2 - 6x + 1)$

Obviamente, la norma de u_3 es igual a 1.

Verificaremos que $v`_3$ y u_2 son ortogonales

Entonces el producto interno entre $<v`_3, u_2>$ es 0

$$<v\cdot 3, u_2> = \sqrt{3}\int_0^1 (x^2 \_x + 1/6)(2x-1)\ dx =$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 (2x^3 - 3x2 + 4/3x - 1/6)dx$$

$$<v'_3\ u_2> = \sqrt{3}[\ 1/2x^4 - x^3 - 2/3x^2 -1/6x]\Big|_0^1$$

$<v\cdot 3u_2> = 7/6 - 7/6\ = 0$

De donde la base ortonormal para P_2 es

$B_1 = \{\ u_1, u_2, u_3\} = \{\ 1,\ \sqrt{3}(2x-1)\ ,\ \sqrt{5}(x_2 - 6x + 1)\}$

C O N C L U S I O N E S

l llegar al término de este trabajo, una de is conclusiones a las que he llegado, es que he podido ivir la importancia de conocer el Algebra Lineal, y sus plicaciones que tiene en el estudio de los CONTENIDOS rogramáticos que manda a impartir en los Centros de ducación Media,El Ministerio de Educación.

o tratado en este trabajo hace referencia al ESPACIO ECTORIAL DE LOS POLINOMIOS, los mismos que en ecundaria se trata a partir del TERCER CURSO del Ciclo ásico, y de CUARTO CURSO en adelante se trata la unción Polinómica, para lo cual es importante que el studiante sepa como trabajar en el ESPACIO VECTORIAL DE OS POLINOMIOS.

o que se ha hecho en este trabajo es tambien, dar un porte a toda persona que haga educación, que cuide al ealizar una definición de utilizar la siguiente structura.

RIMERO._ Describa todos los elementos que intervienen n la definición.

EGUNDO._ Escriba la expresión matemática a definir, y tilice la expresión SI Y SOLAMENTE SI.

ERCERO._ Diga qué condición debe cumplir, la expresión atemática que se define

INDICE

BIBLIOGRAFIA

- ANTON Howard, (1985). **Introducción al Algebra Lineal,** Editorial Limusa, 8ª Edición, México.
- GEBER Harvey, (1990). **Algebra Lineal,** Grupo Editorial Iberoamericana S.A. México D.F., México.
- GROSSMAN Stanley, (1992), **Algebra Lineal con Aplicaciones, Editorial** McGRAW-HILL Interamericana de México, Cuarta Edición, México.
- HOFFMAN Kennet, (1977), **Algebra Lineal,** Ediciones del Castillo, S.A., Madrid, España.
- PERRY William, (1980), **Algebra Lineal,** Editorial McGRAWHILL Interamericana de México, México.

A N E X O

α ....Alfa

β.......................................Beta

$\in$.......................................Pertenece

$\longrightarrow$...................................Implica

$\Longrightarrow$...................................Entonces

0_p.......................................El Cero de p

p.......................................Polinomio en P_n

$p_1(x)$.................................Polinomio en x

P_n ....Espacio Polinomio de grado menor o igual que n

$\int$ ....Integral

V.....................................Espacio Vectorial V

c_1.....................................Constante real

P_2.....................................Polinomio de Grado menor o igual que 2

$\forall$.....................................Para todo

$\exists$.....................................Existe

$\sqrt{}$ ....Raíz Cuadrada

$\|v\|$.....................................Norma de v

<,>.....................................Producto Interno

At.....................................Predicado

0_v.....................................El cero de V

. ...Producto

\+ ....Suma

V ....Espacio Vectorial

v ....Elementos de V

R^n..................................Conjunto de todos

los n_vectores.

H...................................Subespacio Vectorial

a, b................................Límites de la

Integral

ϕ ....Función

B...................................Base

˥...................................Negación

R...................................El Conjunto de los

Números reales