

ESCUELA SUPERIOR
POLITECNICA DEL LITORAL

INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMATICAS

**"ESPACIOS VECTORIALES
CON PRODUCTO INTERNO"**

Monografía previa a la obtención del título de

MAGISTER EN EDUCACION MATEMATICA
APLICADA AL NIVEL MEDIO

Presentada por:

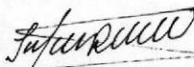
Jhony Rodriguez Orozco

GUAYAQUIL - ECUADOR

1994

DECLARACION EXPRESA

"La responsabilidad por los hechos, ideas y doctrinas expuestos en esta monografía, me corresponde exclusivamente; y, el patrimonio intelectual de la misma, a la ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL"



Johnny Rodríguez Orozco

AGRADECIMIENTO

A las personas e instituciones del país, forjadoras del mejoramiento de la Educación, que facilitaron la realización de este Postgrado.

En especial al Master Gaudencio Zurita H. mentalizador y director del mismo, por su titánica labor; y a todos los profesores del Instituto de Matemática de la ESPOL, por que supieron guiarme por el camino del mejoramiento cotidiano.

DEDICATORIA

A mis queridos padres y hermanos,
por su apoyo incondicional.

INDICE DE ABREVIATURAS

N	Conjunto de los números Naturales
R	Conjunto de los números Reales
C	Conjunto de los números Complejos
\in	Pertenece a
\subset	Subconjunto
\exists	Existe al menos uno
\cap	Intersección de conjuntos
\forall	Para todo
\wedge	Conjunción (y)
\neg	Negación (no)
\sim	Equivalente a
Σ	Sumatoria
A^t	Matriz Transpuesta
Q	Matriz Ortogonal
HL	Complemento Ortogonal
$tr(A)$	Traza de una matriz cuadrada
B_1	Base de un espacio vectorial
$dim(v)$	Dimensión de un espacio vectorial
$Ax=b$	Forma matricial de un sistema de ecuaciones
P_n	Conjunto de polinomios de grado menor o igual a n
$M_{m \times n}(R)$	Conjunto de las matrices reales de orden $m \times n$.
$M_{n \times n}(R)$	Conjunto de las matrices reales cuadradas de orden $n \times n$.

- R^n Conjunto de las n-tuplas reales.
- R^2 Conjunto de los pares ordenados reales
- R^3 Conjunto de las ternas ordenadas reales
- $M_{2 \times 2}(R)$ Conjunto de las matrices reales cuadradas de orden 2×2 .
- $M_{3 \times 3}(R)$ Conjunto de las matrices reales cuadradas de orden 3×3 .
- P_2 Conjunto de los polinomios de grado menor o igual a 2.
- P_3 Conjunto de los polinomios de grado menor o igual a 3.

INDICE GENERAL

1.	CONCEPTOS PRELIMINARES.....	13
1.1	Matrices	13
1.2	Espacios vectoriales	16
1.3	Independencia Lineal y espacio generado	35
1.4	Base y dimensión	41
2.	ESPACIOS VECTORIALES CON PRODUCTO INTERNO.....	44
2.1	Definición, Propiedades e Ilustraciones	45
2.2	Norma de un vector	61
2.2.1	Propiedades e ilustraciones	62
2.2.2	Desigualdad de Cauchy-Schwarz	65
2.3	Vector unitario	69
2.4	Vectores Ortonormales	70
2.5	Relación de Ortogonalidad de vectores e independencia lineal	71
2.6	Bases Ortonormales	75
2.7	Matrices Ortogonales	78
2.8	Complemento Ortogonal	82
	CONCLUSIONES	87
	BIBLIOGRAFIA	89

INTRODUCCION

A finales del siglo 20, es imperioso el estudio del Algebra Lineal; por cuanto es una magnífica introducción para comprender la precisión de un argumento matemático y sirve para iniciarse en la construcción de demostraciones, permitiendo impulsar y combinar de modo satisfactorio dos elementos de la Matemática: la abstracción y la aplicación. Históricamente el estudio de los vectores se originó con la invención de Hamilton de los cuaterniones, luego sería Joseph Willard Gibbs (1 839-1 903 New York) quien desarrolló el estudio del Análisis Vectorial, publicando su obra Vector Analysis (1 881).

Gibbs definió el producto escalar al principio solo para los vectores $i, j, k \in \mathbb{R}^3$: siendo: $i=(1,0,0)$, $j=(0,1,0)$, $k=(0,0,1)$.

$$\langle i, i \rangle = \langle j, j \rangle = \langle k, k \rangle = 1$$

$$\langle i, j \rangle = \langle j, i \rangle = \langle i, k \rangle = \langle k, i \rangle = \langle j, k \rangle = \langle k, j \rangle = 0.$$

La definición más general llegó muy poco tiempo después, por cuanto Gibbs explicó el producto escalar en un problema relativo a fuerzas. Tanto el producto escalar como el producto cruz aparecen primeramente en las aplicaciones físicas, en las que intervienen el cálculo de muchas variables, entre tales aplicaciones se encuentran las famosas ecuaciones de Maxwell de electromagnetismo.

El trabajo que presentamos es un estudio de los espacios vectoriales con producto interno, para lo cual es necesario iniciar con un análisis de las matrices, espacios vectoriales reales, independencia lineal, espacio generado, bases y dimensión.

Nótese que hablamos de espacios vectoriales reales, es decir que los escalares son números reales, también existen espacios vectoriales complejos, donde los escalares son números complejos los mismos que no serán tratados en este trabajo.

Es importante anotar el tratamiento de la función producto interno sobre un espacio vectorial V :

$\phi: V \times V \rightarrow R$, tal que $\phi(v_1, v_2) = \langle v_1, v_2 \rangle \in R$, es decir es una función que asigna a cada par ordenado de vectores en $V \times V$ un número real.

Como se podrá observar el producto interno ya no es exclusividad de los vectores bidimensionales y tridimensionales, sino también de otros vectores como matrices, polinomios, funciones, etc., definiremos e ilustraremos la norma de estos vectores que dependerá exclusivamente de la función producto interno, como una las principales propiedades de la norma de un vector tenemos la desigualdad de Cauchy(1789-1857)-Schwarz(1843-1921).

Además aplicando la función producto interno trabajaremos en conjuntos de vectores ortonormales (bases), matrices ortogonales y complemento ortogonal.

Las definiciones serán afirmaciones de tipo "si y solo si", las mismas que serán enunciadas e ilustradas. Los teoremas en su mayoría serán demostrados, caso contrario se indicará el texto en el cual constan las demostraciones. Deseamos que este trabajo sirva de motivación en el estudio del Algebra Lineal y la Matemática en general.

CAPITULO 1.

CONCEPTOS PRELIMINARES

1.1. MATRICES

Iniciamos este trabajo definiendo matrices que serán de mucho interés en el desarrollo posterior de nuestros temas, tales como espacios vectoriales con producto interno, norma de un vector, etc.

Definición 1.1.1.

Matriz.-

Sea N el conjunto de los números naturales; los conjuntos A y $B \subset N$ siendo $A = \{i/i = 1, 2, \dots, m\}$ y $B = \{j/j = 1, 2, \dots, n\}$, la función ϕ de $A \times B$ a R se denomina matriz, si y solo si a cada par ordenado $(i, j) \in A \times B$ se le asigna un número real o complejo a_{ij} ; en nuestro caso nos centraremos en el estudio de las matrices reales cuya notación será: $M_{m \times n}(R)$.

Lo usual es representar esta matriz por un arreglo rectangular de m filas y n columnas como se describe a continuación:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

obviamente $A \in M_{m \times n}(R)$

$$\text{Si en particular } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3,2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & -5 \end{bmatrix} \in M_{3 \times 4}(R).$$

entonces observamos que:

$$\begin{aligned} \phi(1,1) &= 1 & ; & \phi(2,1) = 4 & ; & \phi(3,1) = 7 \\ \phi(1,2) &= 2 & ; & \phi(2,2) = 5 & ; & \phi(3,2) = 8 \\ \phi(1,3) &= 3,2 & ; & \phi(2,3) = 6 & ; & \phi(3,3) = 9 \\ \phi(1,4) &= 1 & ; & \phi(2,4) = 1 & ; & \phi(3,4) = -5 \end{aligned}$$

Definición 1.1.2.

Matriz Cuadrada.-

Una matriz $A \in M_{m \times n}(R)$, es cuadrada si y solo si $m = n$, siendo $m, n \geq 1$ y $m, n \in \mathbb{N}$.

Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

lo cual indica que A es una matriz cuadrada 3×3

Definición 1.1.3.**Matriz Transpuesta.-**

Sea $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(R)$, la matriz transpuesta de A es B si y solo si $B = (a_{ji}) \in M_{n \times m}(R)$, B es representada por A^t

Ilustración 1.1.3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0,5 \end{bmatrix} \in M_{2 \times 3}(R); A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 0,5 \end{bmatrix} \in M_{3 \times 2}(R)$$

Definición 1.1.4. Traza de una Matriz cuadrada.-

Sea $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(R)$, decimos que la traza de la matriz A, es una función:

$$\phi: M_{n \times n}(R) \Rightarrow R, \text{ Si y solo si } \phi(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Notación: $\phi(A) = \text{tr}(A)$.

Ilustración. 1.1.4.

Determine la traza de la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 9,2 \end{bmatrix} \Rightarrow \phi(A) = \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^3 a_{ii} = 1 + 5 + 9,2 = 15,2$$

Propiedades de la traza de una matriz cuadrada.

Se puede probar que para cualquier matriz $A \in M_{n \times n}(R)$ y $\forall \alpha \in R$; se cumple:

- i) $\text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$,
- ii) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$
- iii) $\text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr}(A)$

1.2. ESPACIOS VECTORIALES:

En la mayoría de los casos se trabaja con "vectores geométricos" en el espacio físico, en las próximas líneas presentaremos un concepto globalizante, que es el de espacio vectorial, para lo cual necesitamos definir una operación binaria.

1.2.1. OPERACION BINARIA

Definición.— Sea A un conjunto no vacío, una función ϕ es una operación binaria sobre A si y solamente si la función $\phi: A \times A \Rightarrow A$, tal que $\phi(a,b)$ se denota por $a*b$, para todo $(a,b) \in A \times A$

Es decir esta función asigna a cada par ordenado $(a,b) \in A \times A$ un elemento $a*b$ en A .

Ejemplo 1.2.1.a

Consideremos el conjunto $A = \{1,2,3,4\}$, definamos una operación binaria $*$ en A :

$\phi : A \times A \Rightarrow A$ tal que:

$*$	1	2	3
1	2	3	1
2	3	1	2
3	1	2	3

Por definición:

$$\phi(1,1) = 1*1 = 2 \in A$$

$$\phi(1,2) = 1*2 = \phi(2,1) = 2*1 = 3 \in A$$

$$\phi(1,3) = 1*3 = \phi(3,1) = 3*1 = 1 \in A$$

$$\phi(2,2) = 2*2 = 1 \in A$$

$$\phi(2,3) = 2*3 = \phi(3,2) = 3*2 = 2 \in A$$

$$\phi(3,3) = 3*3 = 3 \in A$$

Nótese que 3 es el elemento neutro de la operación puesto que:

$$\phi(1,3) = 1*3 = 1$$

$$\phi(2,3) = 2*3 = 2$$

$$\phi(3,3) = 3*3 = 3$$

A continuación detallamos las propiedades que cumple esta operación binaria:

i) La operación es binaria, pues es cerrada; esto es:

$$\phi(a,b) = a*b \in A \text{ (Propiedad clausurativa)}$$

ii) $\forall a,b,c \in A$ se cumple:

$$\phi((a*b),c) = \phi(a,(b*c))$$

$$(a*b)*c = a*(b*c) \text{ (Propiedad asociativa)}$$

iii) $\exists! 3 \in A \forall a \in A$ tal que:

$$\phi(3,a) = \phi(a,3)$$

$$3*a = a*3 = a$$

3 es elemento neutro o idéntico de la operación, *.

iv) $\forall a \in A \exists a^{-1} \in A$ tal que:

$$\phi(a,a^{-1}) = \phi(a^{-1},a)$$

$$a*a^{-1} = a^{-1}*a = 3$$

a^{-1} es elemento inverso de a . Nótese:

$$\phi(1,2) = 1*2 = 3 ; 2 \text{ es el elemento inverso de } 1$$

$$\phi(2,1) = 2*1 = 3 ; 1 \text{ es el elemento inverso de } 2$$

$$\phi(3,3) = 3*3 = 3 ; 3 \text{ es el elemento inverso de } 3$$

Ejemplo 1.2.1.b.

Defínase en R , las operaciones binarias clásicas; suma y multiplicación de números reales:

- i) Operación binaria suma (+): $\phi: R \times R \Rightarrow R$, tal que
 $\phi(a,b) = a+b$; para todo $a,b \in R$.

$$\phi(67,6) = 67 + 6 = 73$$

$$\phi(1,-5) = 1 + (-5) = -4$$

- ii) Operación binaria multiplicación (*): $\phi: R \times R \Rightarrow R$, tal que
 $\phi(a,b) = a*b$; para todo $a,b \in R$.

$$\phi(9, 5) = 9 * 5 = 45$$

$$\phi(-4,8) = (-4)*8 = -32$$

Toda operación binaria cumple con la propiedad clausurativa, es decir:

$$\forall a,b \in A; \phi(a,b) = a*b \in A.$$

No toda operación definida sobre un conjunto no vacío A , es binaria, como es el caso de la operación multiplicación por escalar $\alpha.A$, que a cada par ordenado (α,a) en $R \times A$ le asigna un elemento $(\alpha.a)$ en A

Nótese que $(\alpha,a) \in R \times A$, más no $(\alpha,a) \in A \times A$ como es el caso de una operación binaria.

Por lo expuesto esta operación también posee la propiedad clausurativa; es decir:

$$\forall a \in A, \forall \alpha \in R; \Rightarrow (\alpha.a) \in A.$$

Definiremos un espacio vectorial de tal modo que se reflejen propiedades esenciales y comunes para todos los casos.

Definición 1.2.2

Un conjunto no vacío V , es un espacio vectorial sobre R o un espacio vectorial real, cuando y solamente cuando:

i) Existe una operación binaria denominada adición, que a cada par ordenado (v_1, v_2) en $V \times V$, le asigna un elemento $(v_1 + v_2)$ en V talque las siguientes propiedades se cumplen:

- 1) $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$; para todo $v_1, v_2 \in V$; denominada propiedad conmutativa.
- 2) $v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$, para todo $v_1, v_2, v_3 \in V$; conocida como propiedad asociativa.
- 3) Existe en V un único elemento 0_V , que es el neutro de la adición, esto es:

$$v_1 + 0_V = v_1, \text{ para todo } v_1 \in V.$$

- 4) Para todo v_1 en V , existe un opuesto $(-v_1)$, tal que: $v_1 + (-v_1) = 0_V$ (propiedad del inverso aditivo).

ii) Está definida una operación llamada multiplicación por escalar, que a cada par ordenado (α, v_1) en $R \times V$, le asigna un elemento (αv_1) en V , tal que las siguientes propiedades se cumplen:

$$5) \quad \alpha(\beta v_1) = (\alpha\beta)v_1; \quad \forall \alpha, \beta \in R, \quad \forall v_1 \in V.$$

$$6) \quad (\alpha + \beta)v_1 = \alpha v_1 + \beta v_1; \quad \forall \alpha, \beta \in R, \quad \forall v_1 \in V.$$

$$7) \quad \alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2; \quad \forall \alpha \in R \text{ y } \forall v_1, v_2 \in V.$$

$$8) \quad 1v_1 = v_1; \quad \forall v_1 \in V.$$

Los espacios vectoriales son también llamados espacios lineales

Definición 1.2.3.

Vector.— Sea V un espacio vectorial real sobre R , cualquier v_1 es un vector si solo si $v_1 \in V$.

De ahora en adelante cuando hablemos de espacios vectoriales nos referimos a espacios vectoriales reales.

ILUSTRACIONES DEL CONCEPTO DE ESPACIO VECTORIAL

Ejemplo 1.2.3.a

El conjunto $V = R^n$, donde R^n , es el conjunto de todas las n -tuplas reales, sobre R , además para $\forall v_1, v_2$ en V y $\forall \alpha \in R$, se definen las operaciones:

i) Adición:

$$v_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$v_2 = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$v_1 + v_2 = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$$

ii) Multiplicación por escalar:

$$\alpha v_1 = \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Es posible probar que: \mathbb{R}^n junto con las dos operaciones previamente definidas: $[\mathbb{R}^n(+, \cdot)]$, constituye un espacio vectorial real .

A continuación ilustramos algunos casos que prueban esta afirmación: \mathbb{R} sobre \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 sobre \mathbb{R} , \mathbb{R}^3 sobre \mathbb{R} , junto con las operaciones: adición y multiplicación por escalar son espacios vectoriales. Los elementos de los mismos pueden ser representados respectivamente en la recta real, en el plano cartesiano de dos dimensiones y en el espacio tridimensional.

A continuación verificamos que \mathbb{R}^3 , junto a las operaciones definidas para las ternas reales, es un espacio vectorial.

$$[\mathbb{R}^3(+, \cdot)]$$

Sean $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$, donde $v_1 = (x_1, x_2, x_3)$, $v_2 = (y_1, y_2, y_3)$ y $v_3 = (z_1, z_2, z_3)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$i) \quad (v_1+v_2) \in V ; \quad \forall v_1, v_2 \in R^3$$

Se cumple por definición de operación binaria.

$$1) \quad v_1 + v_2 = v_2 + v_1 ; \quad \forall v_1, v_2 \in R^3$$

$$\begin{aligned} v_1+v_2 &= (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) \\ &= (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) \\ &= (y_1+x_1, y_2+x_2, y_3+x_3) \\ &= v_2 + v_1 \end{aligned}$$

$$2) \quad v_1 + (v_2+v_3) = (v_1+v_2) + v_3 ; \quad \forall v_1, v_2, v_3 \in R^3$$

$$\begin{aligned} v_1 + (v_2+v_3) &= (x_1, x_2, x_3) + [(y_1, y_2, y_3) + (z_1, z_2, z_3)] \\ &= (x_1, x_2, x_3) + (y_1+z_1, y_2+z_2, y_3+z_3) \\ &= (x_1+y_1+z_1, x_2+y_2+z_2, x_3+y_3+z_3) \\ &= (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) + (z_1, z_2, z_3) \\ &= [(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)] + (z_1, z_2, z_3) \\ &= (v_1+v_2) + v_3 \end{aligned}$$

$$3) \quad \text{Existe } 0_v \in R^3, \text{ para todo } v_1 \in R^3. \text{ Talque } v_1 + 0_v = v_1$$

$$\begin{aligned} v_1 + 0_v &= (x_1, x_2, x_3) + (0, 0, 0) \\ &= (x_1+0, x_2+0, x_3+0) \\ &= (x_1, x_2, x_3) \\ &= v_1 \end{aligned}$$

4) Para todo $v_1 \in \mathbb{R}^3$, existe un único $(-v_1) \in \mathbb{R}^3$, tal que

$$v_1 + (-v_1) = 0_v$$

$$\begin{aligned} v_1 + (-v_1) &= (x_1, x_2, x_3) + (-x_1, -x_2, -x_3) \\ &= (x_1 - x_1, x_2 - x_2, x_3 - x_3) \\ &= (0, 0, 0) \\ &= 0_v \end{aligned}$$

ii) $(\alpha v_1) \in \mathbb{R}^3$; $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall v_1 \in \mathbb{R}^3$; se cumple por definición

5) $\alpha(\beta v_1) = (\alpha\beta)v_1$; $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall v_1 \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \alpha(\beta v_1) &= \alpha(\beta x_1, \beta x_2, \beta x_3) \\ &= (\alpha\beta)(x_1, x_2, x_3) \\ &= (\alpha\beta)v_1 \end{aligned}$$

6) $(\alpha + \beta)v_1 = \alpha v_1 + \beta v_1$; $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall v_1 \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)v_1 &= (\alpha + \beta)(x_1, x_2, x_3) \\ &= [(\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)x_2, (\alpha + \beta)x_3] \\ &= (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2, \alpha x_3 + \beta x_3) \\ &= \alpha(x_1, x_2, x_3) + \beta(x_1, x_2, x_3) \\ &= \alpha v_1 + \beta v_1 \end{aligned}$$

7) $\alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$; $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ y $\forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \alpha(v_1 + v_2) &= \alpha(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \\ &= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2, \alpha x_3 + \alpha y_3) \\ &= \alpha(x_1, x_2, x_3) + \alpha(y_1, y_2, y_3) \\ &= \alpha v_1 + \alpha v_2 \end{aligned}$$

$$8) \quad 1v_1 = v_1; \quad \forall v_1 \in \mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned} 1v_1 &= 1(x_1, x_2, x_3) \\ &= (1x_1, 1x_2, 1x_3) \\ &= (x_1, x_2, x_3) \\ &= v_1 \end{aligned}$$

En consecuencia $[\mathbb{R}^3(+, \cdot)]$ sobre \mathbb{R} es un espacio vectorial.

Notación: $V = [V(+, \cdot)]$; espacio vectorial real con las respectivas operaciones: adición y multiplicación por escalar.

Ejemplo 1.2.3.b

Sea $V = P_n$, el conjunto de los polinomios de grado menor o igual a n , con coeficientes reales;

$$\text{Si } p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \text{ y}$$

$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

Son dos polinomios cualesquiera y $\alpha \in \mathbb{R}$, se define las operaciones:

i) Adición

$$p(x) + q(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

ii) Multiplicación por escalar

$$\alpha \cdot p(x) = \alpha a_n x^n + \alpha a_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha a_1 x + \alpha a_0$$

A $[P_n(+, \cdot)]$ junto con estas operaciones definidas, se puede probar que tiene la estructura de un espacio vectorial.

Probaremos en particular que $[P_2(+, \cdot)]$, con las operaciones anteriormente definidas tiene la estructura de un espacio vectorial.

Prueba:

$\forall p_1, p_2, p_3 \in P_2$, $\forall \alpha, \beta \in R$ y $\forall a_1, b_1, c_1 \in R$

donde:

$$p_1 = v_1 = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$p_2 = v_2 = b_2x^2 + b_1x + b_0$$

$$p_3 = v_3 = c_2x^2 + c_1x + c_0$$

i) $\forall v_1, v_2 \in P_2$; $(v_1, v_2) \in P_2$. Se cumple por definición de operación binaria.

1) $\forall v_1, v_2 \in P_2$; $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 &= (a_2x^2 + a_1x + a_0) + (b_2x^2 + b_1x + b_0) \\ &= (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0) \\ &= (b_2 + a_2)x^2 + (b_1 + a_1)x + (b_0 + a_0) \\ &= (b_2x^2 + b_1x + b_0) + (a_2x^2 + a_1x + a_0) \\ &= v_2 + v_1 \end{aligned}$$

$$2) \quad \forall v_1, v_2, v_3 \in P_2; \quad v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$$

$$\begin{aligned} v_1 + (v_2 + v_3) &= (a_2x^2 + a_1x + a_0) + [(b_2x^2 + b_1x + b_0) + (c_2x^2 + c_1x + c_0)] \\ &= (a_2x^2 + a_1x + a_0) + [(b_2 + c_2)x^2 + (b_1 + c_1)x + (b_0 + c_0)] \\ &= (a_2 + b_2 + c_2)x^2 + (a_1 + b_1 + c_1)x + (a_0 + b_0 + c_0) \\ &= [(a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)] + (c_2x^2 + c_1x + c_0) \\ &= [(a_2x^2 + a_1x + a_0) + (b_2x^2 + b_1x + b_0)] + (c_2x^2 + c_1x + c_0) \\ &= (v_1 + v_2) + v_3 \end{aligned}$$

$$3) \quad \text{Existe } 0_{P_2} \in P_2. \quad \forall v \in P_2, \text{ tal que: } v + 0_{P_2} = v$$

$$\begin{aligned} v + 0_{P_2} &= (a_2x^2 + a_1x + a_0) + (0x^2 + 0x + 0) \\ &= (a_2 + 0)x^2 + (a_1 + 0)x + (a_0 + 0) \\ &= a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ &= v \end{aligned}$$

$$4) \quad \forall v_1 \in P_2 \text{ Existe un } \text{único } (-v_1) \in P_2, \text{ tal que:}$$

$$\begin{aligned} v_1 + (-v_1) &= 0_{P_2} \\ v_1 + (-v_1) &= (a_2x^2 + a_1x + a_0) + (-a_2x^2 - a_1x - a_0) \\ &= (a_2 - a_2)x^2 + (a_1 - a_1)x + (a_0 - a_0) \\ &= 0x^2 + 0x + 0 \\ &= 0_{P_2} \end{aligned}$$

$$\text{ii) } \forall v_1 \in P_2, \forall \alpha \in R; (\alpha \cdot v_1) \in P_2 \text{ por definición}$$

$$5) \quad \forall v_1 \in P_2, \forall \alpha, \beta \in R; \alpha(\beta v_1) = (\alpha\beta)v_1$$

$$\begin{aligned} \alpha(\beta v_1) &= \alpha[\beta(a_2x^2 + a_1x + a_0)] \\ &= \alpha(\beta a_2x^2 + \beta a_1x + \beta a_0) \\ &= (\alpha\beta)(a_2x^2 + a_1x + a_0) \\ &= (\alpha\beta)v_1 \end{aligned}$$

$$6) \quad \forall v_1 \in P_2, \forall \alpha, \beta \in R: (\alpha + \beta)v_1 = \alpha v_1 + \beta v_1$$

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)v_1 &= (\alpha + \beta)(a_2x^2 + a_1x + a_0) \\ &= (\alpha + \beta)a_2x^2 + (\alpha + \beta)a_1x + (\alpha + \beta)a_0 \\ &= (\alpha a_2x^2 + \alpha a_1x + \alpha a_0) + (\beta a_2x^2 + \beta a_1x + \beta a_0) \\ &= \alpha(a_2x^2 + a_1x + a_0) + \beta(a_2x^2 + a_1x + a_0) \\ &= \alpha v_1 + \beta v_1 \end{aligned}$$

$$7) \quad \forall v_1, v_2 \in P_2, \forall \alpha \in R: \alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$$

$$\begin{aligned} \alpha(v_1 + v_2) &= \alpha[(a_2x^2 + a_1x + a_0) + (b_2x^2 + b_1x + b_0)] \\ &= \alpha[(a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)] \\ &= \alpha(a_2 + b_2)x^2 + \alpha(a_1 + b_1)x + \alpha(a_0 + b_0) \\ &= (\alpha a_2x^2 + \alpha a_1x + \alpha a_0) + (\alpha b_2x^2 + \alpha b_1x + \alpha b_0) \\ &= \alpha(a_2x^2 + a_1x + a_0) + \alpha(b_2x^2 + b_1x + b_0) \\ &= \alpha v_1 + \alpha v_2 \end{aligned}$$

$$8) \quad \forall v_1 \in P_2 : 1v_1 = v_1$$

$$\begin{aligned} 1v_1 &= 1(a_2x^2 + a_1x + a_0) \\ &= (1a_2x^2 + 1a_1x + 1a_0) \\ &= a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ &= v_1 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.3.c

Sea el conjunto $V = [M_{m \times n}(R)]$ de todas las matrices reales de orden $m \times n$ esto es de m filas y n columnas, junto con las operaciones de adición matricial y multiplicación de matrices por un escalar, se puede probar que V , con las operaciones enunciadas es un espacio vectorial.

A continuación se prueba que en particular el conjunto $[M_{2 \times 2}(R)(x, \cdot)]$ de las matrices cuadradas 2×2 con las operaciones indicadas forman un espacio vectorial:

Verificación:

$$\forall v_1, v_2 \in M_{2 \times 2}(R) \text{ y } \forall \alpha, \beta \in R.$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \quad v_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}; \quad v_3 = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

i) $\forall v_1, v_2 \in M_{2 \times 2}(R)$, $(v_1 + v_2) \in M_{2 \times 2}(R)$ por definición de operación binaria.

$$1) \quad \forall v_1, v_2 \in M_{2 \times 2}(R); \quad v_1 + v_2 = v_2 + v_1$$

$$v_1 + v_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$v_1 + v_2 = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} + a_{11} & b_{12} + a_{12} \\ b_{21} + a_{21} & b_{22} + a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= v_2 + v_1$$

$$2) \quad \forall v_1, v_2, v_3 \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}); \quad v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$$

$$v_1 + (v_2 + v_3) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \left[\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} + c_{11} & a_{12} + b_{12} + c_{12} \\ a_{21} + b_{21} + c_{21} & a_{22} + b_{22} + c_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{array} \right]$$

$$= (v_1 + v_2) + v_3$$

3) Existe $0_m \in M_{2 \times 2}(R)$, $\forall v_1 \in M_{2 \times 2}(R)$, tal que: $v_1 + 0_m = v_1$

$$v_1 + 0_m = \left[\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc} a_{11} + 0 & a_{12} + 0 \\ a_{21} + 0 & a_{22} + 0 \end{array} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right]$$

$$= v_1$$

4) $\forall v_1 \in M_{2 \times 2}(R)$ Existe un único $(-v_1) \in M_{2 \times 2}(R)$, tal que: $v_1 + (-v_1) = 0_m$

$$\begin{aligned}
 v_1 + (-v_1) &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11} - a_{11} & a_{12} - a_{12} \\ a_{21} - a_{21} & a_{22} - a_{22} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_m
 \end{aligned}$$

ii) $\forall v_1 \in M_{2 \times 2}(R)$ y $\forall \alpha \in R$: $(\alpha v_1) \in M_{2 \times 2}(R)$ por definición.

5) $\forall v_1 \in M_{2 \times 2}(R)$, $\forall \alpha, \beta \in R$; $\alpha(\beta v_1) = (\alpha\beta)v_1$

$$\begin{aligned}
 \alpha(\beta v_1) &= \alpha \begin{bmatrix} \beta a_{11} & \beta a_{12} \\ \beta a_{21} & \beta a_{22} \end{bmatrix} \\
 &= (\alpha\beta) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\
 &= (\alpha\beta) v_1
 \end{aligned}$$

$$6) \quad \forall v_1 \in M_{2 \times 2}(R), \forall \alpha, \beta \in R: (\alpha + \beta)v_1 = \alpha v_1 + \beta v_1$$

$$\begin{aligned}
 (\alpha + \beta)v_1 &= (\alpha + \beta) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (\alpha + \beta)a_{11} & (\alpha + \beta)a_{12} \\ (\alpha + \beta)a_{21} & (\alpha + \beta)a_{22} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta a_{11} & \beta a_{12} \\ \beta a_{21} & \beta a_{22} \end{bmatrix} \\
 &= \alpha v_1 + \beta v_1
 \end{aligned}$$

$$7) \quad \forall v_1, v_2 \in M_{2 \times 2}(R) \alpha \in R: \alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$$

$$\begin{aligned}
 \alpha(v_1 + v_2) &= \alpha \left[\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \right] \\
 &= \alpha \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} aa_{11}+ab_{11} & aa_{12}+ab_{12} \\ aa_{21}+ab_{21} & aa_{22}+ab_{22} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} aa_{11} & aa_{12} \\ aa_{21} & aa_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ab_{11} & ab_{12} \\ ab_{21} & ab_{22} \end{bmatrix} \\
 &= av_1 + av_2
 \end{aligned}$$

$$B) \quad \forall v_1 \in M_{2 \times 2}(R): 1v_1 = v_1$$

$$\begin{aligned}
 1v_1 &= 1 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 \cdot a_{11} & 1 \cdot a_{12} \\ 1 \cdot a_{21} & 1 \cdot a_{22} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\
 &= v_1
 \end{aligned}$$

1.3 INDEPENDENCIA LINEAL Y ESPACIO GENERADO

Definición 1.3.1.

Combinación Lineal.-

Sean v_1, v_2, \dots, v_n vectores en un espacio vectorial V y c_1, c_2, \dots, c_n constantes reales, el vector $v \in V$ es una combinación lineal de los vectores v_1, v_2, \dots, v_n , si y solo si, v puede ser expresado de la forma $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$.

INDEPENDENCIA LINEAL

Definición 1.3.2.

Sean v_1, v_2, \dots, v_n , n vectores de un espacio vectorial V y c_1, c_2, \dots, c_n constantes reales; v_1, v_2, \dots, v_n , son vectores linealmente independientes en V si y solo si la única solución de la igualdad: $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0_V$ es: $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$

Si los vectores no son linealmente independientes, se dice que son linealmente dependientes.

Ilustración. 1.3.2.a

- 1.- Veamos si los vectores v_1 y $v_2 \in \mathbb{R}^2$ son linealmente independientes, donde $v_1 = (1,1)$ y $v_2 = (3,3)$, para esto debemos igualar a cero la combinación lineal $c_1 v_1 + c_2 v_2 = \underline{0}$ en este caso: $c_1(1,1) + c_2(3,3) = \underline{0}$, lo cual origina el sistema.

$$\begin{cases} p_1(c_1, c_2) : c_1 + 3c_2 = 0 \\ p_2(c_1, c_2) : c_1 + 3c_2 = 0 \end{cases}$$

Que es la conjunción de los predicados $p_1(c_1, c_2)$ y $p_2(c_1, c_2)$, consecuentemente lo que buscamos al resolver este sistema es el conjunto solución: $A p_1(c_1, c_2) \wedge p_2(c_1, c_2)$.

La forma matricial del sistema es: $A \underline{c} = \underline{0}$ tal que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

La matriz aumentada del sistema es:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{array} \right]$$

Resolvemos el sistema utilizando el método de GAUSS-JORDAN.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Nótese que existe una variable libre, puesto que el sistema original es equivalente a $c_1 + 3c_2 = 0$; a continuación escribiremos el conjunto solución de la conjunción de predicados $p_1(c_1, c_2) \wedge p_2(c_1, c_2)$, esto es

$$Ap_1(c_1, c_2) \wedge p_2(c_1, c_2) = \{(c_1, c_2) / c_1 = -3c_2, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

Por lo tanto existen infinitas soluciones para c_1 y c_2 , lo cual implica que los vectores son linealmente dependientes.

Ilustración. 1.3.2.b

Verifiquemos si los vectores: $v_1=1-x$, $v_2=5+3x-2x^2$ y $v_3=1+3x-2x^2$ son linealmente independientes en el espacio vectorial P_2 :

$c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3 = \underline{0}$ equivale a

$$c_1(1-x)+c_2(5+3x-2x^2)+c_3(1+3x-2x^2)=\underline{0}=0+0x+0x^2;$$

originando los predicados p_1 , p_2 y p_3 , tales que:

$$\begin{cases} p_1(c_1, c_2, c_3) : c_1 + 5c_2 + c_3 = 0 \\ p_2(c_1, c_2, c_3) : -c_1 + 3c_2 + 3c_3 = 0 \\ p_3(c_1, c_2, c_3) : -2c_2 - 2c_3 = 0 \end{cases}$$

La conjunción de los predicados:

$$p_1(c_1, c_2, c_3) \wedge p_2(c_1, c_2, c_3) \wedge p_3(c_1, c_2, c_3)$$

es el sistema de ecuaciones

Expresemos el sistema en su forma matricial: $A\underline{c} = \underline{0}_{P_2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriz aumentada y resolución del sistema ($p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$)

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

El conjunto solución de

$p_1(c_1, c_2, c_3) \wedge p_2(c_1, c_2, c_3) \wedge p_3(c_1, c_2, c_3)$ es:

$Ap_1(c_1, c_2, c_3) \wedge p_2(c_1, c_2, c_3) \wedge p_3(c_1, c_2, c_3) =$

$\{(c_1, c_2, c_3) / c_1 = c_2 = c_3 = 0\}$

Consecuentemente los vectores: $v_1 = 1 - x$, $v_2 = 5 + 3x - 2x^2$ y $v_3 = 1 + 3x - 2x^2$ son linealmente independientes por que la única solución del sistema es: $c_1 = c_2 = c_3 = 0$

Definición 1.3.3.-

Espacio Generado.- Un conjunto de vectores v_1, v_2, \dots, v_k , en un espacio vectorial V , generan a V , si solamente si, cualquier vector en V , puede ser expresado como una combinación lineal de v_1, v_2, \dots, v_k , en otras palabras, para todo v en V y $c_1, c_2, \dots, c_n \in R$, se cumple que:

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k$$

Ilustración: Determine si el conjunto de vectores

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

generan a las matrices cuadradas reales $2 \times 2 (M_{2 \times 2}(R))$

$$\text{Sea } \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Esta igualdad origina los predicados p_1, p_2, p_3 y p_4 tales que:

$$\begin{cases} p_1(c_1, c_2, c_3, c_4) : 2c_1 = x \\ p_2(c_1, c_2, c_3, c_4) : 2c_2 = y \\ p_3(c_1, c_2, c_3, c_4) : 2c_3 = z \\ p_4(c_1, c_2, c_3, c_4) : 2c_4 = w \end{cases}$$

$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_4$ es el sistema de ecuaciones

Resolvemos el sistema utilizando el método de Gauss, para lo cual requerimos la matriz aumentada.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 2 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 2 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 2 & w \end{array} \right]$$

El conjunto solución de

$$p_1(c_1, c_2, c_3, c_4) \wedge p_2(c_1, c_2, c_3, c_4) \wedge p_3(c_1, c_2, c_3, c_4)$$

$\wedge p_4(c_1, c_2, c_3, c_4)$ es:

$$Ap_1(c_1, c_2, c_3, c_4) \wedge p_2(c_1, c_2, c_3, c_4) \wedge p_3(c_1, c_2, c_3, c_4)$$

$$\wedge p_4(c_1, c_2, c_3, c_4) = \{(c_1, c_2, c_3, c_4) / c_1 = x/2, c_2 = y/2, c_3 = z/2, c_4 = w/2, x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \frac{x}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{y}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{z}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \frac{w}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

\Rightarrow S genera a las $(M_{2 \times 2}(\mathbb{R}))$, ya que toda matriz:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

Puede ser expresada como una combinación lineal de:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 16 & 26 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 8 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + 13 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Y así cualquier matriz A en $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

1.4. BASE Y DIMENSION

Definición 1.4.1.

Un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base para un espacio vectorial V , si y solo si:

- i) $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente en V y
- ii) $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ genera a V .

Ilustración 1.4.1.a

Se puede probar que cada uno de los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes en V y además generan al espacio vectorial V correspondiente, por lo tanto constituyen una base para V .

	ESPACIO VECTORIAL (V)	BASE
i)	\mathbb{R}	$B_1 = \{1\}$
ii)	\mathbb{R}^2	$B_2 = \{(2,0), (0,2)\}$
iii)	P_3	$B_3 = \{1, x, x^2, x^3\}$
iv)	$M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$	$B_4 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \right\}$

Verifiquemos que el conjunto $B_3 = \{1, x, x^2, x^3\}$ es una base del espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 3 (P_3).

- i) Independencia lineal de los vectores $1, x, x^2, x^3 \in P_3$
 $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4 = 0_V$; $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$
 $c_1(1) + c_2(x) + c_3(x^2) + c_4(x^3) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$

==> Conjunto solución de $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_4$ es:

$$Ap_1(c_1, c_2, c_3, c_4) \wedge p_2(c_1, c_2, c_3, c_4) \wedge p_3(c_1, c_2, c_3, c_4)$$

$$\wedge p_4(c_1, c_2, c_3, c_4) = \{(c_1, c_2, c_3, c_4) / c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0\}$$

==> Los vectores $1, x, x^2, x^3$ son linealmente independientes en P_3

ii) Verificaremos si $\{1, x, x^2, x^3\}$ genera a P_3

$$c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 = a + bx + cx^2 + dx^3$$

==> Conjunto solución de $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_4$ es:

$$Ap_1(c_1, c_2, c_3, c_4) \wedge p_2(c_1, c_2, c_3, c_4) \wedge p_3(c_1, c_2, c_3, c_4)$$

$$\wedge p_4(c_1, c_2, c_3, c_4) = \{(c_1, c_2, c_3, c_4) / c_1 = a, c_2 = b, c_3 = c, c_4 = d;$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, entonces $\{1, x, x^2, x^3\}$ genera a p_3 , porque todo polinomio de p_3 se puede escribir como una combinación lineal de $\{1, x, x^2, x^3\}$.

$$\text{Por ejemplo } 7x^3 + 8x^2 + 7x + 12 = 7(x^3) + 8(x^2) + 7(x) + 12.$$

Siendo $a=7$, $b=8$, $c=7$ y $d=12$.

Por i), ii) nos permite concluir que el conjunto de vectores $\{1, x, x^2, x^3\}$ es una base del espacio vectorial P_3 .

Definición 1.4.2.

Se puede probar que el número de vectores de cualquier base de un espacio vectorial es único, lo que se hace por el método de contradicción, suponiendo que existen dos bases B_1 y B_2 , la una con m vectores y la otra con n vectores, y se concluye que $m=n$.

Dimensión.

Un número entero n no negativo es la Dimensión de un espacio vectorial V . ($\dim v$), si y solo si n es el número de vectores en una base del espacio vectorial.

Dado un espacio vectorial V se puede probar que $\{0\}$ con sus correspondientes operaciones es un subespacio vectorial de V , se dice que $\{0\}$ es un espacio vectorial de dimensión cero.

Ilustración 1.4.2.b.- La dimensión de los espacios vectoriales de la ilustración 1.4.1.a. es:

$$\dim (R) = 1$$

$$\dim (R^2) = 2$$

$$\dim (P_3) = 4$$

$$\dim M_{2 \times 2}(R) = 4$$

CAPITULO 2.

ESPACIOS VECTORIALES CON PRODUCTO INTERNO

El estudio de los vectores se inició con la invención de Hamilton de los cuaterniones, para explorar el campo físico. Josiah Willard Gibbs (1839-1903) definió el producto escalar en un principio sólo para los vectores $i=(1,0,0)$, $j=(0,1,0)$, $k=(0,0,1)$, siendo $i, j, k \in \mathbb{R}^3$, de la siguiente manera:

$$i) \quad \langle i, i \rangle = \langle j, j \rangle = \langle k, k \rangle = 1$$

$$ii) \quad \langle i, j \rangle = \langle j, i \rangle = \langle i, k \rangle = \langle k, i \rangle = \langle j, k \rangle = \langle k, j \rangle = 0$$

La definición general llegó poco tiempo después, cuando Gibbs explicó el producto escalar en un problema relativo a fuerzas. Como hemos anotado se ha definido el producto interno en $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots, \mathbb{R}^n$ con fines de aplicación.

En \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 se explica geoméricamente y con facilidad el concepto de Vector y norma de un vector. En este capítulo se introduce la definición de una función ϕ a la que llamaremos producto interno sobre un espacio vectorial arbitrario,

A continuación desarrollaremos los fundamentos de la "función llamada producto interno" sobre un espacio vectorial V , cuyo dominio es el producto cartesiano $V \times V$ y el conjunto de llegada es R o C (reales o complejos); en nuestro caso el conjunto de llegada será R .

2.1. DEFINICION, PROPIEDADES E ILUSTRACIONES

Definición 2.1.1.

Sea V un espacio vectorial y $v_1, v_2, v_3 \in V$, decimos que V es un espacio vectorial con producto interno, si y solo si tiene definida una función ϕ de $V \times V$ a R , ($\phi: V \times V \rightarrow R$), tal que $\phi(v_1, v_2) = \langle v_1, v_2 \rangle \in R$, a la función ϕ la llamaremos producto interno; su valor será denotado $\phi(v_1, v_2) = \langle v_1, v_2 \rangle \in R$ y cumple las siguientes propiedades:

- i) $\phi(v_1 + v_2, v_3) = \phi(v_1, v_3) + \phi(v_2, v_3) \quad ; \quad \forall v_1, v_2, v_3 \in V$
- ii) $\phi(\alpha v_1, v_2) = \alpha \phi(v_1, v_2) \quad ; \quad \forall v_1, v_2 \in V, \forall \alpha \in R$
- iii) $\phi(v_1, v_2) = \phi(v_2, v_1) \quad ; \quad \forall v_1, v_2 \in V.$
- iv) $\phi(v_1, v_1) \geq 0 \quad ; \quad \forall v_1 \in V$

Con los vectores $i=(1,0,0)$, $j=(0,1,0)$ y $k=(0,0,1) \in R^3$, definió Gibbs un producto escalar:

$$\phi(i, i) = 1$$

$$\phi(j, j) = 1$$

$$\phi(k, k) = 1$$

$$\phi(i, j) = \phi(j, i) = 0$$

$$\phi(i, k) = \phi(k, i) = 0$$

$$\phi(j, k) = \phi(k, j) = 0$$

Suponemos que Gibbs quiso definir un producto interno de la siguiente manera:

$$\phi(v_1, v_2) = \phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \in \mathbb{R}$$

Definición 2.1.2.

Espacio Euclidiano.

Sea V un espacio vectorial; V es un espacio Euclidiano si y solo si tiene definida una función producto interno sobre él.

Los teoremas que a continuación detallamos y demostramos se deducen a partir de los cuatro axiomas que definen la función producto interno:

Teorema 2.1.1.

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \langle 0_V, v_1 \rangle &= \langle v_1, 0_V \rangle = 0; \quad \forall v_1, 0_V \in V \\ \langle 0_V, v_1 \rangle &= \langle v_1, 0_V \rangle = \langle 0v_2, v_1 \rangle \\ &= 0 \langle v_2, v_1 \rangle \\ &= 0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Teorema 2.1.2.

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad \langle v_1, v_2 + v_3 \rangle &= \langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_1, v_3 \rangle; \quad \forall v_1, v_2, v_3 \in V \\ \langle v_1, v_2 + v_3 \rangle &= \langle v_2 + v_3, v_1 \rangle \\ &= \langle v_2, v_1 \rangle + \langle v_3, v_1 \rangle \\ &= \langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_1, v_3 \rangle \end{aligned}$$

Teorema 2.1.3.

$$\begin{aligned}
 \text{iii) } \langle v_1, \alpha v_2 \rangle &= \alpha \langle v_1, v_2 \rangle ; \forall v_1, v_2 \in V. \alpha \in R \\
 \langle v_1, \alpha v_2 \rangle &= \langle \alpha v_2, v_1 \rangle \\
 &= \alpha \langle v_2, v_1 \rangle = \alpha \langle v_1, v_2 \rangle
 \end{aligned}$$

ILUSTRACIONES DEL CONCEPTO DE ESPACIO VECTORIAL
CON PRODUCTO INTERNO

Ejemplo 2.1.1.a.

Sean $v_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $v_2 = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, dos vectores en R^n , defínase:

$\phi(v_1, v_2) = \langle v_1, v_2 \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$, puede probarse que $\phi: R^n \times R^n \rightarrow R$ es un producto interno ya que satisface los axiomas correspondientes a la definición 2.1.1.

En particular si $v_1 = (x_1, x_2, x_3)$ y $v_2 = (y_1, y_2, y_3)$, dos vectores en R^3 , verificaremos que el producto definido por $\phi(v_1, v_2) = \langle v_1, v_2 \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ es un producto interno.

$$\begin{aligned}
 \text{i) } \langle v_1, v_2 \rangle &= \langle v_2, v_1 \rangle ; \forall v_1, v_2 \in R^3 \\
 \langle v_1, v_2 \rangle &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \\
 &= y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3 \\
 &= \langle v_2, v_1 \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii) } \langle v_1, v_2 + v_3 \rangle &= \langle v_1, v_3 \rangle + \langle v_2, v_3 \rangle; \quad \forall v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3 \\
 \langle v_1 + v_2, v_3 \rangle &= (x_1 + y_1)z_1 + (x_2 + y_2)z_2 + (x_3 + y_3)z_3 \\
 &= x_1z_1 + y_1z_1 + x_2z_2 + y_2z_2 + x_3z_3 + y_3z_3 \\
 &= (x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3) + (y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3) \\
 &= \langle v_1, v_3 \rangle + \langle v_2, v_3 \rangle
 \end{aligned}$$

$$\text{iii) } \langle \alpha v_1, v_2 \rangle = \alpha \langle v_1, v_2 \rangle; \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3. \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \alpha v_1, v_2 \rangle &= \alpha x_1 y_1 + \alpha x_2 y_2 + \alpha x_3 y_3 \\
 &= \alpha (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) \\
 &= \alpha \langle v_1, v_2 \rangle
 \end{aligned}$$

$$\text{iv) } \langle v_1, v_1 \rangle \geq 0; \quad \forall v_1 \in V$$

$$\begin{aligned}
 \langle v_1, v_1 \rangle &= x_1 x_1 + x_2 x_2 + x_3 x_3 \\
 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0; \quad \forall x_i^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

Si por ejemplo $v_1 = (1, 4, 6)$ y $v_2 = (0, 2, -2)$, entonces
 $\phi((1, 4, 6), (0, 2, -2)) = 1(0) + 4(2) + 6(-2) = 0 + 8 - 12 = -4$

Nótese que éste es el producto punto definido en Física, y como veremos a continuación es uno de los tantos productos internos que puede definirse sobre \mathbb{R}^3 .

Ejemplo 2.1.1.b.

Defínase $\phi(v_1, v_2) = \langle v_1, v_2 \rangle = 3x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + x_3 y_3$, un producto interno sobre \mathbb{R}^3 .

Verificación:

$$i) \quad \langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle ; \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_2 \rangle &= 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 \\ &= 3y_1x_1 + 2y_2x_2 + y_3x_3 \\ &= \langle v_2, v_1 \rangle \end{aligned}$$

$$ii) \quad \langle v_1+v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle + \langle v_2, v_3 \rangle ; \forall v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned} \langle v_1+v_2, v_3 \rangle &= 3(x_1+y_1)z_1 + 2(x_2+y_2)z_2 + (x_3+y_3)z_3 \\ &= 3x_1z_1 + 3y_1z_1 + 2x_2z_2 + 2y_2z_2 + x_3z_3 + y_3z_3 \\ &= (3x_1z_1 + 2x_2z_2 + x_3z_3) + (3y_1z_1 + 2y_2z_2 + y_3z_3) \\ &= \langle v_1, v_3 \rangle + \langle v_2, v_3 \rangle \end{aligned}$$

$$iii) \quad \langle \alpha v_1, v_2 \rangle = \alpha \langle v_1, v_2 \rangle ; \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3 \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \langle \alpha v_1, v_2 \rangle &= \alpha 3x_1y_1 + \alpha 2x_2y_2 + \alpha x_3y_3 \\ &= \alpha(3x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3) \\ &= \alpha \langle v_1, v_2 \rangle \end{aligned}$$

$$iv) \quad \langle v_1, v_1 \rangle \geq 0 ; \forall v_1 \in \mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_1 \rangle &= 3x_1x_1 + 2x_2x_2 + x_3x_3 \\ &= 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Hemos probado que la función: $\phi(v_1, v_2) = \langle v_1, v_2 \rangle = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$ define un producto interno sobre \mathbb{R}^3 .

Si por ejemplo $v_1 = (\frac{1}{2}, 4, 3)$ y $v_2 = (4, 3, -1)$, entonces $\phi((\frac{1}{2}, 4, 3), (4, 3, -1)) = 3(\frac{1}{2})4 + 2(4)3 + 3(-1) = 6 + 24 - 3 = 27$.

Si en la función producto interno anterior, se sustituye por la siguiente:

$$\phi(v_1, v_2) = \langle v_1, v_2 \rangle = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_3y_3, \text{ entonces:}$$

iv) $\langle v_1, v_1 \rangle = 3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 \geq 0$; no se cumple para todos los valores de x , por ejemplo si $v_1 = (0, 0, 2)$, entonces: $\langle v_1, v_1 \rangle = 0 + 0 + 0 - 4 = -4$, no es mayor 0, por consiguiente la función $\phi(v_1, v_2) = \langle v_1, v_2 \rangle = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_3y_3$, no define un producto interno sobre \mathbb{R}^3 .

Nótese que sobre un mismo espacio vectorial V , pueden definirse diferentes funciones que son producto interno, además no todas las funciones de $V \times V$ a \mathbb{R} definen un producto interno en V .

Ejemplo 2.1.1.c.

Sea V el espacio vectorial de las matrices cuadradas reales $n \times n (M_{n \times n}(\mathbb{R}))$, si A, B están en V , definimos $\phi(A, B) = \langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A)$, donde $\text{tr}(A)$ es la función traza de una matriz cuadrada definida anteriormente.

Demostración:

$$\begin{aligned} \text{i) } \langle A, B \rangle &= \langle B, A \rangle ; \quad \forall A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \\ \langle A, B \rangle &= \text{tr}(B^t A) \\ &= \text{tr}(A^t B) \\ &= \langle B, A \rangle \end{aligned}$$

$$\text{ii) } \langle A+B, C \rangle = \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle ; \forall A, B, C \in M_{n \times n}(R)$$

$$\begin{aligned} \langle A+B, C \rangle &= \text{tr}((C^t)(A+B)) \\ &= \text{tr}(C^t A + C^t B) \\ &= \text{tr}(C^t A) + \text{tr}(C^t B) \\ &= \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle \end{aligned}$$

$$\text{iii) } \langle \alpha A, B \rangle = \alpha \langle A, B \rangle : \forall A, B \in M_{n \times n}(R), \alpha \in R$$

$$\begin{aligned} \langle \alpha A, B \rangle &= \text{tr}(B^t \alpha A) \\ &= \text{tr}(\alpha A) \text{tr}(B^t) \\ &= \alpha \text{tr}(A) \text{tr}(B^t) \\ &= \alpha \text{tr}(B^t A) \\ &= \alpha \langle A, B \rangle \end{aligned}$$

$$\text{iv) } \langle A, A \rangle \geq 0 ; \forall A \in M_{n \times n}(R)$$

$$\langle A, A \rangle = \text{tr}(A^t A)$$

$$= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}^2 \right) \geq 0$$

En consecuencia la función $\phi(A, B) = \langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A)$ define un producto interno sobre $M_{n \times n}(R)$.

$$\text{Por ejemplo si } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 7 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 4 & 1 & 8 \\ -1 & 6 & -1 \end{bmatrix}; B^t A = \begin{bmatrix} 10 & 8 & 16 \\ 21 & 11 & 26 \\ 2 & -8 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Calcule } \langle A, B \rangle &= \text{tr}(B^t A) = \sum_{i=1}^3 (C_{ii}) ; C_{ii} \in (B^t A) \\ &= 10 + 11 + 8 \\ &= 29 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.1.1.d.

$$V_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; v_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}; v_3 = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

Son matrices cualesquiera del espacio vectorial $V = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ entonces la expresión que sigue define un producto interno sobre las matrices reales $2 \times 2 (M_{2 \times 2}(\mathbb{R}))$.

$$\phi(v_1, v_2) = \langle v_1, v_2 \rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \text{i) } \langle v_1, v_2 \rangle &= \langle v_2, v_1 \rangle ; \quad \forall v_1, v_2 \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \\ \langle v_1, v_2 \rangle &= b_{11}a_{11} + b_{12}a_{12} + b_{21}a_{21} + b_{22}a_{22} \\ &= \langle v_2, v_1 \rangle \end{aligned}$$

$$\text{ii) } \langle v_1+v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle + \langle v_2, v_3 \rangle ; \forall v_1, v_2, v_3 \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} \langle v_1+v_2, v_3 \rangle &= (a_{11}+b_{11})c_{11}+(a_{12}+b_{12})c_{12}+(a_{21}+b_{21})c_{21}+ \\ &\quad (a_{22}+b_{22})c_{22} \\ &= a_{11}c_{11}+b_{11}c_{11}+a_{12}c_{12}+b_{12}c_{12} \\ &\quad +a_{21}c_{21}+b_{21}c_{21}+a_{22}c_{22}+b_{22}c_{22} \\ &= (a_{11}c_{11}+a_{12}c_{12}+a_{21}c_{21}+a_{22}c_{22}) \\ &\quad +(b_{11}c_{11}+b_{12}c_{12}+b_{21}c_{21}+b_{22}c_{22}) \\ &= \langle v_1, v_3 \rangle + \langle v_2, v_3 \rangle \end{aligned}$$

$$\text{iii) } \langle \alpha v_1, v_2 \rangle = \alpha \langle v_1, v_2 \rangle ; \forall v_1, v_2 \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}). \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \langle \alpha v_1, v_2 \rangle &= \alpha a_{11}b_{11} + \alpha a_{12}b_{12} + \alpha a_{21}b_{21} + \alpha a_{22}b_{22} \\ &= \alpha(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}) \\ &= \alpha \langle v_1, v_2 \rangle \end{aligned}$$

$$\text{iv) } \langle v_1, v_1 \rangle \geq 0; \forall v_1 \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

$$\langle v_1, v_1 \rangle = a^2_{11} + a^2_{12} + a^2_{21} + a^2_{22} \geq 0,$$

Entonces la función:

$\phi(v_1, v_2) = \langle v_1, v_2 \rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$, define un producto interno sobre el espacio vectorial de las matrices reales $2 \times 2 (M_{2 \times 2}(\mathbb{R}))$.

$$\text{Por ejemplo si } v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} ; v_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \text{entonces } \langle v_1, v_2 \rangle &= 1(-1) + 2(0) + 3(3) + 4(2) \\
 &= -1 + 0 + 9 + 8 \\
 &= 16
 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.1.1.e.

$$\text{Sean } v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ y } v_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

determine si la función:

$\phi(v_1, v_2) = \langle v_1, v_2 \rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$, es un producto interno sobre las matrices cuadradas $2 \times 2 (M_{2 \times 2}(R))$.

$$\text{i) } \langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle ; \forall v_1, v_2 \in M_{2 \times 2}(R)$$

$$\begin{aligned}
 \langle v_1, v_2 \rangle &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\
 &= b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \\
 &= \langle v_2, v_1 \rangle
 \end{aligned}$$

$$\text{ii) } \langle v_1 + v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle + \langle v_2, v_3 \rangle ; \forall v_1, v_2, v_3 \in M_{2 \times 2}(R)$$

$$\begin{aligned}
 \langle v_1 + v_2, v_3 \rangle &= (a_{11} + b_{11})c_{11} + (a_{12} + b_{12})c_{21} + (a_{21} + c_{21})c_{12} \\
 &\quad + (a_{22} + b_{22})c_{22} \\
 &= a_{11}c_{11} + b_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} + b_{12}c_{21} + a_{21}c_{12} + b_{21}c_{12} \\
 &\quad + a_{22}c_{22} + b_{22}c_{22} \\
 &= (a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} + a_{21}c_{12} + a_{22}b_{22}) + \\
 &\quad (b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21} + b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22}) \\
 &= \langle v_1, v_3 \rangle + \langle v_2, v_3 \rangle
 \end{aligned}$$

$$\text{iii) } \langle \alpha v_1, v_2 \rangle = \alpha \langle v_1, v_2 \rangle : \forall v_1, v_2 \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \langle \alpha v_1, v_2 \rangle &= \alpha a_{11} b_{11} + \alpha a_{12} b_{21} + \alpha a_{21} b_{12} + \alpha a_{22} b_{22} \\ &= \alpha (a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22}) \\ &= \alpha \langle v_1, v_2 \rangle \end{aligned}$$

$$\text{iv) } \langle v_1, v_1 \rangle \geq 0 : \forall v_1 \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_1 \rangle &= a_{11} a_{11} + a_{12} a_{21} + a_{21} a_{12} + a_{22} a_{22} \\ &= a_{11}^2 + 2a_{12} a_{21} + a_{22}^2 \geq 0, \end{aligned}$$

Nótese que esta desigualdad no se cumple para todos los números reales $x_{ij} \in \mathbb{R}$

$$\text{Si } v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ entonces}$$

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_1 \rangle &= 1(1) + 2(-1) + (-1)2 + 1(1) \\ &= 1 - 2 - 2 + 1 \\ &= -2 \end{aligned}$$

En consecuencia la función:

$$\phi(v_1, v_2) = \langle v_1, v_2 \rangle = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22}$$

No define un producto interno sobre el espacio vectorial de las matrices cuadradas reales $2 \times 2 (M_{2 \times 2}(\mathbb{R}))$.

Ejemplo 2.1.1.f.

Si $p = a_0 + a_1x + a_2x^2$ y $q = b_0 + b_1x + b_2x^2$, son dos vectores cualquiera en P_2 ($a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i=0,1,2$), entonces la siguiente función define un producto interno sobre polinomios de grado menor o igual a 2 (P_2). $\phi(p,q) = \langle p,q \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$

Verificación:

$$i) \quad \langle p,q \rangle = \langle q,p \rangle \quad ; \quad \forall p,q \in P_2$$

$$\begin{aligned} \langle p,q \rangle &= a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 \\ &= b_0a_0 + b_1a_1 + b_2a_2 \\ &= \langle q,p \rangle \end{aligned}$$

$$ii) \quad \langle p+q,r \rangle = \langle p,r \rangle + \langle q,r \rangle \quad ; \quad \forall p,q,r \in P_2$$

$$\begin{aligned} \langle p+q,r \rangle &= (a_0+b_0)c_0 + (a_1+b_1)c_1 + (a_2+b_2)c_2 \\ &= a_0c_0 + b_0c_0 + a_1c_1 + b_1c_1 + a_2c_2 + b_2c_2 \\ &= (a_0c_0 + a_1c_1 + a_2c_2) + (b_0c_0 + b_1c_1 + b_2c_2) \\ &= \langle p,r \rangle + \langle q,r \rangle \end{aligned}$$

$$iii) \quad \langle \alpha p,q \rangle = \alpha \langle p,q \rangle \quad ; \quad \forall p,q \in P_2 \text{ y } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \langle \alpha p,q \rangle &= \alpha a_0b_0 + \alpha a_1b_1 + \alpha a_2b_2 \\ &= \alpha (a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2) \\ &= \alpha \langle p,q \rangle \end{aligned}$$

$$iv) \quad \langle p,p \rangle \geq 0 \quad ; \quad \forall p \in P_2$$

$$\begin{aligned} \langle p,p \rangle &= a_0a_0 + a_1a_1 + a_2a_2 \\ &= a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 \\ &\geq 0 \quad ; \quad a_i^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto la función $\phi(p,q) = \langle p,q \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$ define un producto interno sobre el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 2 (P_2).

Si por ejemplo $p = 4+1x+5x^2$ y $q=2+2x-3x^2$.

Encontrar $\langle p,q \rangle$

$$\begin{aligned}\phi(p,q) = \langle p,q \rangle &= a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 \\ &= 4(2) + 1(2) + 5(-3) \\ &= 8 + 2 - 15 \\ &= -5\end{aligned}$$

Ejemplo 2.1.1.q.

Sean $p=p(x)$ y $q=q(x)$, dos polinomios en P_n , donde $a, b \in \mathbb{R}$ fijos cualquiera tales $a < b$, definase:

$$\phi(p,q) = \langle p,q \rangle = \int_b^a p(x)q(x)dx$$

A continuación demostraremos que esta función define un producto interno sobre los polinomios de grado menor o igual a n (P_n).

$$\begin{aligned}\text{i) } \langle p,q \rangle &= \langle p,q \rangle ; \quad \forall p, q \in P_n \\ \langle p,q \rangle &= \int_b^a p(x)q(x)dx \\ &= \int_b^a q(x)p(x)dx \\ &= \langle q,p \rangle\end{aligned}$$

$$\text{ii) } \langle p+q, r \rangle = \langle p, r \rangle + \langle q, r \rangle ; \quad \forall p, q, r \in P_n$$

$$\begin{aligned} \langle p+q, r \rangle &= \int_b^a (p+q)(x)r(x)dx \\ &= \int_b^a (p(x)+q(x))r(x)dx \\ &= \int_b^a p(x)r(x)dx + \int_b^a q(x)r(x)dx \\ &= \langle p, r \rangle + \langle q, r \rangle \end{aligned}$$

$$\text{iii) } \langle \alpha p, q \rangle = \alpha \langle p, q \rangle : \quad \forall p, q \in P_n \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \langle \alpha p, q \rangle &= \int_b^a (\alpha p(x))q(x)dx \\ &= \alpha \int_b^a p(x)q(x)dx \\ &= \alpha \langle p, q \rangle \end{aligned}$$

$$\text{iv) } \langle p, p \rangle \geq 0 ; \quad \forall p \in P_n$$

$$\begin{aligned} \langle p, p \rangle &= \int_b^a p(x)p(x)dx \\ &= \int_b^a p^2(x)dx \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Además, dado que $p^2(x) \geq 0$ y los polinomios son funciones continuas, $\int_b^a p^2(x)dx = 0$, si y solo si $p(x) = 0$, para toda $x \in \mathbb{R}$ satisface a $a \leq x \leq b$. Por tanto, $\langle p, p \rangle = \int_b^a p^2(x)dx = 0$, si y solo si $p = 0$.

Por ejemplo $p(x) = x^2 + x + 1$ y $q(x) = x$, polinomios en P_2 , encuentre $\phi(p, q)$ en el intervalo $[0, 1]$.

$$\begin{aligned} \phi(p, q) = \langle p, q \rangle &= \int_b^a p(x)q(x)dx \\ &= \int_0^1 (x^2 + x + 1)x dx \\ &= \int_0^1 (x^3 + x^2 + x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[\begin{array}{c} (x^4/4 + x^3/3 + x^2/2) \end{array} \right] \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right. \\
 &= 1/4 + 1/3 + 1/2 \\
 &= 13/12
 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.1.1.h.

Sean $a, b, c \in R$, supóngase que p y q están en P_2 y defínase $\phi(p, q) = \langle p, q \rangle = p(a)q(a) + p(b)q(b) + p(c)q(c)$: Probaremos que $\langle p, q \rangle$ es un producto interno sobre los polinomios de grado menor o igual a 2 (P_2).

i) $\langle p, q \rangle = \langle q, p \rangle: \forall p, q \in P_2$

$$\begin{aligned}
 \langle p, q \rangle &= p(a)q(a) + p(b)q(b) + p(c)q(c) \\
 &= q(a)p(a) + q(b)p(b) + q(c)p(c) \\
 &= \langle q, p \rangle
 \end{aligned}$$

ii) $\langle p+q, r \rangle = \langle p, r \rangle + \langle q, r \rangle \quad \forall p, q, r \in P_2$

$$\begin{aligned}
 \langle p+q, r \rangle &= (p+q)(a)r(a) + (p+q)(b)r(b) + (p+q)(c)r(c) \\
 &= p(a)r(a) + q(a)r(a) + p(b)r(b) + q(b)r(b) \\
 &\quad + p(c)r(c) + q(c)r(c) \\
 &= (p(a)r(a) + p(b)r(b) + p(c)r(c)) \\
 &\quad + (q(a)r(a) + q(b)r(b) + q(c)r(c)) \\
 &= \langle p, r \rangle + \langle q, r \rangle
 \end{aligned}$$

iii) $\langle \alpha p, q \rangle = \alpha \langle p, q \rangle, \quad \forall p, q \in P_2, \alpha \in R$

$$\begin{aligned}
 \langle \alpha p, q \rangle &= (\alpha p(a))q(a) + (\alpha p(b))q(b) + (\alpha p(c))q(c) \\
 &= \alpha(p(a)q(a) + p(b)q(b) + p(c)q(c)) \\
 &= \alpha \langle p, q \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{iv)} \quad \langle p, p \rangle &\geq 0 \quad : \quad \forall p \in P_2 \\
 \langle p, p \rangle &= p(a)p(a) + p(b)p(b) + p(c)p(c) \\
 &= p^2(a) + p^2(b) + p^2(c) \geq 0
 \end{aligned}$$

Cabe destacar que una ecuación cuadrática tiene a lo más dos raíces, $p(x)=0$, para toda x , recíprocamente si $p=0$, entonces $p(a)=p(b)=p(c)=0$, así que $\langle p, p \rangle = 0$.

¿Define la función $\phi(p, q) = \langle p, q \rangle = p(a)q(a) + p(b)q(b)$ un producto interno sobre el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 2 (P_2)?

Debemos verificar los axiomas correspondientes:

$$\begin{aligned}
 \text{i)} \quad \langle p, q \rangle &= \langle q, p \rangle : \forall p, q \in P_2 \\
 \langle p, q \rangle &= p(a)q(a) + p(b)q(b) \\
 &= q(a)p(a) + q(b)p(b) \\
 &= \langle q, p \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii)} \quad \langle p+q, r \rangle &= \langle p, r \rangle + \langle q, r \rangle \quad \forall p, q, r \in P_2 \\
 \langle p+q, r \rangle &= (p(a)+q(a))r(a) + (p(b)+q(b))r(b) \\
 &= p(a)r(a) + q(a)r(a) + p(b)r(b) + q(b)r(b) \\
 &= (p(a)r(a) + p(b)r(b)) + (q(a)r(a) + q(b)r(b)) \\
 &= \langle p, r \rangle + \langle q, r \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{iii)} \quad \langle \alpha p, q \rangle &= \alpha \langle p, q \rangle \quad \forall p, q \in P_2 \quad \forall \alpha \in R \\
 \langle \alpha p, q \rangle &= (\alpha p(a))q(a) + (\alpha p(b))q(b) \\
 &= \alpha(p(a)q(a) + p(b)q(b)) \\
 &= \alpha \langle p, q \rangle
 \end{aligned}$$

$$\text{iv) } \langle p, p \rangle \geq 0 : \forall p \in P_2$$

$$\langle p, p \rangle = p^2(a) + p^2(b) ;$$

Nótese que $p(x) = (x-1)(x+1) \neq 0_v$

$$\langle p, p \rangle = p^2(1) + p^2(-1) = 0 \implies p(a) = p(b) = 0 \implies$$

La función $\phi(p, q) = \langle p, q \rangle = p(a)q(a) + p(b)q(b)$ no define un producto interno sobre los polinomios de grado menor o igual a 2 (P_2), porque $\langle p, p \rangle = 0$, aun cuando $P \neq 0_v$.

2.2. NORMA DE UN VECTOR

En Física es importante la norma de los vectores en R^2 y R^3 , pues con el producto interno "clásico" la norma de un vector en estos dos espacios vectoriales es conocida como la noción geométrica de "longitud", a continuación se generalizará este concepto, para espacios vectoriales arbitrarios.

Definición 2.2.1.

Sea V un espacio vectorial con producto interno, LA NORMA DE UN VECTOR es una función f de V en R ($f: V \rightarrow R$) si y solo si $f(v) = \|v\| = +\sqrt{\langle v, v \rangle}$

2.2.1. ILUSTRACIONES Y PROPIEDADES DE LA NORMA DE UN VECTOR

Ejemplo 2.2.1.a.

En \mathbb{R}^2 se demostró que la función

$$\phi(v_1, v_2) = \langle v_1, v_2 \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2,$$

define un producto interno, encuentre la norma del vector $v_1 = (5, 6)$:

$$f(v_1) = \|v_1\| = +\sqrt{x^2 + y^2} = +\sqrt{25 + 36} = +\sqrt{61} = 7,81$$

Determine la norma del vector anterior si la función producto interno es: $\phi(v_1, v_2) = \langle v_1, v_2 \rangle = 3x_1 y_1 + 2x_2 y_2$:

$$f(v_1) = \|v_1\| = +\sqrt{3x^2 + 2y^2} = +\sqrt{3(25) + 2(36)} = +\sqrt{127} = 12,12$$

Nótese que la norma de un vector depende del producto interno definido sobre el espacio vectorial, en los ejemplos anteriores, observamos que en un espacio euclidiano, existe una norma para cada función producto interno.

Ejemplo 2.2.1.b.

En los polinomios de grado menor o igual a 2 (P_2), hemos probado que la función $\phi(p, q) = \langle p, q \rangle = \int_b^a p(x)q(x)dx$ define un producto interno y sean $p=x$ y $q=x^2$, entonces; determine $f(p)$ y $f(q)$ en el intervalo $[-1, 1]$.

$$f(p) = \|p\| = +\sqrt{\langle p, p \rangle} = +\sqrt{\int_{-1}^1 x^2 dx} = +\sqrt{\left. \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^1} = +\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$f(q) = \|q\| = +\sqrt{\langle q, q \rangle} = +\sqrt{\int_1^5 x^4 dx} = +\sqrt{\left. \frac{x^5}{5} \right|_1^5} = +\sqrt{\frac{2}{5}}$$

Ejemplo 2.2.1.c.

Hemos probado anteriormente que la función $\phi(A, B) = \langle A, B \rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$ define un producto interno sobre las matrices reales $2 \times 2 (M_{2 \times 2}(\mathbb{R}))$. Halle $\|A\|$ cuando:

$$a) \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } b) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a) \quad f(A) = \|A\| &= +\sqrt{\langle A, A \rangle} \\ &= +\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2} \\ &= +\sqrt{1 + 49 + 36 + 4} \\ &= +\sqrt{90} \\ &= 3\sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad f(A) = \|A\| &= +\sqrt{\langle A, A \rangle} \\ &= +\sqrt{0 + 0 + 0 + 0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

PROPIEDADES

A continuación discutiremos acerca de algunas de las propiedades de la norma de un vector.

Sean V un espacio vectorial con producto interno y $f(v) = \|v\|$, la norma de un vector cualquiera en V , entonces se cumplen los siguientes teoremas:

Teorema 2.2.1:

$$\|v_1\| \geq 0 \quad \forall v_1 \in V$$

Prueba:

$$\|v_1\| = +\sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle} \geq 0 ;$$

por definición de producto interno $\langle v_1, v_1 \rangle \geq 0$

Teorema 2.2.2:

$$\|v_1\| = 0 \text{ si y solo si } v_1 = 0_V ; \quad \forall v_1 \in V$$

Prueba:

$$i) \quad \|v_1\| = 0 \implies v = 0_V$$

$$\|v_1\| = +\sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle}$$

$$= 0$$

$$\implies v = 0_V$$

$$ii) \quad v = 0_V \implies \|v\| = 0$$

$$\|v_1\| = +\sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle}$$

$$= \sqrt{0}$$

$$= 0$$

Teorema 2.2.3:

$$\| \alpha v \| = |\alpha| \| v \| \quad ; \quad \forall v \in V \quad ; \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Prueba:

$$\begin{aligned} \| \alpha v \| &= \sqrt{\langle \alpha v, \alpha v \rangle} \\ &= \sqrt{\alpha^2 \langle v, v \rangle} \\ &= |\alpha| \sqrt{\langle v, v \rangle} \\ &= |\alpha| \| v \| \end{aligned}$$

2.2.2 Teorema 4. Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Si v_1, v_2 son vectores en un espacio vectorial V , con producto interno, entonces:

$$\langle v_1, v_2 \rangle^2 \leq \langle v_1, v_1 \rangle \langle v_2, v_2 \rangle$$

expresiones equivalentes:

$$\text{i) } \langle v_1, v_2 \rangle^2 \leq \| v_1 \|^2 \| v_2 \|^2$$

$$\text{ii) } |\langle v_1, v_2 \rangle| \leq \| v_1 \| \| v_2 \|$$

Prueba:

Si $v_1 = 0_V$, entonces $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle = 0$, por lo tanto es evidente que la igualdad se cumple.

Supongamos:

$$\text{Sean: } a = \langle v_1, v_1 \rangle$$

$$b = \langle v_1, v_2 \rangle$$

$$c = \langle v_2, v_2 \rangle$$

$$\text{y } t \in \mathbb{R}$$

Por definición $\langle v_1, v_1 \rangle \geq 0$ (positivo), por lo tanto.

$$0 \leq \langle (tv_1 + v_2), (tv_1 + v_2) \rangle$$

$$0 \leq \langle (tv_1 + v_2), tv_1 \rangle + \langle (tv_1 + v_2), v_2 \rangle$$

$$0 \leq \langle tv_1, tv_1 \rangle + \langle v_2, tv_1 \rangle + \langle tv_1, v_2 \rangle + \langle v_2, v_2 \rangle$$

$$0 \leq t^2 \langle v_1, v_1 \rangle + t \langle v_1, v_2 \rangle + t \langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_2, v_2 \rangle$$

$$0 \leq t^2 \langle v_1, v_1 \rangle + 2t \langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_2, v_2 \rangle$$

$$0 \leq at^2 + 2bt + c ; a, c \geq 0$$

Este polinomio cuadrático tiene a lo sumo una raíz real repetida o bien son raíces complejas, por lo tanto debe satisfacer:

$$(2b)^2 - 4ac \leq 0 \implies b^2 - ac \leq 0$$

$$\implies b^2 \leq ac$$

$$\implies \langle v_1, v_2 \rangle^2 \leq \langle v_1, v_1 \rangle \langle v_2, v_2 \rangle$$

Corolario 2.2.4.1. Desigualdad Triangular

Este corolario es consecuencia del teorema anterior.

$$\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\| ; \forall v_1, v_2 \in V$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \|v_1 + v_2\|^2 &= \langle (v_1 + v_2), (v_1 + v_2) \rangle \\ &= \langle (v_1 + v_2), v_1 \rangle + \langle (v_1 + v_2), v_2 \rangle \\ &= \langle v_1, v_1 \rangle + \langle v_2, v_1 \rangle + \langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_2, v_2 \rangle \\ &= \langle v_1, v_1 \rangle + 2\langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_2, v_2 \rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|v_1 + v_2\|^2 \leq \langle v_1, v_1 \rangle + 2|\langle v_1, v_2 \rangle| + \langle v_2, v_2 \rangle$$

$$\Rightarrow \|v_1 + v_2\|^2 \leq \langle v_1, v_1 \rangle + 2\|v_1\| \|v_2\| + \langle v_2, v_2 \rangle$$

$$\Rightarrow \|v_1 + v_2\|^2 \leq \|v_1\|^2 + 2\|v_1\| \|v_2\| + \|v_2\|^2$$

$$\Rightarrow \|v_1 + v_2\|^2 \leq [\|v_1\| + \|v_2\|]^2$$

$$\Rightarrow \|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$$

Ilustraciones: De las Desigualdades de Cauchy-Schwarz y Triangular.

Ejemplo 2.2.2.a.

Si $v_1 = (4, 6, 1)$ y $v_2 = (2, 1, 6) \in \mathbb{R}^3$, verificar las desigualdades de Cauchy-Schwarz y triangular, utilizando el producto interno clásico.

$$a) \quad \langle v_1, v_2 \rangle^2 \leq \langle v_1, v_1 \rangle \langle v_2, v_2 \rangle$$

$$[4(2) + 6(1) + 1(6)]^2 \leq (16 + 36 + 1)(4 + 1 + 36)$$

$$400 < 2173$$

$$b) \quad \|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$$

$$\|(6, 7, 7)\| < \sqrt{53} + \sqrt{41}$$

$$11,58 < 13,68$$

Ejemplo 2.2.2.b.

Verifique las desigualdades de Cauchy-Schwarz y triangular en el espacio vectorial de las matrices cuadradas $2 \times 2 (M_{2 \times 2}(\mathbb{R}))$, con el producto interno definido en ejercicios anteriores.

$$a) \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\langle A, B \rangle^2 \leq \langle A, A \rangle \langle B, B \rangle$$

$$(-1+0+18+3)^2 < (1+4+36+1) (1+0+9+9)$$

$$400 < 798$$

$$b) \quad \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

$$\left\| \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} \right\| \leq \sqrt{42} + \sqrt{19}$$

$$\sqrt{(0+4+81+16)} < 10,84$$

$$10,04 < 10,84$$

Ejemplo 2.2.2.c.

Sean $p=1+2x+x^2$, $q=2-4x^2$, y el producto interno definido sobre el espacio de los polinomios del grado menor o igual a 2 (P_2) $\phi(p,q)=\langle p,q \rangle = a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2$, verifique las desigualdades:

$$a) \quad \langle p, q \rangle^2 \leq \langle p, p \rangle \langle q, q \rangle$$

$$(2+0-4)^2 \leq (1+4+1) (4+0+16)$$

$$(-2)^2 < 6(20)$$

$$4 < 120$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad & \|p, q\| \leq \|p\| + \|q\| \\
 & + \sqrt{3^2+2^2-3^2} < \sqrt{6} + \sqrt{20} \\
 & + \sqrt{9+4+9} < 6,92 \\
 & 4,69 < 6,92
 \end{aligned}$$

Definición 2.2.

Un espacio vectorial con producto interno es normado si y solo si está definida la norma de sus vectores.

Comentario: De conformidad con lo desarrollado existen:

Espacios Vectoriales

Espacios Vectoriales Euclidianos

Espacios Vectoriales Normados

2.3 VECTOR UNITARIO

Definición 2.3.

Sea V un espacio vectorial con producto interno y v cualquier vector en V ; v es un vector unitario si y solamente si:

$$f(v) = \|v\| = 1$$

Ilustración 2.3

$$1) \quad v_1 = (1, 0, 0) \quad ; \quad \|v_1\| = + \sqrt{x^2_1 + x^2_2 + x^2_3} = + \sqrt{1+0+0} = 1$$

$$2) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \|A\| = +\sqrt{a^2_{11} + a^2_{12} + a^2_{21} + a^2_{22}} = +\sqrt{0+0+0+1}=1$$

$$3) \quad p(x) = x \quad ; \quad \|p\| = +\sqrt{a^2_1} = +\sqrt{1} = 1$$

Teorema 2.3.

Si v_1 es un vector diferente del vector 0 en un espacio vectorial con producto interno, entonces el vector $v_1/\|v_1\|$ es unitario.

Prueba:

$$\left\| \frac{v_1}{\|v_1\|} \right\| = +\sqrt{\left\langle \frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_1}{\|v_1\|} \right\rangle} = +\sqrt{\frac{1}{\|v_1\|^2} \langle v_1, v_1 \rangle} = +\sqrt{\frac{1}{\|v_1\|^2} \|v_1\|^2} = 1$$

Este proceso de multiplicar un vector v_1 diferente del vector 0, por el recíproco de su norma, para obtener un vector de norma 1, se denomina normalización de v_1 .

2.4. VECTORES OTONORMALES

Definición 2.4.1.

Sea V un espacio vectorial sobre el cual se ha definido un producto interno, los vectores $v_1, v_2 \in V$, son ortogonales si y solamente si $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$

Definición 2.4.1.

Los Vectores $v_1, v_2 \in V$ son ORTONORMALES, si y solo si:

$$i) \quad \langle v_1, v_2 \rangle = 0$$

$$ii) \quad \|v_1\| = \|v_2\| = 1$$

Ilustración 2.4.2.

Supóngase que las matrices cuadradas $2 \times 2 (M_{2 \times 2}(\mathbb{R}))$ tiene definido el producto interno:

$\phi(A, B) = \langle A, B \rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$, y sea:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{entonces:}$$

$$i) \quad \phi(A, B) = \langle A, B \rangle = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$ii) \quad f(A) = \|A\| = +\sqrt{1+0+0+0} = 1$$

$$f(B) = \|B\| = +\sqrt{0+1+0+0} = 1$$

Los vectores $A, B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ son ortonormales en relación con el producto interno dado.

2.5 RELACION DE ORTOGONALIDAD E INDEPENDENCIA LINEAL DE VECTORES

Un resultado importante que nos permite trabajar con conjuntos ortogonales de vectores, en un espacio con producto interno es el siguiente:

Teorema 2.5.

Si $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un conjunto ortogonal de vectores distintos del vector 0_V , de un espacio vectorial con producto interno, entonces S es linealmente independiente en V

Para la demostración de este teorema se aplicará la prueba por inducción matemática.

Inducción Matemática.- Es un principio fundamental de la matemática que puede ser empleado para demostrar cierto tipo de enunciados matemáticos.

Para probar por inducción se necesitan dos pasos:

- i) (B) Base. probar que se cumple para algún $n \in \mathbb{N}$
- ii) (I) Paso Inductivo. Probar que si $p(n)$ es verdadero entonces $P(n+1)$ también es verdadero.

$$i) \quad p(1) = 1$$

$$ii) \quad [p(k) \Rightarrow p(k+1)] \equiv 1$$

Prueba:

$$\text{Sea } \langle v_i, v_j \rangle = 0, \quad \forall \quad i \neq j$$

Debemos probar que $p(c): c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0_V$, tiene como única solución:

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0 \text{ donde } c_i \in \mathbb{R}; \quad i=1, 2, \dots, n)$$

$$\begin{aligned}
 \text{i) Base } P(1): & \langle v_1, c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n \rangle = \langle v_1, 0 \rangle = 0 \\
 \implies & c_1\langle v_1, v_1 \rangle + c_2\langle v_1, v_2 \rangle + \dots + c_n\langle v_1, v_n \rangle = 0 \\
 \implies & c_1\langle v_1, v_1 \rangle = 0 \implies c_1 = 0 \text{ dado que } (\langle v_1, v_1 \rangle) > 0
 \end{aligned}$$

I) Paso Inductivo:

$$\begin{aligned}
 P(k): & \langle v_k, c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_kv_k + \dots + c_nv_n \rangle = 0 \\
 \implies & c_1\langle v_k, v_1 \rangle + c_2\langle v_k, v_2 \rangle + \dots + c_k\langle v_k, v_k \rangle + \dots + \\
 & c_n\langle v_k, v_n \rangle = 0 \\
 \implies & c_k\langle v_k, v_k \rangle = 0 \implies c_k = 0 \text{ dado que } \langle v_k, v_k \rangle > 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(k+1): & \langle v_{k+1}, c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_kv_k + c_{k+1}v_{k+1} + \dots + c_nv_n \rangle = 0 \\
 \implies & c_1\langle v_{k+1}, v_1 \rangle + c_2\langle v_{k+1}, v_2 \rangle + \dots + c_k\langle v_{k+1}, v_k \rangle + \\
 & c_{k+1}\langle v_{k+1}, v_{k+1} \rangle + \dots + c_n\langle v_{k+1}, v_n \rangle = 0 \\
 \implies & c_{k+1}\langle v_{k+1}, v_{k+1} \rangle = 0 \implies c_{k+1} = 0 \text{ dado que } \\
 & \langle v_{k+1}, v_{k+1} \rangle > 0
 \end{aligned}$$

$$A_p(c) = \{(c_1, c_2, \dots, c_n) / c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0\}$$

$\implies S$ es linealmente independiente

Podemos señalar con certeza que ortogonalidad de vectores garantiza independencia lineal de los mismos.

Ilustración 2.5.a.

Sea el conjunto de vectores Ortogonales en \mathbb{R}^3 :

$S = \{(0, 1, -1), (0, 1, 1), (2, 0, 0)\}$, verificar si son linealmente independientes:

Igualemos a cero la combinación lineal:

$$c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = \underline{0}$$

$c_1(0,1,-1) + c_2(0,1,1) + c_3(2,0,0) = \underline{0}$; genera los predicados p_1, p_2, p_3 , tales que:

$$\begin{cases} p_1(c_1, c_2, c_3) : & 2c_3 = 0 \\ p_2(c_1, c_2, c_3) : & c_1 + c_2 = 0 ; \\ p_3(c_1, c_2, c_3) : & -c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$$

$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_4$ es el sistema de ecuaciones

Expresamos el sistema en su forma matricial $A\underline{c} = \underline{0}$ \implies

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ;$$

resolvemos el sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & : & 0 \\ & & & & \\ 1 & 1 & 0 & : & 0 \\ & & & & \\ -1 & 1 & 0 & : & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & : & 0 \\ & & & & \\ -1 & 1 & 0 & : & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 0 \\ & & & & \\ 0 & 1 & 0 & : & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 \end{bmatrix}$$

El conjunto solución del sistema es:

$$\begin{aligned} & Ap_1(c_1, c_2, c_3) \wedge p_2(c_1, c_2, c_3) \wedge p_3(c_1, c_2, c_3) = \\ & \{(c_1, c_2, c_3) / c_1 = c_2 = c_3 = 0\} \end{aligned}$$

entonces S es linealmente independiente en \mathbb{R}^3 .

El recíproco del teorema 2.5 no siempre es verdadero; es decir independencia lineal de vectores no garantiza ortogonalidad de los mismos.

Ilustración 2.5.b.

Sean $v_1=(1,3)$ y $v_2=(2,5)$, vectores linealmente independientes en R^2 ; verificar si estos vectores son ortogonales:

$$\begin{aligned}\phi((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= x_1 y_1 + x_2 y_2 \\ \phi((1, 3), (2, 5)) &= 1(2) + 3(5) \\ &= 17\end{aligned}$$

$\gamma(\langle v_1, v_2 \rangle) = 0 \implies v_1, v_2$ no son vectores ortogonales.

2.6 BASES ORTONORMALES

En muchos problemas referentes a espacios vectoriales, la selección de una base para el espacio se hace según convenga al que lo resuelve, una de las ventajas que tienen las bases ortonormales sobre las bases arbitrarias es que los cálculos son más simples, por lo que a continuación definiremos e ilustraremos.

Definición 2.6.

Base Ortonormal.

Sea V un espacio vectorial con producto interno y $B=\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ una base cualquiera de V , B es una base ortonormal de V , si y solo si:

$$i) \quad \langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad ; \quad \forall \quad i \neq j$$

$$ii) \quad f(v_i) = \|v_i\| = 1 \quad \text{para } i, j = 1, 2, \dots, n$$

Si cumple solamente la condición i, se dice que $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base ortogonal de V .

Ilustraciones:

Ejemplo 2.6.1.

Se puede probar que el conjunto de polinomios

$$B = \left\{ \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2 \right), \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}x^2 \right), \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}x^2 \right) \right\}$$

es una base para el espacio vectorial (P_2) de los polinomios de grado menor o igual a 2 con la función producto interno: $\phi(p, q) = \langle p, q \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$, determinemos si B es una base ortogonal para P_2 .

$$i) \quad \langle p, q \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$$

$$\langle p, q \rangle = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} - \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = 0$$

$$\langle p, r \rangle = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = 0$$

$$\langle q, r \rangle = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} - \frac{4}{9} = 0$$

Los polinomios p, q y r son mutuamente ortogonales.

$$\text{ii) } f(p) = \|p\| = + \sqrt{\langle p, p \rangle}$$

$$= + \sqrt{\frac{2}{3}^2 + \frac{2}{3}^2 + \frac{1}{3}^2}$$

$$= 1$$

$$f(q) = \|q\| = + \sqrt{\frac{2}{3}^2 + \frac{1}{3}^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$= 1$$

$$f(r) = \|r\| = + \sqrt{\frac{1}{3}^2 + \frac{2}{3}^2 + \frac{2}{3}^2}$$

$$= 1$$

Puesto que se cumplen las condiciones i, ii, de la definición previa, B es una base ortonormal para el espacio vectorial P_2 .

Ejemplo 2.6.2.

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Es una base para $(M_{2 \times 2}(R))$ y sabemos que la función:
 $\phi(A,B) = \langle A,B \rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$ es un producto
 interno sobre las matrices cuadradas $2 \times 2 (M_{2 \times 2}(R))$,
 verifiquemos si B es ortonormal.

$$\begin{aligned} \text{i) } \phi(A,B) &= \langle A,B \rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} \\ &= 0+0+0+0 = 0 \end{aligned}$$

$$\langle A,C \rangle = \langle A,D \rangle = \langle B,C \rangle = \langle B,D \rangle = \langle C,D \rangle = 0$$

$$\text{ii) } f(A) = \|A\| = \sqrt{9+0+0+0} = 3$$

$$f(B) = \|B\| = 3$$

$$f(C) = \|C\| = 2$$

$$f(D) = \|D\| = 2$$

En conclusión B es una base ortogonal de $M_{2 \times 2}(R)$, más
 no ortonormal, pues $\neg (\|A\| = \|B\| = \|C\| = \|D\| = 1)$

Dada una base o un conjunto generador S para un
 espacio vectorial con producto interno V, se puede
 encontrar una base ortogonal u ortonormal para el espacio;
 el Método que se usa para esta construcción se llama el
 proceso de Gram-Schmidt, el mismo que no será discutido en
 nuestro trabajo.

2.7. MATRICES ORTOGONALES

A continuación se define una nueva clase de matriz,
 que es muy útil sobre todo en lo relacionado con
 diagonalización de matrices, formas cuadráticas, etc.

Definición 2.7.1.

Una matriz $Q_{n \times n}(R)$ se llama ortogonal, si y solo si Q es invertible y $Q^{-1} = Q^t$

Nótese que:

$$Q^{-1} = Q^t \implies Q^{-1}Q = Q^tQ \implies Q^tQ = I$$

Ilustraciones:

Ejemplo 2.7.1.

Toda matriz identidad es ortogonal

Prueba:

$$Q=I ; Q^t=I \implies Q^tI=II \implies Q^t=I$$

Ejemplo 2.7.2.

$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} ; Q^t = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\implies Q^tQ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$\implies Q$ es una matriz ortogonal

Ejemplo 2.7.3.

$$\text{Supongamos } Q = \begin{bmatrix} \text{Sen } \theta & \text{Cos } \theta \\ \text{Cos } \theta & -\text{Sen } \theta \end{bmatrix} ; Q^t = \begin{bmatrix} \text{Sen } \theta & \text{Cos } \theta \\ \text{Cos } \theta & -\text{Sen } \theta \end{bmatrix}$$

$$Q^t Q = \begin{bmatrix} \text{Sen}^2 \theta + \text{Cos}^2 \theta & \text{Sen } \theta \text{ Cos } \theta - \text{Sen } \theta \text{ Cos } \theta \\ \text{Sen } \theta \text{ Cos } \theta - \text{Sen } \theta \text{ Cos } \theta & \text{Sen}^2 \theta + \text{Cos}^2 \theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \Rightarrow Q \text{ es ortogonal}$$

Es factible hallar matrices ortogonales, utilizando el siguiente Teorema, cuya demostración se encuentra en el libro ALGEBRA LINEAL de Staley Grosman, página 303, Edit. Mac-Graw-Hill - 4 edición 1992.

Teorema 2.7.1.

La matriz $Q_{n \times n}(R)$ es ortogonal si y solo si las columnas de Q forman una base ortogonal de R^n .

Consideremos la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Siendo $v_1 = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$

$v_2 = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$

$v_3 = (0, 1, 0)$ vectores columnas de A .

$$A^t = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^t A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$\Rightarrow A$ es una matriz ortogonal.

Según condición del Teorema 2.7.1:

Si A es ortogonal, entonces los vectores columna $v_1 = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$; $v_2 = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$; $v_3 = (0, 1, 0)$ forman una base ortogonal de \mathbb{R}^3 .

Verificación:

$$i) \quad \langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad ; \quad \forall i \neq j$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\langle v_1, v_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0+0+0 = 0$$

$$\langle v_1, v_3 \rangle = 0+0+0 = 0$$

$\Rightarrow B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una base ortogonal para \mathbb{R}^3

Además en este caso:

$$\text{ii) } f(v_1) = \|v_1\| = +\sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle}$$

$$= +\sqrt{\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}} = 1$$

$$f(v_2) = \|v_2\| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

$$f(v_3) = \|v_3\| = \sqrt{0+1+0} = 1$$

$\Rightarrow B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una base ortonormal en \mathbb{R}^3 .

2.8. COMPLEMENTO ORTOGONAL

A continuación definiremos el conjunto denominado Complemento Ortogonal en los espacios vectoriales con producto interno.

Definición 2.8.1.

Sea H un subespacio del espacio vectorial V con producto interno, H^\perp es el complemento ortogonal de H , si y solo si: $H^\perp = \{x \in V / \langle x, h \rangle = 0, \forall h \in H\}$

Ilustraciones:

Ejemplo 2.8.1.

Encontraremos el complemento ortogonal del plano generado por los vectores: $v_1 = (1,1,2)$ y $v_2 = (1,2,3)$. Considerando como filas de la Matriz A y resolviendo $A\underline{x}=0$.

H es el subespacio de R^3 generado por los vectores: $(1,1,2)$ y $(1,2,3)$, según el problema formemos la Matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Estructuremos el sistema de ecuaciones homogéneo.

$$\begin{cases} p_1(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ p_2(x_1, x_2, x_3) : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Siendo $p_1 \wedge p_2$ es el sistema de ecuaciones.

A continuación la representación matricial del sistema:

$$A\underline{x} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Trabajaremos con la matriz aumentada.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ & & & \vdots \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ & & & \vdots \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & \vdots \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

\Rightarrow Conjunto solución:

$$A_{p_1} \wedge p_2 = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 = -x_3, x_2 = -x_3, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = -x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

En consecuencia H^\perp (complemento ortogonal) es el conjunto generado por $\{(1, 1, -1)\}$

Ejemplo 2.8.2

En $P_3 [0, 1]$, sea H un subespacio generado por el conjunto $\{1, x^2\}$, determine el complemento ortogonal H^\perp de $\text{gen}\{1, x^2\}$.

$$H = \text{gen}\{1, x^2\}$$

$$H^\perp = \{x \in V : \langle x, h \rangle = 0 ; \forall h \in H\}$$

Sean $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$; donde $p(x) \in P_3$

$$\langle p, q \rangle = \int_b^a p(x)q(x)dx$$

$$\text{i) } \int_0^1 p(x)q(x)dx = \int_0^1 (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)1dx = 0$$

$$\Rightarrow p_1(a_3, a_2, a_1, a_0) = \frac{a_3}{4} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_1}{2} + a_0 = 0$$

$$\text{ii) } \int_0^1 p(x)q(x)dx = \int_0^1 (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)x^2 dx = 0$$

$$p_2(a_3, a_2, a_1, a_0) = \frac{a_3}{6} + \frac{a_2}{5} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_0}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1(a_3, a_2, a_1, a_0) : \frac{a_3}{4} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_1}{2} + a_0 = 0 \\ p_2(a_3, a_2, a_1, a_0) : \frac{a_3}{6} + \frac{a_2}{5} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_0}{3} = 0 ; \end{cases}$$

$p_1 \wedge p_2$ es el sistema.

Forma Matricial del Sistema $M\mathbf{a} = \mathbf{0}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ - & - & - & - \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ - & - & - & - \\ 6 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriz Aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & : & 0 \\ - & - & - & - & : & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & : & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & : & 0 \\ - & - & - & - & : & 0 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & : & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & 12 & : & 0 \\ : & : & : & : & : & : \\ 10 & 12 & 15 & 20 & : & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & 12 & : & 0 \\ : & : & : & : & : & : \\ 0 & 4 & 15 & 60 & : & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & -9 & -48 & : & 0 \\ 0 & 4 & 15 & 60 & : & 0 \\ : & : & : & : & : & : \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -16 & : & 0 \\ 0 & 1 & \frac{15}{4} & 15 & : & 0 \\ : & : & : & : & : & : \end{bmatrix}$$

Conjunto solución de $p_1 \wedge p_2$ es:

$$Ap_1(c_3, c_2, c_1, c_0) \wedge p_2(a_3, a_2, a_1, a_0) = \{(a_3, a_2, a_1, a_0) / c_3 = 3a_1 + 16a_0$$

$$c_2 = \frac{-15}{4} a_1 - 15a_0 ; c_1, c_0 \in \mathbb{R}\}$$

$$H^\perp = \text{gen}\{12x^3 - 15x^2 + 4x, (16x^3 - 15x^2 + 1)\}$$

TEOREMA 2.8.1.- Si H es un subespacio del espacio con producto interno V , entonces:

i) $H^\perp \cap H = 0_V$

ii) H^\perp es un subespacio de V

i) $H^\perp \cap H = 0_V$

Prueba:

$$x \in H^\perp \cap H \implies \langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0_V$$

ii) H es un subespacio de V .

a) Por condición anterior $0_V \in H^\perp$

b) Sean $x_1, x_2 \in H$, $\implies \langle x_1, h \rangle = 0$

$$\langle x_2, h \rangle = 0 \quad \forall h \in H$$

$$\begin{aligned} \implies \langle x_1 + x_2, h \rangle &= \langle x_1, h \rangle + \langle x_2, h \rangle \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

en consecuencia: $(x_1 + x_2) \in H^\perp$

c) $x_1 \in H$, $\alpha \in \mathbb{R}$, : $(\alpha x_1) \in H^\perp$

$$\langle \alpha x_1, h \rangle = \alpha \langle x_1, h \rangle = \alpha 0 = 0$$

$$\implies (\alpha x_1) \in H^\perp$$

Por a,b,c, H^\perp es un subespacio de V .

En la ilustración 2.8.1.- $H = \text{gen}\{(1,1,2), (1,2,3)\}$ es un subespacio de \mathbb{R}^3 , como también $H^\perp = \text{gen}\{(1,1,-1)\}$ es un subespacio de \mathbb{R}^3 .

CONCLUSIONES

1. El concepto de función ha tenido trascendental importancia en el desarrollo de nuestro trabajo, pues con ella hemos definido e ilustrado: matriz, traza de una matriz cuadrada, operación binaria, espacio vectorial con producto interno y norma de un vector.
2. Se han introducido definiciones de la función producto interno sobre un espacio vectorial real arbitrario y la función norma de un vector, destacándose para ello los vectores: polinomios de grado menor o igual a n , matrices reales de orden $m \times n$ y las e -niadas reales. En este contexto se ilustra con ejemplos que cumplen con las definiciones y otros denominados contraejemplos que no cumplen con al menos uno de los axiomas establecidos.
3. Destacaremos que la norma de un vector depende exclusivamente de la función producto interno, definida sobre un espacio vectorial real, por lo cual podemos determinar diferentes normas de un mismo vector; cabe anotar que la desigualdad de Cauchy-Schwarz relaciona el producto interno de dos vectores con sus normas.

4. Hemos enunciado e ilustrado las definiciones de: vector unitario, bases ortonormales, matrices ortonormales y complemento ortogonal; para lo cual aplicamos la función llamada producto interno definida sobre espacios vectoriales reales.

BIBLIOGRAFIA

- ANTON, H. (1991) Introducción al Algebra Lineal. Grupo Noriega Editores, Editorial Limusa, quinta reimpresión. México D.F.
- GERBER, H. (1992) Algebra Lineal. Grupo Editorial Iberoamé-rica. México D.F.
- GROSSMAN, S. (1991) Algebra Lineal con aplicaciones. Editorial Mc-Graw-Hill. Cuarta edición. México D.F.
- HERSTEIN, I. (1991) Algebra Lineal y Teoría de Matrices. Grupo Editorial Iberoamérica. México D.F.
- HOFFMAN, K. (1991) Algebra Lineal. Editorial Prentice Hall,
KUNZE, R. Bogotá Colombia.
- KOLMAN, B. (1977) Algebra Lineal. Fondo Educativo Interamericano S.A. Segunda Edición. México D.F.

- LANG, S. (1976) Algebra Lineal. Fondo Educativo Interamericano México D.F.
- NOBLE, B. (1989) Algebra Lineal Aplicada. Prentice-Hall Hispanoamericana S. A., Tercera Edición México D.F.
- DANIEL, J.
- DAVIS, H. (1992) Introducción al Análisis Vectorial. Editorial Mc-Graw-Hill, Sexta edición México D.F.
- SNIDER, A.