AEICM

# ASOCIACIÓN DE ESTUDIANTES DE LAS CARRERAS DEL ICM

# folleto de álgebra lineal

## primer parcial

Por:
Néstor Montaño

AEICM 2007

Movimiento Integración Estudiantil

# CONJUNTOS Y VECTOR TÍPICO

Los ejercicios en general no presentan conjuntos simples como por ejemplo $\mathbf{P_2}$ (polinomios de grado menor igual a 2), mas bien presentan conjuntos más compuestos, por ejemplo:

$$S=\{\, p(x) \,/\, p(x) \in \mathbf{P_3} \text{ y } p(-1)+p(1)=0 \text{ y } p(0)-p(1)=0 \}$$

…supongamos que te preguntan ¿$p(x)=1+x^2 \in S$ ?... ¿Qué harías?

Si lo vas a trabajar así como te lo han definido, debes verificar si p(x) cumple con las condiciones del conjunto S

$$S=\{\, p(x) \,/\, \underbrace{p(x) \in \mathbf{P_3} \text{ y } p(-1)+p(1)=0 \text{ y } p(0)-p(1)}_{\text{condiciones del conjunto } S}=0 \}$$

En nuestro caso, $p(x)\in \mathbf{P_3}$ (cumple) ; $p(-1)\,)+p(1)=(1+(-1)^2)+(1+(1)^2)=4 \neq 0$ (no cumple)

por lo tanto: $p(x)\notin \mathbf{P_3}$

Otra opción es hallar un *vector típico, que es un vector genérico el cual cumple con todas las condiciones del conjunto*. En el ejemplo sería:

$$S=\{\, p(x) \,/\, p(x) \in \mathbf{P_3} \text{ y } p(-1)+p(1)=0 \text{ y } p(0)-p(1)=0 \}$$

desarrollamos las condiciones…

| | | |
|---|---|---|
| $p(x) \in \mathbf{P_3}$ | entonces $p(x)= a+bx+cx^2+dx^3$ | (vector típico de $\mathbf{P_3}$) |
| $p(-1)+p(1)=0$ | $(a+b(-1)+c(-1)^2+d(-1)^3)+(a+b(1)+c(1)^2+d(1)^3)=0$ | (evaluando) |
| | $\Rightarrow$ $(a-b+c-d)+ (a+b+c+d)=0$ | |
| | $\Rightarrow$ $\mathbf{2a+2c=0}$ | **(condición desarrollada)** |
| $p(0)-p(1)=0$ | $(a+b(0)+c(0)^2+d(0)^3)-(a+b(1)+c(1)^2+d(1)^3)=0$ | (evaluando) |
| | $\Rightarrow$ $(a)-(a+b+c+d)=0$ | |
| | $\Rightarrow$ $\mathbf{-b-c-d=0}$ | **(condición desarrollada)** |

Con las condiciones desarrolladas, obtengo un sistema

$$\begin{aligned}2a+2c&=0\\ -b-c-d&=0\end{aligned}$$

2 ecuaciones 4 incógnitas, se escogen dos incógnitas como variables libres; escojo **c** y **d** resultando...

$$\mathbf{a=-c} \qquad \mathbf{b=-c-d}$$

reemplazo lo que obtuve en el vector típico de $\mathbf{P_3}$, obteniendo…

$$S=\{\, \underbrace{\mathbf{(-c)+(-c-d)x+cx^2+dx^3}}_{\text{Vector típico de } S} \,/\, c,d\in \mathbb{R} \,\}$$

Este vector nos indica que el coeficiente libre debe ser el negativo del de $x^2$ (o lo que es lo mismo que decir que el coeficiente de $x^2$ debe ser el negativo del coeficiente libre) y que el coeficiente de x debe ser la suma de los inversos aditivos de los coeficientes de $x^2$ y $x^3$. El vector típico no es único, basta con escoger otras incógnitas como variables libres para obtener otro vector típico.
Veamos como se resuelve la pregunta ¿$p(x)=1+x^2 \in S$ ? utilizando al vector típico.
en este caso, c=1 y d=0, p(x) no mantiene la forma del vector típico ya que el coeficiente libre debería ser -1 y es 1; por lo tanto: $p(x)\notin \mathbf{P_3}$

¿$p(x)=1+x-x^2 \in S$ ? c=-1 y d=0, reemplazando dichos valores en el vector típico nos queda el mismo p(x); entonces p(x) sí mantiene la forma del vector típico, por lo tanto: $p(x)\in \mathbf{P_3}$

En el vector típico obtenido $\mathbf{(-c)+(-c-d)x+cx^2+dx^3}$ los coeficientes de $x^2$ y $x^3$ se les llama entradas del vector, en un vector típico de la forma $\mathbf{ax+(a+b)\,x^2+bx^3}$ los coeficientes de x y $x^3$ serian las entradas y el, coeficiente libre siempre tendrá el valor cero.

## ❖ Halle el vector típico de: $W=\{A\in M_{3x3}\ /\ a_{ij}=0 \text{ para } i>j\}$

Desarrollamos las condiciones…

$A\in \mathbf{M_{3x3}} \quad \Rightarrow A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ (vector típico de $\mathbf{M_{3x3}}$)

$a_{ij}=0$ para $i>j \quad \Rightarrow$ verificamos la condicion para cada elemento del vector típico de $\mathbf{M_{3x3}}$

$a_{11}$ 1>1 (no cumple) $\Rightarrow \mathbf{a_{11}} \in \mathbb{R}$

$a_{12}$ 1>2 (no cumple) $\Rightarrow \mathbf{a_{12}} \in \mathbb{R}$

$a_{13}$ 1>3 (no cumple) $\Rightarrow \mathbf{a_{13}} \in \mathbb{R}$

$a_{21}$ 2>1 (cumple) $\Rightarrow \mathbf{a_{21}=0}$

$a_{22}$ 2>2 (no cumple) $\Rightarrow \mathbf{a_{22}} \in \mathbb{R}$

$a_{23}$ 2>3 (no cumple) $\Rightarrow \mathbf{a_{23}} \in \mathbb{R}$

$a_{31}$ 3>1 (cumple) $\Rightarrow \mathbf{a_{31}=0}$

$a_{32}$ 3>2 (cumple) $\Rightarrow \mathbf{a_{32}=0}$

$a_{33}$ 3>3 (no cumple) $\Rightarrow \mathbf{a_{33}} \in \mathbb{R}$

finalmente obtenemos:

$$W=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \ /\ a_{11},a_{12},a_{13},a_{22},a_{23},a_{33} \in \mathbb{R}\right\}$$

## ❖ Halle el vector típico de: $S=\{A\in M2x2\ /\ A=AT\}$

Desarrollamos las condiciones…

$A\in \mathbf{M_{2x2}} \quad \Rightarrow A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ (vector típico de $\mathbf{M_{2x2}}$)

$A=A^T \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ de la igualdad de A con $A^T$ obtengo un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_{11}=a_{11} \text{ (trivial)} \Rightarrow a_{11} \in \mathbb{R} \\ a_{12}=a_{21} \text{ (valida)} \\ a_{21}=a_{12} \text{ (valida)} \\ a_{22}=a_{22} \text{ (trivial)} \Rightarrow a_{11} \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad a_{12}=a_{21},\ a_{21} \in \mathbb{R}$$

Al final obtenemos…

$$S=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} / \ a_{11},a_{21},a_{22} \in \mathbb{R}\right\}$$

### ❖ Halle el vector típico de: W={(a,b,c,d) / a-2d+c=0}

Desarrollamos la condición, en este caso, solo debemos despejar una variable…
**a=2d-c (condición desarrollada)** nos quedan **c** y **d** como variables libres, y además, como no existe condición que involucre a la variable b, esta puede ser cualquier real, es decir $b \in \mathbb{R}$
Al final obtenemos…

$$W=\{(2d-c,b,c,d) \ / \ b,c,d \in \mathbb{R}\}$$

### ❖ Halle el vector típico de: W={(a,b,c,d) / 2a-b+c=3a-b+d=0}

Desarrollamos la condición, en este caso la condición es un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2a-b+c=0 & \Rightarrow \mathbf{c=b-2a} \\ 3a-b+d=0 & \Rightarrow \mathbf{d=b-3a} \end{cases} \quad \mathbf{a,b} \in \mathbb{R}$$

Dejo dos incógnitas como variables libres **a** y **b;** y el resultado es:

$$W=\{(a,b,b-2a,b-3a) \ / \ a,b \in \mathbb{R}\}$$

### ❖ Halle el vector típico de: U={p(x) / p(x)=a(1+x)+b(4x-x2)}

En este caso al desarrollar nos queda…
$p(x)=a(1+x)+b(4x-x^2) \quad \Rightarrow p(x)=a+ax+4bx-bx^2 \quad \Rightarrow \mathbf{p(x)=a+(a+4b)x-bx^2}$
resultando…

$$U=\{ a+(a+4b)x-bx^2 \ / \ a,b \in \mathbb{R}\}$$

> ***"Libre y sagrado, es el derecho de pensar…***
>
> ***La educación es fundamental para la felicidad social; es el principio en el que descansan la libertad y el engrandecimiento de los pueblos"***

# ESPACIOS VECTORIALES

**Definición.-** Sea V un conjunto de elementos, junto con dos operaciones: $\oplus$ suma y $\otimes$ multiplicación por un escalar. $(V;\oplus,\otimes)$ es un Espacio Vectorial si y solo si las operaciones mencionadas cumplen con:

| | |
|---|---|
| **A₁** $\forall$ v,w $\in$ V [ v$\oplus$w $\in$ V ] | Cerradura de la Suma |
| **A₂** $\forall$ v,w $\in$ V [ v$\oplus$w = w$\oplus$v ] | Conmutatividad de la Suma |
| **A₃** $\forall$ v,w,u $\in$ V [ (v$\oplus$w)$\oplus$u = v$\oplus$(w$\oplus$u) ] | Asociatividad de la Suma |
| **A₄** $\exists\, \bar{o} \in V\ \forall\, v \in V\ [v \oplus \bar{o} = v]$ | Neutro o Vector Cero |
| **A₅** $\forall\, v \in V\ \exists\, v' \in V\ [v \oplus v' = \bar{o}]$ | Inverso aditivo de V |
| **M₁** $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\ \forall\, v \in V\ [\alpha \otimes v \in V]$ | Cerradura de la Multiplicación |
| **M₂** $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\ \forall\, v,w \in V\ [\alpha \otimes (v \oplus w) = \alpha \otimes v \oplus \alpha \otimes w]$ | Distributiva |
| **M₃** $\forall\, \alpha,\beta \in \mathbb{R}\ \forall\, v \in V\ [(\alpha+\beta) \otimes v = \alpha \otimes v \oplus \beta \otimes v]$ | Distributiva |
| **M₄** $\forall\, \alpha,\beta \in \mathbb{R}\ \forall\, v \in V\ [\alpha \otimes (\beta \otimes v) = (\alpha * \beta) \otimes v]$ | Asociativa multiplicación escalar |
| **M₅** $\forall\, v \in V\ [1 \otimes v = v]$ | |

❖ **Sea V={(a, b, a-b) / a$\in$R,b$\in$R+ } con la suma $\oplus$ definida como:**
**(a1, b1, a1-b1) $\oplus$ (a2, b2, a2-b2) = (a1+a2-3, b1b2, a1-b1b2+a2-3) y la multiplicación por escalar**
**k$\otimes$(a, b, a-b) = (ka-3k+3, bk, k(a-3)- bk+3) ,k$\in$R**
**a) Determine si (V;$\oplus$,$\otimes$) es un Espacio Vectorial**
**b) Determine el vector 4$\otimes$(3, 1, 2) $\oplus$ 2$\otimes$(5, 3, 2)**

Según la definición, para que $(V;\oplus,\otimes)$ sea un espacio vectorial, las operaciones definidas sobre V deben cumplir los 10 axiomas, asi que debemos verificar si los cumplen o no.

**A₁ $\forall$ v,w $\in$ V [ v$\oplus$w$\in$V ]**

La hipótesis del axioma es que **v,w $\in$ V**, entonces **v** y **w** tienen la forma de los vectores de V, es decir:
$v\in V \Rightarrow v=(a_1, b_1, a_1-b_1)$ donde $a_1\in\mathbb{R}$ y $b_1\in\mathbb{R}^+$
$w\in V \Rightarrow w=(a_2, b_2, a_2-b_2)$ donde $a_2\in\mathbb{R}$ y $b_2\in\mathbb{R}^+$
para que $v\oplus w\in V$, debemos verificar que el vector $v\oplus w$ cumple todas las condiciones de conjunto V (que en este caso es que el primer elemento sea real, el segundo sea un real positivo y el tercero sea la resta del primero con el segundo). Desarrollando…
$v\oplus w= (a_1, b_1, a_1-b_1) \oplus (a_2, b_2, a_2-b_2) = (a_1+a_2-3, b_1b_2, a_1-b_1b_2+a_2-3)$ verificamos las condiciones

$a_1+a_2-3 \in\mathbb{R}$ ya que es la suma de 3 elementos reales
$b_1b_2\in\mathbb{R}^+$ ya que $b_1\in\mathbb{R}^+$ y $b_2\in\mathbb{R}^+$ y su multiplicación es $\mathbb{R}^+$
$a_1-b_1b_2+a_2-3 = a_1+a_2-3 - b_1b_2$ (ordenando se verifica que es la resta del 1er elemento con el 2do)

por lo tanto **v$\oplus$w$\in$V**

**A₂ $\forall$ v,w $\in$ V [ v$\oplus$w = w$\oplus$v ]**

Partiendo del vector $v\oplus w$ debemos llegar al vector $w\oplus v$…
$v\oplus w= (a_1, b_1, a_1-b_1) \oplus (a_2, b_2, a_2-b_2) = (a_1+a_2-3, b_1b_2, a_1-b_1b_2+a_2-3)$

Nótese que $\oplus$ es una operación definida y hay que aplicar dicha definición

desarrollando aparte $w\oplus v$…


Por: Néstor Montaño 085437820

$w \oplus v = (a_2, b_2, a_2-b_2) \oplus (a_1, b_1, a_1-b_1) = (a_2+a_1-3, b_2b_1, a_2-b_2b_1+a_1-3)$ entonces aplicando la propiedad conmutativa de la suma y la multiplicación de los reales

$= (a_1+a_2-3, b_1b_2, a_1-b_1b_2+a_2-3) = (a_2+a_1-3, b_2b_1, a_2-b_2b_1+a_1-3) = w \oplus v$

por lo tanto $\mathbf{v \oplus w = w \oplus v}$

**$A_3$ $\forall$ v,w,u $\in$ V [ $(v \oplus w) \oplus u = v \oplus (w \oplus u)$ ]**

No tenemos definido al vector **u**, procedemos a hacerlo:

$u \in V \Rightarrow u=(a_3, b_3, a_3-b_3)$ donde $a_3 \in \mathbb{R}$ y $b_3 \in \mathbb{R}^+$

$(v \oplus w) \oplus u = [(a_1, b_1, a_1-b_1) \oplus (a_2, b_2, a_2-b_2)] \oplus (a_3, b_3, a_3-b_3)$

$= (a_1+a_2-3, b_1b_2, a_1-b_1b_2+a_2-3) \oplus (a_3, b_3, a_3-b_3)$

$= ((a_1+a_2-3)+a_3-3, (b_1b_2)b_3, (a_1+a_2-3)-(b_1b_2)b_3+a_3-3)$

Nótese la aplicación estricta de la definición de la suma

aplicando la propiedad asociativa de la suma y la multiplicación de los reales

$=(a_1+a_2+a_3-6, b_1b_2b_3, a_1+a_2-b_1b_2b_3+a_3-6)$

Por otro lado,

$v \oplus (w \oplus u) = (a_1, b_1, a_1-b_1) \oplus [(a_2, b_2, a_2-b_2) \oplus (a_3, b_3, a_3-b_3)]$

$= (a_1, b_1, a_1-b_1) \oplus (a_2+a_3-3, b_2b_3, a_2-b_2b_3+a_3-3)$

$= (a_1+(a_2+a_3-3)-3, b_1(b_2b_3), a_1-b_1(b2b3)+(a_2+a_3-3)-3)$

aplicando la propiedad asociativa de la suma y la multiplicación de los reales

$=(a_1+a_2+a_3-6, b_1b_2b_3, a_1-b_1b_2b_3+a_2+a_3-6)$ igual a lo obtenido anteriormente

por lo tanto $\mathbf{(v \oplus w) \oplus u = v \oplus (w \oplus u)}$

**$A_4$ $\exists\, \bar{o} \in V\ \forall\ v \in V$ [ $v \oplus \bar{o} = v$ ]**

Debemos definir el elemento **ō** ni **v…**

$\bar{o} \in V \Rightarrow \bar{o} = (a_0, b_0, a_0-b_0)$ donde $a_0 \in \mathbb{R}$ y $b_0 \in \mathbb{R}^+$

$v \in V \Rightarrow \bar{o} = (a, b, a-b)$ donde $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}^+$

Para demostrar que existe el vector neutro, debemos hallarlo; lo hallamos trabajando la conclusión como una ecuación, es decir, despejamos las componentes del vector neutro de la igualdad $v \oplus \bar{o} = v$

$\mathbf{v \oplus \bar{o} = v}$ $\Rightarrow (a, b, a-b) \oplus (a_0, b_0, a_0-b_0) = (a, b, a-b)$

$\Rightarrow (a+a_0-3, bb_0, a-bb_0+a_0-3) = (a, b, a-b)$ obtengo un sistema de ecuaciones..

$$\begin{cases} a+a_0-3 = a \Rightarrow \mathbf{a_0=3} \text{ y } 3 \in \mathbb{R} \\ bb_0 = b \Rightarrow \mathbf{b_0=1} \text{ además } 1 \in \mathbb{R}^+ \\ a-bb_0+a_0-3 = a-b \text{ (se cumple con los valores de } a_0 \text{ y } b_0) \end{cases}$$

por lo tanto **ō existe y es igual a (3, 1, 2)**

Comprobación: $v \oplus \bar{o} = (a,b,a-b) \oplus (3,1,2) = (a+3-3, b1, a-b1+3-3) = (a,b,a-b) = v$

Nota: las componentes del vector neutro deben ser constantes, ya que este es único.

**$A_5$ $\forall\ v \in V\ \exists\ v' \in V$ [ $v \oplus v' = \bar{o}$ ]**

$\mathbf{v'} \in V \Rightarrow \mathbf{v'} = (a', b', a'-b')$ donde $a' \in \mathbb{R}$ y $b' \in \mathbb{R}^+$

Parecido al axioma anterior, debemos hallar a que es igual el inverso aditivo **v’,** con la diferencia que lo elementos de **v’** estarán en función de los elementos de v, ya que para cada v existe un **v’** diferente.

$\mathbf{v \oplus v' = \bar{o}}$ $\Rightarrow (a, b, a-b) \oplus (a', b', a'-b') = (3,1,2)$

$\Rightarrow (a+a'-3, bb', a-bb'+a'-3) = (3,1,2)$ obtengo un sistema de ecuaciones…

$$\begin{cases} a+a'-3 = 3 \Rightarrow \mathbf{a'= 6-a} \text{ y } 3\in\mathbb{R} \\ bb' = 1 \Rightarrow \mathbf{b'=}\dfrac{1}{b} \text{ como } b\in\mathbb{R}^+ \text{ no existe indeterminación (de existirla, el axioma no se cumpliría)} \\ a-bb'+a'-3 = 2 \text{ (se cumple con los valores de a' y b')} \end{cases}$$

por lo tanto **v' existe y es igual a** $\left(\mathbf{6-a}, \dfrac{1}{b}, \mathbf{6-a-}\dfrac{1}{b}\right)$

Comprobación: $\mathbf{v}\oplus\mathbf{v'} = (a,b,a-b)\oplus\left(6-a, \dfrac{1}{b}, 6-a-\dfrac{1}{b}\right) = \left(a+(6-a)-3, b\dfrac{1}{b}, a-b\dfrac{1}{b}+6-a-3\right) = (3,1,2) = \bar{\mathbf{o}}$

**$M_1$ $\forall k\in\mathbb{R}$ $\forall v\in V$ $[k\otimes v\in V]$**

Nuevamente para que $\mathbf{k\otimes v} \in V$, debemos verificar que el vector $\mathbf{k\otimes v}$ cumple todas las condiciones de conjunto V.

$k\otimes v = k\otimes(a,b,a-b)= (ka-3k+3, b^k, k(a-3)- b^k+3)$ verificamos las condiciones…

$ka-3k+3 \in\mathbb{R}$ ya que es la multiplicación de elementos reales

$b^k \in\mathbb{R}^+$ ya que $b\in\mathbb{R}^+$ y $k\in\mathbb{R}$ y un real positivo elevado a cualquier exponente es $\mathbb{R}^+$

$k(a-3)- b^k+3 = ka-3k-b^k$ (desarrollando se verifica que es la resta del 1^er^ elemento con el 2^do^)

por lo tanto $\mathbf{k\otimes v\in V}$

**$M_2$ $\forall k\in\mathbb{R}$ $\forall v,w\in V$ $[k\otimes(v\oplus w) = k\otimes v \oplus k\otimes w]$**

$k\otimes(v\oplus w) = k\otimes[(a_1, b_1, a_1-b_1)\oplus(a_2, b_2, a_2-b_2)]$
$= k\otimes(a_1+a_2-3, b_1b_2, a_1-b_1b_2+a_2-3)$ aplicando la definición de la multiplicación
$= (k(a_1+a_2-3)-3k+3, (b_1b_2)^k, k(a_1+a_2-3)-3k+3-(b_1b_2)^k)$
$=(ka_1+ka_2-3k-3k+3, (b_1b_2)^k, ka_1+ka_2-3k-3k+3-(b_1b_2)^k)$ por otro lado

$k\otimes v \oplus k\otimes w = k\otimes(a_1, b_1, a_1-b_1) \oplus k\otimes(a_2, b_2, a_2-b_2)$
$= (ka_1-3k+3, b_1^k, ka_1-3k+3-b_1^k) \oplus (ka_2-3k+3, b_2^k, ka_2-3k+3-b_2^k)$ Nótese la aplicación estricta
$= (ka_1-3k+3+ ka_2-3k+3-3, b_1^kb_2^k, ka_1-3k+3-b_1^k b_2^k+ ka_2-3k+3-3)$ de la definición de la suma
$=(ka_1+ka_2-6k+3,(b_1b_2)^k, ka_1+ka_2-6k+3-(b_1b_2)^k)$ igual a lo obtenido anteriormente

por lo tanto $\mathbf{k\otimes(v\oplus w) = k\otimes v \oplus k\otimes w}$

**$M_3$ $\forall k,m\in\mathbb{R}$ $\forall v\in V$ $[(k+m)\otimes v = k\otimes v \oplus m\otimes v]$**

$(k+m)\otimes v = (k+m)\otimes(a,b,a-b)$
$= ((k+m)a-3(k+m)+3, b^{k+m}, (k+m)a-3(k+m)+3-b^{k+m})$ desarrollando…
$= (ka+ma-3k-3m+3, b^kb^m, ka+ma-3k-3m+3-b^kb^m)$ por otro lado tenemos…

$k\otimes v \oplus m\otimes v = k\otimes(a,b,a-b) \oplus m\otimes(a,b,a-b)$
$= (ka-3k+3, b^k, k(a-3)- b^k+3) \oplus (ma-3m+3, b^m, m(a-3)- b^m+3)$ Nótese la aplicación estricta
$= ((ka-3k+3)+ (ma-3m+3)-3, b^kb^m, ka-3k+3- b^kb^m+ma-3m+3-3)$ de la definición de la suma
$= (ka+ma-3k-3m+3, b^kb^m, ka+ma-3k-3m+3-b^kb^m)$ igual a lo obtenido anteriormente

por lo tanto $\mathbf{(k+m)\otimes v = k\otimes v \oplus m\otimes v}$

**$M_4$ $\forall$ k,m $\in$ R $\forall$ v $\in$ V [k $\otimes$ (m $\otimes$ v) = (k*m) $\otimes$ v ]**

$k\otimes(m\otimes v)$ $= k\otimes[m\otimes(a, b, a-b)]$
$= k\otimes(ma-3m+3, b^m, m(a-3)- b^m+3)$ aplicando la definición de la multiplicación
$= (k(ma-3m+3)-3k+3, (b^k)^m, k((ma-3m+3)-3k+3-(b^k)^m)$ desarrollando…
$= (kma-3km+3k-3k+3, b^{km}, kma-3km+3k-3k+3-b^{km})$
$= (kma-3km+3, b^{km}, kma-3km+3-b^{km})$

$(km)\otimes v$ $= (km)\otimes(a, b, a-b)$
$= ((km)a-3(km)+3, b^{km}, (km)(a-3)- b^{km}+3)$
$= (kma-3km+3, b^{km}, kma-3km+3-b^{km})$ igual a lo obtenido anteriormente

por lo tanto **k $\otimes$ (m $\otimes$ v)= (km) $\otimes$ v**

**$M_5$ $\forall$ v $\in$ V [1 $\otimes$ v = v ]**

Comprobamos si se cumple..

$1\otimes v = 1\otimes(a, b, a-b) = (1*a -3*1+3, b^1, 1*a -3*1+3-b^1) = (a, b, a-b) = v$ (se cumple)

por lo tanto **1 $\otimes$ v = v**

**Por lo tanto (V; $\oplus$, $\otimes$ ) es un Espacio Vectorial**

**b) 4 $\otimes$ (3, 1, 2) $\oplus$ 2 $\otimes$ (5, 3, 2)= ??**

Lo único que debemos tener en cuenta en este literal es que tenemos que utilizar las operaciones definidas del espacio vectorial dado.

$4\otimes(3, 1, 2) \oplus 2\otimes(5, 3, 2)$ $= (4*3-3*4+3, 1^4, 4*3-3*4+3-1^4) \oplus (2*5-3*2+3, 3^2, 2*5-3*2+3-3^3)$
$= (3, 1, 2) \oplus (7, 9, -2)$
$= (3+7-3, 1*9, 3+7-3-1*9)$
$=$ **(7, 9, -2)**

| | | |
|---|---|---|
| Si observamos, nos daremos cuenta que nos piden: | $4\otimes\bar{o} \oplus 2\otimes(5, 3, 2)$ | utilizar las propiedades y teoremas permite una resolución más rápida, con menos cálculos |
| lo que por la propiedad **$k\otimes\bar{o} = \bar{o}$** es igual a | $\bar{o} \oplus 3\otimes(5, 3, 2)$ | |
| por el cuarto axioma **$v\oplus\bar{o} = \bar{o}$** es igual a | $2\otimes(5, 3, 2)$ | |
| igual a | (7, 9, -2) | |

**Por lo tanto, 4 $\otimes$ (3, 1, 2) $\oplus$ 2 $\otimes$ (5, 3, 2)= (7, 9, -2)**

- **Sean (V; $\oplus$,$\otimes$) y (W; $\Diamond$,$\boxtimes$) dos espacios vectoriales reales. Sea VxW el conjunto formado por el producto cartesiano de V con W junto con las operaciones:**
  **† : (x1, y1)†(x2, y2) = (x1$\oplus$x2, y1$\Diamond$y2) ; x1, x2 $\in$ V y1, y2 $\in$ W**
  **• : k•(x, y) = (k$\otimes$x, k$\boxtimes$y) ; x $\in$ V y $\in$ W k $\in$ R**
  **Determine si (VxW; †, •) es un Espacio Vectorial**

Solo desarrollaremos ciertos axiomas, ya que los demás son de idéntico razonamiento y se los dejamos al lector

**$A_1$ $\forall$ v,w $\in$ VxW [ v†w$\in$VxW ]**

$v\in VxW \Rightarrow v=(x_1, y_1)$ donde $x_1\in V$ y $y_1\in W$
$w\in VxW \Rightarrow w=(x_2, y_2)$ donde $x_2\in V$ y $y_2\in W$
Verificamos las condiciones, en este caso son que el 1[er] elemento pertenezca a V y el 2[do] elemento a W

$v†w = (x_1, y_1)†(x_2, y_2) = (x_1\oplus x_2, y_1\lozenge y_2)$

ya que (V; $\oplus,\otimes$) es un E.V. ($\oplus$ cumple con el axioma de cerradura) entonces: $x_1\oplus x_2\in V$
bajo el mismo razonamiento en W $y_1\lozenge y_2\in W$

por lo tanto **v†w $\in$ VxW**

**$A_2$ $\forall$ v,w $\in$ VxW [ v†w = w†v ]**

$v†w= (x_1, y_1)†(x_2, y_2) = (x_1\oplus x_2, y_1\lozenge y_2)$
$w†v= (x_2, y_2)†(x_1, y_1) = (x_2\oplus x_1, y_2\lozenge y_1) = (x_1\oplus x_2, y_1\lozenge y_2)$

Bajo el razonamiento anterior pero aplicando la conmutatividad de $\oplus$ y $\lozenge$ en V y W respectiv.

por lo tanto **v†w = w†v**

El desarrollo del axioma 3 (asociatividad de la suma) es idéntico al anterior (mismo procedimiento) por ello pasaremos directamente al axioma 4

**$A_4$ $\exists\, \bar{o} \in$ VxW $\forall$ v $\in$ VxW [ v†ō = v ]**

$\bar{o}\in VxW \Rightarrow \bar{o}= (x_0, y_0)$ donde $x_0\in V$ y $y_0\in W$
$v\in VxW \Rightarrow \bar{o}= (x, y)$ donde $x\in V$ y $y\in W$

**v†ō = v** $\Rightarrow (x, y)†(x_0, y_0) = (x, y)$
$\Rightarrow (x\oplus x_0, y\lozenge y_0)= (x, y)$ obteniendo el sistema de ecuaciones…

$x\oplus x_0 = x \Rightarrow x_0= \mathbf{\bar{o}_V}$ que es el vector neutro de V (ya que el único vector que cumple la propiedad: $\exists\, \mathbf{\bar{o}_V}\in V\ \forall x\in V\ x\oplus\mathbf{\bar{o}_V} = x$)
$y\lozenge y_0 = y \Rightarrow y_0= \mathbf{\bar{o}_W}$ que es el vector neutro de W (mismo razonamiento pero en W)

por lo tanto **ō existe y es igual a ($\bar{o}_V$, $\bar{o}_W$)**

Se puede pensar que en este caso el vector neutro no está compuesto por constantes (como se dijo que debe pasar), pero en realidad si esta compuesto por constantes ya que tanto $\bar{o}_V$ como $\bar{o}_W$ están compuestos por constantes.

**$A_5$ $\forall$ v $\in$ VxW $\exists$ v' $\in$ VxW [ v †v'=ō ]**

**v'**$\in VxW \Rightarrow$ **v'**$= (x', y')$ donde $x'\in V$ y $y'\in W$

**v†v' = ō** $\Rightarrow (x, y)†(x', y') = (\mathbf{\bar{o}_V}, \mathbf{\bar{o}_W})$
$\Rightarrow (x\oplus x', y\lozenge y')= (\mathbf{\bar{o}_V}, \mathbf{\bar{o}_W})$ obteniendo el sistema de ecuaciones…

$x\oplus x' = \mathbf{\bar{o}_V} \Rightarrow x'= \mathbf{(-x)}$ que es el inverso aditivo de x (ya que el único vector que cumple la propiedad: $\forall x\in V\ \exists\mathbf{(-x)}\in V\ x\oplus\mathbf{(-x)} = \mathbf{\bar{o}_V}$ )
$y\lozenge y' = \mathbf{\bar{o}_W} \Rightarrow y'= \mathbf{(-y)}$ que es el inverso aditivo de y (mismo razonamiento pero en W)

por lo tanto **v' existe y es igual a (-x, -y)**

**$M_1$ $\forall k \in \mathbb{R}$ $\forall v \in VxW$ $[k \bullet v \in VxW]$**

$k \bullet v = k \bullet (x, y) = (k \otimes x, k \boxtimes y)$ verificamos las condiciones, y se cumple que...

**$k \otimes x \in V$** por la cerradura de la multiplicación por escalar en V

**$k \boxtimes y \in W$** por la cerradura de la multiplicación por escalar en W

por lo tanto **$k \bullet v \in V$**

Los demás axiomas tienen un desarrollo parecido al axioma 2, todos se cumplen (compruebalo)

**Por lo tanto $(V; \oplus, \otimes)$ es un Espacio Vectorial**

- **Sea $V=\{ f: R \rightarrow R \ / \ 1+f(0)=2 \}$ tal que:**
  **$(f \oplus g)(x) = f(x)+g(x)-1$**
  **$(k \otimes f)(x)= kf(x)$ $\quad ,k \in R$**
  **Determine si $(V; \oplus, \otimes)$ es un Espacio Vectorial**

**$A_1$ $\forall f,g \in V$ $[ f \oplus g \in V ]$**

La hipótesis del axioma es que f y g pertenezcan a V, esto es:

$f \in V \Rightarrow 1+f(0)=2$ que es lo mismo que $f(0)=1$

$g \in V \Rightarrow 1+g(0)=2$ que es lo mismo que $g(0)=1$

para que **$f \oplus g \in V$** dicho vector debe cumplir la condición del conjunto V

$f \oplus g \in V \Leftrightarrow 1+(\mathbf{f \oplus g})(0)=2$ equivalente a $(f+g)(0)=1$ empezamos a verificar si cumple la condición:

$$\begin{aligned}(\mathbf{f \oplus g})(0) &= (f(x)+g(x)-1)(0)\\ &= f(0) + g(0) - 1\\ &= 1 + 1 - 1\\ &= 1 \text{ (cumple)}\end{aligned}$$

por lo tanto **$f \oplus g \in V$**

**$A_2$ $\forall f,g \in V$ $[ f \oplus g = g \oplus f ]$**

Desarrollamos $f \oplus g$ y luego $g \oplus f$ para comprobar si son iguales

$(f \oplus g)(x) = f(x)+g(x)-1$

$(g \oplus f)(x) = g(x)+f(x)-1 = f(x)+g(x)-1$ (cumple por la propiedad conmutativa de las funciones)

por lo tanto **$v \oplus w=w \oplus v$**

**$A_3$ $\forall f,g,h \in V$ $[ (f \oplus g) \oplus h = f \oplus (g \oplus h)]$**

$f \in V \Rightarrow h(0)=1$ definimos h

$$\begin{aligned}(f \oplus g) \oplus h &= [f(x)+g(x)-1] \oplus h\\ &= f(x)+g(x)-1 +h(x) -1\\ &= f(x)+g(x)+h(x)-2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f \oplus (g \oplus h) &= f \oplus [g(x)+h(x)-1]\\ &= f(x) + g(x)+h(x)-1 -1\\ &= f(x)+g(x)+h(x)-2 \quad \text{(son iguales)}\end{aligned}$$

por lo tanto **$(f \oplus g) \oplus h = f \oplus (g \oplus h)$**

**$A_4$ $\exists \bar{o} \in V\ \forall\ f \in V\ [\ f \oplus \bar{o} = f\ ]$**

$\bar{o} \in V \Rightarrow \bar{o}(0)=1$

Para demostrar que existe el vector neutro, debemos hallarlo; lo hallamos despejando las componentes del vector neutro de la igualdad $f \oplus \bar{o} = f$

$f \oplus \bar{o} = f \quad \Rightarrow f(x)+\bar{o}(x)-1 = f(x)$

$\Rightarrow \mathbf{\bar{o}(x) = 1}$ (el cero vector es la funcion 1, que cumple la condicion $\bar{o}(0)=1$)

por lo tanto **$\bar{o}$ existe y es igual a 1**

Comprobación: $f \oplus \bar{o} = f(x)+1 -1 = f(x)$

por lo tanto **$f \oplus \bar{o} = f$**

**$A_5$ $\forall f \in V\ \exists\ f' \in V\ [\ f \oplus f'=\bar{o}\ ]$**

$f' \in \mathbf{V} \Rightarrow f'(0)=1$

Parecido al axioma anterior, debemos hallar a que es igual el inverso aditivo **f'**, con la diferencia que lo elementos de **f'** estarán en función de los elementos de f, ya que para cada **f** existe un **f'** diferente.

**$f \oplus f' = \bar{o}$** $\quad \Rightarrow f(x)+f'(x)-1 = 1$

$\Rightarrow \mathbf{f'(x) = 2-f(x)}$ que cumple con $f'(0)= 1$

por lo tanto **f' existe y es igual a 2-f(x)**

Comprobación: $\mathbf{f \oplus f'} = f(x)+(2-f(x))-1 = 1$

**$M_1$ $\forall k \in \mathbb{R}\ \forall f \in V\ [k \otimes f \in V\ ]$**

para que $\mathbf{k \otimes f} \in V$ , debemos verificar que el vector $\mathbf{k \otimes f}$ cumple a condición del conjunto V.

$k \oplus f \in V \Leftrightarrow (\mathbf{k \otimes f})(0)=1$ empezamos a verificar si cumple la condición:

$(\mathbf{k \otimes f})(0) = [k\ f(x)](0)$
$= k\ f(0)$
$= k\ (1)$
$= k$ como k puede tomar cualquier valor real, entonces no cumple la condición

por lo tanto **$k \otimes f \notin V$**

**por lo tanto $(V \oplus \otimes)$ NO es un Espacio Vectorial**

- **Sea V={1,2,3} con la suma $\oplus$ y la multiplicación por escalar $\otimes$ definidas como:**

| $\oplus$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 0 |
| 2 | 2 | 0 | 1 |

**$\forall\ v \in V;\ k \otimes v = v \quad ,k \in \mathbb{R}$**

**Determine si $(V; \oplus , \otimes)$ constituye un Espacio Vectorial**

Este ejercicio es algo diferente a los anteriores, El conjunto V no es infinito como anteriormente, sino que tiene solo tres elementos.


Por: Néstor Montaño 085437820

$\mathbf{A_1}$ $\forall$ **v,w** $\in$ **V [ v** $\oplus$ **w** $\in$ **V ]**

Por simple observación de la tabla dada, se verifica que para todas las sumas su resultado es un elemento de V.

por lo tanto **v** $\oplus$ **w** $\in$ **V**

$\mathbf{A_2}$ $\forall$ **v,w** $\in$ **V [ v** $\oplus$ **w = w** $\oplus$ **v ]**

En general, si la tabla de resultados es simétrica, la operación es conmutativa. Demostrando todos los casos: (no se demostrará cuando v=w, ya que para este caso el cumplimiento del axioma es notorio)

$0\oplus 1 = 1$ y $1\oplus 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad 0\oplus 1 = 1\oplus 0$
$0\oplus 2 = 2$ y $2\oplus 0 = 2 \quad \Rightarrow \quad 0\oplus 2 = 2\oplus 0$
$1\oplus 2 = 0$ y $2\oplus 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 1\oplus 2 = 2\oplus 1$

por lo tanto **v** $\oplus$ **w = w** $\oplus$ **v**

$\mathbf{A_3}$ $\forall$ **v,w,u** $\in$ **V [ (v** $\oplus$ **w)** $\oplus$ **u = v** $\oplus$ **(w** $\oplus$ **u) ]**

Para probar que se cumple, se debe verificar todos los casos (los que se reducen por la propiedad conmutativa antes demostrada):

| v | w | u | (v⊕w) | (v⊕w)⊕u | (w⊕u) | v⊕(w⊕u) | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | **0** | 0 | **0** | *Cumple* |
| 0 | 0 | 1 | 0 | **1** | 1 | **1** | *Cumple* |
| 0 | 0 | 2 | 0 | **2** | 2 | **2** | *Cumple* |
| 0 | 1 | 0 | 1 | **1** | 1 | **1** | *Cumple* |
| 0 | 1 | 1 | 1 | **2** | 2 | **2** | *Cumple* |
| 0 | 1 | 2 | 1 | **0** | 0 | **0** | *Cumple* |
| 0 | 2 | 0 | 2 | **2** | 2 | **2** | *Cumple* |
| 0 | 2 | 1 | 2 | **0** | 0 | **0** | *Cumple* |
| 0 | 2 | 2 | 2 | **1** | 1 | **1** | *Cumple* |
| 1 | 1 | 0 | 2 | **2** | 1 | **2** | *Cumple* |
| 1 | 1 | 1 | 2 | **0** | 2 | **0** | *Cumple* |
| 1 | 1 | 2 | 2 | **1** | 0 | **1** | *Cumple* |
| 1 | 2 | 0 | 0 | **0** | 2 | **0** | *Cumple* |
| 1 | 2 | 1 | 0 | **1** | 0 | **1** | *Cumple* |
| 1 | 2 | 2 | 0 | **2** | 1 | **2** | *Cumple* |
| 2 | 2 | 2 | 1 | **0** | 1 | **0** | *Cumple* |

por lo tanto **(v** $\oplus$ **w)** $\oplus$ **u= v** $\oplus$ **(w** $\oplus$ **u)**

$\mathbf{A_4}$ $\exists$ $\bar{\mathbf{o}}$ $\in$ **V** $\forall$ **v** $\in$ **V [ v** $\oplus$ $\bar{\mathbf{o}}$ **= v ]**

Desarrollaremos la ecuación para cada elemento de V, es decir

$0\oplus \bar{o} = 0 \quad \Rightarrow \bar{o} = 0$
$1\oplus \bar{o} = 1 \quad \Rightarrow \bar{o} = 0$ (como $\bar{o}$ es el mismo para todos se concluye que $\bar{\mathbf{o}}$**=0**)
$2\oplus \bar{o} = 2 \quad \Rightarrow \bar{o} = 0$

por lo tanto $\bar{\mathbf{o}}$ **existe y es igual a 0**

**$A_5$ $\forall v \in V\ \exists\ v' \in V\ [\ v \oplus v' = \bar{o}\ ]$**

Debemos encontrar el inverso de cada elemento de V

| | | |
|---|---|---|
| **$0 \oplus v'=0$** | **$\Rightarrow v'=0$** | el inverso de 0 es 0 |
| **$1 \oplus v'=0$** | **$\Rightarrow v'=2$** | el inverso de 1 es 2 |
| **$2 \oplus v'=0$** | **$\Rightarrow v'=1$** | el inverso de 2 es 1 |

por lo tanto **cada vector de V tiene su inverso**

**$M_1$ $\forall k \in \mathbb{R}\ \forall v \in V\ [k \otimes v \in V\ ]$**

$k \otimes v = v$ y por hipótesis $v \in$ **V**

por lo tanto **$k \otimes v \in V$**

**$M_2$ $\forall k \in \mathbb{R}\ \forall v,w \in V\ [k \otimes (v \oplus w) = k \otimes v \oplus k \otimes w\ ]$**

$k \otimes (v \oplus w\ )$ $= v \oplus w$ aplicando la definición de la multiplicación

$k \otimes v \oplus k \otimes w$ $= v \oplus w$ aplicando la definición de la multiplicación

por lo tanto **$k \otimes (v \oplus w\ ) = k \otimes v \oplus k \otimes w$**

**$M_3$ $\forall k,m \in \mathbb{R}\ \forall v \in V\ [(k+m) \otimes v = k \otimes v \oplus m \otimes v\ ]$**

$(k+m) \otimes v$ $= v$ por la definición de la multiplicación
$k \otimes v \oplus m \otimes v$ $= v \oplus v$ por la definición de la multiplicación
pero, **v** no necesariamente es igual a **$v \oplus v$.** por ejemplo: (v=1)
$1 \oplus 1=2$ entonces $1 \neq 1 \oplus 1$ (no cumple el axioma 3)

por lo tanto **$(k+m) \otimes v \neq k \otimes v \oplus m \otimes v$**

**por lo tanto ($V \oplus \otimes$) NO es un Espacio Vectorial**

***"La soberanía del hombre está oculta en la dimensión de sus conocimientos"***

# SUBESPACIO VECTORIAL

***Definición.-*** *Sea $(V;\oplus\ \otimes)$ un espacio vectorial, sea H subconjunto de V diferente de $\phi$. Si $(H;\oplus\ \otimes)$ es un espacio vectorial, entonces H es un subespacio vectorial de V.*

***Teorema.-*** *Sea $(V;\oplus\ \otimes)$ un espacio vectorial, sea H subconjunto de V diferente de $\phi$. $(H;\oplus\ \otimes)$ es subespacio si cumple:*

$\forall\, v_1,v_2 \in H\ [v_1 \oplus v_2 \in H]$

$\forall\, v \in H\ \forall\, k \in \mathbb{R}\ [k \otimes v \in H]$

**Nota.-** Si en el examen te preguntan la definición de Subespacio **cuidado pones el teorema**; el teorema sólo lo debes utilizar para resolver los ejercicios.

Dos subespacios de cualquier espacio vectorial son:

El conjunto formado por el $\mathbf{0}_V$ y el espacio en sí, es decir:

$S = \{\mathbf{0}_V\}$ y $S = V$ siempre son subespacios vectoriales.

Además todo subespacio contiene al $\mathbf{0}_V$

- **Sea W= {f/f es continua en [0,1] y f(0) = f(1)} con la suma entre funciones y la multiplicación de una función por un escalar convencional. ¿W es un Supespacio Vectorial?**

Debemos determinar si W cumple las dos condiciones que nos indica el teorema

**$A_1$) $\forall\, f,g \in H\ [f+g \in H]$**

La hipótesis del axioma es que **f,g** $\in$ **W**, entonces **f** y **g** cumple las condiciones de conjunto W, es decir:

Si $f \in H \Rightarrow$ f es continua en [0,1] y $f(0) = f(1)$

Si $g \in H \Rightarrow$ g es continua en [0,1] y $g(0) = g(1)$

Para que $f+g \in W$ , debemos verificar que el vector f+g cumple todas las condiciones de conjunto W Esto es:

$f+g \in H \Leftrightarrow$ f+g es continua en [0,1] y $(f+g)(0) = (f+g)(1)$ verificamos si cumple

f+g es continua en [0,1] (cumple, ya que la suma de dos funciones continuas es una función continua)

$(f+g)(0)= f(0) + g(0)$ por hipótesis

$= f(1) + g(1) = (f+g)(1)$ (cumple)

Por lo tanto **f+g** $\in$ **H**

**$A_2$) $\forall\, f \in H\ \forall\, k \in \mathbb{R}\ [kf \in H]$**

Para que **kf** $\in$ W , debemos verificar que el vector **kf** cumple las condiciones de conjunto W, es decir:

$kf \in H \Leftrightarrow$ kf es continua en [0,1] y $(kf)(0) = (kf)(1)$ verificamos si cumple

kf es continua en [0,1] (cumple)

$(kf)(0) = kf(0)$ por hipótesis

$= kf(1) = (kf)(1)$ (cumple)

Por lo tanto **kf** $\in$ **H**

**Por lo tanto W es un Subespacio Vetorial**

❖ **Sea V= $\mathbb{R}^3$ con las operaciones:**

$$(x_1, y_1, z_1) \oplus (x_2, y_2, z_2) = (x_1+x_2-1 , y_1+y_2 , z_1+z_2+1)$$

$$k \otimes (x, y, z) = (kx-k+1 , ky , kz+k-1) ,k\in\mathbb{R}$$

**Considere los subconjuntos de V: $W_1,W_2,W_3$ tales que:**

**$W_1=\{(x, y, z)/ 2x-3y+z=0\}$**

**$W_2=\{(x, y, z)/ x+2y+z=0 \}$**

**$W_3=\{(x, y, z)/ 2x+2y-z=0\}$**

**Cuál(es) de los subconjuntos mencionados son Subespacio de V**

**$W_1=\{(x, y, z)/ 2x-3y+z=0\}$**

**$A_1$ $\forall$ v,w $\in W_1$ [ v$\oplus$w $\in W_1$]**

Hipótesis:

$v\in W_1 \Rightarrow v=(x_1, y_1, z_1) /2x_1-3y_1+z_1=0$

$w\in W_1 \Rightarrow w=(x_2, y_2, z_2) /2x_2-3y_2+z_2=0$

Debemos verificar si $v\oplus w\in W_1$

$v\oplus w = (x_1, y_1, z_1) \oplus (x_2, y_2, z_2) = (x_1+x_2-1 , y_1+y_2 , z_1+z_2+1)$ por la definición de suma $\oplus$

entonces, debemos probar si: $2(x_1+ x_2-1)-3(y_1+ y_2)+(z_1+ z_2+1)=0$

$2(x_1+ x_2-1)-3(y_1+ y_2)+(z_1+ z_2+1) = 2x_1+ 2x_2-2-3y_1-3y_2+z_1+ z_2+1$ agrupando…

$= 2x_1-3y_1+z_1 + 2x_2-3y_2+z_2 -1$ por hipótesis

$= 0 + 0 – 1 = -1 \neq 0$ (NO cumple)

Por lo tanto **$v\oplus w\notin W_1$**

**($W_1$;$\oplus$ $\otimes$ ) no es un Subespacio Vectorial de (V;$\oplus$ $\otimes$)**

**$W_2=\{(x, y, z)/ x+2y+z=0\}$**

**$A_1$ $\forall$ v,w $\in$ W [ v$\oplus$w $\in W_2$]**

Hipótesis:

$v\in W_2 \Rightarrow v=(x_1, y_1, z_1) /x_1+2y_1+z_1=0$

$w\in W_2 \Rightarrow w=(x_2, y_2, z_2) /x_2+2y_2+z_2=0$

Debemos verificar si $v\oplus w\in W_2$

$v\oplus w = (x_1, y_1, z_1) \oplus (x_2, y_2, z_2) = (x_1+x_2-1 , y_1+y_2 , z_1+z_2+1)$ por la definición de suma $\oplus$

entonces, debemos probar si: $(x_1+ x_2-1)+2(y_1+ y_2)+(z_1+ z_2+1)=0$

$(x_1+ x_2-1)+2(y_1+ y_2)+(z_1+ z_2+1) = x_1+x_2-1 + 2y_1+2y_2 + z_1+ z_2+1$ agrupando…

$= x_1+2y_1+z_1 + x_2+2y_2+z_2 -1+1$ por hipótesis

$= 0 + 0 = 0$ (Cumple)

Por lo tanto **$v\oplus w\in W_2$**

**$M_1$ $\forall k\in\mathbb{R}$ $\forall v\in W_2$ [$k\otimes v\in W_2$ ]**

$k\otimes v = k\otimes(x_1, y_1, z_1) = (kx_1-k+1 , ky_1 , kz_1+k-1)$ por definición de multiplicación x escalar $\otimes$

entonces, debemos probar si: $(kx_1-k+1)+2(ky_1)+(kz_1+k-1)=0$

$(kx_1-k+1)+2(ky_1)+(kz_1+k-1) = kx_1-k+1+2ky_1+kz_1+k-1$ agrupando…

$= k(x_1+2y_1kz_1)-k+k+1-1$ por hipótesis

$=0$ (cumple)

Por lo tanto **$k\otimes v\in W_2$**

**($W_2$;$\oplus$ $\otimes$ ) es un Subespacio Vectorial de (V;$\oplus$ $\otimes$)**

**$W_3=\{(x, y, z)/\ 2x+2y-z=0\}$**

**$A_1$ $\forall$ v,w $\in W_3$ [ v$\oplus$w $\in W_3$]**

Hipótesis:
$v\in W_3 \Rightarrow v=(x_1, y_1, z_1)\ /2x_1+2y_1-z_1=0$
$w\in W_3 \Rightarrow w=(x_2, y_2, z_2)\ /2x_2+2y_2-z_2=0$
Debemos verificar si $v\oplus w\in W_1$

$v\oplus w = (x_1, y_1, z_1) \oplus (x_2, y_2, z_2) = (x_1+x_2-1\ ,\ y_1+y_2\ ,\ z_1+z_2+1)$ por la definición de suma $\oplus$

entonces, debemos probar si: $2(x_1+ x_2-1)+2(y_1+ y_2)-(z_1+ z_2+1)=0$

$2(x_1+ x_2-1)+2(y_1+ y_2)-(z_1+ z_2+1) = 2x_1+ 2x_2-2+2y_1+2y_2-z_1- z_2-1$ agrupando…
$= 2x_1+2y_1+z_1 + 2x_2+2y_2+z_2\ -2-1$ por hipótesis
$= 0 + 0 - 3 = -3 \neq 0$ (NO cumple)

Por lo tanto **$v\oplus w\notin W_3$**

**($W_3$; $\oplus$ $\otimes$) no es un Subespacio Vectorial de (V; $\oplus$ $\otimes$)**

- **Sea $V=\{f(x)\ /\ f(x)\in C[a,b]\}$ es decir las funciones continuas en el intervalo [a,b]; con la suma y la multiplicación por escalar convencionales. Sea $W=\{f(x)/\ f(x+a)= f(x-b)\}$ Determine si W es un Subespacio Vectorial.**

**$A_1$ $\forall$ f,g $\in$ W [ f+g$\in$W ]**

La hipótesis del axioma es que f y g pertenezcan a W, esto es:
$f \in W \Rightarrow f(x+a)= f(x-b)$
$g\in W \Rightarrow g(x+a)= g(x-b)$
**$f+g\in W \Leftrightarrow (f+g)(x+a) = (f+g)(x-b)$,** comprobando si cumple

$(f+g)(x+a) = f(x+a) +g(x+a)$
$= f(x-b) + g(x-b)$
$= (f+g)(x-b)$ (cumple)

Por lo tanto **f+g $\in$ W**

**$M_1$ $\forall$ k$\in\mathbb{R}$ $\forall$ f$\in$W [kf$\in$W]**

**$kf\in W \Leftrightarrow (kf)(x+a) = (kf)(x-b)$,** comprobando si cumple

$(kf)(x+a) = k\ f(x+a)$
$= k\ f(x-b)$
$= (kf)(x-b)$ (cumple)

Por lo tanto **kf$\in$W**

**W es Subespacio Vectorial de V**

*"Por la ignorancia se desciende a la servidumbre, por la educación se asciende a la libertad"*

# CONJUNTO GENERADOR Y ESPACIO GENERADO

***Combinación Lineal.-*** *Sea V un espacio Vectorial. Sean* $v_1, v_2, \ldots v_n$ *V y* $a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbb{R}$ *. Cualquier expresión de la forma* $a_1v_1+a_2v_2+\ldots a_nv_n$ *es una combinación lineal de los vectores* $v_1, v_2, \ldots v_n$.

Además cualquier vector que sea igual a $a_1v_1+a_2v_2+\ldots a_nv_n$ es una combinación lineal de $v_1, v_2, \ldots v_n$

**Sea el conjunto U={1, x}.**

**8+5x es combinación lineal de U**

Para que 8+5x sea combinación lineal de U, debe cumplirse $8+5x = a(1) + b(x)$ ; $a,b\in\mathbb{R}$

Se puede ver que $8+5x = 8(1) + 5(x) \Rightarrow$ 8+5x si es combinación lineal de U

**$3+x^2$ es combinación lineal de U**

Para que $3+x^2$ sea combinación lineal de U, debe cumplirse $3+x^2 = a(1) + b(x)$ ; $a,b\in\mathbb{R}$

Se puede ver que $3+x^2 = 3(1) + x(x)$ , es decir a=3 y b=x; pero $x\notin\mathbb{R}$ es decir, no existen escalares que cumplan la igualdad $\Rightarrow$ $3+x^2$ NO es combinación lineal de U

**0 es combinación lineal de U**

Para que 0 sea combinación lineal de U, debe cumplirse $0 = a(1) + b(x)$ ; $a,b\in\mathbb{R}$

Se puede ver que $0 = 0(1) + 0(x) \Rightarrow$ 0 si es combinación lineal de U

***Conjunto Generador.-*** *Sea V un espacio Vectorial, sea* $S=\{v_1, v_2, \ldots v_n\}\in V$*. Se dice que S es un* *conjunto generador* *de V (S genera a V) si y solo si todo vector de v se puede expresar como combinación lineal de los n vectores.*

***V= gen { S } (V= gen {*** $v_1, v_2, \ldots v_n$ ***})*** $\Leftrightarrow \forall v\in V,\ v= a_1v_1+a_2v_2+\ldots a_nv_n ;\ a_i\in\mathbb{R}\ i=1,2,\ldots n$

*V es el* *Espacio Generado* *por S*

## ❖ Determine si {(1,1), (2,1), (3,4)} genera a $\mathbb{R}^2$.

Debemos determinar si $\mathbb{R}^2$= gen{(1,1), (2,1), (3,4)}. Por definición tenemos…

$$\mathbb{R}^2= gen\{(1,1), (2,1), (3,4)\} \Leftrightarrow \forall v\in\mathbb{R}^2 ,\ v= a(1,1)+ b(2,1) +c(3,4) ;\ a,b,c\in\mathbb{R}$$

Debemos verificar si se cumple que $\forall v\in\mathbb{R}^2$ , $v= a(1,1)+ b(2,1) +c(3,4)$ ; $a,b,c\in\mathbb{R}$ (es decir que existen escalares que posibiliten dicha combinación lineal)

$v\in\mathbb{R}^2 \Rightarrow v= (x, y)$ vector genérico o típico de $\mathbb{R}^2$

$(x, y) = a(1,1)+ b(2,1) +c(3,4)$ multiplicando y sumando

$(x, y) = (a+2b+3c , a+b+4c)$ de donde resulta el siguiente sistema de ecuaciones

$x = a+2b+3c$

$y = a+b+4c$

Recordemos que queremos saber si existen los escalares a,b,c que hagan posible la combinación; esto es, que el sistema tenga solución, por lo que debemos hallar a,b,c en función de x,y ; .Como hay 2 ecuaciones y 3 incógnitas, entonces debemos dejar una como variable libre, escogemos la **c** como variable libre. Resolviendo el sistema nos queda:

$a=2y - x - 5c$

$b= x - y + c \qquad c\in\mathbb{R}$ el sistema tiene solución (infinitas)

esto quiere decir que cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ se puede expresar como combinación lineal de {(1,1),(2,1),(3,4)}

por lo tanto **$\mathbb{R}^2$= gen{(1,1), (2,1), (3,4)}**

## ❖ Determine si {1+2x , 1+6x} genera a $P_1$

$$P_1 = \text{gen}\{1+2x, 1+6x\} \Leftrightarrow \forall\, p(x)\in P_1,\ v= c_1(1+2x)+ c_2(1+6x)\ ;\ c_1,c_2\in \mathbb{R}$$

$p(x)\in P_1 \Rightarrow p(x) = a+bx$ vector típico de $P_1$

$a+bx = c_1(1+2x)+ c_2(1+6x)$ multiplicando, sumando y agrupando

$a+bx = (c_1+c_2) + (2c_1+6c_2)x$ de donde resulta el siguiente sistema de ecuaciones

$a = c_1+c_2$

$b = 2c_1+6c_2$ debemos hallar $c_1$ y $c_2$ resultando..

$$c_1 = \frac{3}{2}a - \frac{1}{4}b$$

$$c_2 = \frac{1}{4}b - \frac{1}{2}a$$

como existe solución, **$P_1$ = gen {1+2x, 1+6x}**

## ❖ Determine si {(3, 1) , (9, 3)} genera a $\mathbb{R}^2$

$$\mathbb{R}^2= \text{gen}\{(3,1), (9, 3)\} \Leftrightarrow \forall\, v\in \mathbb{R}^2,\ v= a(3,1)+ b(9, 3);\ a,b\in \mathbb{R}$$

$v\in \mathbb{R}^2 \Rightarrow v= (x, y)$ vector genérico o típico de $\mathbb{R}^2$

$(x, y) = a(3, 1)+ b(9, 3)$ multiplicando y sumando

$(x, y) = (3a+9b , a+3b)$ de donde resulta el siguiente sistema de ecuaciones

$x = 3a+9b$

$y = a+3b$ de donde no se puede obtener a y b en función de x,y

por lo tanto **$\mathbb{R}^2 \neq$ gen{(3,1), (9, 3)}**

## ❖ Qué Espacio Genera {(3,1), (9, 3)}

Llamaremos V al espacio generado. Entonces V= gen {(3,1), (9, 3)} lo que significa..

$$V= \text{gen}\{(3,1), (9, 3)\} \Leftrightarrow V= \{v \,/\, v= a(3,1)+ b(9, 3);\ a,b\in \mathbb{R}\}$$

$v=(x, y)$ tal que $(x, y) = a(3,1)+ b(9, 3)$ desarrollando como el ejercicio anterior llegamos a..

$x = 3a+9b$ recordemos que ya no queremos hallar a,b sino x,y

$y = a+3b$ de donde se obtiene que **$x= 3y$** entonces…

$v= (x, y) / x=3y$ reemplazando tenemos que **$v=(3y , y)$** obteniendo al final…

$$\mathbf{V=\{(3y, y) \,/\, y\in \mathbb{R}\}}$$

***Independencia Lineal.-*** *Sea V un espacio Vectorial, sea $\{v_1, v_2, \dots v_n\}\in V$ Se dice que $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$ es un* *<u>conjunto linealmente independiente</u> si y solo si*

$$a_1v_1+a_2v_2+\dots a_nv_n = 0_V \Leftrightarrow a_i=0,\ i=1,2,\dots n$$

*esto es, que la única solución a la ecuación $a_1v_1+a_2v_2+\dots a_nv_n = 0_V$ sea que todos los escalares sean igual a cero*

*Si el conjunto no es linealmente independiente entonces es <u>linealmente dependiente</u>*

Que los escalares sean cero siempre es solución, lo importante es que sea la única solución

$0v_1+0v_2+\dots+0v_n= 0_V+0_V+\dots+0_V = 0_V$

esto demuestra que $a_i=0,\ i=1,2,\dots n$ siempre es solución, sean linealmente independiente o no

Si en algún conjunto existe el $0_V$, dicho conjunto es linealmente dependiente, es decir:

$\{0_V\}$ es linealmente dependiente

$\{v_1, v_2, \dots, v_k, 0_V\}$ es linealmente dependiente

### ❖ Determine si el conjunto $\{2+x, 3+2x-x^2\}$ es linealmente independiente en $P_2$

$\{2+x , 3+2x-x^2\}$ es linealmente independiente $\Leftrightarrow$

$$a(2+x) + b(3+2x-x^2) = 0 \Leftrightarrow a=b=0$$

hallamos la solución para la ecuación $a(2+x) + b(3+2x-x^2) = 0$
$a(2+x) + b(3+2x-x^2) = 0$
$2a+3b + (a+2b)x - bx^2 = 0$ queda el sistema..

$$\begin{cases} 2a+3b = 0 \\ a+2b = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow a=0 \text{ y } b=0 \quad \text{(no existe otra solución)}$$

por lo tanto **$\{2+x , 3+2x-x^2\}$ es linealmente independiente en $P_2$**

***Si tenemos $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y existe un $v_k$ / $v_k= a_1v_1+a_2v_2+\ldots+a_{k-1}v_{k-1}+a_{k+1}v_{k+1}+\ldots+ a_nv_n$ entonces el conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es linealmente dependiente. Es decir, Si existe algún vector que es combinación lineal de los otros, entonces ese conjunto es linealmente dependiente***

### ❖ Determine si el conjunto $\{x^2, 1+x, 3+3x-x^2\}$ es linealmente independiente en $P_2$

Podemos ver que $3+3x-x^2 = 3 (1+x) + (-1)x^2$ entonces el conjunto es linealmente dependiente.
Demostrando formalmente:
$\{x^2, 1+x, 3+3x-x^2\}$ es linealmente independiente en $P_2 \Leftrightarrow$

$$a(x^2) +b(1+x)+ c(3+3x-x^2) = 0 \Leftrightarrow a=b=c=0$$

$b+3c + (b+3c)x + (a-c)x^2 = 0$ resulta el sistema de ecuaciones:

$b+3c =0$
$b+3c =0$ la ecuación 1 y 2 son equivalentes
$a-c =0$ tendríamos 2 ecuaciones y 3 incógnitas, escogemos a **c** como variable libre, obteniendo **$a= c$**

**$b= -3c$** **$,c\in\mathbb{R}$** infinitas soluciones, por lo tanto es **linealmente dependiente**

### ❖ Sea $B= \{sen^2(x), cos^2(x), 5\}$. ¿Es B linealmente independiente?

Podemos ver que $5 = (5)sen^2(x) + (5)cos^2(x)$ recordando que $sen^2(x)+cos^2(x)=1$

El conjunto es **linealmente dependiente**

### ❖ Sea $\{v_1, v_2, v_3\}$ un conjunto linealmente independiente. Determine si el conjunto $\{v_1+v_3, v_2+v_1, v_3\}$ es linealmente independiente

Nuestra hipótesis nos dice que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es linealmente independiente, esto es que

$$av_1+ bv_2+ cv_3 = 0_V \Leftrightarrow a=b=c=0$$

Debemos comprobar si

$a(v_1+v_3)+b(v_2+v_1)+cv_3 = 0_V \Leftrightarrow a=b=c=0$ desarrollando y agrupando en función de $\mathbf{v_i}$
$(a+b)v_1 + (b)v_2 + (a+c)v_3 = 0v_1+ 0v_2+ 0v_3$ por la hipótesis $\{v_1, v_2, v_3\}$ es LI

$$\begin{cases} a+b =0 \Rightarrow a=0 \\ b =0 \Rightarrow b=0 \\ a+c =0 \Rightarrow c=0 \end{cases} \quad \text{(única solución es que los escalares sean cero)}$$

por lo tanto el conjunto es **Linealmente Independiente**

***Th: Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es L.I. entonces cualquier subconjunto de $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es L.I.***
***Th: Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es L.D. y $\{ w_1,w_2, \ldots,w_k\}\in V$ entonces $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, w_1,w_2, \ldots,w_k\}$ es L.D..***

***Base de un Espacio Vectorial.-*** *Sea V un Espacio Vectorial, sean $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \in V$. Se dice que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una Base de V si y solo si:*

*$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es un conjunto Generador de V*

*$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es un conjunto Linealmente Independiente*

***Dimensión de un Espacio Vectorial.-*** *Sea V un espacio vectorial, sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V. Se define como la dimensión de V al número de vectores que tiene la base de V.*

Si $V=\{0_V\}$ entonces V no tiene base (ya que el $0_V$ es siempre Linealmente Dependiente) y su dimensión es 0

A continuación las Bases Canónicas para varios Espacios Vectoriales con las operaciones convencionales:

| **E.V** | | **Base** |
|---|---|---|
| $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}=\{x\} \Rightarrow \mathbb{R}=\{x(1)/\ x\in\mathbb{R}\} \Rightarrow \mathbb{R}=\text{gen}\{1\}$ y $\{1\}$ es L.I. | **B={1}** |
| $\mathbb{R}^2$ | $\mathbb{R}^2=\{(x, y)\} \Rightarrow \mathbb{R}^2=\{x(1, 0)+y(0, 1)\} \Rightarrow \mathbb{R}^2=\text{gen}\ \{(1, 0),(0, 1)\}$ y $\{(1,0)\ (0,1)\}$ es LI | **B={(1,0) (0,1)}** |
| $P_1$ | $P_1=\{ax+b\} \Rightarrow P_1=\{a(x)+b(1)\} \Rightarrow P_1=\text{gen}\{x,1\}$ y $\{x,1\}$ es L.I | **B={x,1}** |
| $S_{2x2}$ | $S_{2x2}=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow S_{2x2}=\left\{a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}\ldots$ | $B=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ |
| $M_{2x2}$ | $M_{2x2}=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow M_{2x2}=\left\{a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ldots\right\}\ldots$ | $B=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ |

Por lo tanto las dimensión de:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{R}$ es **1** | $P_1$ es **2** | $M_{2x2}$ es **4** | $S_{2x2}$ es **3** |
| $\mathbb{R}^2$ es **2** | $P_2$ es **3** | $M_{2x3}$ es **6** | $S_{3x3}$ es **6** |
| ... | | | |
| $\mathbb{R}^n$ es **n** | $P_n$ es **n+1** | $M_{mxn}$ es **m*n** | $S_{nxn}$ es $\frac{n(n+1)}{2}$ |

**Teoremas:**

****Sea V un Espacio Vectorial de dimensión n, Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}\in V\ldots$***
***Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es un Conjunto Generador de V $\Rightarrow$ $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base de V***
***Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es un Conjunto Linealmente Independiente $\Rightarrow$ $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base de V***

Es decir, si tenemos un conjunto de n vectores en un espacio de dimensión n, solo basta demostrar que es generador o que es linealmente independiente para demostrar que es una Base

**** Sea V un Espacio Vectorial de dimensión n. Sea $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}\in V$. Si m>n entonces $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ es L.D.***
**** Sea V un Espacio Vectorial. H es un subespacio de V $\Rightarrow$ dim H < dim V***
**** Si V= gen $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ $\Rightarrow$ dimV $\leq$ n***
*** Sea V un Espacio Vectorial, sea** ***$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un conjunto L.I. $\Rightarrow$ dim V $\geq$ n***

## ❖ Que valores de k permiten que el conjunto {(-1, k, -1), (k, -1, -1), (-1, 1, k)} sea una base para $\mathbb{R}^3$

Por el teorema mencionado anteriormente, basta demostrar que el conjunto es L.I. Es decir debemos hallar los valores de k para que el conjunto sea L.I.

{(-1, k, -1), (k, -1, 1), (-1, -1, k)} es LI si y solo si

$$a(-1, k, -1) + b(k, 1, -1) + c(-1, -1, k) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow a=b=c=0$$

(-a+bk-c, ak-b+c, -a-b+ck) = (0,0,0)

$$\begin{aligned} -a+bk-c &= 0 \\ ak-b-c &= 0 \\ -a+b+ck &= 0 \end{aligned}$$

lo que es un sistema homogéneo de la forma Ax=0 que se resuelve con la matriz aumentada A|0. Si det $A \neq 0$ el sistema tiene única solución que es la trivial (a=b=c=0) así que vamos a hallar los valores de k que hacen el det A=0.

$$\det\begin{pmatrix} -1 & k & -1 \\ k & -1 & -1 \\ -1 & 1 & k \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ (-1)(-k+1)-k($k^2$-1)+(-1)(-k+1)=0 $\qquad$ $k^2-1 = (k+1)(k-1)$

$\Rightarrow$ 2(k-1)-k(k-1)(k+1)=0 $\qquad$ factor común (k-1)

$\Rightarrow$ (k-1)(2-k(k+1))=0 $\quad \Rightarrow$ (k-1)($-k^2$-k+2) =0

$\Rightarrow$ (k-1)($k^2$+k-2)=0 $\quad \Rightarrow$ (k-1)(k+2)(k-1)=0

$\Rightarrow$ **k = 1** $\qquad$ **k = -2**

**Por lo tanto $k \in \mathbb{R}$-{-2 , 1} (k puede tomar cualquier valor Real excepto 1 y -2)**

## ❖ Sea V= gen{2, 3sen(x)cos(x), cos(2x)-1, sen(2x)+1, $\cos^2(x)$, $\text{sen}^2(x)$} Halle una base de V

Por identidades trigonométricas sabemos:

cos(2x)=$\cos^2$(x)-$\text{sen}^2$(x) $\Rightarrow$ cos(2x)-1= $\cos^2$(x)-$\text{sen}^2$(x) –($\cos^2$(x)+$\text{sen}^2$(x)) $\Rightarrow$ cos(2x)-1= 2$\text{sen}^2$(x)

1=$\text{sen}^2$(x)+$\cos^2$(x) $\qquad \Rightarrow \cos^2(x) = 1-\text{sen}^2(x) \Rightarrow \cos^2(x) = 1-\frac{1}{2}[\cos(2x)-1]$

sen(2x)=2sen(x)cos(x) $\quad \Rightarrow$ 3sen(x)cos(x) = $\frac{3}{2}$ sen(2x)

Simplificamos el conjunto dado (es decir eliminamos los vectores LD que podamos, preferiblemente los que al derivar se hagan una expresión extensa). Como se cumple que:

3sen(x)cos(x)= $-\frac{3}{4}$ [2] +0[cos(2x)-1] $+\frac{3}{2}$ [sen(2x)+1] +0[$\cos^2$(x)] +0[$\text{sen}^2$(x)] $\Rightarrow$ 3sen(x)cos(x) es LD

$\text{sen}^2$(x)= 0[2]+ 0[3sen(x)cos(x)] $+\frac{1}{2}$ [cos(2x)-1] +0[sen(2x)+1] +0[$\cos^2$(x)] $\Rightarrow$ $\text{sen}^2$(x) es LD

$\cos^2$(x)= $\frac{1}{2}$ [2]+ 0[3sen(x)cos(x)] $-\frac{1}{2}$ [cos(2x)-1] +0[sen(2x)+1] +0[$\text{sen}^2$(x)] $\Rightarrow$ $\cos^2$(x) es LD

Nótese que vectores hemos dejado con coeficiente diferente de cero (los que declaramos como LD deben tener siempre coeficiente cero para poderlos simplificar, ya que si no tienen coeficiente cero pertenecerian al conjunto simplificado). Por lo tanto decimos que {2, cos(2x)-1, sen(2x)+1} generan a los demás vectores y probaremos si es LI

Para determinar si el conjunto es L.I. utilizamos el Wroskiano

**Wroskiano: Sean las funciones {$f_1$(x), $f_2$(x), …, $f_n$(x)}. Dicho conjunto es Linealmente Independiente si W($f_1$, $f_2$,…, $f_n$) $\neq$ 0**

$$\mathbf{W(f_1, f_2,\dots, f_n) = \det} \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^n & f_2^n & \cdots & f_n^n \end{vmatrix}$$

En el ejercicio seria:

$$\begin{vmatrix} 2 & \cos(2x)-1 & \text{sen}(2x)+1 \\ 0 & -2\text{sen}(2x) & 2\cos(2x) \\ 0 & -4\cos(2x) & -4\text{sen}(2x) \end{vmatrix} = 2[8\text{sen}^2(2x)+8\cos^2(2x)] = 16(\text{sen}^2(2x)+\cos^2(2x)) = 16 \neq 0$$

**Por lo tanto una base de V es {2, cos(2x)-1, sen(2x)+1}**

## Considere el siguiente espacio vectorial:

**$V=\{(x, y, z)\}\in\mathbb{R}^3/\ x=1\}$**
**$(x_1, y_1, z_1)\oplus(x_2, y_2, z_2) = (x_1x_2, y_1+y_2-2, z_1+z_2)$**
**$k\bullet(x, y, z) = (x^k, -2k+ky+2, kz)$**
**a) Determine si $\{(1, 0, 0), (1, 4, 0)\}$ es linealmente independiente en V**
**b) Determine si $H=\{(x, y, z)\in V/\ z+y-2=0\}$ es un subespacio de V**
**c) Determine una base y la dimensión de V**

Debemos tener muy en cuenta que estamos trabajando con un espacio con operaciones definidas.
$V=\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3/\ x=1\}$ reemplazando la condición el el vector típico de $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ **$V=\{(1, y, z)\ /y,z\in\mathbb{R}\}$**

**a) $\{(1, 0, 0), (1, 4, 0)\}$ es l.i.??**

Para que $\{(1, 0, 0), (1, 4, 0)\}$ sea linealmente independiente en V se debe cumplir
$a\bullet(1, 0, 0) \oplus b\bullet(1, 4, 0) = 0_V \Leftrightarrow a=b=0$ recordemos que estamos con operaciones definidas, por lo que el $0_V$ no es necesariamente $(0, 0, 0)$. El $0_V$ debemos hallarlo utilizando el teorema **$0\bullet v=0_V$**
$0_V= 0\bullet(1, y, z) = (1, -2(0)+0y+2, 0z) \Rightarrow$ **$0_V = (1 , 2, 0)$**
$(1, -2a+a(0)+2, (a)0) \oplus (1, -2b+ b(4)+2, (b)0) = (1, 2, 0)$ aplicando las definiciones dadas
$(1, -2a+2, 0)\oplus(1, 2b+2, 0) = (1, 2, 0)$
$(1 , -2a+2+2b+2-2, 0) = (1, 2, 0)$ resulta el siguiente sistema de ecuaciones:
$1=1$ (verdadero)
$-2a+2+2b=2 \Rightarrow$ **$a = b$** por lo tanto existen infinitas soluciones
$0=0$ (verdadero)

Por lo tanto **$\{(1, 0, 0), (1, 4, 0)\}$ NO es linealmente independiente en V**

Otra forma de resolver este literal es aplicar el teorema **$\{v_1, v_2\}$ es LD $\Leftrightarrow v_1= k\bullet v_2$**
Verificamos si existe un **k** que cumpla la condición, si no existe $\Rightarrow$ es LI
$(1, 4, 0) = k\bullet(1, 0, 0)$
$(1, 4, 0) = (1, -2k+2, 0)$ se ve que con $k= -1$ se cumple la ecuación, $(1, 4, 0)= -1(1, 0, 0)$
Por lo tanto **$\{(1, 0, 0), (1, 4, 0)\}$ NO es linealmente independiente en V**

**b) $H=\{(x, y, z)\in V/\ z+y-2=0\}$ es un subespacio de V??**

$H=\{(x, y, z)\in$ **$V/\ z+y-2=0\}$** $\Rightarrow H=\{(1, y, z)\ /\ z=2-y\} \Rightarrow$ **$H=\{(1, y, 2-y)\ y\in\mathbb{R}\}$**
H es subespacio si cumple con los axiomas de Cerraduras con las operaciones definidas en V

**$A_1\ \forall\, v,w\in H\ [\, v\oplus w\in H\,]$**
$v\in H \Rightarrow v = (1, x, 2-x)$
$w\in H \Rightarrow w = (1, y, 2-y)$
$v\oplus w = (1, x, 2-x)\oplus(1, y, 2-y) = (1, x+y-2, 2-x+2-y) = (1, x+y-2, 2-(x+y-2))$ cumple la forma de los vectores de H **$v\oplus w\in H$**

**$M_1\ \forall\, k\in\mathbb{R}\ \forall\, v\in H\ [k\bullet v\in H\,]$**
$k\bullet v = k\bullet(1, x, 2-x) = (1, -2k+kx+2, k(2-x)) = (1, k(x-2)+2, 2-(k(x-2)+2))$ cumple la forma de los vectores de H **$k\bullet v\in H$**

**Por lo tanto H es un subespacio de V**

**Otra forma de resolver el $2^{do}$ literal es:**

$H=\{(1, y, z) / z+y-2=0\}$

**$A_1$ $\forall$ v,w $\in$ H [ v$\oplus$w$\in$H ]**

$v\in H \Rightarrow v = (1, a, b)/ a+b-2=0$ (hipótesis del axioma)

$w\in H \Rightarrow w = (1, c, d)/c+d-2=0$ (hipótesis del axioma)

$v\oplus w = (1, a, b)\oplus(1, c, d) = (1, a+c-2, b+d)$

debe cumplirse: $(a+c-2)+(b+d)-2=0$ reordenando (para utilizar las hipótesis)

$a+b-2 + c+d-2 = 0+0 = 0$ (se cumple) Por lo tanto **$v\oplus w\in H$**

De manera similar se resuelve el $M_1$

**c) $B_V$ = ?? y dim V=??**

**V={(1, y, z)}**

El mismo procedimiento que aplicamos anteriormente para hallar las bases canónicas lo aplicaremos en este literal, solo que ahora tenemos operaciones definidas. Dividimos el vector típico como la suma de dos vectores (1 por cada variable) el $1^{er}$ vector debe tener las componentes de $0_V$ en la posición 1 y 3, en la posición 2 tendrá una combinación de la variable **y** de tal manera que la pueda luego expresar como la multiplicación de **y** por un vector, nos queda: **(1, y+2, 0) = y$\bullet$(1, 1, 0)**. El $2^{do}$ vector tendrá a las componentes del $0_V$ en las posición 1 y 2, y una combinación de **z** en la posición 3 talque se pueda luego expresar como la multiplicación de **z** por otro vector, nos queda: **(1, 0, z)= z$\bullet$(1, 2, 1).** Al sumarse los dos vectores hallados debe dar el vector típico de V. La resolución formal es:

$(1, y, z) = (1, y+2, 0) \oplus (1, 0, z)$

$(1, y, z) = y(1, 1, 0) \oplus z(1, 2, 1)$ lo que significa que cualquier vector de V puede ser expresado como combinación de $\{(1, 1, 0) (1, 2, 1)\}$, es decir:

$V=$ gen $\{(1, 1, 0) (1, 2, 1)\}$ hemos hallado un conjunto generador de V y se puede demostrar que $\{(1, 1, 0) (1, 2, 1)\}$ es L.I.

Por lo tanto, **una base para V es: {(1, 1, 0) (1, 2, 1)}**

## ❖ Sea H=gen{$v_1$, $v_2$, $v_3$, x} y U= gen{$v_1$, $v_2$, $v_1+v_3$, $v_2+v_3$}. Si H=U entonces El conjunto {$v_1$, $v_2$, $v_3$, x} es linealmente dependiente

Por hipótesis H=U $\Rightarrow$ gen$\{v_1, v_2, v_3, x\}$ = gen$\{v_1, v_2, v_1+v_3, v_2+v_3\}$

Nos podemos percatar que los vectores del conjunto generador de U son combinación lineal de $\{v_1, v_2, v_3\}$ de los vectores que generan a H. Podemos suponer a partir de esto que el conjunto $\{v_1, v_2, v_1+v_3, v_2+v_3\}$ es LD, lo demostramos expresando un vector como combinación lineal de los otros.

$v_2+v_3= (-1)v_1+ v_2+ v_1+v_3 \Rightarrow U=$ gen$\{v_1, v_2, v_1+v_3\}$ (eliminamos el vector que es combinación lineal)

Como U= gen$\{v_1, v_2, v_1+v_3\} \Rightarrow$ dim $U\leq 3$ por teorema: ***Si V= gen {$v_1$, $v_2$, …, $v_n$} $\Rightarrow$ dimV $\leq$ n***

Si dim $U\leq 3\Rightarrow$ dim $H\leq 3$ tenemos el conjunto $\{v_1, v_2, v_3, x\}\in H$

aplicando el th: ***Sea V un Espacio Vectorial de dimensión n. Sea {$w_1$, $w_2$, …, $w_m$}$\in$V. Si m>n entonces {$w_1$, $w_2$, …, $w_m$} es L.D.***

Por lo tanto **el conjunto {$v_1$, $v_2$, $v_3$, x} es LD**

**OTRA FORMA DE DEMOSTRAR QUE SE TIENE UNA BASE**

Tenemos que dim V =n y tenemos el conjunto $\{v_1, v_2,\dots, v_n\}$ que queremos demostrar si es base. Si nos percatamos en el ejercicio donde utilizamos el determinante, las columnas de la matriz A que resultaba del sistema homogéneo estaban formada por los mismos vectores; además det A= det $A^t$ con lo que podemos decir que para determinar si el conjunto $\{v_1, v_2,\dots, v_n\}$ es LI basta formar una matriz con las componentes de los vectores $\{v_1, v_2,\dots, v_n\}$ en las filas de dicha matriz. Ejemplo:

**$\{2+3x+x^2, 1-x, 3\}$ es base de $P_2$**

Hacemos la matriz A. Las componentes de $2+3x+x^2$ son (1 1 1) porque: $2+3x+x^2 = 2(1)+3(x)+1(x^2)$ y así con los demás vectores. Entonces…

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & x & x^2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

obtenemos el det A. det A= 3(-1) = -3 $\neq 0$ entonces el conjunto es LI

Por lo tanto, **una base de $P_2$ es $\{2+3x+x^2, 1-x, 3\}$**

## COORDENADAS Y MATRIZ CAMBIO DE BASE

***Coordenadas de un Vector con respecto a una base ordenada.-*** *Sea V un espacio vectorial con dimensión n. Sea $B=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base ordenada de V y v un vecto0 de V. Se define como* *coordenadas del vector v con respecto a la base B al vector* $[v]_B=\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \cdot \\ C_n \end{pmatrix}$ *talque $v= c_1v_1+ c_2v_2+ \dots c_nv_n$*

Las coordenadas de un vector con respecto a una base ordenada son únicas

***Matriz Cambio de Base (matriz de transición).-*** *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Sea $B_1=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $B_2=\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ dos bases de V. Se define como la matriz cambio de base de $B_1$ a $B_2$ como la matriz:*

$$C_{B_1\to B_2}=\begin{pmatrix} [v_1]_{B_2} & [v_2]_{B_2} & \cdots & [v_n]_{B_2} \end{pmatrix}$$

**Teoremas:**

*** Sean $B_1$ y $B_2$ dos bases de V. Sea A la matriz de transición de de $B_1$ a $B_2$. $\forall$ v $\in$ V se cumple:**

**$[v]_{B2} = A\ [v]_{B1}$**

*** Sean $B_1$ y $B_2$ dos bases de V. Sea A la matriz de transición de de $B_1$ a $B_2$. Entonces $A^{-1}$ es la matriz de transición de de $B_2$ a $B_1$**

❖ **Sean $B_1$={p(x), q(x), r(x)} y $B_2$={s(x), t(x), u(x)} dos bases de $P_2$ y sea:**

$$[x^2-x]_{B1}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad [x+1]_{B1}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad [2x^2+1]_{B1}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad [s(x)+t(x)]_{B1}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$[t(x)+u(x)]_{B1}=\begin{pmatrix}5\\2\\0\end{pmatrix},\ [u(x)]_{B1}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$$

**Determine:**

**a) Los vectores de cada base**

**b) Las coordenadas de $-x^2+3x+2$ con respecto a la base $B_2$**

**$B_1$ y $B_2$**

Tenemos como datos de problema, las coordenadas de tres vectores conocidos con respecto a $B_1$ (cuyos 3 vectores son desconocidos). Dicho dato podemos utilizarlo de la siguiente manera (trabajaremos las coordenadas de forma horizontal por facilidad):

Por definición: $[v]_B=(c_1, c_2, \ldots, c_n) \Leftrightarrow v= c_1v_1+ c_2v_2+ \ldots c_nv_n$

$[x^2-x]_{B1}=(1, 1, 0) \Leftrightarrow x^2-x =1p(x) + 1q(x) + 0r(x)$

$[x+1]_{B1}=(0, 1, 0) \Leftrightarrow x+1 =0p(x) + 1q(x) + 0r(x)$

$[2x^2+1]_{B1}=(1, -1, 1) \Leftrightarrow 2x^2+1=1p(x) - 1q(x) + 1r(x)$

Obteniendo un sistema de 3 ecuaciones con tres incógnitas que son p(x) q(x) r(x). Resolviendo…

$x^2-x =1p(x) + 1q(x) + 0r(x) \Rightarrow$ **$p(x)= x^2 -2x -1$**

$x+1 =0p(x) + 1q(x) + 0r(x) \Rightarrow$ **$q(x)= x+1$**

$2x^2+1 =1p(x) - 1q(x) + 1r(x) \Rightarrow$ **$r(x)= x^2+ 3x +3$**

La base $B_1$ que de la siguiente manera:

**$B_1$ ={ $x^2$ -2x -1, x+1 $x^2$+ 3x +3}**

Ahora tenemos las coordenadas de tres vectores desconocidos con respecto a una base $B_1$ cuyos vectores son conocidos. Basándonos en la definición de coordenadas (al igual que en la primera parte) obtenemos:

$[s(x)+t(x)]_{B1}= (3, 1, 1) \Leftrightarrow s(x)+t(x) = 3(x^2 -2x -1) + 1(x+1) + 1(x^2+ 3x +3) = 4x^2- 2x +1$

$[t(x)+u(x)]_{B1}= (5, 2, 0) \Leftrightarrow t(x)+u(x) = 5(x^2 -2x -1) + 2(x+1) + 0(x^2+ 3x +3) = 5x^2- 8x -3$

$[u(x)]_{B1}= (3, 0, 0) \Leftrightarrow u(x) = 3(x^2 -2x -1) + 0(x+1) + 0(x^2+ 3x +3) = 3x^2- 6x -3$

Nuevamente tenemos un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas que son s(x) t(x) u(x). Resolviendo…

$s(x)+t(x) = 4x^2- 2x +1 \Rightarrow$ **$s(x) = 2x^2 +1$**

$t(x)+u(x) = 5x^2- 8x -3 \Rightarrow$ **$t(x) = 2x^2- 2x$**

**$u(x) = 3x^2- 6x -3$**

La base $B_2$ es:

**$B_2$ = {$2x^2$ +1, $2x^2$- 2x, $3x^2$- 6x -3}**

**$[-x^2+3x+2]_{B2}$**

Por definición:

$[-x^2+3x+2]_{B2} = (c_1, c_2, c_3)$ talque $-x^2+3x+2 = c_1(2x^2 +1) + c_2(2x^2- 2x) + c_3(3x^2- 6x -3)$

Desarrollamos la segunda parte, para hallar los escalares $c_i$ agrupamos en función de $x^2$, x, 1

$-x^2+3x+2 = (2c_1+2c_2+3c_3)x^2 + (-2c_2-6c_3)x + (c_1-3c_3)$

Obteniendo el sistema de ecuaciones…

$-1 = 2c_1+2c_2+3c_3$
$3 = -2c_2-6c_3$
$2 = c_1-3c_3$
Resolviendo obtenemos: $c_1 = 0$ $c_2 = 1/2$ $c_3 = -2/3$

**Por lo tanto** $[-x^2+3x+2]_{B2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

- **Considere el espacio vectorial real $V=\{(x, y\}/\ x\in\mathbb{R}^+ ,\ y\in\mathbb{R}\}$ donde se ha definido la suma en V y la multiplicación por escalar asi:**
  **$(x_1, y_1)\oplus(x_2, y_2) = (x_1x_2 , y_1+y_2)$**
  **$k\bullet(x, y) = (x^k , ky)$**
  **a) ¿Es {(1, 0) , (1, 1)} linealmente independiente?**
  **b) ¿Genera {(1, 0) , (1, 1) , (e, 0)} a V?**
  **c) Determine de ser posible las coordenadas de (8, -3) con respecto a {(2, 0) , (1, 1)}**

Nótese que el espacio V tiene operaciones definidas

**¿Es {(1, 0) , (1, 1)} linealmente independiente?**

Para determinar si (1, 0) (1, 1) es linealmente independiente debemos determinar si cumple:

$$a\bullet(1, 0) \oplus b\bullet(1, 1) = 0_V$$

Hallamos el $0_V$ por teorema $0\bullet v=0_V$
$0\bullet(x, y) = (1^0, 0y) = (1, 0) \Rightarrow \mathbf{0_V = (1, 0)}$
Nos podemos percatar que el primer vector del conjunto que queremos saber si es LI es el mismo $\mathbf{0_V}$, lo que nos indica que el conjunto es L.D.
Por teorema.- **$\{v_1, v_2\}$ son LD si y solo si $v_1= kv_2$ para algún $k\in\mathbb{R}$**

**Como se cumple que $(1, 0) = 0\bullet(1, 1)$ el conjunto es L.D.**

**V= gen {(1, 0) , (1, 1) , (e, 0) ??**

Para determinar si {(1, 0), (1, 1), (e, 0)} generan a V debemos determinar si todo vector perteneciente a V puede ser expresado como combinación lineal de los vectores del conjunto dado, esto es:

$$V= \text{gen}\ \{(1, 0) , (1, 1) , (e, 0)\} \Leftrightarrow (x, y) = a\bullet(1, 0) \oplus b\bullet(1, 1) \oplus c\bullet(e, 0)$$

$(x, y) = (1, 0) \oplus (1, b) \oplus (e^c, 0)$ sumo el primer y segundo vector
$(x, y) = (1, b) \oplus (e^c, 0)$ resultado que debía suponerse, dado que el 1er vector es el $0_V$
$(x, y) = (e^c, b)$ igualando componente a componente obtenemos el sistema de ecuaciones:

$x = e^c \Rightarrow \mathbf{c = \ln(x)}$ $\quad$ **$a\in\mathbb{R}$**
$y = b \Rightarrow \mathbf{b = y}$ $\quad$ por tanto, existen los escalares que permiten la combinación lineal

**Por lo tanto V= gen {(1, 0) , (1, 1) , (e, 0)}**

**$[(8, -3)]_B = ?$ donde $B=\{(2, 0), (1, 1)\}$**

$[(8, -3)]_B = (c_1, c_2)$ talque $(8, -3) = c_1 \bullet (2, 0) \oplus c_2 \bullet (1, 1)$
Desarrollamos la segunda parte, para hallar los escalares $c_i$
$(8, -3) = (2^{c1}, 0) \oplus (1, c_2)$
$(8, -3) = (2^{c1}, c_2)$ obteniendo el sistema
$8 = 2^{c1} \Rightarrow c_1 = 3$
$-3 = c_2 \Rightarrow c_2 = -3$

**Por lo tanto $[(8, -3)]_B = (3, -3)$**

- **Sea $V=P_2$ y $W=P_1$. Se tiene una base B de W y se conoce que $[3-2x]_B=(1, 1)$ y $[3+x]_B=(-1, 1)$. Determine:**
  **a) Los vectores de la base B**
  **b) Una base $B^*$ de V que contenga a la base B**
  **c) La matriz A de cambio de base desde $B^*$ a la base canónica de $P_2$**

**a) B = ?**

Tenemos como datos de problema, las coordenadas de dos vectores conocidos con respecto a la base B (cuyos 2 vectores son desconocidos). Primero definimos la base B
$B = \{v_1, v_2\}$
Utilizando la definición de coordenadas $[v]_B=(c_1, c_2, \ldots, c_n) \Leftrightarrow v= c_1v_1+ c_2v_2+ \ldots c_nv_n$ tenemos:
$[3-2x]_B=(1, 1) \quad \Leftrightarrow 3-2x = v_1 + v_2$
$[3+x]_B=(-1, 1) \quad \Leftrightarrow 3+x = -v_1 + v_2$
Nuevamente tenemos un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas ($v_1$ y $v_2$), resolvemos…
$3-2x = v_1 + v_2 \quad \Rightarrow v_1 = (-3/2)x$
$3+x = -v_1 + v_2 \quad \Rightarrow v_2 = 3 - (½)x$

**Por lo tanto, $B=\{(-3/2)x , 3 - (½)x \}$**

**b) $B^* / B \subset B^*$**

Sabemos que un conjunto de n vectores Linealmente Independiente en un espacio de dimensión n es una base de V. En otras palabras, lo que tenemos que encontrar es un conjunto linealmente independiente de tres vectores (porque dim $P_2$=3) de donde dos son los vectores de B, esto es, simplemente aumentar un vector a la base B, como queremos generar a $P_2$ debemos incluir un factor de $x^2$ (ya que de lo contrario no generaríamos a los vectores con componente en $x^2$). Entonces

**$B^* = \{(-3/2)x , 3 - (½)x , x^2\}$**

**c) $C_{B^* \to B_c}$ =??** **donde la $B_c = \{1, x, x^2\}$**

Por definición la matriz cambio de base de $B^*$ a $B_C$ como la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de la base $B^*$ con respecto a la base $B_C$ , esto es:

$$C_{B^* \to B_c} = \left( [-\tfrac{3}{2}x]_{B_c} \quad [3-\tfrac{1}{2}x\ ]_{B_c} \quad [x^2]_{B_c} \right)$$

Obtenemos las coordenadas de cada vector con la definición de coordenadas.

$[(-3/2)x]_{Bc} = (c_1, c_2, c_3) \Leftrightarrow (-3/2)x = c_1(1) + c_2(x) + c_3(x^2) \Rightarrow$ **$c_1 = 0$ $c_2 = -3/2$ $c_3 = 0$**
$[3-(½)x]_{Bc} = (c_1, c_2, c_3) \Leftrightarrow 3-(½)x = c_1(1) + c_2(x) + c_3(x^2) \Rightarrow$ **$c_1 = 3$ $c_2 = -1/2$ $c_3 = 0$**
$[x^2]_{Bc} = (c_1, c_2, c_3) \Leftrightarrow x^2 = c_1(1) + c_2(x) + c_3(x^2) \Rightarrow$ **$c_1 = 0$ $c_2 = 0$ $c_3 = 1$**

**Por lo tanto,** $C_{B^*\to B_c} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Si observamos cada columna de la matriz obtenida nos daremos cuenta que se la pudo obtener directamente, pensemos en el vector típico de $P_2$ y vemos que las columnas de la matriz son como los escalares a,b,c del vector típico. En los próximos ejercicios, cuando se deba hallar una matriz con respecto a una base canónica se la hará directamente.

❖ **Sea V un espacio vectorial con las siguientes tres bases:**
**$B_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$**
**$B_2 = \{1, x, e^x, xe^x\}$**
**$B_3 = \{1-x, 1+x, x-e^x, v_2+v_3\}$**

**y sea** $C_{B_2\to B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**a) Determine la matriz cambio de base T de $B_3$ a $B_1$**
**b) Determine las coordenadas de $f(x) = (2x+1)e^x - 5x + 3$ con respecto a la $B_3$**
**c) Si $[g(x)]_{B1} = (-1, 1, 0, 4)$ determine la función $h(x) = f(x) + 3g(x)$**

**a)** $T_{B_3\to B_1} =$ **??**

Por definición la matriz cambio de base de $B_3$ a $B_1$ como la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de la base $B_3$ con respecto a la base $B_1$ , esto es:

$$T_{B_3\to B_1} = \begin{pmatrix} [1-x]_{B1} & [1+x]_{B1} & [x-e^x]_{B1} & [v_2+v_3]_{B1} \end{pmatrix}$$

Como no conocemos los vectores de la base $B_1$ no podemos resolver directamente el literal. Analicemos los datos del ejercicio para saber que camino tomar. Conocemos los vectores de las bases $B_2$ y $B_3$, además nos dan la matriz cambio de base de $B_2$ a $B_1$, entonces…

**<u>I forma</u>)** Como dato tenemos una matriz cambio de base entre dos bases de las que una es conocida y la otra no. Se puede conseguir los vectores de la base desconocida utilizando un procedimiento parecido al de los ejercicios anteriores, con esto obtendríamos los vectores de la Base $B_1$ , es decir…

Por definición sabemos: $C_{B_2\to B_1} = \begin{pmatrix} [1]_{B1} & [x]_{B1} & [e^x]_{B1} & [xe^x]_{B1} \end{pmatrix}$ **y**


Por: Néstor Montaño 085437820

como dato tenemos: $C_{B_2\to B_1}=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&0&-1&1\\1&0&1&2\\0&1&0&0\end{pmatrix}$ lo que significa que:

$$\begin{pmatrix}[1]_{B1} & [x]_{B1} & [e^x]_{B1} & [xe^x]_{B1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&0&-1&1\\1&0&1&2\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$ igualando columna a columna tenemos:

$[1]_{B1}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow 1 = 1(v_1) + 0(v_2) + 1(v_3) + 0(v_4)$

$[x]_{B1}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow x = 2(v_1) + 0(v_2) + 0(v_3) + 1(v_4)$

$[e^x]_{B1}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow e^x = 0(v_1) - 1(v_2) + 1(v_3) + 0(v_4)$

$[xe^x]=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow xe^x = 0(v_1) + 1(v_2) + 2(v_3) + 0(v_4)$ Obtenemos el sistema de ecuaciones:

$1 = v_1 + v_3$
$x = 2v_1 + v_4$
$e^x = -v_2 + v_3$
$xe^x = v_2 + 2v_3$ resolviendo el sistema por cualquier método…

**$v_1 = 1-e^x/3 - xe^x/3$**
**$v_2 = -2e^x/3 + xe^x/3$**
**$v_3 = e^x/3 + xe^x/3$**
**$v_4 = x - 2 + 2e^x/3 + 2xe^x/3$**

Con esto hemos hallado los vectores de la Base $B_1$ , ahora podemos seguir resolviendo el ejercicio…

$$T_{B_3\to B_1}=\begin{pmatrix}[1-x]_{B1} & [1+x]_{B1} & [x-e^x]_{B1} & [v_2+v_3]_{B1}\end{pmatrix}$$

$[1-x]_{B1} = (c_1, c_2, c_3, c_4) \Leftrightarrow$

$1-x = c_1(1-e^x/3 - xe^x/3) + c_2(-2e^x/3 + xe^x/3) + c_3(e^x/3 + xe^x/3) + c_4(x - 2 + 2e^x/3 + 2xe^x/3)$

$[1+x]_{B1} = (c_1, c_2, c_3, c_4) \Leftrightarrow$

$$1+x = c_1(1-e^x/3 - xe^x/3) + c_2(-2e^x/3 + xe^x/3) + c_3(e^x/3 + xe^x/3) + c_4(x - 2 + 2e^x/3 + 2xe^x/3)$$

$[x-e^x]_{B1} = (c_1, c_2, c_3, c_4) \Leftrightarrow$

$$x-e^x = c_1(1-e^x/3 - xe^x/3) + c_2(-2e^x/3 + xe^x/3) + c_3(e^x/3 + xe^x/3) + c_4(x - 2 + 2e^x/3 + 2xe^x/3)$$

$[v_2+v_3]_{B1} = (c_1, c_2, c_3, c_4) \Leftrightarrow$

$$v_2+v_3 = c_1(1-e^x/3 - xe^x/3) + c_2(-2e^x/3 + xe^x/3) + c_3(e^x/3 + xe^x/3) + c_4(x - 2 + 2e^x/3 + 2xe^x/3)$$

Esto es hacer el mismo proceso cuatro veces (proceso: hallar las coordenadas de cada vector con respecto a $B_1$), es mejor hacer un solo proceso para el vector típico del Espacio Vectorial. Podemos notar que la base mas sencilla para V es $\{1, x, e^x, xe^x\}$ de donde el vector típico sería

$$\mathbf{a + bx + ce^x + dxe^x \text{ con } a,b,c,d \in \mathbb{R}}$$

Hallando de esta manera una especie de regla de correspondencia que me indica las coordenadas de cualquier vector de V con respecto a $B_1$ (solo reemplazando los valores de a.b.c.d). Es decir…

$[a+bx+ce^x+dxe^x]_{B1} = (c_1, c_2, c_3, c_4) \Leftrightarrow$

$$a+bx+ce^x+dxe^x = c_1(1-e^x/3 - xe^x/3) + c_2(-2e^x/3 + xe^x/3) + c_3(e^x/3 + xe^x/3) + c_4(x - 2 + 2e^x/3 + 2xe^x/3)$$

$$a+b\mathbf{x}+c\mathbf{e^x}+d\mathbf{xe^x} = (c_1-2c_4) + (c_4)\mathbf{x} + \left(-\frac{c_1}{3} - \frac{2c_2}{3} + \frac{c_3}{3} + \frac{2c_4}{3}\right)\mathbf{e^x} + \left(-\frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3} + \frac{c_3}{3} + \frac{2c_4}{3}\right)\mathbf{xe^x}$$

de donde se obtiene…

$a = c_1-2c_4$

$b = c_4$

$c = -\frac{c_1}{3} - \frac{2c_2}{3} + \frac{c_3}{3} + \frac{2c_4}{3}$

$d = -\frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3} + \frac{c_3}{3} + \frac{2c_4}{3}$ que se puede resolver como desees, por ejemplo con matrices…

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1/3 & -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1/3 & -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$ resultando…

$c_1 = a+2b$

$c_2 = -c+d$

$c_3 = a+c+2d$ es decir…

$c_4 = b$

$$\mathbf{[a+bx+ce^x+dxe^x]_{B1}} = \begin{pmatrix} a+2b \\ -c+d \\ a+c+2d \\ b \end{pmatrix}$$

Con esta regla de correspondencia es rápido obtener las coordenadas, por ejemplo para el vector **1-x** los valores de a,b,c,d serían a=1 b= -1 c=0 d=0 los que reemplazando en la regla de correspondencia hallada nos da las coordenadas que necesitamos (primera columna de la matriz cambio de base). Resultando entonces…

$$[1-x]_{B1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad [1+x]_{B1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad [x-e^x]_{B1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si no reemplazamos los valores de $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$ en el cuarto vector tendríamos
$[v_2+v_3]_{B1} = (c_1, c_2, c_3, c_4) \Leftrightarrow v_2+v_3 = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + c_4v_4$ y a simple vista se ve que…

$c_1 = 0 \quad c_2 = 1 \quad c_3 = 1 \quad c_4 = 0$

Con lo que tendríamos $[v_2+v_3]_{B1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ de esta manera se la obtuvo directamente

**Por lo tanto** $T_{B_3 \to B_1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

**II forma)** Por otro lado, como conocemos los vectores de la base $B_2$ (además, esta base es bastante sencilla) y podemos fijarnos que, utilizando la matriz cambio de base dada (de $B_2$ a $B_1$) y por medio del teorema :

**Sean $B_1$ y $B_2$ dos bases de V. Sea A la matriz de transición de de $B_1$ a $B_2$.**

**$\forall\, v \in V$ se cumple: $[v]_{B2} = A\,[v]_{B1}$**

En otras palabras, podemos obtener los vectores de la base $B_3$ expresados en coordenadas con respecto a $B_2$ y luego utilizando el teorema en coordenadas con respecta a $B_1$ (con la matriz de transición de $B_2$ a $B_1$ que tenemos como dato)

$[1+x]_{B2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $[1-x]_{B2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $[x-e^x]_{B2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

No nos preocupamos por el último vector ($v_2+v_3$) porque como vimos en la 1era forma, las coordenadas de este vector con respecto a $B_1$ se obtienen directamente.

Aplicando el teorema al primer vector

$[1-x]_{B1} = C_{B2\to B1}\,[1-x]_{B2}$ es decir..

$$[1-x]_{B1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow [1-x]_{B1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

aplicando a los demás, tenemos…

$$[1+x]_{B1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow [1+x]_{B1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[x-e^x]_{B1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow [x-e^x]_{B1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y sabemos (por el procedimiento que se hizo en la 1era forma) que $[v_2+v_3]_{B1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

**Por lo tanto** $T_{B_3 \to B_1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

De la segunda forma fue mucho más rápido, pero esta requiere del dominio y comprensión total de teoremas y definiciones.

**$[(2x+1)e^x - 5x + 3]_{B3} = ??$**

Primero, desarrollamos bien el vector dado, resultando **$3-5x+e^x+2xe^x$** . Suponiendo que el literal anterior lo resolvimos solo de la 2da forma, no conoceríamos $v_2$ ni $v_3$, con lo que no se podría aplicar la definición de coordenadas de un vector, debemos hallar un camino alterno

Queremos **$[3-5x+e^x+2xe^x]_{B3}$** y tenemos $B_2$, $C_{B2\to B1}$, $T_{B3\to B1}$. Como es sencillo hallar las coordenadas de un vector con respecto a $B_2$, podemos pensar en hallar $[3-5x+e^x+2xe^x]_{B2}$ para luego por medio de la matriz $C_{B2\to B1}$ y el teorema que ya utilizamos obtener $[3-5x+e^x+2xe^x]_{B1}$, entonces conociendo que:

**Sea A la matriz de transición de de $B_1$ a $B_2$ $\Rightarrow$ $A^{-1}$ es la matriz de transición de de $B_2$ a $B_1$**

hallamos $T_{B3\to B1}^{-1}$ y aplicamos nuevamente el teorema anterior y tenemos **$[3-5x+e^x+2xe^x]_{B3}$**

Resolviendo...

$[3-5x+e^x+2xe^x]_{B2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ como $[3-5x+e^x+2xe^x]_{B1} = C_{B2\to B1}\,[3-5x+e^x+2xe^x]_{B2}$

tenemos $[3-5x+e^x+2xe^x]_{B1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow [3-5x+e^x+2xe^x]_{B1} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$

además $[3-5x+e^x+2xe^x]_{B3} = T_{B1\to B3}\,[3-5x+e^x+2xe^x]_{B1}$ con $T_{B1\to B3} = T_{B3\to B1}^{-1}$

hallando $T_{B1\to B3} = T_{B3\to B1}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & -1/4 & -2 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

entonces $[3-5x+e^x+2xe^x]_{B3} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & -1/4 & -2 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

**Por lo tanto $[3-5x+e^x+2xe^x]_{B3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$**

**c) Si $[g(x)]_{B1} = (-1, 1, 0, 4)$ determine la función g(x)**

Por definición $[g(x)]_{B1} = (-1, 1, 0, 4) \Leftrightarrow g(x) = -v_1 + v_2 + 4v_4$ pero no conocemos $v_1, v_2, v_3, v_4$ así que una vez más hay que hallar un camino alterno. Tenemos la Base $B_2$ y $C_{B2\to B1}$, entonces podemos hallar la inversa de la matriz que nos dan como dato y con ello obtendríamos $[g(x)]_{B2}$ y como la base $B_2$ es conocida podemos obtener g(x)

$[g(x)]_{B2} = C_{B1\to B2}\,[g(x)]_{B1}$ con $C_{B1\to B2} = C_{B2\to B1}^{-1}$

hallamos la inversa, $C_{B1\to B2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1/3 & -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ entonces

$[g(x)]_{B2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1/3 & -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ 7/3 \\ 10/3 \end{pmatrix}$ con lo que podemos decir…

Por definición $[g(x)]_{B2} = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ 7/3 \\ 10/3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow g(x) = -9 + 4x + 7/3\, e^x + 10/3\, xe^x$

**Por lo tanto, $g(x) = -9 + 4x + 7/3\, e^x + 10/3\, xe^x$**

❖ **Sean $B_1=\{1, 2-x, 5+3x-x^2\}$ y $B_2=\{r(x), q(x), 5+3x\}$ dos bases de $P_2$,**


Por: Néstor Montaño 085437820

**Sea $C_{B2\to B1}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & a \\ 1 & 2 & b \\ 1 & 0 & c \end{pmatrix}$ la matriz de cambio de base de $B_2$ en $B_1$**

**Determine las coordenadas del polinomio $16 + 3x - x^2$ con respecto a las base $B_2$ y $B_1$**

Conocemos la Base $B_1$ por lo que podemos determinar con facilidad las coordinadas del polinomio con respecto a las base $B_1$, aplicando la definición de coordenadas tenemos…

$[16 + 3x - x^2]_{B1} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 16 + 3x - x^2 = c_1(1) + c_2(2-x) + c_3(5+3x-x^2)$ con lo que hallaremos los $c_i$

$16 + 3x - x^2 = (c_1 + 2c_2 + 5c_3) + (-c_2 + 3c_3)x + (-c_3)x^2$ igualando polinomios obtenemos el sistema...

$16 = c_1 + 2c_2 + 5c_3$

$3 = -c_2 + 3c_3$

$-1 = -c_3$ resolviendo por cualquier método obtenemos

$c_1 = 11$

$c_2 = 0$

$c_3 = 1$

**por lo tanto, $[16 + 3x - x^2]_{B1} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$**

Ahora, necesitamos las coordenadas con respecto a $B_2$ y tenemos la coordenada con respecto a $B_1$, además de la base $B_1$, $C_{B2\to B1}$ incompleta, y un vector de la base $B_2$. En un primer pensamiento podríamos tratar de utilizar la matriz cambio de base (como en el ejercicio anterior) pero la tenemos incompleta, así que trataremos de completarla. Sabemos, por la definición de matriz cambio de base de $B_2$ a $B_1$ que la tercer columna (que es la que queremos) es igual a las coordenadas del tercer vector de la base $B_2$ con respecto a la base $B_1$, lo cual lo sí lo podemos hallar. Desarrollando…

$[5+3x]_{B1} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow 5+3x = a(1) + b(2-x) + c(5+3x-x^2)$

$5+3x = (a + 2b + 5c) + (-b + 3c)x + (-c)x^2$ igualando polinomios obtenemos el sistema...

$5 = a + 2b + 5c$

$3 = -b + 3c$

$0 = -c$ resolviendo por cualquier método obtenemos

$a = 11$

$b = -3$

$c = 0$

Con lo que tenemos: $C_{B2\to B1}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 11 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Sabemos por teorema que

$[16 + 3x - x^2]_{B2} = C_{B1\to B2}\,[16 + 3x - x^2]_{B1}$ donde, $C_{B1\to B2} = C_{B2\to B1}^{-1}$

Hallamos $C_{B1\to B2} = C_{B2\to B1}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 11 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3/16 & 11/16 & -17/16 \\ 1/8 & 1/8 & -3/8 \end{pmatrix}$ entonces…

$$[16 + 3x - x^2]_{B2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3/16 & 11/16 & -17/16 \\ 1/8 & 1/8 & -3/8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Por lo tanto,** $[16 + 3x - x^2]_{B2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

***"Uno de los principales objetivos de la educación debe ser ampliar las ventanas por las cuales vemos al mundo"***

***"El conocimiento es la única riqueza de la que no pueden despojarnos los tiranos"***

***"El objeto de la educación es formar seres aptos para gobernarse a sí mismos, y no para se gobernados por los demás"***

# OPERACIONES CON SUBESPACIOS VECTORIALES

Recordemos que un subespacio es un subconjunto de elementos, por lo que, las operaciones de unión e intersección que definiremos son idénticas a las conocidas normalmente, lo nuevo será la suma entre subespacios.

***Unión de Subespacios Vectoriales.-*** *Sea V un espacio vectorial, sean W, S subespacios de V, se define como* $W\cup S$ *al conjunto,*

$$W\cup S = \{\ v\in V\ /\ v\in W \vee v\in S\}$$

***Intersección de Subespacios Vectoriales.-*** *Sea V un espacio vectorial, sean W, S subespacios de V, se define como* $W\cap S$ *al conjunto,*

$$W\cap S = \{\ v\in V\ /\ v\in W \wedge v\in S\}$$

***Suma de Subespacios Vectoriales.-*** *Sea V un espacio vectorial, sean W, S subespacios de V, se define como W+S al conjunto,*

$$W+S = \{\ v\in V\ /\ v= w+s\ ,\ w\in W \wedge s\in S\}$$

**Teoremas:**

***Sea V un espacio vectorial, sean W, S dos subespacios de V, entonces $W\cap S$ es un subespacio de V**
***Sea V un espacio vectorial, sean W, S dos subespacios de V, entonces W+S es un subespacio de V**
***Sea V un espacio vectorial, sean W, S dos subespacios de V. $W\cup S$ es un subespacio de V si y solo si $W\subseteq S$ o $S\subseteq W$**

En pocas palabras, la intersección y la suma entre dos subespacios constituyen siempre otro subespacio; lo cual no sucede con la unión, la que resulta un subespacio si alguno de los subespacios operados es subconjunto del otro, es decir que no siempre la unión es subespacio.

*** Sea V un espacio vectorial, sean W, S dos subespacios de V, entonces W+S = gen $\{H \cup S\}$**
*** Sea V un espacio vectorial, sean W, S dos subespacios de V, con bases $B_H$ y $B_S$ respectivamente, entonces W+S = gen $\{B_H \cup B_S\}$**
*** Sea V un espacio vectorial, sean W, S dos subespacios de V de dimensión finita, entonces**
**dim W+S = dim W + dim S – dim $W\cap S$**
***W+S es Suma directa (representada por $W\oplus S$) si y solo si $W\cap S = \{0_V\}$**

❖ **Sea $V=P_3$ Sean:**
**W= gen $\{1+x+x^2+x^3\}$ H=$\{a+bx+cx^2+dx^3/\ a-2d+c=0\}$ $B_S=\{x,\ 2+2x-x^3\}$**
**Determine:**

**a)** **Una base para $H\cap S$**
**b)** **Si $H\cup W$ es un subespacio de $P_3$**
**c)** **La dimensión de H+W**
**d)** **El subespacio W+S**

Lo primero que debemos hacer en este tipo de ejercicios, es ver que literales se relacionan ya que talvez el resultado de un literal puede ayudar a resolver más rápidamente el otro y así haríamos primero el literal que facilita la resolución del otro; en este ejercicio podemos ver que se relacionan el literal b y c, ya que el uno pide si $H\cup W$ es subespacio y el otro pide dim H+W, para saber si $H\cup W$ es subespacio debemos utilizar el teorema ($H\cup W$ es un subespacio de V si y solo si $H\subseteq W$ o $W\subseteq H$) si se llega a cumplir que $H\cup W$ es subespacio, esto indicaría que $H\cap W$ sería igual al subespacio de mayor dimensión (esto es porque el de mayor dimensión contendría al de menor) lo que nos daría la dimensión de $H\cap W$, con lo que podríamos utilizar el teorema (dim H+W = dim H + dim W – dim $H\cap W$) y hallaríamos lo deseado en el literal c. Entonces, según el razonamiento, debemos desarrollar en orden el ejercicio.

### a) $B_{H\cap S}$

Para hallar la base de $H\cap S$ debemos hallar primero $H\cap S$. Para hallar $H\cap S$ trabajaremos con los vectores típicos de H y S, como datos tenemos:

$H=\{a+bx+cx^2+dx^3/\ a-2d+c=0\}$ hallamos el vector típico de H desarrollando la condición de H
$H=\{a+bx+cx^2+dx^3/\ a=2d-c\}$ reemplazamos la condición en a
$H=\{(2d-c)+bx+cx^2+dx^3\}$ entonces, el vector típico de H es $(2d-c)+bx+cx^2+dx^3$

$B_S=\{x,\ 2+2x-x^3\}$ y como cualquier vector de S es combinación lineal de los vectores de su base
$S = \{v= \alpha(x)+ \beta(2+2x-x^3)\}$ utilizamos $\alpha, \beta$ para diferenciar del vector típico de H
$S = \{2\beta + (\alpha +2\beta)x + (-\beta)x^3\}$ entonces, el vector típico de S es $2\beta + (\alpha +2\beta)x + (-\beta)x^3$

Por definición, $H\cap S = \{v\in V \ /\ v\in H \text{ y } v\in S\}$ si $v\in H$ y $v\in S$, significa que cumple con las condiciones de H y S a la vez, esto es que obedece a los dos vectores típicos hallados, entonces
$v= (2d-c)+bx+cx^2+dx^3 = 2\beta + (\alpha +2\beta)x + (-\beta)x^3$ utilizaremos la segunda parte de esta igualdad para hallar la forma de los vectores de $H\cap S$ o lo que es lo mismo, hallar el vector típico de $H\cap S$, pero antes debemos definir si expresaremos dicho vector típico en función de b,c,d (parámetros del vector típico de H) o en función de $\alpha, \beta$ (parámetros del vector típico de S), lo dejaremos en función de $\alpha$ y $\beta$ (esto se lo hace para no equivocarse al resolver el sistema y al reemplazar en el resultado, si lo dejaremos en función de $\alpha$ y $\beta$; entonces hay que hallar el valor de b,c,d en función de $\alpha$ y $\beta$). Desarrollando…
$(2d-c)+bx+cx^2+dx^3 = 2\beta + (\alpha +2\beta)x + (-\beta)x^3$ igualando polinomios obtenemos

$$\begin{aligned} 2d-c &= 2\beta \\ b &= \alpha+2\beta \\ c &= 0 \\ d &= -\beta \end{aligned}$$

Como c=0 quedaría: $2d=2\beta$, $b = \alpha+2\beta$, $d = -\beta$ resolviendo por matriz aumentada…

$$\begin{array}{cc} \mathbf{b} & \mathbf{d} \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2\beta \\ 1 & 0 & \alpha+2\beta \\ 0 & 1 & -\beta \end{pmatrix} \text{ desarrollando, } \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha+2\beta \\ 0 & 1 & -\beta \\ 0 & 0 & 4\beta \end{pmatrix}$$ de la última fila tenemos: $4\beta=0 \Rightarrow \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$

de la primera fila tenemos: $b= \alpha+2\beta$, pero $\beta$=0, entonces: $\mathbf{b} = \boldsymbol{\alpha}$, de la segunda fila tenemos $\mathbf{d=0}$
En resumen tenemos: $\mathbf{b}= \boldsymbol{\alpha}$ **c= 0 d= 0** reemplazamos en el vector típico que contenía a b,c,d
$H\cap S = \{ (2d-c)+bx+cx^2+dx^3 \text{ donde } b= \alpha\ c= 0\ d= 0\}$ entonces
$\mathbf{H\cap S = \{ \boldsymbol{\alpha} x \}}$ esto significa que $\mathbf{H\cap S = gen\ \{ x \}}$ y **x** es linealmente independiente

**Por lo tanto $B_{H\cap S} = \{ x \}$**

Si se hubiese escogido dejar todo en función de b,c,d se llega al mismo resultado, inténtalo

### b) $H\cup W$ es un subespacio de $P_3$ ??

Por teorema: $H\cup W$ es un subespacio de $P_3$ si y solo si $H\subseteq W$ o $W\subseteq H$. Entonces, lo que debemos verificar es si alguno de los subespacios es subconjunto del otro; pensemos, cual de las dos contenencias debemos demostrar, o demostraremos ambas?, pues lo que debemos hacer es ver el subespacio que tenga mayor dimensión (ya que este subespacio será el que podrá contener al otro subespacio). En el ejercicio W es generado por un solo vector el cual no es el cero vector, por lo que la dim W = 1. Se puede demostrar que dim H = 3 haciendo…
$H = \{ (2d-c)+bx+cx^2+dx^3 \}$ expresamos como combinación lineal
$H= \{bx + c(-1+ x^2) + d(2+ x^3)\}$ esto significa que
$H= \text{gen } \{x ,\ -1+ x^2,\ 2+ x^3\}$ y esos tres vectores son l.i., por lo tanto son base de H, con dim H= 3

Verificaremos si $W \subseteq H$

Por definición, $W \subseteq H \Leftrightarrow \forall w \in W \Rightarrow w \in H$ (todo vector de W pertenece también a H) esto es que todos los vectores de W cumplan con la condición de H, es decir

$W = gen\ \{1+x+x^2+x^3\} \Rightarrow W = \{\alpha + \alpha x + \alpha x^2 + \alpha x^3\}$ debemos determinar si $\alpha+\alpha x+\alpha x^2+\alpha x^3 \in H$

$\alpha+\alpha x+\alpha x^2+\alpha x^3 \in H \Leftrightarrow \alpha+\alpha x+\alpha x^2+\alpha x^3$ cumple la condición de H (que es: a-2d+c=0) en el vector, $a=\alpha$, $c=\alpha$ y $d=\alpha$; entonces

$\alpha+\alpha x+\alpha x^2+\alpha x^3 \,/\, \alpha-2\alpha+\alpha = 0$ (tautología) como cumple la condición, entonces $W \subseteq H$

**Por lo tanto, $H \cup S$ es subespacio de $P_3$ (además, $H \cup S = H$)**

## c) dim H+W

Por teorema: $\dim H+W = \dim H + \dim W - \dim H \cap W$ ; y sabemos del literal anterior que $W \subseteq H$, con lo que podemos deducir que $H \cap W = W$, entonces $\dim H \cap W = \dim W = 1$

Reemplazando en el teorema tenemos:

$\dim H+W = 3 + 1 - 1$

**por lo tanto $\dim H+W = 3$**

## d) W+S

Por teorema: $W+S = gen\ \{B_W \cup B_S\}$ y tenemos:

$B_W = \{1+ x+ x^2+ x^3\}$ $B_S = \{x, 2+2x-x^3\}$ entonces

$W+S = gen\ \{1+ x+ x^2+ x^3, x, 2+2x-x^3\}$ pero este conjunto, es solo un conjunto generador, hay que determinar si sus elementos son li y de ser posible simplificar los vectores pertenecientes a dicho conjunto; esto lo hacemos construyendo una matriz en la que cada vector representa una fila y cada columna representa un vector de la base canónica (o posición del vector típico), esto es…

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{1} & \mathbf{x} & \mathbf{x^2} & \mathbf{x^3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \text{ aplicando gauss } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$ obtenemos entonces (cada fila representa un vector):

$W+S = gen\ \{1+\frac{1}{2}x^3, x, x^2+\frac{3}{2}x^3\}$ hacemos la combinación lineal

$W+S = \{ a(1+\frac{1}{2}x^3) + b(x) + c(x^2+\frac{3}{2}x^3) \}$ desarrollando

$W+S = \{ a + bx + cx^2 + (\frac{1}{2}a+\frac{3}{2}c)\, x^3\}$

**Por lo tanto, $W+S = \{ a + bx + cx^2 + (\frac{1}{2}a+\frac{3}{2}d)\, x^3 \,/\, a,b,c \in \mathbb{R}\}$**

.

❖ **Sea V=$M_{2x2}$ Sean:**

**H = gen {$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$} W = { $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$/ $a_{i1} = a_{i2}$ , i=1,2}**

**a) Determine si $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 6\end{pmatrix}$ pertenece a H+W**

**b) Determine, de ser posible, una base para H$\cap$W**

Empezaremos por hallar los vectores típicos de H y W.

H = gen {$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$} haciendo la combinación lineal

H = { $\begin{pmatrix}a & -a\\ 2a & 0\end{pmatrix}$} y el vector típico es: $\begin{pmatrix}a & -a\\ 2a & 0\end{pmatrix}$

W = { $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$/ $a_{i1} = a_{i2}$ , i=1,2} desarrollando las condiciones tenemos:

W = { $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$/ $a_{11} = a_{12}$ y $a_{21} = a_{22}$ } reemplazando en la matriz

W = { $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{11}\\ a_{22} & a_{22}\end{pmatrix}$} por facilidad reemplazamos, W = { $\begin{pmatrix}\alpha & \alpha\\ \beta & \beta\end{pmatrix}$} vector típico es: $\begin{pmatrix}\alpha & \alpha\\ \beta & \beta\end{pmatrix}$

Además, la base de W es $B_W$ = {$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$}

**a) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 6\end{pmatrix}$ $\in$ H+W ??**

Por teorema sabemos: H+W = gen {$B_H \cup B_W$} esto es..

H+W = {$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$} por lo que, si queremos determinar si $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 6\end{pmatrix}\in$ H+W, debemos verificar si es combinación lineal de los vectores del conjunto generador de H+W, esto es…

$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 6\end{pmatrix}\in H+W \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 6\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ desarrollando

$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+b & -a+b\\ 2a+c & c\end{pmatrix}$ igualando posición a posición, obtenemos el sistema…

1 = a +b
2 = -a +b
4 = 2a +c
6 = c de abajo hacia arriba, si c=6 $\Rightarrow$ a= -1 $\Rightarrow$ b= 1, pero con a=-1 y b=1 no se cumple la primer ecuación, por lo que el sistema no tiene solución, la matriz no pertenece a H+W

**Por lo tanto, $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 6\end{pmatrix} \notin$ H+W**

**b) Determine, de ser posible, una base para H$\cap$W**

Para hallar la base de $H \cap W$ ($B_{H \cap W}$), primero debemos hallar $H \cap W$.
Por definición, $H \cap W = \{A \in M_{2x2} \ / \ A \in H \text{ y } A \in W\}$, similar al ejercicio anterior (mismo razonamiento y procedimiento), debemos igualar los vectores típicos

$\begin{pmatrix} a & -a \\ 2a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \beta & \beta \end{pmatrix}$ escogemos que dejaremos todo en función de a y obtenemos el sistema…

$a = \alpha$
$-a = \alpha$
$2a = \beta$
$0 = \beta$ en este caso, esta sencillo, $\beta = 0 \Rightarrow a = 0$ (y esto no se contradice en las demás ecuaciones), entonces reemplazando en la matriz que estaba en función de a tenemos:

$H \cap W = \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$ es decir, la intersección de H con W es el vector neutro o cero vector de $M_{2x2}$

Como la intersección es el cero vector, y sabemos que un subespacio formado por el cero vector no tiene base, entonces:
$B_{H \cap W} = \phi$ o en otras palabras, $H \cap W$ no tiene base, además $\dim H \cap S = 0$

**Por lo tanto, $B_{H \cap W} = \phi$**

*“Un pueblo inculto es más fácil de dominar”*

*“Donde hay educación, no hay distinción de clases”*

*“Quizá la obra educativa que más urge en el mundo sea la de convencer a los pueblos de que su mayores enemigos son los hombres que les prometen imposibles”*


Por: Néstor Montaño 085437820

# ESPACIOS ASOCIADOS A MATRICES

**Espacio Renglón o Espacio Fila.-** Sea A $\in M_{mxn}$, se define como espacio fila de A
$R_A = F_A =$ gen {filas de A}
**Espacio Columna.-** Sea A $\in M_{mxn}$, se define como espacio columna de A
$C_A =$ gen {columnas de A}
**Espacio Nulo.-** Sea A $\in M_{mxn}$, se define como espacio nulo de A
$N_A = \text{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = 0, 0 \in \mathbb{R}^m\}$
**Recorrido o Imagen de una Matriz.-** Sea A $\in M_{mxn}$, se define como recorrido o imagen de A
$\text{Rec}(A) = \text{Im}(A) = \{ y \in \mathbb{R}^m / Ax = y, x \in \mathbb{R}^n \}$
**Nulidad de A.-** Sea A $\in M_{mxn}$, se define como nulidad de A $\upsilon(A) = \dim N_A$
**Rango de A.-** Sea A $\in M_{mxn}$, se define como rango de A $\rho(A) = \dim \text{Rec}(A)$

Teoremas:

*** Sea A $\in M_{mxn}$ entonces $C_A = \text{Im}(A)$, el espacio columna de A es igual a la imagen de A**
*** Sea A $\in M_{mxn}$ entonces $\dim C_A = \dim R_A = \dim \text{Im}(A) = \rho(A)$**
*** Si A es equivalente por renglones a B, entonces $R_A = R_B$, $\rho(A) = \rho(B)$ y $\upsilon(A) = \upsilon(B)$**
*** Sea A $\in M_{mxn}$ entonces $\upsilon(A) + \rho(A) = n$**
*** Sea A $\in M_{nxn}$ entonces A es invertible si y solo si $\rho(A) = n$ (o su equivalente $\upsilon(A) = 0$)**

❖ **Sea la matriz A=** $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 8 \\ -8 & -7 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**a) Determine el Espacio Renglón de A y el Núcleo de A**
**b) Encuentre la nulidad de A y el rango de A**

Empezaremos por el espacio Renglón o espacio Fila de A. Por definición,
$R_A =$ gen { filas de A} por teorema sabemos: Si A es equivalente por renglones a B $\Rightarrow R_A = R_B$
Lo que haremos es aplicar gauss a la matriz A obteniendo así otra matriz que es equivalente por renglones a A, y utilizaremos las filas de esta última matriz para hallar el espacio $R_A$

$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 8 \\ -8 & -7 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ aplicando gauss queda $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ entonces $R_A$ es

$R_A =$ gen {(1, 0, -1, -2), (0, 1, 1, 2)} nótese que no tomamos en cuenta la última fila (por ser el cero vector), haciendo la combinación lineal tenemos:
$R_A = \{a(1, 0, -1, -2) + b(0, 1, 1, 2)\}$ finalmente
$R_A = \{(a, b, -a+b, -2a+2b)\}$

**Por lo tanto, $R_A = \{(a, b, -a+b, -2a+2b) / a,b \in \mathbb{R}\}$**

Por definición, el Núcleo de A es
$N_A = \{x \in \mathbb{R}^4 / Ax = 0, 0 \in \mathbb{R}^3\}$ es decir

$N_A = \{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ d \\ c \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 8 \\ -8 & -7 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ d \\ c \end{pmatrix} = (0, 0, 0) \}$

La condición Ax=0, que es un sistema homogéneo que se puede resolver por medio de la matriz aumentada A|0 . Esto es...

$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 8 & 0 \\ -8 & -7 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ que resolviéndola queda $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ que es:

a- c- 2d=0 $\Rightarrow$ a=c+2d

b+c+2d=0 $\Rightarrow$ b=-c-2d reemplazando en el vector tenemos: $N_A = \{ \begin{pmatrix} c+2d \\ -c-2d \\ c \\ d \end{pmatrix} \}$

**Por lo tanto,** $N_A = \{ \begin{pmatrix} c+2d \\ -c-2d \\ c \\ d \end{pmatrix} / c,d \in \mathbb{R} \}$

Sabemos, a que es igual el espacio Columna de Ay además el espacio Nulo de A, podemos hallar entonces la nulidad y el rango.

$\upsilon$(A)= dim $N_A$ y podemos ver que la dimensión del $N_A$ es 2, entonces

$\upsilon$(A) = 2

Por teorema: $\rho$ (A) =dim Rec (A) = dim $C_A$ = dim $R_A$ y se puede demostrar que dim $R_A$ = 2

Entonces, $\rho$ (A) =2

Además por teorema, $\upsilon(A) + \rho(A) = 4$, lo que se cumple con los valores hallados

**Por lo tanto, $\upsilon$(A) = 2 y $\rho$ (A) =2**

***"La educación, más que cualquier otro recurso de origen humano, es el gran igualador de las condiciones del hombre, el volante de la maquinaria social"***

**Sea A y B matrices equivalentes por renglones, esto es, la matriz B ha sido obtenida utilizando el programa MATLAB para escalonar los renglones de la matriz A.**

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&3&1&4\\4&6&10&9&0&0\\3&4&7&6&-1&-4\\1&0&1&1&0&1\\2&4&6&6&2&8\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1&0&1&0&-3&-12\\0&1&1&0&-\frac{5}{2}&-\frac{23}{2}\\0&0&0&1&3&13\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

**Determine:**

**a) Una base para el espacio renglón de A**

**b) Una base para el espacio columna de A; y la nulidad de A**

**c) Si el vector $(3, \frac{5}{2}, 0, -3, 1, 0)$ pertenece al núcleo de A**

**a) $R_A$**

En este ejercicio tenemos la matriz A y una matriz B que es equivalente por renglones a A; por lo que para hallar $R_A$ utilizamos el teorema Si a es equivalente por renglones a B entonces $R_A=R_B$ (como ejercicio anterior), esto es…

$R_A = \{(1, 0, 1, 0, -3, -12), (0, 1, 1, 0, -\frac{5}{2}, -\frac{23}{2}), (0, 0, 0, 1, 3, 13)\}$ nuevamente, no utilizamos las filas con valores cero, hacemos la combinación lineal y sumamos

$R_A = \{(a, b, a+b, c, -3a-\frac{5}{2}b+3c, -12a-\frac{23}{2}b+13c)\}$

**Por lo tanto, $R_A = \{(a, b, a+b, c, -3a-\frac{5}{2}b+3c, -12a-\frac{23}{2}b+13c) \,/\, a,b,c \in \mathbb{R}\}$**

**b) $B_{CA}$; y $\upsilon(A)$**

Para hallar la Base del espacio columna de A, $B_{CA}$ primero hallamos el espacio $C_A$, por definición:

$C_A$ = gen {columnas de A} esto es

$$C_A = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\4\\3\\1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\6\\4\\0\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\10\\7\\1\\6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\9\\6\\1\\6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\\1\\8\end{pmatrix}\right\}$$

para separar los vectores ld y simplificar el conjunto que tenemos, construimos una matriz cuyas filas serán los vectores del conjunto generador y luego la reducimos aplicando gauss.

$$\begin{pmatrix}1&4&3&1&2\\2&6&4&0&4\\3&10&7&1&6\\3&9&6&1&6\\1&0&-1&0&2\\4&0&-4&1&8\end{pmatrix} \text{ aplicando gauss queda } \begin{pmatrix}1&0&-1&0&2\\0&1&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

entonces, tenemos:

$C_A = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ haciendo la combinación lineal y sumando nos queda: $C_A = \left\{\begin{pmatrix}a\\b\\-a+b\\c\\2a\end{pmatrix}\right\}$

**Por lo tanto,** $C_A = \left\{\begin{pmatrix}a\\b\\-a+b\\c\\2a\end{pmatrix} / a,b,c \in \mathbb{R}\right\}$

Por teorema, $\rho(A) = \dim \text{Rec}(A) = \dim C_A = \dim R_A$ y se puede demostrar que $\dim R_A = 3$

**Por lo tanto,** $\rho(A) = 3$

**c)** $(3, \frac{5}{2}, 0, -3, 1, 0) \in \text{Ker}(A)$

Por definición,
$\text{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{R}^6 / Ax = 0,\ 0 \in \mathbb{R}^5\}$ queremos determinar si $(3, \frac{5}{2}, 0, -3, 1, 0) \in \text{Ker}(A)$, para esto, debemos verificar si este vector cumple la condición del Ker(A), es decir, verificar si:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 4\\4 & 6 & 10 & 9 & 0 & 0\\3 & 4 & 7 & 6 & -1 & -4\\1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\2 & 4 & 6 & 6 & 2 & 8\end{bmatrix}\begin{pmatrix}3\\ \frac{5}{2}\\0\\-3\\1\\0\end{pmatrix} = (0, 0, 0, 0, 0)$$ resolviendo…

$(0, 0, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, 0, 0)$ se cumple la condición, entonces si pertenece al Nu (A)

**Por lo tanto** $(3, \frac{5}{2}, 0, -3, 1, 0) \in \text{Ker}(A)$

> ***"Hay que ver a los jóvenes no como vasos vacías que hay que llenar, si no como velas que hay que encender"***