ESPACIO VECTORIAL

$(V, \oplus, \bullet\alpha)$ es un espacio vectorial si y solo si V es un conjunto no vacío de objetos, junto con dos operaciones de Suma $\oplus$ y multiplicación por un escalar $\bullet\alpha$ y cumple con los siguientes axiomas:

A.1) $\forall v_1, v_2 \in V [v_1 \oplus v_2 \in V]$ CERRADURA DE LA SUMA

A.2) $\forall v_1, v_2 \in V [v_1 \oplus v_2 = v_2 \oplus v_1]$ CONMUTATIVIDAD

A.3) $\forall v_1, v_2, v_3 \in V [v_1 \oplus (v_2 \oplus v_3) = (v_1 \oplus v_2) \oplus v_3]$ ASOCIATIVIDAD

A.4) $\exists 0_V \in V \forall v \in V [v \oplus 0_V = v]$ EXISTENCIA DEL NEUTRO ADITIVO

A.5) $\forall v \in V \exists v' \in V [v \oplus v' = 0_V]$ EXISTENCIA DEL INVERSO ADITIVO

M.1) $\forall \alpha \in \Re \forall v \in V [\alpha \bullet v \in V]$ CERRADURA DE LA MULTIPLICACION POR ESCALAR

M.2) $\forall \alpha \in \Re \forall v_1, v_2 \in V [\alpha \bullet (v_1 \oplus v_2) = \alpha \bullet v_1 \oplus \alpha \bullet v_2]$PRIMER AXIOMA DISTRIBUTIVO

M.3) $\forall \alpha, \beta \in \Re \forall v \in V [(\alpha+\beta) \bullet v = \alpha \bullet v \oplus \beta \bullet v]$ SEGUNDO AXIOMA DISTRIBUTIVO

M.4) $\forall \alpha, \beta \in \Re \forall v \in V [\alpha \bullet (\beta \bullet v) = \alpha\beta \bullet v]$ ASOCIATIVIDAD

M.5) $\forall v \in V [1 \bullet v = v]$ EL NEUTRO MULTIPLICATIVO

TEOREMAS

1.- Si $(V, \oplus, \bullet\alpha)$ es un espacio vectorial, entonces se cumple que $\forall \alpha \in \Re [\alpha \bullet 0_V = 0_V]$

2.- Si $(V, \oplus, \bullet\alpha)$ es un espacio vectorial, entonces se cumple que $\forall v \in V [0 \bullet v = 0_V]$

3.- Si $(V, \oplus, \bullet\alpha)$ es un espacio vectorial, entonces se cumple que $\forall v \in V [(-1) \bullet v = v']$

4.- Si $(V, \oplus, \bullet\alpha)$ es un espacio vectorial, entonces $\forall \alpha \in \Re \forall v \in V [\alpha \bullet v = 0_V \Rightarrow (\alpha = 0) v (v = 0_V)]$

5.- Si $(V, \oplus, \bullet\alpha)$ es un espacio vectorial, entonces el vector nulo de V es único.

6.- Si $(V, \oplus, \bullet\alpha)$ es un espacio vectorial, entonces el inverso aditivo es único para cada vector de V.

SUBESPACIO VECTORIAL

H es un subespacio del espacio vectorial V si y sólo sí, H es un subconjunto no vacío del espacio vectorial V y H es un espacio vectorial con las mismas operaciones de suma y multiplicación por escalar definidas sobre V.

TEOREMA (CRITERIO DE SUBESPACIO VECTORIAL):

H es un subespacio del espacio vectorial V si y sólo sí H es un subconjunto no vacío de un espacio vectorial V y H cumple con los dos axiomas de cerradura:

A.1) $\forall h_1, h_2 \in H [h_1 \oplus h_2 \in H]$ CERRADURA DE LA SUMA

M.1) $\forall \alpha \in \Re \forall h \in H [\alpha \bullet h \in H]$ CERRADURA DE LA MULTIPLICACION POR ESCALAR

COMBINACION LINEAL

Sea V un espacio vectorial. Si $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ vectores de V y $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n \in \Re$, entonces se define a la expresión : $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \ldots + \alpha_n v_n$, como una combinación lineal de $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$.

CONJUNTO GENERADOR DE UN ESPACIO VECTORIAL

Sea V un espacio vectorial y $S=\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ un conjunto de vectores de V, se dice que S es un conjunto generador de V, si y sólo si :$\forall v \in V \ \exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n \in \Re \ [v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \ldots + \alpha_n v_n]$

ESPACIO GENERADO POR UN CONJUNTO DE VECTORES

Sea V un espacio vectorial y $S=\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ un conjunto de vectores de V . El espacio generado por S es el conjunto de todas las combinaciones lineales de $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$

$L(S)=L\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\} = \{ v / \ v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \ldots + \alpha_n v_n; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n \in \Re, \}$

INDEPENDENCIA LINEAL

Sea V un espacio vectorial, $S=\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ un conjunto de vectores de V y $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \Re$. S es linealmente independiente en V si y solo si : $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \dots + \alpha_n v_n = 0_V \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

DEPENDENCIA LINEAL

Sea V un espacio vectorial, $S=\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ un conjunto de vectores de V y $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n \in \Re$. S es linealmente dependiente en V si y solo si : $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \dots + \alpha_n v_n = 0_V \Rightarrow \exists \alpha_i \neq 0, i=1,2,\dots,n$

TEOREMAS

1.- Sea V un espacio vectorial. El conjunto $\{v_1, v_2\}$es linealmente independiente en V si y solo si, v_1 y v_2 **no** son múltiplos escalares.

2.- Sea V un espacio vectorial. El $\mathbf{0_V}$ es una combinación lineal de cualquier conjunto de vectores de V.

3.- Sea V un espacio vectorial. Si el conjunto $A=\{ v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \}$es linealmente independiente en V, entonces cualquier subconjunto de A es linealmente independiente en V.

4.- Sea V un espacio vectorial. Si el conjunto $\{ v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \}$es linealmente **dependiente** en V y los vectores $w_1, w_2, \dots, w_k$ pertenecen a V, entonces el conjunto $\{ v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, w_1, w_2, \dots, w_k \}$ es linealmente **dependiente** en V .

BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL

Sea V un espacio vectorial y $B= \{ v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \}$ un conjunto de vectores de V. B es una base de V si y solo si B es un conjunto generador de V y B es linealmente independiente en V

DIMENSION DE UN ESPACIO VECTORIAL

Sea V un espacio vectorial. Se define como la dimensión de V al número de vectores en una base de V.

TEOREMAS

1.-Si V es un espacio vectorial de dimensión finita y H es un subespacio de V $\Rightarrow 0 \leq \dim H \leq \dim V$

2.-Si V es un espacio vectorial y $V= \mathcal{L} \{ v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \} \Rightarrow 0 \leq \dim V \leq n$

3.- $A \in M_{nxn}$ y tiene n filas (o columnas) linealmente independientes en $R^n \equiv \det(A) \neq 0 \equiv$ A es inversible .

4.- Si $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$es un conjunto de vectores linealmente independiente en un espacio vectorial V, entonces $\dim V \geq n$

5.- Sea V un espacio vectorial. Si $\beta=\{ v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \}$es una base de V $\Rightarrow$A cada vector $v \in V$ se lo puede expresar de manera única como una combinación lineal de los vectores de β.

6.- Sea V un espacio vectorial. Cualquier conjunto generador de V contiene una base de V

7.-Sea V un espacio vectorial de dimensión n $\Rightarrow$Cualquier conjunto con n vectores linealmente independientes en V es una base de V

8.- Sea V un espacio vectorial de dimensión n $\Rightarrow$Cualquier conjunto con n vectores que genere a V, es una base de V.

CONJUNTO INTERSECCION DE SUBESPACIOS VECTORIALES

Sean H y W dos subespacios del espacio vectorial V, se define como la intersección de H con W a: $H \cap W = \{v \in V / v \in H \wedge v \in W\}$

TEOREMA

Si H y W son subespacios del espacio vectorial V, entonces $H \cap W$ es un subespacio vectorial de V.

CONJUNTO SUMA DE SUBESPACIOS VECTORIALES

Sean H y W dos subespacios del espacio vectorial V, se define como la suma de H con W a: $H+W = \{v \in V / v = h+w, h \in H, w \in W\}$

TEOREMA

Si H y W son subespacios del espacio vectorial V, entonces H+W es un subespacio vectorial de V.

CONJUNTO UNION DE SUBESPACIOS VECTORIALES

Sean H y W dos subespacios del espacio vectorial V, se define como la unión de H con W a: $H \cup W = \{v \in V / v \in H \vee v \in W\}$

TEOREMA

Si H, W son subespacios del espacio vectorial V y ($H \subseteq W$) o ($W \subseteq H$), entonces $H \cup W$ es un subespacio vectorial de V.

TEOREMAS

1.- Sean H y W dos subespacios del espacio vectorial V de dimensión finita, entonces se cumple que:
$\dim H+W = \dim H + \dim W - \dim H \cap W$

2.- Sean H y W subespacios del espacio vectorial V, entonces H+W es el espacio generado por la unión de los conjuntos generadores de H y W.

3.- Si H es un subespacio vectorial de V y V es de dimensión finita y de dimensión diferente de cero, entonces existe al menos una Base de H (B_H) y una base de V (B_V) tal que $B_H \subseteq B_V$.

4.- Sea V un espacio vectorial **de dimensión finita** y H un subespacio de V. Si dimH=dimV, entonces H=V.

SUMA DIRECTA

$H \oplus W$ es un subespacio suma directa de V si y solo si, H y W son dos subespacios del espacio vectorial V y $H \cap W = \{0_V\}$.

TEOREMAS

1.- Si $H \oplus W$ es un subespacio suma directa de V, entonces una base de la suma directa es la unión de las bases de H y W [$B_{H \oplus W} = B_H \cup B_W$]
2.- Si $H \oplus W$ es un subespacio suma directa del espacio vectorial V de dimensión finita, entonces se cumple que $\dim H \oplus W = \dim H + \dim W$

COORDENADAS DE UN VECTOR CON RESPECTO A UNA BASE ORDENADA

Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $\beta = \{ v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n \}$ una base ordenada de V. Se define a $[v]_\beta$ como vector coordenadas de v con respecto de la base β tal que :
$[v]_\beta = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n) \in \Re^n$ si y solo si $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \ldots + \alpha_n v_n$

TEOREMAS

1.- Sea V un espacio vectorial de dimensión n y B una base de V. Si $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vectores del espacio vectorial V y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ números reales, entonces se cumple que:

$[\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\ldots+\alpha_k v_k]_B=\alpha_1[v_1]_B+\alpha_2[v_2]_B+\ldots+\alpha_k[v_k]_B$

2.- Sea V un espacio vectorial de dimensión n y B una base de V, entonces se cumple que

$\forall v\in V \{ [v]_B=\bar{0}_{R^n} \equiv v=0_V \}$

3.- Sea V un espacio vectorial de dimensión n y B una base de V. Se cumple que, $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es linealmente independiente en V, si y solo si, $\{[v_1]_B, [v_2]_B, \ldots, [v_k]_B\}$ es linealmente independiente en R^n.

MATRIZ CAMBIO DE BASE (MATRIZ DE TRANSICION)

Sean $\beta_1=\{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ y $\beta_2=\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ dos bases ordenadas de un espacio vectorial V , de donde se define como matriz de transición de la base β_1 a la base β_2 a la matriz de nxn cuyas columnas están dadas por :

$[u_j]_{\beta 2}$ donde j=1,2,3,…,n

TEOREMAS

1.- Sea $A_{\beta 1\to\beta 2}$ la matriz de cambio de base de β_1 a β_2 , entonces se cumple que :

$[v]_{\beta 2}= A_{\beta 1\to\beta 2}[v]_{\beta 1}$

2.- Sea $A_{\beta 1\to\beta 2}$ la matriz de cambio de base de β_1 a β_2 , entonces se cumple que :

$A_{\beta 2\to\beta 1} = (A_{\beta 1\to\beta 2})^{-1}$

3.- Sean B_1, B_2, B_3 bases de un espacio vectorial V, $C_{B1\to B3}$ la matriz cambio de base de B_1 a B_3, $C_{B2\to B3}$ la matriz cambio de base de B_2 a B_3 y $C_{B1\to B2}$ la matriz cambio de base de B_1 a B_2, entonces se cumple que:

$C_{B1\to B3}= C_{B2\to B3}. C_{B1\to B2}$

ESPACIO FILA (ESPACIO RENGLON , ESPACIO LINEA) DE UNA MATRIZ mxn

Sea $A\in M_{mxn}$ y sean $\{r_1, r_2, r_3, \ldots, r_m\}$los renglones de A , entonces se define como Espacio Renglón o Fila de A :

$EF^A = R_A = \mathcal{L}\{ r_1, r_2, r_3, \ldots, r_m \}$

ESPACIO COLUMNA DE UNA MATRIZ mxn

Sea $A\in M_{mxn}$ y sean $\{c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n\}$ las columnas de A , entonces se define como Espacio Columna de A:

$EC^A = C_A = \mathcal{L}\{c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n\}$

RECORRIDO DE UNA MATRIZ mxn

Sea $A\in M_{mxn}$, se define como Recorrido de A :

$Rec(A) =\{Y\in\Re^m /AX=Y \text{ para algún } X\in\Re^n\}$

RANGO DE UNA MATRIZ

Sea $A\in M_{mxn}$, entonces se define como rango de A a la dimensión del Recorrido de la matriz A

$\rho(A)$ = rango de A = dim Rec(A)

NUCLEO DE UNA MATRIZ mxn

Sea $A\in M_{mxn}$, se define como Núcleo de A :

$Nu(A) =\{X\in\Re^n /AX=\mathbf{0} , \mathbf{0}\in\Re^m\}$

NULIDAD DE UNA MATRIZ

Sea $A \in M_{mxn}$, entonces se define como nulidad de A a la dimensión del Núcleo de la matriz A
$\nu(A)$ = nulidad de A = dim Nu(A)

TEOREMAS

1.- Sea $A \in M_{mxn}$ entonces se cumple que $Rec(A)=EC^A$
2.- Sea $A \in M_{mxn}$ entonces se cumple que $\dim EC^A=\dim EF^A$
3.- Sea $A \in M_{mxn}$ entonces se cumple que $\nu(A)+\rho(A)=n$, n es el número de columnas que tiene $A \in M_{mxn}$.

TEOREMA

Si A es equivalente por renglones a B, entonces $EF^A=EF^B$, $\rho(A)=\rho(B)$ y $\nu(A)=\nu(B)$

TEOREMA

El sistema $A\mathbf{X}=\mathbf{B}$ tiene al menos una solución si y solo si $\mathbf{B}\in EC^A$.

TEOREMA

Sea A una matriz de nxn. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes (Es decir, si una se cumple, todas se cumplen)
i.- A es invertible
ii.- La única solución del sistema homogéneo $A\mathbf{X}=\mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{X}=\mathbf{0}$)
iii.- El sistema $A\mathbf{X}=\mathbf{B}$ tiene una solución única, donde $\mathbf{B}\in R^n$.
iv.- A es equivalente por renglones a la matriz identidad de nxn.
v.- Los renglones (y columnas) de A son linealmente independientes en R^n.
vi.- $\det A\neq 0$
vii.- $\nu(A)=0$
viii.- $\rho(A)=n$

TRANSFORMACIÓN LINEAL

Sean V y W espacios vectoriales . Se define como transformación lineal T de V en W ($T:V\rightarrow W$) a una función que asigna a cada vector $v\in V$ un vector único $T(v)\in W$ y que satisface :
A.1) $\forall\ v_1 ,v_2\in V\ [T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2)]$
A.2) $\forall\alpha\in R\ \forall v\in V[T(\alpha v)= \alpha T(v)]$