

9.1 Vectores en el plano y en el espacio

1. Determine el vector \mathbf{AB} para cada par de puntos dado:

a) $\mathbf{A}(2, 1)$;	$\mathbf{B}(3, 4)$
b) $\mathbf{A}(-3, 0)$;	$\mathbf{B}(10, -5)$
c) $\mathbf{A}(-1, -2)$;	$\mathbf{B}(2, 1)$
d) $\mathbf{A}(0, 1)$;	$\mathbf{B}(0, 4)$
e) $\mathbf{A}(2, 0)$;	$\mathbf{B}(-7, 0)$
f) $\mathbf{A}(1, 1, 0)$;	$\mathbf{B}(3, 4, 2)$
g) $\mathbf{A}(0, -3, 4)$;	$\mathbf{B}(1, -1, 1)$
h) $\mathbf{A}(3, 2, 3)$;	$\mathbf{B}(3, 1, 3)$
i) $\mathbf{A}(0, 1, 0)$;	$\mathbf{B}(0, 1, 0)$
j) $\mathbf{A}(8, 0, 0)$;	$\mathbf{B}(0, -1, 2)$

2. Determine de ser posible, los valores de a, b para que los siguientes pares de vectores sean iguales:

a) $\mathbf{V}_1=(2a+b-1, 3a-b)$;	$\mathbf{V}_2=(2b+3, 2)$
b) $\mathbf{V}_1=(b, 0)$;	$\mathbf{V}_2=(a-3b+5, -a-b)$
c) $\mathbf{V}_1=(-a-b, -a-b+1)$;	$\mathbf{V}_2=(2, 3)$
d) $\mathbf{V}_1=(4a+3b, a+2b)$;	$\mathbf{V}_2=(3a, -b-1)$

3. Determine de ser posible, los valores de a, b, c para que los siguientes pares de vectores sean iguales:

a) $\mathbf{V}_1=(a+b-3+c, -2a-b+2c, 3c)$;	$\mathbf{V}_2=(b+c, 2c-3)$
b) $\mathbf{V}_1=(c-2b+1, 4a, c)$;	$\mathbf{V}_2=(a-c, -a, 1-b)$
c) $\mathbf{V}_1=(10a+2b-c, -a-b, 1)$;	$\mathbf{V}_2=(b-2c-1, 3, b)$
d) $\mathbf{V}_1=(ab, ac, bc)$;	$\mathbf{V}_2=(2, -b, -c)$

9.2 Operaciones entre vectores

4. Determine los vectores que se obtienen al realizar las operaciones indicadas en cada uno de los siguientes literales. En todos los casos considere los vectores $\mathbf{A}=(2, 1, 1)$; $\mathbf{B}=(-3, 5, 1)$; $\mathbf{C}=(2, -1, 0)$; $\mathbf{D}=(-5, 6, 4)$.

- $2\mathbf{A}-3\mathbf{B}+2(\mathbf{C}+\mathbf{D})$
- $\mathbf{A}+2\mathbf{C}-2(\mathbf{C}+\mathbf{A})-\mathbf{B}$
- $3(\mathbf{B}-2(\mathbf{A}-\mathbf{D}))+3\mathbf{C}$
- Hallar \mathbf{X} si $3\mathbf{A}-\mathbf{C}+4(\mathbf{X}+\mathbf{B})=\mathbf{X}+\mathbf{D}$.
- Hallar \mathbf{Y} si $\mathbf{Y}+\mathbf{A}-2(\mathbf{B}+\mathbf{Y})=3(2\mathbf{Y}-\mathbf{C}+\mathbf{D})$.

5. Respecto a los vectores $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ del ejercicio anterior, determine si el vector $(2, -10, 7)$ es combinación lineal de ellos.

6. Si $\mathbf{V}=(2x, 3, y+1)$, $\mathbf{W}=(x^2+1, z, 2y)$ y $\mathbf{V}=\mathbf{W}$, entonces $\mathbf{V}+\mathbf{W}=2(2, 3, 2)$.

- Verdadero
- Falso

9.3 Vectores unitarios

19. Calcular un vector unitario sobre la dirección especificada:

- a) $\mathbf{V}_1=(1, 1)$ b) $\mathbf{V}_2=(-1, 3)$ c) $\mathbf{V}_3=(10, 0)$ d) $\mathbf{V}_4=(0, -2)$
 e) $\mathbf{V}_5=(2, 0, 1)$ f) $\mathbf{V}_6=(0, -10, 1)$ g) $\mathbf{V}_7=(0, 0, 0)$ h) $\mathbf{V}_8=(0, -2, -2)$

20. Determine $\text{Proy}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}$, $\overrightarrow{\text{Proy}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}}$, si:

- a) $\mathbf{u}=(2, 3)$; $\mathbf{v}=(5, -1)$
 b) $\mathbf{u}=(-3, 10)$; $\mathbf{v}=(2, 0)$
 c) $\mathbf{u}=(1, 8)$; $\mathbf{v}=(0, 3)$
 d) $\mathbf{u}=(3, 1, 3)$; $\mathbf{v}=(0, 5, -1)$
 e) $\mathbf{u}=(1, -5, 2)$; $\mathbf{v}=(2, 0, 4)$
 f) $\mathbf{u}=(7, 1, 3)$; $\mathbf{v}=(4, -3, 2)$

21. Si \mathbf{u} y \mathbf{v} son dos vectores unitarios, entonces $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \sqrt{2}$.

- a) Verdadero b) Falso

22. Si \mathbf{u} y \mathbf{v} son dos vectores unitarios y ortogonales, entonces $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \sqrt{2}$.

- a) Verdadero b) Falso

23. La proyección escalar del vector $\mathbf{V}=(4, 2, t)$ sobre $\mathbf{W}=(-1, 1, 2)$ es $\sqrt{6}$, si y sólo si $t=4$.

- a) Verdadero b) Falso

24. Si \mathbf{u} y \mathbf{v} son dos vectores unitarios y ortogonales, entonces $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ es:

- a) 2 b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\sqrt{2}$ d) 0 e) $2\sqrt{2}$

25. La proyección escalar del vector $\mathbf{V}_1 = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ en la dirección del vector $\mathbf{V}_2 = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, es:

- a) $-\frac{\sqrt{14}}{7}$ b) $2\frac{\sqrt{11}}{11}$ c) $8\frac{\sqrt{11}}{11}$ d) $4\frac{\sqrt{14}}{7}$ e) $-9\frac{\sqrt{11}}{11}$

9.4 Producto vectorial

26. Determine el producto vectorial entre los siguientes pares de vectores:

- a) $\mathbf{A}=(2, 3, 1)$; $\mathbf{B}=(-3, 1, 0)$
 b) $\mathbf{C}=(2, 1, -1)$; $\mathbf{D}=(-2, 2, 1)$
 c) $\mathbf{E}=(2, 10, -2)$; $\mathbf{F}=(1, 5, -1)$
 d) $\mathbf{P}=(0, 0, 1)$; $\mathbf{Q}=(1, 0, 1)$
 e) $\mathbf{R}=(1, 0, 0)$; $\mathbf{S}=(0, 1, 0)$

27. $\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^3$, $\|\mathbf{X} \times \mathbf{Y}\| = \|\mathbf{X}\| \|\mathbf{Y}\| \text{sen}(\theta)$, donde θ es el ángulo formado por \mathbf{X} e \mathbf{Y} .

- a) Verdadero b) Falso

28. Conociendo que $\mathbf{V}_1 \bullet (\mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_3) = 0$, ¿qué información se puede deducir sobre estos vectores?

29. Si se definen los vectores $\mathbf{A}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $\mathbf{B}=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ y $\mathbf{C}=\mathbf{i}+4\mathbf{j}+\mathbf{k}$, entonces es VERDAD que:
- \mathbf{A} y \mathbf{C} son ortogonales
 - Los extremos de \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} son los vértices de un triángulo equilátero.
 - $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ es perpendicular a $\mathbf{C}\times\mathbf{B}$.
 - $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=1$
 - \mathbf{A} y \mathbf{B} forman un ángulo de medida $\pi/4$.
30. Encuentre un vector unitario y perpendicular a los vectores $\mathbf{A}=-\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ y $\mathbf{B}=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$.
31. Si se tienen los vectores no paralelos \mathbf{A} y $\mathbf{B}\in\mathbb{R}^3$, tales que $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=5$, $\|\mathbf{C}\times\mathbf{B}\|=\sqrt{2}$ y $\mathbf{A}=2\mathbf{B}-3(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$, entonces el módulo del vector \mathbf{A} es igual a:
- $5\sqrt{2}$
 - 7
 - $7\sqrt{2}$
 - $2\sqrt{7}$
 - $4\sqrt{7}$

9.5 Aplicaciones geométricas del producto vectorial

32. Determine el área de la superficie del paralelogramo definido por los vectores:
- $\mathbf{A}=(1, 3, 0)$; $\mathbf{B}=(-2, 1, 5)$
 - $\mathbf{C}=(1, -1, 6)$; $\mathbf{D}=(-2, 10, 1)$
 - $\mathbf{E}=(1, -4, -2)$; $\mathbf{F}=(0, 7, 0)$
33. Determine el área de la superficie del triángulo definido por los puntos:
- $A(1, 1, 1)$; $B(-1, 2, 3)$; $C(2, 6, 5)$
 - $A(1, 4, 3)$; $B(-2, 2, 2)$; $C(-1, 6, 5)$
 - $A(0, 0, 1)$; $B(-1, 0, 0)$; $C(0, 1, 0)$
34. Determine el volumen del paralelepípedo sustentado por los tres vectores dados:
- $\mathbf{A}=(0, 2, 1)$; $\mathbf{B}=(3, -6, 2)$; $\mathbf{C}=(1, 0, 3)$
 - $\mathbf{A}=(1, 0, 0)$; $\mathbf{B}=(0, -1, 0)$; $\mathbf{C}=(1, 7, 2)$
 - $\mathbf{A}=(2, 1, 4)$; $\mathbf{B}=(-1, 1, 0)$; $\mathbf{C}=(3, 2, 4)$
35. El volumen del paralelepípedo sustentado por los vectores $\mathbf{V}_1=(1, 1, 0)$, $\mathbf{V}_2=(0, 1, 1)$ y $\mathbf{V}_3=(1, 1, 1)$ es igual a 3.
- Verdadero
 - Falso
36. Dados los puntos $P(a, 2a, 3a)$, $Q(3a, a, -2a)$, $R(-a, a, 2a)$ y $S(2a, 5a, a)$, determine el volumen del paralelepípedo sustentado por los vectores \mathbf{PQ} , \mathbf{PR} y \mathbf{PS} .
37. Hallar la altura del paralelepípedo sustentado con los puntos $P(2, 1, 3)$, $Q(4, -2, 2)$, $R(1, 1, 3)$ y $S(-4, 0, 2)$, si su base está formada por los puntos P , Q y S .