**ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL.**

**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS**

**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**

**PROYECTO DE GRADUACIÓN PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE:**

MAGÍSTER EN EDUCACIÓN CON MENCIÓN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.

**TEMA:**

"ELABORACIÓN DE UNA GUÍA DIDÁCTICA EN LA ENSEÑANZA DE TRIGONOMETRÍA PARA ESTUDIANTES DEL PROGRAMA DE DIPLOMA DE BACHILLERATO INTERNACIONAL DE UNA UNIDAD EDUCATIVA DE LA CIUDAD DE GUAYAQUIL".

**AUTOR**

LEONARDO ANTONIO MAYA VALDANO.

GUAYAQUIL – ECUADOR.

**AÑO 2019.**

# RESUMEN

La excelencia académica es el objetivo a conseguir por toda institución educativa por lo tanto las mismas están en busca de mejorar su oferta académica, razón por la cual muchas de ellas son parte de programas internacionales de estudio, en particular la institución donde se realiza este trabajo investigativo cuenta con el Programa de Diploma ofertado por la organización de Bachillerato Internacional en el cual una de las asignaturas obligatorias es Matemáticas la misma que en muchas ocasiones| causa problemas en el aprendizaje de los estudiantes. Se pretende realizar una guía de estudios para uno sus capítulos más importantes como es el aprendizaje de Trigonometría, la cual estará basada en teorías de aprendizajes con el fin de mejorar las destrezas de pensamiento y fomentar el aprendizaje autónomo. Para cumplir con este propósito se consideró a todos los estudiantes de la orientación de Ciencias de Segundo Bachillerato cuyo número es de 66 de un total de 124 individuos, los cuales toman la asignatura de matemáticas nivel medio o de nivel superior. Se evaluó a los estudiantes antes y después de la implementación de la guía didáctica y los resultados sirvieron para medir cuanto ayudó el recurso a mejorar las notas de los alumnos que hicieron uso de la guía y lo beneficioso que fue para ellos contar con una herramienta didáctica que contribuyera a mejorar sus destrezas de pensamiento y a la vez entender mejor el capítulo de Trigonometría el cual fue desarrollado usando los sílabos de la asignatura.

# ABSTRACT

The academic excellence is the principal objective to achieve for every educational institution, thus, these ones are looking for improving their academical offer. This is the reason why many of them are part of international study programs; in particular the institution where this investigative work is realized, counts with the Diploma Program. One offered by the organization of the International Baccalaureate, in which one of the mandatario subjects is Mathematics which, in many occasions, causes learning problems among the students. The intention is to realize a study guide for one of its most important chapters, like the learning of Trigonometry is. Such will be based in learning theories, with the aim of upgrading the thinking skills and promoting self-learning. For fulfilling with this purpose, it was considered every student of Science orientation of Second Year of Baccalaureate, whose number is 66 out of 124 individuals that take the subject of medium or superior level maths. Students were graded before and after the implementation of the study guide; the results served to measure how much the resource helped in the improving of the grades of those students who make use of the study guide, and how beneficious was for them to have a didactic tool that contributed to raise their thinking skills and, at the same time, the better understanding of Trigonometry, which was developed by using the syllables of the subject.

# DEDICATORIA

A Dios en el cual siempre he encontrado refugio en mis malos y buenos momentos y que me ha dado la fuerza para mantenerme firme y perseverante en el cumplimiento de mis objetivos. A mis tres hijas Nicole, Daniela y Angie y a mi querida esposa Jesika quienes son el motivo de mi superación y que me han acompañado y entendido brindándome estabilidad y cariño, a mi madre Eugenia pilar fundamental de mi formación y quién ha sido inspiración para lograr cada una de mis metas. A mis amigos y seres queridos que me han dado ánimo para jamás claudicar a lo largo de mi formación académica

# AGRADECIMIENTO

Agradezco a cada uno de los docentes de la unidad de posgrado de la Escuela Superior Politécnica del Litoral que impartieron sus conocimientos y experiencias profesionales a lo largo del desarrollo de la maestría y que ayudaron de una o de otra manera al crecimiento cognitivo e intelectual de los maestrantes que cursaron en sus aulas.

Menciono un agradecimiento muy especial a mi tutora Mgs.Giselle Lorena Núñez Núñez, quien en toda ocasión estuvo atendiendo mis requerimientos de manera oportuna en el desarrollo de la presente investigación y que confió en que se lograría un buen tabajo de parte de este maestrante.

# DECLARACIÓN EXPRESA

La responsabilidad por los hechos y doctrinas expuestas en este Proyecto de Graduación, me corresponde exclusivamente; el patrimonio intelectual del mismo, corresponde exclusivamente a la ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL.

Leonardo Antonio Maya Valdano.

# TRIBUNAL DE GRADUACIÓN

Mgtr. Bolívar Flores Nicolalde.

PRESIDENTE

M.Sc. Giselle Núñez Núñez

DIRECTOR

M.Sc. John Ramírez Figueroa

VOCAL PRINCIPAL

# TABLA DE CONTENIDO

# INDICE DE FIGURAS

# INDICE DE TABLAS

# CAPÍTULO 1

## 1. EL PROBLEMA.

### 1.1 Antecedentes

La calidad académica es el objetivo a alcanzar de toda institución educativa, ser competitivos y estar a la altura de estándares internacionales son factores que se toman a consideración con el fin de estar a la vanguardia con empresas que brindan servicios de educación. En el Ecuador muchos colegios han analizado esta situación y han optado por ser parte de la Organización Bachillerato Internacional que fue creada en 1968 y que ofrece cuatro programas de formación educativa, exigente y de calidad a una comunidad de colegios a nivel mundial con el propósito de crear un mundo mejor y más pacífico .Los programas están dirigidos a alumnos de 3 a 19 años, que se imparten en 4.786 colegios en el mundo, según detalla en su sitio web (ibo.org) la organización con sede en Ginebra (Suiza).

En el Programa de la Escuela Primaria. (PEP) las edades están entre los: 3-12 años y se ofrece desde 1997. En el Programa de los Años Intermedios. (PAI): las edades están entre 11-16 años y se ofrece desde 1994.En el Programa del Diploma (PD) las edades están entre 16-19 años y se ofrece desde 1968. En el Programa de Orientación Profesional (POP) las edades están entre 16-19 años se ofrece desde 2012.

Ecuador tiene 266 instituciones educativas con el Programa de Diploma, de las cuales 16 cuentan con el Programa de Escuela Primaria y 17 cuentan con el Programa de Años Intermedios, no existen colegios registrados en el Programa de Orientación Profesional, los mismos que están distribuidos en 131 distritos de las nueve zonas. De estas, 201 son fiscales, 64 particulares y 1 municipal.

El Programa del Diploma (PD), con su propio sistema de evaluación, está destinado a estudiantes de 16 a 19 años de segundo y tercer año de Bachillerato. Tiene como objetivo formar alumnos que logren una excelente amplitud y profundidad en sus conocimientos, al tiempo que crezcan física, intelectual, emocional y éticamente. Ayuda a futuro a tener acceso a unas 270 universidades del mundo sin la necesidad de realizar el examen de selectividad.

El programa está formado por el tronco común del PD y seis grupos de asignaturas. El tronco común que está integrado por tres componentes troncales tiene como meta ampliar la experiencia educativa de los alumnos y desafiarlos a aplicar sus conocimientos y habilidades. Los tres componentes troncales son: Teoría del conocimiento (TdC), en el que los alumnos reflexionan sobre la naturaleza del conocimiento y la manera en la que conocemos lo que afirmamos saber; Monografía, que es un trabajo de investigación independiente y dirigido por el propio alumno que culmina con un ensayo de 4.000 palabras; Creatividad, acción y servicio (CAS), en el que los alumnos completan un proyecto relacionado con estos tres conceptos. Los seis grupos de asignaturas, que comprenden diferentes cursos, son: Estudios de Lengua y Literatura, Adquisición de Lenguas, Individuos y Sociedades, Ciencias, Matemáticas y Artes.

Matemáticas uno de los cursos de mayor dificultad dentro de los grupos tiene un curriculum muy extenso y exigente, entre los diferentes temas uno de los de mayor dificultad es el capítulo de Trigonometría debido a que para la mayoría de alumnos termina siendo un estudio tedioso y complicado, en muchas ocasiones las explicaciones dentro del aula de clases no son suficientes. Para mejorar esta problemática se debería inculcar la lectura promoviendo una cultura autónoma para el aprendizaje teniendo para ello una buena fuente de consulta que oriente y motive al estudiante fomentando la investigación. Por estas razones las siguientes ideas son de gran importancia con respecto al estudio de Trigonometría y al desarrollo del trabajo autónomo. De acuerdo a Fiallo, J. & Gutiérrez, A. (2006):

El estudio de la Trigonometría puede convertirse en un proceso memorístico, rutinario y mecánico, sin ningún sentido ni utilidad si no se brindan las condiciones suficientes para ello. Por esta razón, es importante brindarle al estudiante no sólo una serie de conceptos, si no las herramientas y estrategias didácticas necesarias para que explore, analice, relacione, conjeture, demuestre y aprenda con sentido los conceptos y propiedades trigonométricas, que aprenda a utilizar diferentes procedimientos y estrategias de razonamiento, a producir distintos tipos de demostración en la solución de problemas y a relacionar las diferentes representaciones de los conceptos de tal manera que el aprendizaje sea más efectivo y duradero .(Ponce Silva, 2019, p.150)

Lo anteriormente descrito está relacionado con lo dicho por Ortiz, H. (2012):
Las estrategias didácticas suponen un proceso enseñanza aprendizaje, con ausencia o sin ausencia del docente, porque la instrucción se lleva a cabo con el uso de los medios instruccionales o las relaciones interpersonales, logrando que el alumno alcance ciertas competencias previamente definidas a partir de conductas iniciales. (Ponce Silva, 2019, p. 152)

Es importante mencionar lo descrito por Flores, F. (2008)
La trigonometría al ser una rama muy técnica debe ser tratada con especial cuidado por el profesorado, intentando siempre motivar y animar a los alumnos para que confíen en sus propias capacidades y hacerles ver el lado más práctico dl la trigonometría. (Ponce Silva, 2019, p. 152)

### 1.2 Descripción del problema.

El estudio de las matemáticas en toda formación académica es indispensable e inevitable tanto así que es una asignatura que está presente en todos los niveles de educación de un estudiante desde sus años básicos hasta la culminación de sus estudios superiores, razón por la cual se debe dar un énfasis especial en su enseñanza y aprendizaje. Las matemáticas alcanzan una dimensión internacional, no importa en donde estemos, que idioma hablemos, que diferencias culturales tengamos, en toda instrucción formativa estará presente su estudio. Por alcanzar esta dimensión su problemática de aprendizaje es también motivo de análisis.

Las diferentes sociedades a nivel mundial tienen su propio esquema de cómo llevar el estudio de las matemáticas, teniendo cada una de ellas resultados diferentes en las evaluaciones internacionales del desempeño de los estudiantes. En Ecuador los resultados de las última evaluaciones según “Pruebas PISA-D 2018 (PISA Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes), el 70.9% de los estudiantes no alcanzó en Matemáticas el nivel 2, categorizado como el nivel de desempeño básico. El desempeño promedio de Ecuador fue de 377 sobre 1000”. (Comunidad, 2019, parrafo 1)

Es notorio que existe una problemática en el estudio de las matemáticas a nivel nacional que se puede relacionar en la forma en que los maestros transmiten información o en la forma en que los estudiantes receptan y asimilan esa información. Entre los diferentes capítulos que se deben estudiar en la formación de matemáticas se encuentra Trigonometría que resulta muchas veces para los estudiantes en general un desafío por la complejidad y extensión del tema especialmente para los alumnos que postulan una certificación en el Programa de Diploma del Bachillerato Internacional a los cuales les serviría aparte de las clases magistrales tener una guía didáctica para el estudio de este capítulo que les ayude a comprender mejor la temática cuando no haya sido suficiente estar presente en clases para obtener un aprendizaje significativo.

En la institución educativa en la cual se desea elaborar e implementar la guía didáctica para el estudio de Trigonometría, el Programa de Diploma de Bachillerato Internacional empieza formalmente en Segundo de Bachillerato y está organizado en seis áreas académicas, entre éstas, se encuentra Matemáticas, la cual es una asignatura obligatoria para la obtención del Diploma, que se la divide actualmente en Matemáticas Nivel Medio y Matemáticas Nivel Superior. En ambas su estudio es fundamental para el desarrollo de otros capítulos tales como Geometría, Números Complejos, Vectores, Cálculo Diferencial e Integral en los cuales, el tener conocimientos de Trigonometría es indispensable. Por tal razón tener una guía que ayude a facilitar el aprendizaje de Trigonometría será de gran utilidad para los estudiantes de la institución.

Los resultados de las evaluaciones del capítulo de Trigonometría usualmente reflejan la dificultad que tienen los estudiantes para alcanzar notas satisfactorias, estadísticamente el 60% de las calificaciones obtenidas en los últimos cinco años por los alumnos de segundo de bachillerato de esta institución educativa en lo referente al capítulo de Trigonometría se ubican en rango del PAAR, que es una escala de calificación establecida por el Ministerio de Educación del Ecuador.

En el art. 194, del Reglamento de la LOEI (Ley Orgánica de Educación Intercultural) , señala que las calificaciones deben hacer referencia al cumplimiento de los objetivos de aprendizaje establecidos en el currículo y en los estándares de aprendizajes nacionales, los cuales se establecen en los siguientes rangos:

9.00-10.00 DAR: Domina los aprendizajes requeridos
7.00-8.99 AAR: Alcanza los aprendizajes requeridos
4.00-6.99 PAAR: Próximo a alcanzar los aprendizajes requeridos
3.99-0 NAAR: no alcanza los aprendizajes requeridos.

Se desea lograr con la ayuda de una guía didáctica que los resultados estén por encima del PAAR.

Ante el planteamiento realizado surge la siguiente interrogante: ¿Cómo debería estar diseñada una guía didáctica, que ayude a mejorar los resultados de las evaluaciones de Trigonometría a los estudiantes de Segundo Bachillerato en una institución educativa de Guayaquil?

## 1.3 Objetivos.

### 1.3.1 Objetivo General.

Elaborar una guía didáctica para la enseñanza de Trigonometría utilizando métodos analíticos, gráficos y tecnológicos basados en estándares internacionales, con el fin de mejorar las destrezas de pensamiento de los estudiantes de Segundo de Bachillerato de una unidad educativa particular con Programa de Diploma de Bachillerato Internacional en la ciudad de Guayaquil.

### 1.3.2 Objetivos Específicos.

Organizar el estudio de Trigonometría teniendo como base las Guías de estudio de Matemáticas de Nivel Medio y Nivel Superior del Bachillerato Internacional con el fin de que los resultados de las evaluaciones en el capítulo de Trigonometría sean satisfactorios y se ayude a mejorar el nivel cognitivo.

Explicar los fundamentos teóricos de Trigonometría con metodología analítica y gráfica que faciliten la comprensión del tema con el objetivo de que el aprendizaje sea significativo y se logre cimentar una base de conocimientos sólidos.

Diseñar instrumentos de evaluación del aprendizaje basados en la resolución de problemas que tengan un contexto aplicable a la vida real con el fin de que el estudiante aprecie la importancia del estudio de la Trigonometría.

Elaborar una guía didáctica que ayude a mejorar las destrezas de pensamiento en el estudio de Trigonometría proponiendo y resolviendo, en algunos casos con el uso de tecnología, problemas de situaciones reales y abstractas con el fin de que los estudiantes disfruten enfrentarse a ese reto.

## 1.4 Hipótesis y Variables.

### 1.4.1 Hipótesis.

¿Se podrá con la elaboración de una guía didáctica en el estudio de Trigonometría mejorar las destrezas de pensamiento y obtener mejores resultados en las evaluaciones relacionadas a este tema, en los estudiantes de Segundo de Bachillerato de una unidad educativa particular con Programa de Diploma de Bachillerato Internacional en la ciudad de Guayaquil?

### 1.4.2 Variable Independiente.

Uso frecuente de la guía didáctica para el aprendizaje de Trigonometría por parte de los estudiantes de Segundo de Bachillerato del Programa del diploma BI

### 1.4.3 Variable Dependiente.

Resultados obtenidos en las evaluaciones de Trigonometría por los estudiantes de Segundo de Bachillerato como medidor del aprendizaje.

## 1.5 Alcance.

Este proyecto estará dirigido a los estudiantes de Segundo de Bachillerato de una institución educativa de la ciudad de Guayaquil que ofrece el Programa de Diploma de Bachillerato Internacional.

La elaboración de la guía didáctica se realizará en un lapso de seis meses, beneficiando tanto a los alumnos que estén certificando en la asignatura de Matemáticas Nivel Medio como a los de Nivel Superior en el Programa de Diploma del Bachillerato Internacional en el capítulo de Trigonometría ya que estará basada en el currículo de Matemáticas del mismo programa.

Se pretende con este trabajo investigativo que los estudiantes tengan un acceso a la información en el capítulo de Trigonometría en su idioma y con problemas de contextualización aplicados a la realidad del medio que los rodea.

## 1.6 Justificación.

La razón de esta investigación se fundamenta en la problemática del aprendizaje de la Trigonometría, la misma que puede ser causada por el insuficiente material bibliográfico, estrategias no adecuadas por parte de los docentes para empezar a explicar el tema, la apatía de los alumnos debido a la dificultad que presenta el estudio de este capítulo.

Se pude mencionar que a nivel del Programa de Bachillerato Internacional no siempre está disponible la información en español ya que las primeras actualizaciones de los libros se dan en Inglés o en Francés, (dos de los tres idiomas en que se desarrolla el Programa, el otro es español), y esto dificulta el aprendizaje cuando no se estudia en su lengua natal, razón por la cual tener una guía didáctica en propio idioma será beneficioso tanto a alumnos como a profesores.

Los ejercicios que tienen un contexto en la guía se los enfocarán de acuerdo a lo que rodea cotidianamente al estudiante con el fin de que logre mayor interés fomentando el estudio de la Trigonometría. Con una guía bien estructurada con explicaciones detalladas y escritas en lenguaje amigable, se atrapará al alumno en la lectura para que quiera seguir descubriendo más y la vez fomentando el trabajo autónomo.

Se desea que los lectores encuentren repuestas a sus interrogantes en la mayoría de los casos posibles con explicaciones directas y concisas, en este punto se comparte lo expresado por Villalobos, A. (2015).

> De acuerdo al rendimiento académico se encontró que la mayoría de los estudiantes no presenta interés por obtener un desempeño alto, se conforman con obtener un resultado aceptable; lo importante para ellos es no reprobar la asignatura. Durante las clases los estudiantes se muestran motivados e interesados por el desarrollo de las mismas, pero falta mayor compromiso con la realización de las actividades extra-clase a través de las cuales podrían fortalecer sus conocimientos y de esta manera mejorar su desempeño. Se observa además que algunos estudiantes presentan inconvenientes en el manejo de conceptos básicos para desarrollar las temáticas

> propuestas en clase, lo que también representa una causa del desempeño académico aceptable o bajo. (Ponce Silva, 2019, p. 152)

Bajo esta afirmación, las actividades extras clases que se mencionan las podrían encontrar en la guía didáctica para el aprendizaje de la Trigonometría.

# CAPÍTULO 2

## 2. MARCO TEÓRICO.

### 2.1 Paradigmas.

Etimológicamente, su significado se origina en la Antigua Grecia, palabra que se deriva del término Paradigma que significa modelo o ejemplo, esta traducción se la acepta en la actualidad ya que cuando se refiere a un paradigma se lo relaciona con ejemplos, modelos o patrones a seguir. Se puede decir que los paradigmas son maneras de interpretar la realidad y a partir de ellos se investiga, estudia y el mundo o un área de la ciencia. Desde la década de los 60 el término se relacionó con investigaciones científicas, así como en los estudios de epistemología (rama de la filosofía que se ocupa de estudiar la naturaleza, el origen y la validez del conocimiento), pedagogía y psicología.

#### 2.1.1 Paradigmas Educativos.

Son modelos empleados en el ámbito educativo y tienen un gran impacto en la forma en que los alumnos se enfrentan al conocimiento y como ellos reaccionan al mismo aceptándolo o rechazándolo según la manera en que sean utilizados. Luna (2011) señala que "en el sector educativo, la formulación de nuevos paradigmas supone una evolución para lograr el mejoramiento del conocimiento disponible, considerándose nuevos instrumentos para resolver incógnitas" (Perez, s.f). Basados en sus características a nivel educativo se destacan los siguientes paradigmas: Paradigma Conductista, Paradigma Cognitivo, Paradigma Constructivista, Paradigma Histórico Social.

#### 2.1.1.1 Paradigma Conductista.

Entre los paradigmas vigentes, el que más se ha mantenido a través de los años teniendo mayor tradición es el Conductista, el cual se ha proyectado con mayor incidencia en la Psicología Educativa. Se originó alrededor de los años 30, basado en la Teoría Conductista, esta clase de paradigma nos dice que el aprendizaje debe enmarcarse en datos observables y medibles, donde el docente según Hernández (2010) se muestra como "una persona dotada de competencias aprendidas, que transmite conforme a una planificación realizada en función de objetivos específicos" (Chávez Rojas , 2011). Lo afirmado está relacionado con lo expresado por Chávez (2011) "el profesor debe proporcionar a través de principios, procedimientos y programas conductuales las herramientas a los estudiantes para alcanzar los objetivos de aprendizaje propuestos" (Perez, s.f).

El paradigma conductista considera al alumno un receptor de conocimientos o como un agente pasivo, (obligado a aprenderse lo que se le enseña), los mismos que son transmitidos por el profesor considerado un agente activo o comunicador de algo ya existente que en lo general le fue transmitido a él de la misma forma. También supone que la enseñanza consiste en proporcionar contenidos o información al alumno la misma que debe ser adquirida. El profesor diseña y estructura los contenidos y hace reforzamiento para transmitir conocimientos y mejorar habilidades de pensamiento. Según Ertmer, P. y Newby, T. (1993) se relaciona a la enseñanza con patrón conductista como "un énfasis en producir resultados observables y mensurables en los estudiantes, mediante la evaluación previa de los mismos para determinar dónde debe comenzar la instrucción" (Chávez Rojas , 2011). Según este pensamiento es indispensable saber que conocimientos tiene el alumno para determinar qué objetivos se cumplieron y cuáles no.

Con respecto a la evaluación en el modelo conductista según Hernández Rojas (2010) la misma se "centra en el producto, es decir, en las ejecuciones mecánicas de las acciones repetitivas sin dar cabida a la reflexión sobre la conducta ejecutada, las cuales deben ser medibles y cuantificables y el criterio de comparación a utilizar para su valoración son los objetivos establecidos” (Chávez Rojas , 2011). Para ese paradigma no importa como los estudiantes obtuvieron el aprendizaje, lo esencial son las calificaciones obtenidas. El mismo Hernández Rojas (2010) afirma que “ la evaluación conductista parte del supuesto de que todos los alumnos son iguales, por lo tanto, todos reciben la misma información; y se evalúan generalmente de la misma manera, con los mismos instrumentos y pautas establecidas para calificarlos” (Chávez Rojas , 2011). Las evaluaciones en este modelo son considerados como herramientas En la actualidad este modelo psicopedagógico con todas sus deficiencias aún se sigue utilizando, ya que brinda resultados en el proceso enseñanza-aprendizaje.

#### 2.1.1.2 Paradigma Cognitivo.

El modelo Cognitivo ha causado un fuerte impacto en la Psicología de la Educación a lo largo de los últimos años. Se empezó a desarrollar en los años 50 en Estados Unidos destacando que la educación debe orientarse al desarrollo de habilidades de aprendizaje y no solo el enseñar conocimiento. Se deriva dela combinación de tres campos: la teoría de la información, la lingüística y la ciencia de los ordenadores y desde el punto de vista educativo sus objetivos principales deben centrarse en el aprender a aprender y en el enseñar a pensar. Los componentes cognitivos que se desarrollan en este paradigma son la atención, percepción, memoria, inteligencia, lenguaje, pensamiento, etc.

Los primeros autores de esta corriente cognitiva que se han prolongado hasta la actualidad son: Jerome Seymour Bruner y David Paul Ausubel. Bruner teórico de las múltiples facetas de la cognición y uno de los psicólogos educativos con mayor trayectoria, fue quien causó un fuerte impacto en los sesenta y parte de los setenta en Estados Unidos con sus propuestas del aprendizaje por descubrimiento y acerca del currículo para pensar. Ausubel en la década de los setenta, elaboró la teoría del aprendizaje significativo o de la asimilación, y fue uno de los teóricos que mayor dedicación demostró por el análisis meta disciplinar de la psicología educativa y de los problemas educativos en contextos escolares.

El concepto de enseñanza de este paradigma consiste en desarrollar las habilidades de aprendizaje de los estudiantes en lugar solo de transmitir información. Según Hernández (1997) “el aprendizaje de contenidos o dominios de conocimiento (socialmente válido, etc.) por parte del alumno no es suficiente” (Rodrigues Da Silva, 2017) El alumno debe aprender los conocimientos para aplicarlos en diferentes situaciones que aparecen a su alrededor, siendo ésta, por tanto, la meta principal de la enseñanza.

Según Hernández (1997) “se puede afirmar que los seguidores de este paradigma cognitivo enfocan sus metas y objetivos en la premisa de conllevar al sujeto a aprender a aprender y a enseñar a pensar” (Rodrigues Da Silva, 2017). Es importante recalcar el trabajo realizado por Benjamin Bloom en su taxonomía sobre la clasificación cognitiva de los objetivos, clasificados en seis niveles de complejidad: Conocimiento, comprensión, aplicación, análisis, síntesis y evaluación**.**

La enseñanza cognitivista se enfoca más al contenido que en la forma, no se centran en desarrollar objetivos extensos, ni en tareas complejas, supone que el discente ya conoce algo y se trabaja en mejorar ese conocimiento a través de aprendizaje significativo entre lo cual se puede mencionar que el alumno ha de contener ideas incluyentes, es decir, que la nueva información esté relacionada con conocimientos previos.

Existen tres estrategias de procedimiento que son importantes para el paradigma cognoscitivo: a) Estrategias cognitivas que son planes de acción realizadas por el alumno que son usados en el buen procesamiento de la información. b) Estrategias de metacognición que se dan cuando el alumno tiene consciencia de sus procesos cognitivos. c) Estrategias autorregulatorias que controlan todo el proceso de aprendizaje hasta el alcance de una solución

La evaluación que es una  parte importante en el proceso de enseñanza-aprendizaje y en el caso de aprendizaje significativo la taxonomía cognoscitiva de Bloom ha servido para dar recomendaciones  a la forma de evaluar que se menciona a continuación:

- Los objetivos de conocimiento que evalúa el recuerdo de la información con consignas como describir, identificar, describir, etc.

- Los objetivos de comprensión  evalúan los aspectos más importantes de la información recibida y que extraiga lo más significativo de la misma en actividades como parafrasear, explicar inferir, etc.

- Los objetivos de aplicación donde el estudiante utiliza la información aprendida en nuevos contextos en actividades como resolver, utilizar, aplicar, etc.

- Los objetivos de análisis que se hacen mediante pruebas de ensayo, proyectos, monografías en actividades como analizar, desglosar, planificar, etc.

#### 2.1.1.3 Paradigma Constructivista.

El paradigma Constructivista data de la década de los años 30 especialmente en algunos de los trabajos de Jean Piaget, Lev Vygotsky, Jerome  Bruner, David Ausubel, Albert Bandura, James Royer y Richard Allan. A diferencia del paradigma Conductista el Constructivismo describe al estudiante como un ente activo y cambiante cuyo  aprendizaje diario es el resultado de experiencias y a las estructuras mentales desarrolladas. El alumno debe internalizar, transformar y reacomodar la nueva información, adaptándola a los aprendizajes previos.

Piaget en su desarrollo constructiva afirma que la adquisición del conocimiento se caracteriza por lo siguiente: Entre el sujeto y el objeto existe una relación no estática, el individuo es activo e interpreta la información que le llega del entorno y los nuevos conocimientos se generan a partir de los anteriores ya analizados e interiorizados. El proceso de construcción del conocimiento está en constante movimiento el cual consiste en restructuración y reconstrucción, la adquisición del nuevo conocimiento se da a través de la movilización de un conocimiento anterior.

En la actualidad existe un acuerdo casi unificado respecto a que en el ámbito de la educación el constructivismo no tiene un solo lineamiento y según Coll (1997) "no hay un solo constructivismo, sino muchos constructivismos: tantos como teorías psicológicas del desarrollo y del aprendizaje inspiradas en, o compatibles con los principios básicos de la explicación constructivista del psiquismo humano (Coloma Manrique & Tafur Puente, 1999). En referencia a que no existe un solo modelo constructivista existe un acuerdo en reconocer características comunes con respecto al aprendizaje constructivista que se mencionan a continuación: El aprendizaje es un fenómeno social, el aprendizaje es situado, el aprendizaje es activo, el aprendizaje es cooperativo, el aprendizaje es un proceso, el aprendizaje es propio y característico.

Se han dicho varias cosas acerca de la función del maestro dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje constructivista y según Rogers (1972)

> Cualquier cosa que yo pueda enseñar a otra persona es intrascendente y ejerce poca o ninguna influencia en ella. Estoy convencido de que lo único que importa es el aprendizaje capaz de influir significativamente en la conducta de los demás. He llegado a descubrir que el único aprendizaje que puede influir en la conducta de los demás, es el que el individuo descubre e incorpora por sí mismo. El aprendizaje basado en el propio aprendizaje, la verdad incorporada y asimilada en la propia experiencia, no puede comunicarse de manera directa a otra persona, porque al transmitir esa experiencia la transforma en enseñanza y sus resultados pierden trascendencia. He llegado a sentir que los resultados de la enseñanza son intrascendentes e incluso dañinos, porque el estudiante no llega a confiar en su propia experiencia-aprendizaje y

sólo confía en la enseñanza del maestro. (Coloma Manrique & Tafur Puente, 1999)

Según lo descrito por con Reátegui (1997) y Raffo (1998) el maestro podría facilitar el aprendizaje de los alumnos si:

Conoce en profundidad sus características, problemas e intereses

Parte de los problemas y curiosidades que plantean los alumnos.

Interactúa con el alumno afectivo y cognitivamente para alcanzar aprendizajes significativos.

Reconoce que el desarrollo de las capacidades del alumno está estrechamente ligado al dominio de los contenidos.

Da mayor importancia a los procesos que a los resultados.

Es facilitador de estrategias de aprendizaje.

Potencia el aprendizaje por descubrimiento.

Es un mediador que posibilite la comprensión, reflexión y recreación de la cultura.

Genera conflictos cognitivos para que los alumnos construyan y desarrollen sus competencias.

Ayuda a que el estudiante emplee la información ya conocida y la nueva información en situaciones de su vida.

Facilita la elaboración de inferencias y conclusiones.

Enfatiza tareas que el alumno comprende.

Es flexible en las tareas del programa.

Da paso progresivo a la motivación intrínseca.

Promueve una atmósfera de reciprocidad, respeto y confianza, creando un clima agradable que permita plantear retos y problemas.

Considera la escuela como un espacio donde es posible el error reconociéndolo como un medio para seguir aprendiendo.

Genera la autoevaluación del desempeño. (Coloma Manrique & Tafur Puente, 1999)

La evaluación en el paradigma constructivista es una herramienta para obtener información del cumplimiento de los objetivos y ofrece al docente datos del proceso de formación que le ayudará a tomar decisiones en beneficio de los educandos. A través de los años se han considerado las razones del por qué evaluar y cuáles son sus motivaciones, para ciertas corrientes es considerada una persecución, más que un proceso de aprendizaje y de mejora de la formación. Según Rosales (2000) la evaluación es importante por las siguientes razones:
a) Recoge información sobre los componentes y actividades de la enseñanza; b) interpreta esta información de acuerdo con una determinada teoría o esquema conceptual, c) adopta decisiones relativas al perfeccionamiento del sistema en su conjunto y de cada uno de sus componentes (Ortiz Granja, 2015)

Entre las más destacadas ideas de la importancia de la evaluación se puede mencionar según Pulgar (2005) las siguientes definiciones:

> Es una manera de recibir un feedback directo sobre la formación en su conjunto y del proceso de enseñanza-aprendizaje que se ha llevado a cabo; tanto en el equipo formador o institución como en el propio alumnado del curso; es un modo de mejorar y progresar ya que implica un aprendizaje de la propia intervención; facilita la toma de decisiones, tanto durante el curso como una vez finalizado éste, de cara a planificaciones futuras, con lo cual, se fomenta un análisis prospectivo sobre cuáles y cómo deben ser las intervenciones futuras. (Ortiz Granja, 2015)

La evaluación es una herramienta que debe ser utilizada correctamente para verificar los avances en el aprendizaje de los alumnos y deben ser realizadas con buenas estructuras en las cuales se aprecie como el estudiante ha construido el nuevo conocimiento.

### 2.1.1.4 Paradigma Histórico Social.

El paradigma histórico-social que también es conocido como paradigma sociocultural o histórico cultural, fue desarrollado por el psicólogo ruso de origen judío Lev Semiónovich Vygotsky alrededor de1920 fundamentando su obra en el hecho de que el desarrollo de los humanos se explica en términos de interacción social, pero es en 1960 el año en el cual su obra fue descubierta y divulgada por los medios académicos del mundo occidental. Los puntos más destacados de su obra son: 1) La elaboración de un programa teórico, que intentó con acierto articular los procesos procesos psicológicos y socioculturales. 2) La propuesta metodológica de investigación genética e histórica a la vez en las cuales hay ciertas coincidencias con propuestos de Jean Piaget así como también marcadas diferencias.

Para algunos seguidores de este modelo y según Méndez (2002):

> El individuo aunque importante no es la única variable en el aprendizaje. Su historia personal, su clase social y consecuentemente sus oportunidades sociales, su época histórica, las herramientas que tenga a su disposición, son variables que no solo apoyan el aprendizaje sino que son parte integral de él. (Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey [ITESM], s.f).

Otros autores como Hernández (2002) que coinciden con la esencia de este modelo destacan como una premisa central en el paradigma que:

> El proceso de desarrollo cognitivo individual no es independiente o autónomo de los procesos socioculturales en general, ni de los procesos educacionales en particular. No es posible estudiar ningún proceso de desarrollo psicológico sin tomar en cuenta el contexto histórico-cultural en el que se encuentra inmerso, el cual trae consigo una serie de instrumentos y prácticas sociales

> históricamente determinados y organizados” (Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey[ITESM], s.f)

Para Vygotsky es importante la instrucción formal en el crecimiento de las funciones psicológicas superiores (la atención, la percepción, memoria, pensamiento, lenguaje), afirmando que el desarrollo psicológico no es posible sin la instrucción, se puede decir que no existe una concepción de enseñanza Vygotskiana en la actualidad pero se la relaciona con la instrucción.

La concepción del alumno en este modelo es la de un ente social, protagonista y producto de estas interacciones sociales en la que se ve involucrado a lo largo de su vida escolar y extraescolar. El alumno es una persona que internaliza el conocimiento el cual estuvo primero en el plano interindividual y pasa posteriormente al plano intraindividual. Los conocimientos, habilidades, procesos que desde el principio fueron transmitidos y regulados por otros, el alumno termina interiorizándolos para luego hacer uso de los mismos de manera autorregulada. En este sentido el papel de la interacción social con los otros tales como sus maestros, sus padres, sus amigos de nivel o de niveles superiores, es considerado muy importante para el desarrollo cognoscitivo y sociocultural.

La concepción del maestro en este paradigma es la de un experto que enseña de forma interactiva promoviendo zonas de desarrollo próximo ZDP. Su participación en el proceso de enseñanza de algún contenido (conocimientos, habilidades, experiencias) al principio debe ser directiva mediante la creación de un sistema de apoyo denominado andamiaje.

Vygotsky (1932) define a la zona de desarrollo próximo como”la distancia entre el nivel de desarrollo real del niño tal y como puede ser determinado a partir de la resolución independiente de problemas y el nivel más elevado de desarrollo potencial tal y como es determinado por la resolución de problemas bajo la guía del adulto o en colaboración con sus iguales más capacitados" (Zapata Ros, 2012)

La teoría del andamiaje es la metáfora utilizada por primera vez por Jerome Bruner y sus colaboradores para explicar lo que ocurre en el ámbito educativo, en el que los maestros apoyan al alumno para utilizar una estrategia cognitiva que les permita desarrollar su potencial debido a esto el niño o novato pueda realizar una tarea o alcanzar una meta que no lograría sin recibir ayuda, Bruner dice que no se trata de resolver los problemas del niño sino proporcionarles más recursos para resolverlo).

La concepción de la evaluación en este modelo es diferente a la evaluación tradicional que solo apunta a valorar el nivel real del desarrollo cognitivo del individuo en comparación con la evaluación dinámica que tiene como objetivo valorar el nivel potencial generando un micro desarrollo cognitivo temporal en el alumno mediante un préstamo de conciencia de parte del evaluador que significa dirigir verbalmente la memoria operativa el evaluado.

### 2.2 Destrezas de Pensamiento.

Se puede definir la destreza como la capacidad que tiene una persona para realizar correctamente algo, usualmente el término es confundido con habilidad que es el talento innato que posee un individuo en una determinada actividad sea física, mental o social, se puede decir entonces que una destreza es una habilidad desarrollada. Para este trabajo investigativo el centro serán las destrezas de pensamiento.

Según Del Pozo (2009) "las destrezas de pensamiento son organizadores que nos ayudan a realizar un tipo de pensamiento profundo y cuidadoso" (Cabrerizo Aparicio, 2019). Swartz (2015) nombra algunas de las utilidades de las destrezas de pensamiento "sirven para desarrollar el pensamiento profundo y eficaz., emplean procedimientos reflexivos específicos y apropiados para un ejercicio de pensamiento determinado y se apoyan en organizadores gráficos y llevan asociado un mapa de pensamiento" (Cabrerizo Aparicio, 2019).

Del Pozo (2009) clasifica estas destrezas de pensamiento en las siguientes categorías:

- Destrezas para generar ideas: Facilitan el pensamiento creativo, que consiste en una serie de habilidades para generar el conocimiento y desarrollar la imaginación.

- Destrezas para clarificar ideas: Proporcionan habilidades para mejorar la comprensión y la capacidad de usar la información.

- Destrezas para evaluar si las ideas son razonables: Facilitan el pensamiento crítico, relacionado con la capacidad de evaluar e infieren información. (Cabrerizo Aparicio, 2019)

El mismo Del Pozo (2009) indica que las destrezas de pensamiento nos ayudan para el desarrollo de los siguientes procesos de pensamiento:
“La toma de decisiones para elegir la solución más idónea para resolver un problema y la resolución de problemas que es un proceso de reconocimiento y percepción de una situación problemática que exige una solución”. (Cabrerizo Aparicio, 2019)

### 2.3 Teorías de Aprendizaje.

Existen varias definiciones sobre el concepto de aprendizaje pero existe un consenso de que es el proceso o conjunto de procesos a través del cual o de los cuales, se adquieren o se modifican ideas, habilidades, destrezas, conductas o valores, como resultado del estudio, la experiencia, la instrucción, el razonamiento o la observación. Se pueden mencionar varias características tales como:

- Permite atribuir significado y valor al conocimiento.

- Permite hacer operativo el conocimiento en formas distintas al que se adquiere sean estos nuevos y complejos.

- El conocimiento adquirido puede ser representado y transmitido a otros individuos y grupos de forma remota y atemporal mediante lenguaje escrito o códigos digitales a los cuales se los denomina códigos complejos.

Entre varios aportes al concepto de aprendizaje se mencionan los pensamientos de varios autores:
Según Gagné (1985) "el aprendizaje consiste en un cambio de la disposición o capacidad humana, con carácter de relativa permanencia y que no es atribuible simplemente al proceso de desarrollo" (Zapata Ros, 2012). La teoría de Gagné se enmarca dentro de las teorías del procesamiento de información o también llamadas teorías cibernéticas. Desde este punto de vista, el proceso de aprendizaje del individuo es similar al funcionamiento de una computadora.

Feldman (2005) manifiesta que el aprendizaje es "un proceso de cambio relativamente permanente en el comportamiento de una persona generado por la experiencia" (Zapata Ros, 2012). Esta definición de aprendizaje implica un cambio conductual, el mismo que es duradero y que ocurre de algunas formas tales como la práctica, la observación, la experiencia que se llega a tener con el ejemplo de otros individuos.

Biggie (1985) declara que el aprendizaje es:

> Un proceso dinámico dentro del cual el mundo de la comprensión que constantemente se extiende llega a abarcar un mundo psicológico continuamente en expansión… significa desarrollo de un sentido de dirección o influencia, que puede emplear cuando se presenta la ocasión y lo considere conveniente… todo esto significa que el aprendizaje es un desarrollo de la inteligencia (Zapata Ros, 2012).

Esto nos indica que el aprendizaje conduce a cambios en la estructura de conocimiento, de la moral, de la motivación y física del ser humano.

### 2.3.1 Aprendizaje Significativo.

No se puede empezar a describir lo que representa el aprendizaje significativo sin antes mencionar a David Paul Ausubel quien fuera un psicólogo y pedagogo nacido en New York, Estados Unidos (1918-2008) quien llegó a convertirse en uno de los máximos representantes de la psicología constructivista y que además se centró en elaborar la enseñanza a partir de los conocimientos que tiene el alumno.

La teoría de Ausubel de aprendizaje significativo indica la función que tienen los conocimientos previos del alumno en la adquisición de nuevas informaciones. Lo significativo solo es posible si se relacionan los nuevos conocimientos con las que ya posee el individuo. Para que el aprendizaje sea significativo el material pedagógico debe presentar una estructura con relaciones claras, buena diferenciación entre los conceptos y una adecuada organización.

Las herramientas que sirven para incentivar este aprendizaje es el trabajo con redes o mapas conceptuales que ayudan a organizar el conocimiento de los alumnos. En este tipo de aprendizaje los docentes deben tener en cuenta los conocimientos previos del alumno, organizar el material de manera lógica y jerárquica, además de considerar la motivación como un medio importante para despertar en el alumno el interés por aprender.

Ausubel distingue tres tipos de aprendizaje significativo: de representaciones, de conceptos y de proposiciones. El primero mencionado se lo califica como el más elemental del cual dependen los otros tipos de aprendizaje y se lo relaciona con la adquisición de vocabulario comparándolo con el aprendizaje repetitivo .El segundo aprendizaje está relacionado con conceptos a lo que el autor define como “objetos, eventos, situaciones o propiedades que poseen atributos de criterio comunes y que se designan mediante algún símbolo o signo”. Existen dos formas básicas de aprenderlos, uno es el proceso de formación de conceptos el cual está vinculado con la experiencia directa y la otra manera es a través de la asimilación de conceptos el cual consiste en relacionar los nuevos conceptos con otros anteriormente formados y que ya existen en la mente. El tercer aprendizaje mencionado que es una causa del anterior consiste en obtener el significado de ideas nuevas dadas en una frase u oración que contienen dos o más conceptos.

### 2.3.2 Aprendizaje por Descubrimiento.

El máximo representante de esta forma de aprendizaje es Jerome Seymour Bruner quien fuera un psicólogo y pedagogo nacido en New York, Estados Unidos (1915-2016) desarrolló su teoría de aprendizaje por descubrimiento de perfiles constructivistas cuya principal característica es la de promover que el alumno adquiera conocimientos por si mismos aprendiendo a través de un descubrimiento guiado que se da durante una exploración motivada por la curiosidad.

En esta forma de aprendizaje según Bruner el alumno descubre nuevos conocimientos de forma inductiva y llegan a detectar cómo funcionan las cosas de un modo activo y constructivo. Dentro de esta propuesta se dice que el aprendizaje no debe limitarse a una memorización mecánica de información o de procedimientos, en su lugar se debe conducir al estudiante al desarrollo de capacidades para resolver problemas y analizar la situación a la que se enfrenta.

Bruner (1966) manifiesta que:

> El aprendizaje por descubrimiento, es el aprendizaje en el que los estudiantes construyen por si mismos sus propios conocimientos, en contraste con la enseñanza tradicional o transmisora del conocimiento, donde el docente pretende que la información sea simplemente recibida por los estudiantes (Elizalde , Parra , Palomino, Reyna , & Trujillo, 2010)

Según Pozo y Gómez, (1998) manifestaron que:

> El aprendizaje por descubrimiento es especialmente efectivo en la enseñanza de las ciencias, según resultados reportados en diversos estudios, en los cuales los estudiantes, que emplean estrategias que favorecen el aprendizaje por descubrimiento, obtienen mejores resultados que aquellos donde enseñanza se basa en la transmisión de información (Elizalde , Parra , Palomino, Reyna , & Trujillo, 2010)

### 2.3.3 Aprendizaje Autónomo.

La idea de que las personas puedan ser autónomas en su aprendizaje fue dada por vez primera en 1981 por el psicólogo educativo Henry Holec, a quien se lo considera como el pionero de la teoría de la autonomía de los aprendices. Varios autores consideran que el aprendizaje autónomo solo puede ser llevado por individuos con ciertos perfiles a diferencia de otros que sostienen que todos están en la capacidad de realizarlo.

Benson y Voller (1997) hacen referencia del aprendizaje autónomo de la siguiente manera:

> Hacerse cargo del propio aprendizaje es tener, y mantener, la responsabilidad de todas las decisiones pertinentes a todos los aspectos del aprendizaje; por ejemplo: determinación de objetivos, definición de los contenidos y progresos, selección de métodos y técnicas a ser usadas, seguimiento del procedimiento de adquisición propiamente dicha (ritmo, tiempo, lugar, etc). El aprendiz autónomo es capaz de tomar todas estas decisiones relacionadas con el aprendizaje en el que él desea involucrarse (Pastrana Sotto, 2016).

Littlewood (1996) argumenta:

> Podemos definir a una persona autónoma como una quien tiene una capacidad independiente para tomar y llevar a cabo las decisiones

> que gobiernan sus acciones. Esta capacidad depende de dos principales componentes: habilidad y disposición. Así, una persona puede tener la habilidad para tomar decisiones independientes pero no sentir disposición para hacerlo. Por el contrario, una persona puede estar dispuesta a ejercer decisiones independientes pero no tener la habilidad para hacerlo (Pastrana Sotto, 2016)

## 2.4 Enseñanza de la Trigonometría.

La palabra trigonometría cuyo significado etimológico es la medición de los triángulos, se deriva de los términos trígono: triángulo y metron: medida. En términos generales es el estudio de las razones trigonométricas. Pero estas definiciones quedan muy superficiales comparado con todos los contenidos que se dan en la enseñanza de este capítulo. El estudio de la trigonometría es fundamental y básico para la adquisición de nuevos conocimientos relacionados con geometría, vectores, números complejos, cálculo diferencial e integral, etc.

Cabay (2015) define la importancia del estudio de la Trigonometría de la siguiente forma:

> La Trigonometría Plana es de gran utilidad en la vida diaria, ya que están insertadas en el mundo de la ciencia y por ende se necesita de estudiantes que tengan competencia para desarrollar su potencial en dicha área. Es por esta razón que el docente debe involucrar en su planificación diversas metodologías y estrategias para el desarrollo de competencias en los estudiantes, para contribuir al mejoramiento del proceso de enseñanza-aprendizaje. (Ponce Silva, 2019,p.150)

Valverde (2012) describe la importancia del estudio de la Trigonometría de la siguiente manera:

> El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Trigonometría Plana es vital para el desarrollo de las competencias y habilidades en la

> formación de estudiantes capaces de transformar su realidad, siendo reflexivo, participativo y crítico, Para esto, el docente es el responsable de crear estrategias que ayuden a fijar los conocimientos en los estudiantes, obteniendo así un aprendizaje significativo (Ponce Silva, 2019,p.150)

Para que se garantice un correcto aprendizaje el alumno debe estar comprometido y entender que el aprendizaje de la trigonometría no resulta ser trivial y que se requiere dedicación y compromiso desde el inicio de su enseñanza básica.

Se debe suponer que el estudiante tiene un conocimiento básico en el desarrollo de triángulos rectángulos y a partir de allí construir el conocimiento, los contenidos están relacionados y concatenados unos a otros, no se puede graficar una función trigonométrica si el alumno no tiene claro para que sirven las medidas angulares y por qué en algunos casos se las representan en grados y en otros en radianes , no se pueden desarrollar ecuaciones trigonométricas si no se conocen las identidades y no se ha hecho hincapié en la importancia de las gráficas como herramienta alternativa para ayudarse a resolver una ecuación, no se puede analizar una gráfica de alguna función trigonometría dada, si el alumno no es capaz de construir la misma, se debe hacer énfasis que no es lo mismo una función inversa que una función recíproca, hacer concientizar lo importante de realizar una gráfica correcta para que nos facilite determinar el conjunto solución de una inecuación trigonométrica, tener conocimiento de las clases de ángulos y sus características con el fin de poder decidir la mejor forma de resolución de algún ejercicio teórico, conocer los signos de las funciones trigonométricas en cada cuadrante , entre otros conocimientos de trigonometría para el estudiante.

## 2.5 Guía Didáctica.

La guía didáctica es un material de apoyo para los alumnos que promueve el aprendizaje autónomo. Su finalidad es la de facilitar la comprensión de los

contenidos curriculares en algún tema específico aclarando los mismos con una redacción adecuada y con aplicaciones que hagan referencia al tema estudiado.
La guía didáctica cumple con varias funciones entre las que se pueden mencionar: motivadora, facilitadora del proceso de aprendizaje, orientadora y evaluadora.

Carvajal (1990) desde su punto de vista considera que:

> Es la ciencia de la educación que estudia e interviene en el proceso de enseñanza-aprendizaje con el fin de conseguir la formación intelectual del educando, (…) es parte de la pedagogía que se interesa por el saber, se dedica a la formación dentro de un contexto determinado por medio de la adquisición de conocimientos teóricos y prácticos, contribuye al proceso de enseñanza aprendizaje, a través del desarrollo de instrumentos teóricos-prácticos, que sirvan para la investigación, formación y desarrollo integral del estudiante (Abreu, Gallegos, Jácome, & Martínez, 2017,p.88)

Pla et al., (2010) establece una relación entre la Pedagogía y la Didáctica, manifestó que:

> La Didáctica es una rama de la Pedagogía, que adquiere el carácter de ciencia en la medida que estudia un nivel cualitativo de organización del proceso educativo que posee peculiaridades, que tienen que ver con las relaciones internas que se producen entre el educador y el alumno mediados por los componentes: objetivos, contenidos, métodos, formas, medios, evaluación desde un objeto preciso del conocimiento (Abreu, Gallegos, Jácome, & Martínez, 2017,p.89)

La mayoría de guías didácticas están estructuradas de manera similar y en este trabajo investigativo la misma tendrá la siguiente organización:
Introducción a la asignatura, objetivos, requisitos previos, presentación de contenidos, actividades de aprendizaje, evaluación y bibliografía de apoyo.

### 2.5.1 Contenidos de la Guía Didáctica para la enseñanza de Trigonometría.

1. Ángulos y sus medidas.
    1.1 Unidades angulares.
    1.2 Clases de ángulos.
    1.3 Relaciones entre grados sexagesimales y radianes.

2. Funciones trigonométricas elementales.

3. Graficas de funciones trigonométricas.

4. Funciones trigonométricas inversas.

5. Identidades trigonométricas.

6. Ecuaciones e inecuaciones trigonométricas.

# CAPÍTULO 3

## 3. METODOLOGÍA.

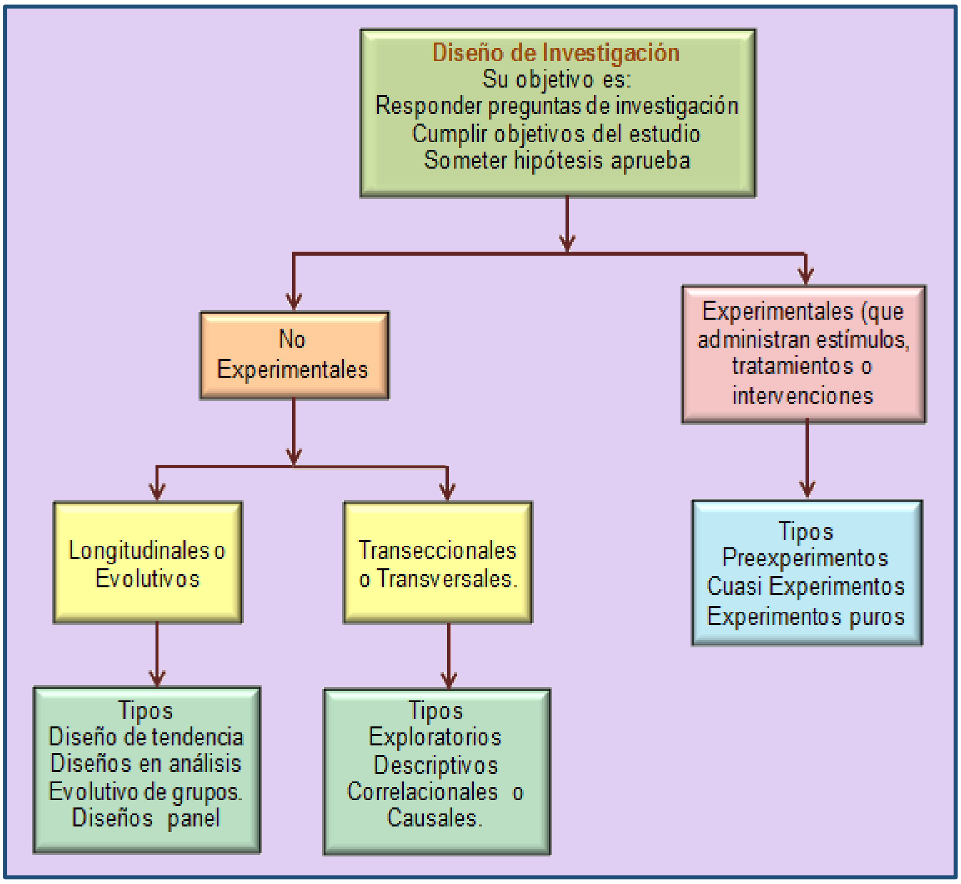
### 3.1 Diseño de la Investigación.

A través de la historia han existido varias corrientes con respecto a cómo generar y obtener conocimiento mediante investigación científica pero desde el siglo pasado se han agrupado en dos aproximaciones: el enfoque cualitativo y el enfoque cuantitativo. El primero en mención utiliza la recolección y análisis de los datos para afinar las preguntas de investigación o revelar nuevas interrogantes en el proceso de interpretación. El segundo utiliza la recolección de datos para probar hipótesis con base en la medición numérica y el análisis estadístico, con el fin de establecer pautas de comportamiento y probar teorías.

Con el fin de responder a las preguntas de investigación propuestas y cumplir con los objetivos del estudio, el investigador debe escoger o desarrollar un diseño de investigación determinado. Una vez que se llegó al planteamiento del problema, así como también a la definición del alcance inicial de la investigación y se formularon las hipótesis, el investigador debe considerar la manera práctica y concreta de contestar las preguntas de investigación, además de cumplir con los objetivos fijados. Esto implica seleccionar o desarrollar uno o más diseños de investigación y aplicarlos al contexto particular de su estudio. Se entiende por diseño al plan o estrategia que sirve para obtener la información deseada con el propósito de dar respuesta a la formulación del problema. (Hernández Sampieri, Fernández Collado, & Baptista Lucio, 2014)

Los diseños de investigación pueden clasificarse en: experimentales que a su vez se dividen en experimentos puros, cuasiexperimentos y preexperimentos y no experimentales los cuales se dividen en transeccionales y longitudinales. A continuación se muestra un resumen grafico del diseño de la investigación.

**Figura 1: Diseño de Investigación**




*Autor: Leonardo Maya Valdano*

En el desarrollo de esta investigación los procesos fueron una combinación de los enfoques cuantitativos y cualitativos es decir un enfoque de investigación mixto. Hernández, Fernández y Baptista (2003) señalan que los diseños mixtos: (…) representan el más alto grado de integración o combinación entre los enfoques cualitativo y cuantitativo. Ambos se entremezclan o combinan en todo el proceso de investigación, o, al menos, en la mayoría de sus etapas (…) agrega complejidad al diseño de estudio; pero contempla todas las ventajas de cada uno de los enfoques. ( Pereira Pérez, 2011).

El componente cuantitativo en esta investigación se centra en un análisis descriptivo de las notas obtenidas por los estudiante de segundo de bachillerato en las evaluaciones formativas-sumativas antes y después de la aplicación de la guía didáctica para la enseñanza de trigonometría. El componente cualitativo se centra en la comprobación de la hipótesis planteada la cual refería: ¿Se podrá con la elaboración de una guía didáctica en el estudio de Trigonometría mejorar las destrezas de pensamiento y obtener mejores resultados en las evaluaciones relacionadas a este tema, en los estudiantes de Segundo de Bachillerato de una unidad educativa particular con Programa de Diploma de Bachillerato Internacional en la ciudad de Guayaquil?, mediante una prueba de hipótesis paramétrica de diferencias de medias poblacionales con muestras grandes.

En lo referente a la investigación cuantitativa sus alcances serán de tipo exploratorio, descriptivo, correlacional. El primer alcance mencionado se caracteriza por investigar problemas poco estudiados en lo referente a las guías didácticas tales como la falta de bibliografía adecuada en el medio, guías con una estructura que atraigan la atención de los estudiantes y profesores , por indagar desde una perspectiva innovadora, por ayudar a identificar conceptos promisorios, por preparar el terreno para nuevos estudios, el segundo alcance citado se caracteriza por considerar al fenómeno estudiado y sus componentes, por definir variables y medir variables, el tercer alcance descrito se caracteriza por asociar variables, por permitir predicciones, por cuantificar relaciones entre variables .

El estudio de la problemática comenzará teniendo un carácter exploratorio debido a que la guía está dirigida a estudiantes del Programa de Diploma del Bachillerato Internacional y este tipo de documentación no está difundida en esa orientación, existen guías para el estudio de Trigonometría pero no con un enfoque al Bachillerato Internacional.

En segunda instancia se convertirá en una investigación descriptiva ya que se harán encuestas mediante cuestionarios a los alumnos con el fin de conocer que tan beneficioso resultó el uso de la Guía Didáctica en su aprendizaje de Trigonometría, así como también consultar si la estructura de la misma está acorde con los ejercicios propuestos en los exámenes de Matemáticas Nivel Medio y Nivel Superior del Programa del Diploma del Bachillerato Internacional, consultando además en qué medida la guía fomentó el trabajo autónomo. Como en la guía estarán incluidos instrumentos de evaluación se podrá realizar una investigación correlacional en la que los estudiantes realicen test propuestos y poder determinar si utilizando la guía se mejoran las destrezas de pensamiento que se reflejarán en las calificaciones obtenidas por los estudiantes de Segundo de Bachillerato Ciencias de la institución.

## 3.2 Población y Muestra.

### 3.2.1 Población.

La institución educativa en la cual se realiza este trabajo investigativo tiene estructurado sus cursos de Segundo Bachillerato en tres orientaciones las cuales son Ciencias, Empresariales y Humanísticas, la población total de alumnos en esta promoción es de 124. El programa de matemáticas para orientación de Ciencias es el de Matemáticas Nivel Medio y para los Empresariales y de Humanística el programa es de Estudios Matemáticos. Los que toman Matemáticas Nivel Superior son estudiantes de cualquiera de esas tres orientaciones a los cuales les gusten los retos y tengan un perfil para el estudio de un programa de matemáticas bastante exigente.

### 3.2.2 Muestra.

Para este estudio se consideró a todos los estudiantes de la orientación de Ciencias de Segundo de Bachillerato cuyo número de alumnos es de 66 de un total de 124 debido a que el curriculum de Matemáticas Nivel Medio y de Nivel Superior del Programa de Diploma del IB forma parte de esta orientación. Cabe recalcar que para la los que toman Empresariales y Humanísticas en esta unidad educativa la guía también servirá debido a que el programa de Estudios Matemáticos también contiene el capítulo de Trigonometría al igual que los otros programas de matemáticas del Diploma.

## 3.3 Técnicas e instrumentos para la recolección de datos.

### 3.3.1 Instrumentos y Técnicas.

Actualmente en investigación científica existen grandes variedades de técnicas o instrumentos para la recolección de información en el trabajo de campo de una determinada investigación. Para este trabajo investigativo se utilizaron: encuestas y observación.

### 3.3.2 Encuesta

Para la recolección de la información se utilizó la técnica de la encuesta la misma que fue realizada mediante un cuestionario dirigido a los estudiantes de Segundo Bachillerato Ciencias con el fin de obtener información sobre la conformación y utilidad de una Guía Didáctica, así como también conocer el nivel de satisfacción en la enseñanza de Trigonometría con el fin de analizar las respuestas e interpretar los datos obtenidos.

### 3.3.3 Observación.

Esta técnica se utilizó ya que permite obtener información directa y confiable y se la hizo durante el desarrollo de las clases luego de explicar la parte teórica de algún contenido específico y de proponer ejercicios grupales a los alumnos con el fin de analizar hábitos de trabajo, expresión oral, expresión corporal, actitudes científicas ,etc.

## 3.4 Técnicas de Procesamiento y Análisis de Datos.

Para este trabajo investigativo se utilizaron las siguientes herramientas estadísticas:

- Distribución de frecuencias y representaciones gráficas, medidas de tendencia central, medidas de dispersión, pruebas estadísticas, análisis de regresión y correlación.

- Se creó una base de datos en Excel con el fin de lograr un manejo eficiente de los datos para su posterior análisis y poder obtener conclusiones válidas de los mismos.

- Se resumió el análisis de los datos en tablas para su mejor manejo y comprensión.

# CAPÍTULO 4

## 4. ANÁLISIS E INTREPRETACIÓN DE DATOS.

### 4.1 Estadística Descriptiva de los Datos.

En la primera parte del análisis de datos se utilizará Estadística Descriptiva con el fin de facilitar su comprensión mediante tablas y gráficas.

#### 4.1.1 Calificaciones previas a la aplicación de la Guía Didáctica.

**Tabla 1: Calificaciones Previas**

| N° | Estudiante | Lección # 1 | Lección # 2 | Promedio |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Estudiante 1 | 9 | 8 | 8,50 |
| 2 | Estudiante 2 | 4 | 5 | 4,50 |
| 3 | Estudiante 3 | 8,5 | 9 | 8,75 |
| 4 | Estudiante 4 | 6,5 | 7 | 6,75 |
| 5 | Estudiante 5 | 2 | 5 | 3,50 |
| 6 | Estudiante 6 | 2 | 6 | 4,00 |
| 7 | Estudiante 7 | 9 | 8,5 | 8,75 |
| 8 | Estudiante 8 | 3,5 | 7 | 5,25 |
| 9 | Estudiante 9 | 1 | 3 | 2,00 |
| 10 | Estudiante 10 | 4 | 5,5 | 4,75 |
| 11 | Estudiante 11 | 3 | 4,5 | 3,75 |
| 12 | Estudiante 12 | 3 | 7 | 5,00 |
| 13 | Estudiante 13 | 3 | 4,5 | 3,75 |
| 14 | Estudiante 14 | 4 | 5 | 4,50 |
| 15 | Estudiante 15 | 2 | 6,5 | 4,25 |
| 16 | Estudiante 16 | 5,5 | 7 | 6,25 |
| 17 | Estudiante 17 | 2 | 6 | 4,00 |
| 18 | Estudiante 18 | 3,5 | 5,5 | 4,50 |
| 19 | Estudiante 19 | 7,5 | 6,5 | 7,00 |
| 20 | Estudiante 20 | 4 | 4 | 4,00 |
| 21 | Estudiante 21 | 9 | 10 | 9,50 |
| 22 | Estudiante 22 | 9 | 8,5 | 8,75 |
| 23 | Estudiante 23 | 2 | 4,5 | 3,25 |
| 24 | Estudiante 24 | 5,5 | 7 | 6,25 |
| 25 | Estudiante 25 | 1 | 3,5 | 2,25 |
| 26 | Estudiante 26 | 5,5 | 6,5 | 6,00 |
| 27 | Estudiante 27 | 5,5 | 6 | 5,75 |
| 28 | Estudiante 28 | 7 | 8 | 7,50 |
| 29 | Estudiante 29 | 9 | 10 | 9,50 |
| 30 | Estudiante 30 | 4 | 6 | 5,00 |
| 31 | Estudiante 31 | 9 | 9 | 9,00 |
| 32 | Estudiante 32 | 5,5 | 8 | 6,75 |
| 33 | Estudiante 33 | 10 | 10 | 10,00 |

| N° | Estudiante | Lección # 1 | Lección # 2 | Promedio |
|---|---|---|---|---|
| 34 | Estudiante 34 | 7 | 8 | 7,50 |
| 35 | Estudiante 35 | 5,5 | 7 | 6,25 |
| 36 | Estudiante 36 | 6 | 7 | 6,50 |
| 37 | Estudiante 37 | 7,5 | 8 | 7,75 |
| 38 | Estudiante 38 | 7,5 | 8 | 7,75 |
| 39 | Estudiante 39 | 2 | 5 | 3,50 |
| 40 | Estudiante 40 | 3 | 5 | 4,00 |
| 41 | Estudiante 41 | 4 | 4 | 4,00 |
| 42 | Estudiante 42 | 7,5 | 6 | 6,75 |
| 43 | Estudiante 43 | 4,5 | 6 | 5,25 |
| 44 | Estudiante 44 | 7,5 | 7 | 7,25 |
| 45 | Estudiante 45 | 2 | 3 | 2,50 |
| 46 | Estudiante 46 | 8 | 7 | 7,50 |
| 47 | Estudiante 47 | 8,5 | 8 | 8,25 |
| 48 | Estudiante 48 | 6,5 | 6,5 | 6,50 |
| 49 | Estudiante 49 | 7 | 5 | 6,00 |
| 50 | Estudiante 50 | 7 | 6,5 | 6,75 |
| 51 | Estudiante 51 | 7 | 8,5 | 7,75 |
| 52 | Estudiante 52 | 9 | 8 | 8,50 |
| 53 | Estudiante 53 | 9 | 7 | 8,00 |
| 54 | Estudiante 54 | 7,5 | 8 | 7,75 |
| 55 | Estudiante 55 | 7,5 | 6 | 6,75 |
| 56 | Estudiante 56 | 7 | 8 | 7,50 |
| 57 | Estudiante 57 | 5 | 6 | 5,50 |
| 58 | Estudiante 58 | 6 | 5 | 5,50 |
| 59 | Estudiante 59 | 8 | 7 | 7,50 |
| 60 | Estudiante 60 | 4,5 | 5 | 4,75 |
| 61 | Estudiante 61 | 8 | 9 | 8,50 |
| 62 | Estudiante 62 | 7,5 | 8 | 7,75 |
| 63 | Estudiante 63 | 7 | 5 | 6,00 |
| 64 | Estudiante 64 | 7 | 5,5 | 6,25 |
| 65 | Estudiante 65 | 7,5 | 8,5 | 8,00 |
| 66 | Estudiante 66 | 8 | 7 | 7,50 |
| | **Promedio** | | | **6,22** |

*Fuente: Calificaciones de los estudiantes de Segundo Bachillerato Ciencias*

*Autor: Leonardo Maya Valdano.*

### 4.1.2 Calificaciones posteriores a la aplicación de la Guía Didáctica.

**Tabla 2: Calificaciones Anteriores**

| N° | Estudiante | Lección # 1 | Lección # 2 | Promedio |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Estudiante 1 | 9 | 10 | 9,50 |
| 2 | Estudiante 2 | 6 | 7,5 | 6,75 |
| 3 | Estudiante 3 | 8 | 10 | 9,00 |
| 4 | Estudiante 4 | 7 | 8 | 7,50 |
| 5 | Estudiante 5 | 3 | 4 | 3,50 |
| 6 | Estudiante 6 | 4 | 4 | 4,00 |
| 7 | Estudiante 7 | 9 | 9,5 | 9,25 |
| 8 | Estudiante 8 | 5 | 7,5 | 6,25 |
| 9 | Estudiante 9 | 4 | 6 | 5,00 |
| 10 | Estudiante 10 | 5 | 7 | 6,00 |
| 11 | Estudiante 11 | 4 | 3 | 3,50 |
| 12 | Estudiante 12 | 4 | 8 | 6,00 |
| 13 | Estudiante 13 | 3 | 6 | 4,50 |
| 14 | Estudiante 14 | 4 | 5,5 | 4,75 |
| 15 | Estudiante 15 | 5 | 8 | 6,50 |
| 16 | Estudiante 16 | 9 | 8 | 8,50 |
| 17 | Estudiante 17 | 6 | 7 | 6,50 |
| 18 | Estudiante 18 | 5,5 | 8 | 6,75 |
| 19 | Estudiante 19 | 7 | 7 | 7,00 |
| 20 | Estudiante 20 | 5 | 4 | 4,50 |
| 21 | Estudiante 21 | 9 | 9 | 9,00 |
| 22 | Estudiante 22 | 9 | 7,5 | 8,25 |
| 23 | Estudiante 23 | 5,5 | 5 | 5,25 |
| 24 | Estudiante 24 | 6 | 8 | 7,00 |
| 25 | Estudiante 25 | 4 | 5 | 4,50 |
| 26 | Estudiante 26 | 7 | 5 | 6,00 |
| 27 | Estudiante 27 | 5 | 8 | 6,50 |
| 28 | Estudiante 28 | 7 | 9 | 8,00 |
| 29 | Estudiante 29 | 10 | 9 | 9,50 |
| 30 | Estudiante 30 | 6 | 7 | 6,50 |
| 31 | Estudiante 31 | 9 | 9 | 9,00 |
| 32 | Estudiante 32 | 6,5 | 8 | 7,25 |
| 33 | Estudiante 33 | 10 | 10 | 10,00 |

| N° | Estudiante | Lección #1 | Lección# 2 | Promedio |
|---|---|---|---|---|
| 34 | Estudiante 34 | 7 | 8,5 | 7,75 |
| 35 | Estudiante 35 | 6 | 8 | 7,00 |
| 36 | Estudiante 36 | 7,5 | 8 | 7,75 |
| 37 | Estudiante 37 | 7,5 | 7 | 7,25 |
| 38 | Estudiante 38 | 7,5 | 8,5 | 8,00 |
| 39 | Estudiante 39 | 3 | 4 | 3,50 |
| 40 | Estudiante 40 | 5 | 5,5 | 5,25 |
| 41 | Estudiante 41 | 4 | 4 | 4,00 |
| 42 | Estudiante 42 | 8 | 8 | 8,00 |
| 43 | Estudiante 43 | 5 | 6 | 5,50 |
| 44 | Estudiante 44 | 8 | 9 | 8,50 |
| 45 | Estudiante 45 | 4,5 | 7 | 5,75 |
| 46 | Estudiante 46 | 9 | 8 | 8,50 |
| 47 | Estudiante 47 | 8,5 | 9 | 8,75 |
| 48 | Estudiante 48 | 7,5 | 8 | 7,75 |
| 49 | Estudiante 49 | 9 | 6 | 7,50 |
| 50 | Estudiante 50 | 8 | 7 | 7,50 |
| 51 | Estudiante 51 | 8 | 8,5 | 8,25 |
| 52 | Estudiante 52 | 8 | 8 | 8,00 |
| 53 | Estudiante 53 | 8 | 8 | 8,00 |
| 54 | Estudiante 54 | 8 | 8,5 | 8,25 |
| 55 | Estudiante 55 | 8 | 7 | 7,50 |
| 56 | Estudiante 56 | 7,5 | 8 | 7,75 |
| 57 | Estudiante 57 | 6 | 7 | 6,50 |
| 58 | Estudiante 58 | 8 | 6 | 7,00 |
| 59 | Estudiante 59 | 8 | 9 | 8,50 |
| 60 | Estudiante 60 | 6 | 7 | 6,50 |
| 61 | Estudiante 61 | 9 | 8 | 8,50 |
| 62 | Estudiante 62 | 8 | 8 | 8,00 |
| 63 | Estudiante 63 | 8 | 6 | 7,00 |
| 64 | Estudiante 64 | 6 | 5 | 5,50 |
| 65 | Estudiante 65 | 8 | 7 | 7,50 |
| 66 | Estudiante 66 | 9 | 9 | 9,00 |
| | | **Promedio** | | **7,00** |

*Fuente: Calificaciones de los estudiantes de Segundo Bachillerato Ciencias*

*Autor: Leonardo Maya Valdano.*

### 4.1.3 Informe de la Investigación.

Se detalla a continuación el análisis de los resultados obtenidos en la encuesta realizada a los estudiantes de Segundo Bachillerato Ciencias de la institución educativa en la cual se realizó el presente trabajo investigativo.

**Estadística Descriptiva de la encuesta realizada a los estudiantes.**

**1.** ¿Había usted usado alguna vez una guía didáctica para el aprendizaje de Trigonometría?

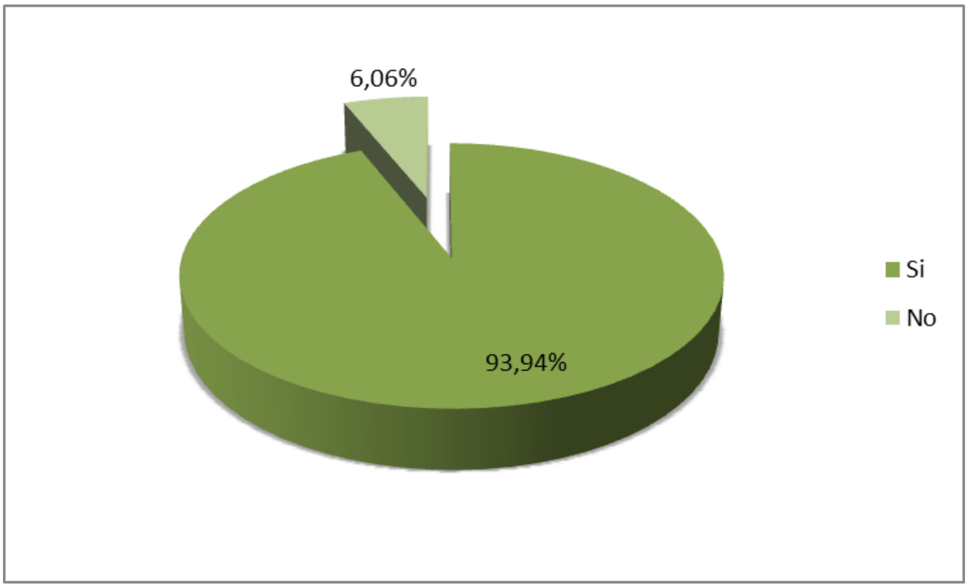
**Tabla 3: Uso de alguna Guía Didáctica**

| Respuestas | Frecuencia | Porcentaje |
|---|---|---|
| No | 62 | 93,94% |
| SI | 4 | 6,06% |
| Total | 66 | 100% |

*Fuente: Encuesta a estudiantes de Segundo Bachillerato Ciencias*

*Autor: Leonardo Maya Valdano.*

**Figura 2: Uso de Guía Didáctica en alguna ocasión**




*Fuente: encuesta a estudiantes de Segundo Bachillerato Ciencias*

*Autor: Leonardo Maya Valdano.*

Los resultados de la encuesta en esta pregunta nos indican que un gran porcentaje de los estudiantes, el 93,94% no conocían que existían guías didácticas para el aprendizaje de Trigonometría y que la mayor parte de consultas a sus inquietudes en la asignatura las resolvían leyendo el texto guía o preguntándole directamente al profesor de la materia.

**2.** ¿Le gustaría aprender Trigonometría Plana mediante el uso de una guía didáctica?

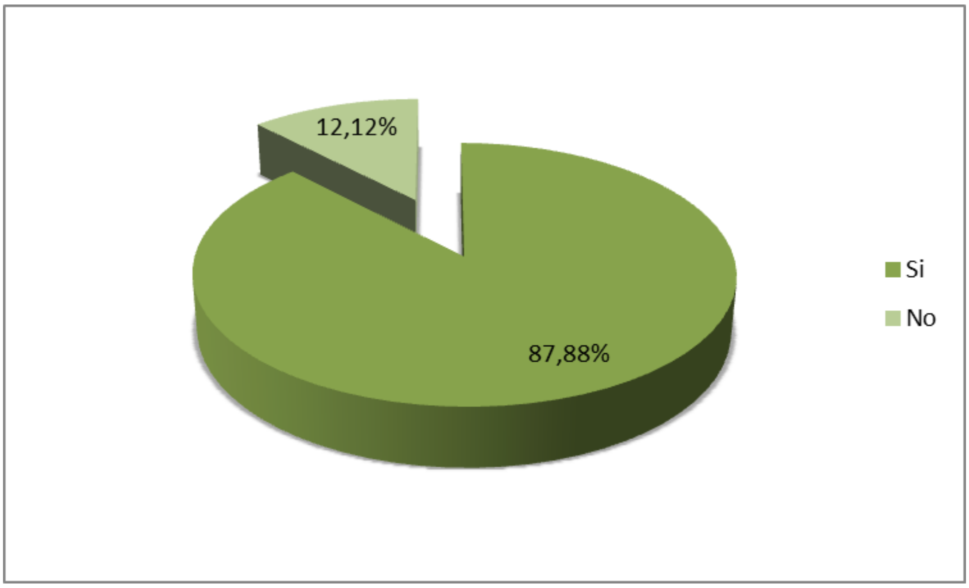
**Tabla 4: Aceptación de la Guía Didáctica**

| Respuestas | Frecuencia | Porcentaje |
|---|---|---|
| Si | 58 | 87,88% |
| No | 8 | 12,12% |
| Total | 66 | 100% |

*Fuente: Encuesta a estudiantes de Segundo Bachillerato Ciencias*

*Autor: Leonardo Maya Valdano.*

**Figura 3: Aceptación de la Guía Didáctica para el aprendizaje de Trigonometría Plana**




*Fuente: Encuesta a estudiantes de Segundo Bachillerato Ciencias*

*Autor: Leonardo Maya Valdano.*

Los resultados de la encuesta en esta pregunta nos indican que un gran porcentaje de los estudiantes, el 88,88% respondió afirmativamente al uso de una guía didáctica para el aprendizaje de Trigonometría debido a que se hizo la consulta luego de que los estudiantes observaron las mejoras de sus calificaciones después de haber usado la guía propuesta.

**3.** ¿Ayudó la teoría previa al desarrollo de los ejercicios propuestos en la guía didáctica a facilitar el estudio de cada contenido de Trigonometría?

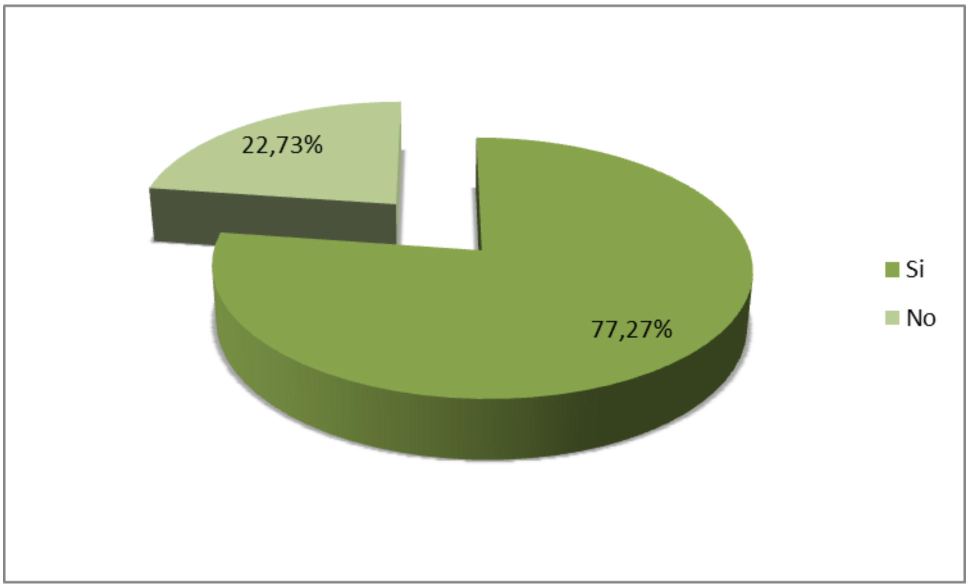
**Tabla 5: Utilidad de la teoría en la Guía Didáctica**

| Respuestas | Frecuencia | Porcentaje |
|---|---|---|
| Si | 51 | 77,27% |
| No | 15 | 22.73% |
| Total | 66 | 100% |

*Fuente: Encuesta a estudiantes de Segundo Bachillerato Ciencias*

*Autor: Leonardo Maya Valdano.*

**Figura 4: Importancia de la teoría propuesta en la Guía Didáctica**




*Fuente: Encuesta a estudiantes de Segundo Bachillerato Ciencias*

*Autor: Leonardo Maya Valdano.*

Los resultados de la encuesta en esta pregunta nos indican que para más de las tres cuartas partes de los estudiantes encuestados es decir el 77,27% la teoría fue de gran utilidad antes de revisar los ejercicios desarrollos así como también en la resolución de ejercicios propuestos en la guía. El 22,73% opinó negativamente deduciéndose que esto ocurre debido a que existen alumnos que no están acostumbrados a leer teoría matemática.

**4.** ¿Estuvieron las resoluciones de los ejercicios desarrollados en la guía didáctica de manera ordenada y secuencial?

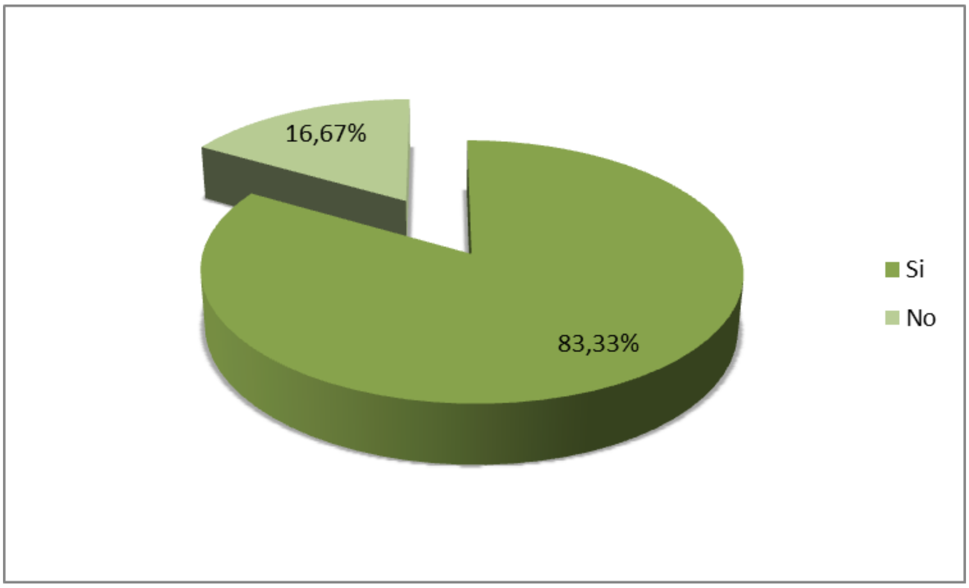
**Tabla 6: Resolución adecuada de ejercicios en la Guía Didáctica**

| Respuestas | Frecuencia | Porcentaje |
|---|---|---|
| Si | 55 | 83.33% |
| No | 11 | 16,77% |
| Total | 66 | 100% |

*Fuente: Encuesta a estudiantes de Segundo Bachillerato Ciencias*

*Autor: Leonardo Maya Valdano.*

**Figura 5: Orden y secuencia en el desarrollo de ejercicios de la Guía Didáctica**




*Fuente: Encuesta a estudiantes de Segundo Bachillerato Ciencias*

*Autor: Leonardo Maya Valdano.*

Los resultados de la encuesta en esta pregunta nos indican que para los estudiantes los ejercicios desarrollados en la Guía Didáctica estuvieron bien estructurados en forma ordenada y secuencial lo cual se refleja en el porcentaje de opinión acerca de los mismos que está en el 83,33%. Este alto porcentaje lo que hace es afirmar que a los alumnos se les debe brindar un estilo de clases ordenado y metódico con el fin de que el aprendizaje sea lo más significativo.

**5.** ¿Cree usted que el uso de la guía didáctica sirvió para entender mejor las clases de Trigonometría de tu profesor?

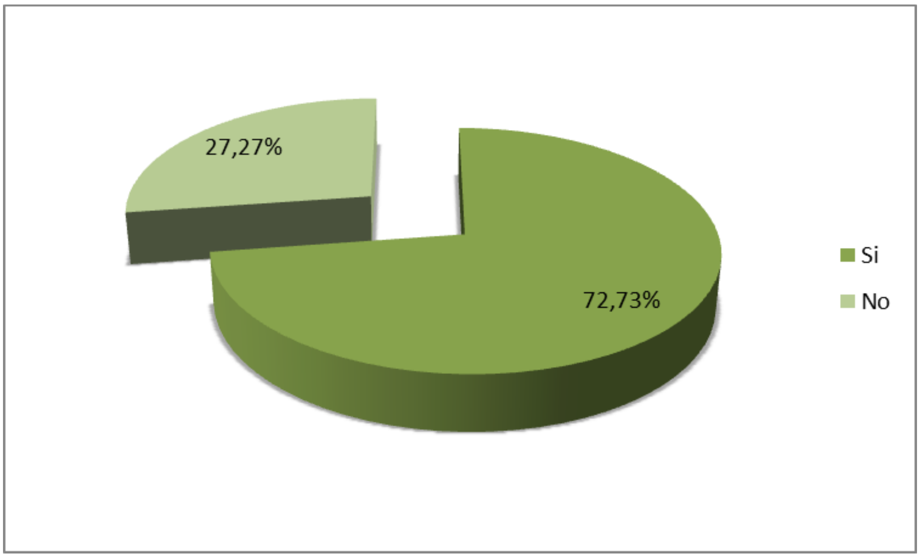
**Tabla 7: Mejora en la comprensión de las clases**

| Respuestas | Frecuencia | Porcentaje |
|---|---|---|
| Si | 48 | 72,73% |
| No | 18 | 27,27% |
| Total | 66 | 100% |

*Fuente: Encuesta a estudiantes de Segundo Bachillerato Ciencias*

*Autor: Leonardo Maya Valdano.*

**Figura 6: Mejora de la comprensión de las clases de Trigonometría desde el uso de la Guía Didáctica**




*Fuente: Encuesta a estudiantes de Segundo Bachillerato Ciencias*

*Autor: Leonardo Maya Valdano.*

Los resultados de la encuesta en esta pregunta nos indican que para los estudiantes el uso de la Guía Didáctica ayudó a mejorar el entendimiento de las clases de Trigonometría haciendo la comparación con lo sucedido antes de conocer la misma. Los alumnos que forman parte del 72,73% en el aumento de nivel de comprensión nos hace suponer que revisaron la guía previo al desarrollo de las clases y posterior al desarrollo de las mismas reforzando lo explicado por el profesor.

**6.** ¿Ayudó el uso de la Guía Didáctica a mejorar sus calificaciones en Trigonometría?

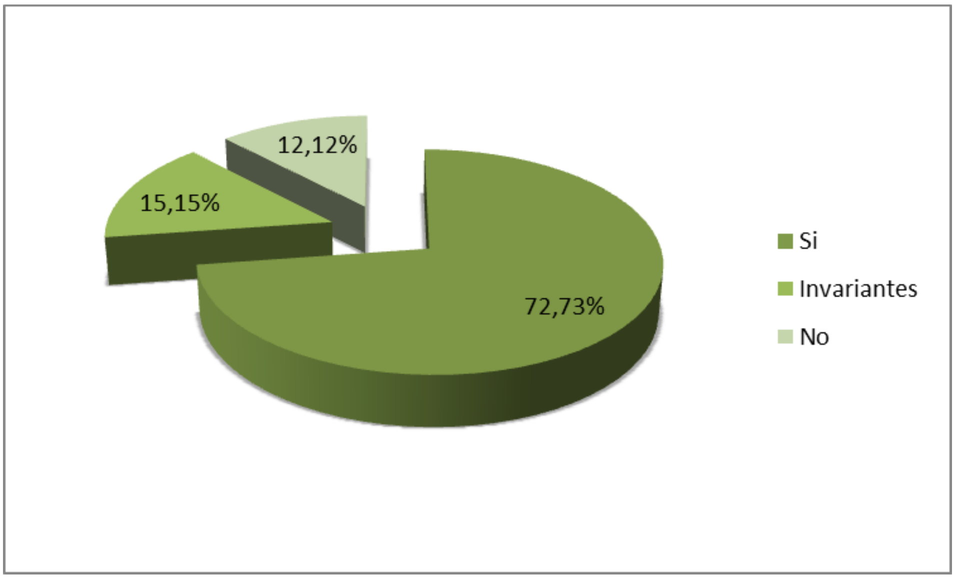
**Tabla 8: Mejora de calificaciones**

| Respuestas | Frecuencia | Porcentaje |
|---|---|---|
| Si | 48 | 72,73% |
| Invariantes | 10 | 15,15% |
| No | 8 | 12,12% |
| Total | 66 | 100% |

*Fuente: Encuesta a estudiantes de Segundo Bachillerato Ciencias*

*Autor: Leonardo Maya Valdano.*

**Figura 7: Mejora de calificaciones de Trigonometría con el uso de la Guía Didáctica**




*Fuente: Encuesta a estudiantes de Segundo Bachillerato Ciencias*

*Autor: Leonardo Maya Valdano.*

Los resultados de la encuesta en esta pregunta nos indican que el uso de la Guía Didáctica contribuyó al mejoramiento de las notas en gran parte de los estudiantes, el 72,73% afirmó que sus calificaciones incrementaron, el 15,15% opinó que sus notas no tuvieron variación alguna permaneciendo con el mismo puntaje antes y después del uso de la guía y el 12,12% aseguró que sus notas decrecieron debido a que no hicieron uso del recurso propuesto.

**7.** ¿Ha incentivado el uso de la guía didáctica a su aprendizaje autónomo?

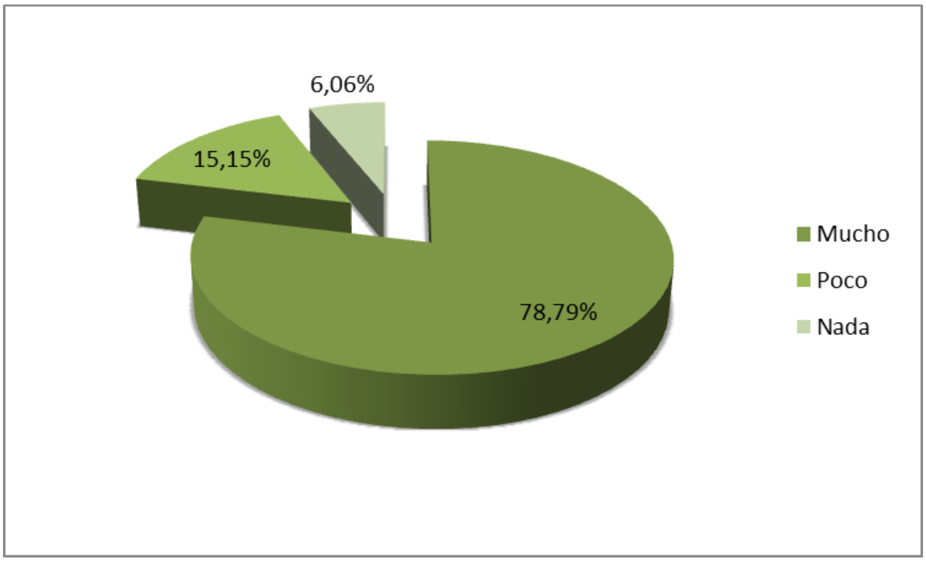
**Tabla 9: Incentivo de aprendizaje autónomo**

| Respuestas | Frecuencia | Porcentaje |
|---|---|---|
| Mucho | 52 | 78,79% |
| Poco | 10 | 15,15% |
| Nada | 4 | 6,06% |
| Total | 66 | 100% |

*Fuente: Encuesta a estudiantes de Segundo Bachillerato Ciencias*

*Autor: Leonardo Maya Valdano.*

**Figura 8: Incentivo de aprendizaje autónomo de Trigonometría con el uso de la Guía Didáctica**




*Fuente: Encuesta a estudiantes de Segundo Bachillerato Ciencias*

*Autor: Leonardo Maya Valdano.*

Los resultados de la encuesta en esta pregunta nos indican que el uso de la Guía Didáctica impulsó el aprendizaje autónomo en 78,79% de los casos, dato que es muy alentador con respecto a la utilidad de la guía, el 15,15% respondió que poco y el 6,06% opinó que no. La suma de estos dos últimos porcentajes se aproxima al de los alumnos que no mejoraron sus notas con el uso de la guía que fue del 27,27%, lo cual hace consistente este análisis y nos hace pensar que esto se da debido a que existe un grupo de alumnos a los cuales no les gusta leer.

**8.** ¿Cree usted que esta guía didáctica ayudará al estudio de Trigonometría a los estudiantes de Matemáticas Nivel Medio y Nivel Superior del Programa de Diploma del Bachillerato Internacional?

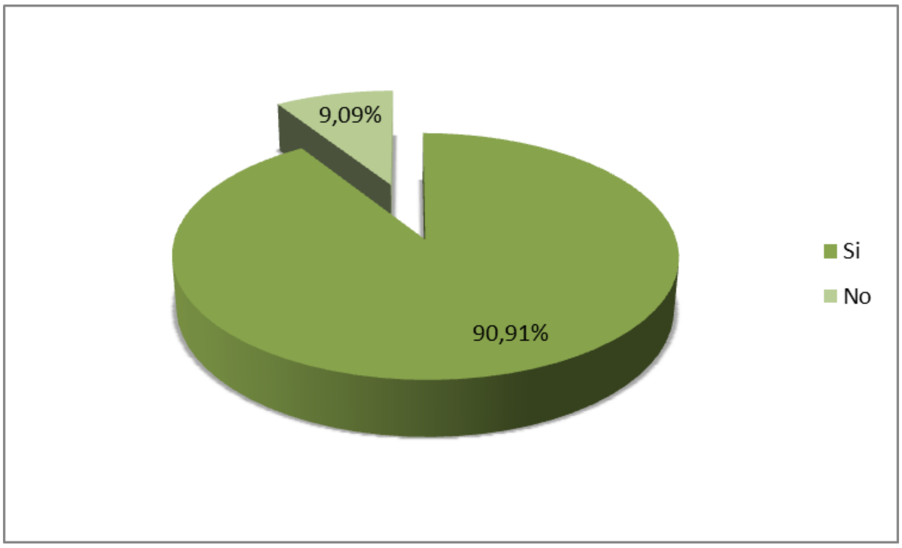
**Tabla 10: Uso de la Guía Didáctica para ayuda del aprendizaje**

| Respuestas | Frecuencia | Porcentaje |
|---|---|---|
| Mucho | 52 | 78,79% |
| Poco | 10 | 15,15% |
| Nada | 4 | 6,06% |
| Total | 66 | 100% |

Fuente: Encuesta a estudiantes de Segundo Bachillerato Ciencias

*Autor: Leonardo Maya Valdano.*

**Figura 9: Uso de la Guía Didáctica para ayudar al aprendizaje de Trigonometría en el Programa de Diploma**




*Fuente: Encuesta a estudiantes de Segundo Bachillerato Ciencias*

*Autor: Leonardo Maya Valdano*.

Los resultados de la encuesta en esta pregunta nos indican que el uso de la Guía Didáctica si ayudará al aprendizaje de Trigonometría en las Matemáticas del Programa del Diploma del Bachillero Internacional lo cual se ve reflejado en los porcentajes obtenidos, el 90,91% de los alumnos respondieron de forma afirmativa mientras que solo el 9,09% opino de forma negativa.

**9.** ¿Ha ayudado el uso de la guía didáctica a comprender mejor el texto de de Matemáticas del Bachillerato Internacional propuesto en el Programa?

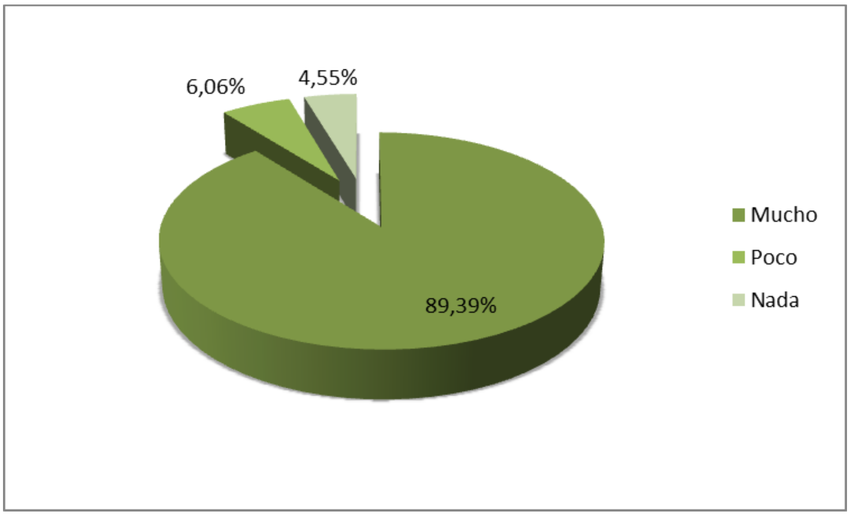
**Tabla 11: Entendimiento del texto guía con el uso de la Guía Didáctica**

| Respuestas | Frecuencia | Porcentaje |
|---|---|---|
| Mucho | 59 | 89,39% |
| Poco | 4 | 6,06% |
| Nada | 3 | 4,55% |
| Total | 66 | 100% |

*Fuente: Encuesta a estudiantes de Segundo Bachillerato Ciencias*

*Autor: Leonardo Maya Valdano.*

**Figura 10: Mejora de comprensión del texto guía de Matemáticas con el uso de la Guía Didáctica**




*Fuente: Encuesta a estudiantes de Segundo Bachillerato Ciencias*

*Autor: Leonardo Maya Valdano.*

Los resultados de la encuesta en esta pregunta nos indican que el uso de la Guía Didáctica ha ayudado a la comprensión del texto guía de Matemáticas, siendo esto favorable debido a que los estudiantes entienden de mejor forma como se encuentra estructurada la guía, el 89,39% respondió positivamente, el 6,06% opinó que el uso de la guía mejoro poco el entendimiento del texto guía y el 4,55% respondió que no hubo aumento de entendimiento con el uso del libro guía de Matemáticas del Programa del Diploma.

**10.** ¿Qué es lo que más le gustó de la estructura de la Guía Didáctica para el aprendizaje de Trigonometría?

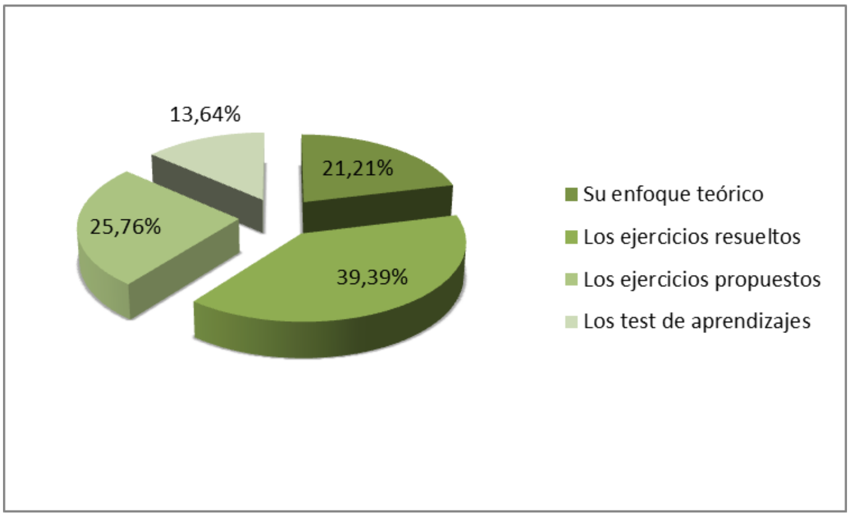
**Tabla 12: Opinión sobre la estructura de la Guía Didáctica**

| Respuestas | Frecuencia | Porcentaje |
|---|---|---|
| Su enfoque teórico | 14 | 21,21% |
| Los ejercicios resueltos | 26 | 39,39% |
| Los ejercicios propuestos | 17 | 25,76% |
| Los test de aprendizajes | 9 | 13,64% |
| Total | 66 | 100% |

*Fuente: Encuesta a estudiantes de Segundo Bachillerato Ciencias*

*Autor: Leonardo Maya Valdano*.

**Figura 11: Opinión sobre la estructura de la Guía Didáctica**




*Fuente: Encuesta a estudiantes de Segundo Bachillerato Ciencias*

*Autor: Leonardo Maya Valdano.*

Los resultados de la encuesta en esta pregunta nos indican que lo que más gusto a los estudiantes de la estructura de la guía fueron los ejercicios resueltos con el 39,39% de aceptación, la segunda opción de preferencia fueron los ejercicios propuestos con el 25,76%, la tercera elección fue el enfoque teórico antes de la resolución de los ejercicios resueltos evidenciándose que para una porción de los alumnos es importante leer la teoría y la última selección fue para los test que evalúan el aprendizaje con el 13,64% de las preferencias de los estudiantes.

**11.** ¿Estuvieron los contenidos de Trigonometría de la Guía Didáctica basada en el curriculum de Matemáticas del Programa de Diploma del BI?

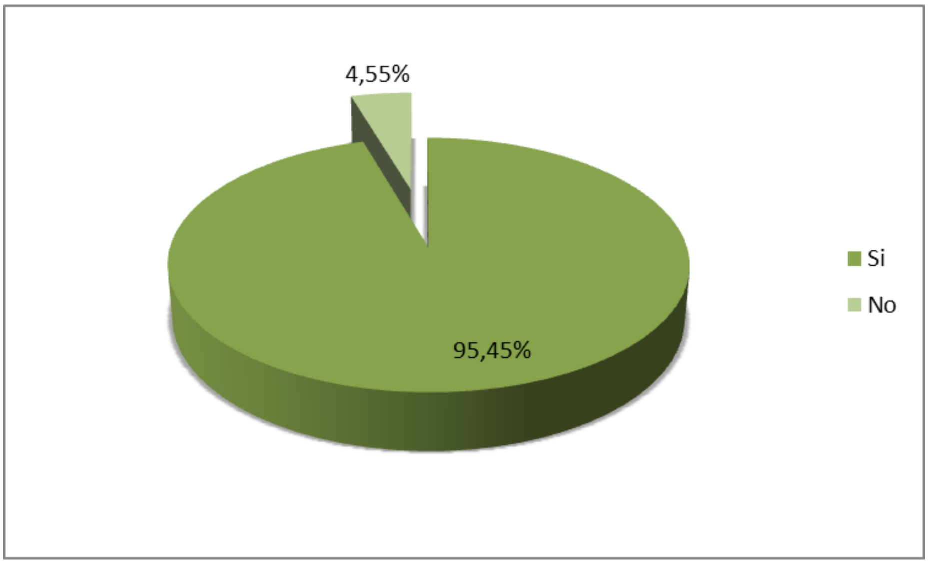
**Tabla 13: Contenidos de Trigonometría basados en el Curriculum de Matemáticas Nivel Medio y Superior**

| Respuestas | Frecuencia | Porcentaje |
|---|---|---|
| Si | 63 | 95,45% |
| No | 3 | 4,55% |
| Total | 66 | 100% |

*Fuente: Encuesta a estudiantes de Segundo Bachillerato Ciencias*

*Autor: Leonardo Maya Valdano.*

**Figura 12: Contenidos de Trigonometría basados en Curriculum de Matemáticas Nivel Medio y Superior**




*Fuente: Encuesta a estudiantes de Segundo Bachillerato Ciencias*

*Autor: Leonardo Maya Valdano.*

Los resultados de la encuesta en esta pregunta nos indican que los alumnos tienen una gran aceptación a la guía propuesta 95,45%, debido a que la estructura de la misma está basada en los contenidos de Trigonometría del Programa del Diploma del BI, ayudando a su mejor entendimiento de los contenidos, así como también teniendo un recurso adicional aparte del texto guía de la asignatura.

**12.** ¿Recomendaría a sus compañeros y a los profesores de la institución a la cual pertenece a usar una guía didáctica para la enseñanza de contenidos específicos?

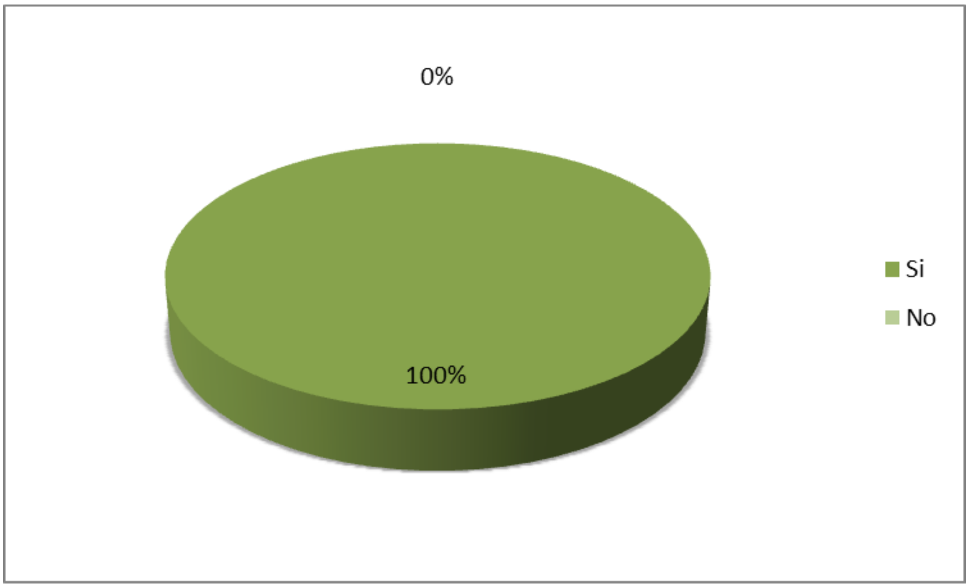
**Tabla 14: Recomendaría el uso de la Guía Didáctica**

| Respuestas | Frecuencia | Porcentaje |
|---|---|---|
| Si | 66 | 100,00% |
| No | 0 | 0,00% |
| Total | 66 | 100% |

*Fuente: Encuesta a estudiantes de Segundo Bachillerato Ciencias*

*Autor: Leonardo Maya Valdano*.

**Figura 13: Recomendaría el uso de la Guía Didáctica**




*Fuente: Encuesta a estudiantes de Segundo Bachillerato Ciencias*

*Autor: Leonardo Maya Valdano.*

Los resultados de la encuesta en esta pregunta nos indican que el 100% de los estudiantes recomendaría el uso de una Guía Didacta para el aprendizaje de algún contenido específico, es de suponer que la totalidad de alumnos contestaron afirmativamente por los resultados obtenidos usando la Guía Didáctica para la enseñanza de Trigonometría propuesta en este trabajo investigativo.

### 4.2 Correlación de las Variables.

#### 4.2.1 Coeficiente de Correlación Lineal de Pearson.

El Coeficiente de Correlación Lineal de Pearson es una medida entre dos variables aleatorias cuantitativas y continuas y nos indica cuan fuerte es la relación entre dichas variables, para este trabajo investigativo se denotará a este coeficiente con la letra r y valores que puede tomar están entre -1 y 1 En la siguiente tabla se muestran los valores del Coeficiente de Correlación Lineal de Pearson y se especifica el grado de relación entre los conjuntos de datos.

**Tabla 15: Valores del coeficiente de correlación Lineal de Pearson**

| | |
|---|---|
| $r = 1$ | Correlación lineal positiva perfecta |
| $(1, 0.75]$ | Correlación lineal positiva fuerte |
| $(0.75, 0.50]$ | Correlación lineal positiva moderada |
| $(0.50, 0.25]$ | Correlación lineal positiva débil |
| $(0.25, 0)$ | Correlación lineal positiva muy débil |
| $r = 0$ | No existe correlación lineal |
| $(0, -0.25]$ | Correlación lineal negativa muy débil |
| $(-0.25, -0{,}50]$ | Correlación lineal negativa débil |
| $(-0.50, -0{,}75]$ | Correlación lineal negativa moderada |
| $(-0.75, -1]$ | Correlación lineal negativa fuerte |
| $r = -1$ | Correlación lineal negativa perfecta |

*Autor: Leonardo Maya Valdano.*

#### 4.2.2 Cálculo del Coeficiente de Correlación Lineal de Pearson.

$$\mathbf{r} = \frac{\sum \mathbf{W_i} \times \mathbf{Z_i}}{\sqrt{\sum(\mathbf{W_i})^2} \times \sqrt{\sum(\mathbf{Z_i})^2}}$$

Donde se especifican las variables:

$W_i = X_i - \overline{X}$

$Z_i = Y_i - \overline{Y}$

$X_i$: Promedio de calificaciones de cada uno de los estudiantes antes de la aplicación de la Guía Didáctica.

$Y_i$: Promedio de calificaciones de cada uno de los estudiantes después de la aplicación de la Guía Didáctica.

$\bar{X}$: Media Aritmética de los promedios de las calificaciones.

$\bar{Y}$: Media Aritmética de los promedios de las calificaciones.

**Tabla 16: Datos para el cálculo de coeficiente de correlación Lineal de Pearson**

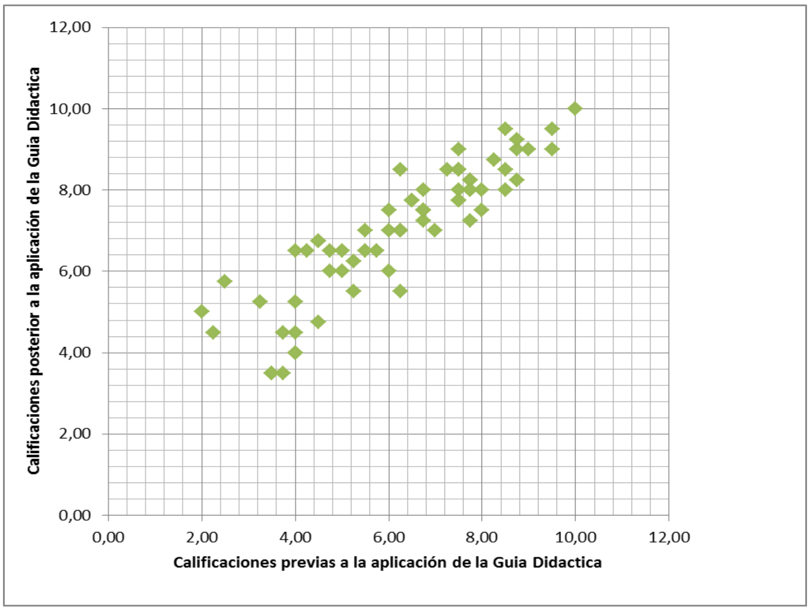
| i | $X_i$ | $Y_i$ | $W_i = X_i - \bar{X}$ | $Z_i = Y_i - \bar{Y}$ | $(W_i)^2$ | $(Z_i)^2$ | $W_i \times Z_i$ | i | $X_i$ | $Y_i$ | $W_i = X_i - \bar{X}$ | $Z_i = Y_i - \bar{Y}$ | $(W_i)^2$ | $(Z_i)^2$ | $W_i \times Z_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 8,50 | 9,50 | 2,28 | 2,50 | 5,20 | 6,25 | 5,70 | 34 | 7,50 | 7,75 | 1,28 | 0,75 | 1,64 | 0,56 | 0,96 |
| 2 | 4,50 | 6,75 | -1,72 | -0,25 | 2,96 | 0,06 | 0,43 | 35 | 6,25 | 7,00 | 0,03 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 3 | 8,75 | 9,00 | 2,53 | 2,00 | 6,40 | 4,00 | 5,06 | 36 | 6,50 | 7,75 | 0,28 | 0,75 | 0,08 | 0,56 | 0,21 |
| 4 | 6,75 | 7,50 | 0,53 | 0,50 | 0,28 | 0,25 | 0,27 | 37 | 7,75 | 7,25 | 1,53 | 0,25 | 2,34 | 0,06 | 0,38 |
| 5 | 3,50 | 3,50 | -2,72 | -3,50 | 7,40 | 12,25 | 9,52 | 38 | 7,75 | 8,00 | 1,53 | 1,00 | 2,34 | 1,00 | 1,53 |
| 6 | 4,00 | 4,00 | -2,22 | -3,00 | 4,93 | 9,00 | 6,66 | 39 | 3,50 | 3,50 | -2,72 | -3,50 | 7,40 | 12,25 | 9,52 |
| 7 | 8,75 | 9,25 | 2,53 | 2,25 | 6,40 | 5,06 | 5,69 | 40 | 4,00 | 5,25 | -2,22 | -1,75 | 4,93 | 3,06 | 3,89 |
| 8 | 5,25 | 6,25 | -0,97 | -0,75 | 0,94 | 0,56 | 0,73 | 41 | 4,00 | 4,00 | -2,22 | -3,00 | 4,93 | 9,00 | 6,66 |
| 9 | 2,00 | 5,00 | -4,22 | -2,00 | 17,81 | 4,00 | 8,44 | 42 | 6,75 | 8,00 | 0,53 | 1,00 | 0,28 | 1,00 | 0,53 |
| 10 | 4,75 | 6,00 | -1,47 | -1,00 | 2,16 | 1,00 | 1,47 | 43 | 5,25 | 5,50 | -0,97 | -1,50 | 0,94 | 2,25 | 1,46 |
| 11 | 3,75 | 3,50 | -2,47 | -3,50 | 6,10 | 12,25 | 8,65 | 44 | 7,25 | 8,50 | 1,03 | 1,50 | 1,06 | 2,25 | 1,55 |
| 12 | 5,00 | 6,00 | -1,22 | -1,00 | 1,49 | 1,00 | 1,22 | 45 | 2,50 | 5,75 | -3,72 | -1,25 | 13,84 | 1,56 | 4,65 |
| 13 | 3,75 | 4,50 | -2,47 | -2,50 | 6,10 | 6,25 | 6,18 | 46 | 7,50 | 8,50 | 1,28 | 1,50 | 1,64 | 2,25 | 1,92 |
| 14 | 4,50 | 4,75 | -1,72 | -2,25 | 2,96 | 5,06 | 3,87 | 47 | 8,25 | 8,75 | 2,03 | 1,75 | 4,12 | 3,06 | 3,55 |
| 15 | 4,25 | 6,50 | -1,97 | -0,50 | 3,88 | 0,25 | 0,99 | 48 | 6,50 | 7,75 | 0,28 | 0,75 | 0,08 | 0,56 | 0,21 |
| 16 | 6,25 | 8,50 | 0,03 | 1,50 | 0,00 | 2,25 | 0,05 | 49 | 6,00 | 7,50 | -0,22 | 0,50 | 0,05 | 0,25 | -0,11 |
| 17 | 4,00 | 6,50 | -2,22 | -0,50 | 4,93 | 0,25 | 1,11 | 50 | 6,75 | 7,50 | 0,53 | 0,50 | 0,28 | 0,25 | 0,27 |
| 18 | 4,50 | 6,75 | -1,72 | -0,25 | 2,96 | 0,06 | 0,43 | 51 | 7,75 | 8,25 | 1,53 | 1,25 | 2,34 | 1,56 | 1,91 |
| 19 | 7,00 | 7,00 | 0,78 | 0,00 | 0,61 | 0,00 | 0,00 | 52 | 8,50 | 8,00 | 2,28 | 1,00 | 5,20 | 1,00 | 2,28 |
| 20 | 4,00 | 4,50 | -2,22 | -2,50 | 4,93 | 6,25 | 5,55 | 53 | 8,00 | 8,00 | 1,78 | 1,00 | 3,17 | 1,00 | 1,78 |
| 21 | 9,50 | 9,00 | 3,28 | 2,00 | 10,76 | 4,00 | 6,56 | 54 | 7,75 | 8,25 | 1,53 | 1,25 | 2,34 | 1,56 | 1,91 |
| 22 | 8,75 | 8,25 | 2,53 | 1,25 | 6,40 | 1,56 | 3,16 | 55 | 6,75 | 7,50 | 0,53 | 0,50 | 0,28 | 0,25 | 0,27 |
| 23 | 3,25 | 5,25 | -2,97 | -1,75 | 8,82 | 3,06 | 5,20 | 56 | 7,50 | 7,75 | 1,28 | 0,75 | 1,64 | 0,56 | 0,96 |
| 24 | 6,25 | 7,00 | 0,03 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 57 | 5,50 | 6,50 | -0,72 | -0,50 | 0,52 | 0,25 | 0,36 |
| 25 | 2,25 | 4,50 | -3,97 | -2,50 | 15,76 | 6,25 | 9,93 | 58 | 5,50 | 7,00 | -0,72 | 0,00 | 0,52 | 0,00 | 0,00 |
| 26 | 6,00 | 6,00 | -0,22 | -1,00 | 0,05 | 1,00 | 0,22 | 59 | 7,50 | 8,50 | 1,28 | 1,50 | 1,64 | 2,25 | 1,92 |
| 27 | 5,75 | 6,50 | -0,47 | -0,50 | 0,22 | 0,25 | 0,24 | 60 | 4,75 | 6,50 | -1,47 | -0,50 | 2,16 | 0,25 | 0,74 |
| 28 | 7,50 | 8,00 | 1,28 | 1,00 | 1,64 | 1,00 | 1,28 | 61 | 8,50 | 8,50 | 2,28 | 1,50 | 5,20 | 2,25 | 3,42 |
| 29 | 9,50 | 9,50 | 3,28 | 2,50 | 10,76 | 6,25 | 8,20 | 62 | 7,75 | 8,00 | 1,53 | 1,00 | 2,34 | 1,00 | 1,53 |
| 30 | 5,00 | 6,50 | -1,22 | -0,50 | 1,49 | 0,25 | 0,61 | 63 | 6,00 | 7,00 | -0,22 | 0,00 | 0,05 | 0,00 | 0,00 |
| 31 | 9,00 | 9,00 | 2,78 | 2,00 | 7,73 | 4,00 | 5,56 | 64 | 6,25 | 5,50 | 0,03 | -1,50 | 0,00 | 2,25 | -0,05 |
| 32 | 6,75 | 7,25 | 0,53 | 0,25 | 0,28 | 0,06 | 0,13 | 65 | 8,00 | 7,50 | 1,78 | 0,50 | 3,17 | 0,25 | 0,89 |
| 33 | 10,00 | 10,00 | 3,78 | 3,00 | 14,29 | 9,00 | 11,34 | 66 | 7,50 | 9,00 | 1,28 | 2,00 | 1,64 | 4,00 | 2,56 |

*Fuente: Calificaciones de los estudiantes de Segundo Bachillerato Ciencias*

*Autor: Leonardo Maya Valdano.*

Previo a los cálculos se elaboró un diagrama de dispersión para observar el comportamiento de los datos, con el fin de tener una idea de la forma de los mismos y establecer si la nube de datos se aproximaba a determinado comportamiento lineal.

**Figura 14: Diagrama de dispersión del promedio de calificaciones**




*Autor: Leonardo Maya Valdano.*

**Tabla 17: Cálculo del coeficiente de correlación Lineal de Pearson**

| | |
|---|---|
| Promedio de $X_i$ | $\overline{X}$= 6,22 |
| Promedio de $Y_i$ | $\overline{Y}$= 7,00 |
| Sumatorio de $(W_i)^2$ | $\sum(W_i)^2$= 244,77 |
| Sumatorio de $(Z_i)^2$ | $\sum(Z_i)^2$= 171,13 |
| Sumatorio de $W_i \times Z_i$ | $\sum W_i \times Z_i$= 182,06 |
| **Coeficiente de Correlación Lineal de Pearson** $r = 0{,}89$ | |

*Fuente: Calificaciones de los estudiantes de Segundo Bachillerato Ciencias*

*Autor: Leonardo Maya Valdano.*

$$r = \frac{182{,}06}{\sqrt{244{,}77} \times \sqrt{171{,}13}}$$

$$r = 0{,}89$$

El valor obtenido del Coeficiente de Correlación Lineal de Pearson nos conduce a interpretar que el uso de la Guía Didáctica para la enseñanza de Trigonometría ha cumplido con las expectativas para la cual fue elaborada, debido a que la relación existente entre las notas previas y las notas posteriores al uso de la misma guarda una relación muy fuerte, lo que significa que a más uso de la guía en la mayoría de casos las notas también aumentarán, lo cual también se puede comprobar en el diagrama de dispersión.

### 4.3 Prueba de Hipótesis.

#### 4.3.1 Comprobación de Hipótesis.

La Hipótesis planteada en este trabajo investigativo señala que si con la elaboración de una Guía Didáctica para el estudio de Trigonometría se podrían mejorar las destrezas de pensamiento y obtener mejores resultados en las evaluaciones en los estudiantes de Segundo de Bachillerato de una unidad educativa particular con Programa de Diploma de Bachillerato Internacional en la ciudad de Guayaquil. Para comprobar si esta hipótesis es cierta o no, se planteará una prueba paramétrica con muestras grandes para comparar dos medias poblacionales y cuyos datos de tomarán de las de las calificaciones obtenidas por los alumnos.

#### 4.3.2 Planteamiento de Hipótesis.

Hipótesis Nula $(\mathrm{H}_0)$: Se plantea que no existe diferencia entre las medias poblacionales $(\mu_1 - \mu_2) = 0$

Hipótesis Alternativa $(\mathrm{H}_a)$: Se plantea que la media poblacional de una de las dos poblaciones es menor que la otra $\mu_1 < \mu_2$

$\mu_1$: Media poblacional de las calificaciones de los estudiantes antes de la aplicación de la Guía Didáctica.

$\mu_2$: Media poblacional de las calificaciones de los estudiantes después de la aplicación de la Guía Didáctica.

### 4.3.3 Nivel de significancia.

El nivel de significancia $\alpha$ es la probabilidad de cometer error tipo $\mathrm{I}$, es decir rechazar la hipótesis nula siendo esta verdadera El nivel de significancia para el presente trabajo investigativo será del $5\%$

### 4.3.4 Estadístico de la Prueba.

$$\mathrm{Z} = \frac{\left(\overline{\mathrm{X}}_1 - \overline{\mathrm{X}}_2\right) - \mathrm{D}_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\mathrm{n}_1} + \frac{\sigma_2^2}{\mathrm{n}_2}}}$$

$\overline{\mathrm{X}}_1$: Media muestral de las calificaciones de los estudiantes antes de la aplicación de la Guía Didáctica.

$\overline{\mathrm{X}}_2$: Media muestral de las calificaciones de los estudiantes después de la aplicación de la Guía Didáctica.

$\mathrm{D}_0$: Diferencia de medias poblacionales $(\mu_1 - \mu_2) = 0$

$\sigma_1^2$: Varianza poblacional de las calificaciones de los estudiantes antes de la aplicación de la Guía Didáctica.

$\sigma_2^2$: Varianza poblacional de las calificaciones de los estudiantes después de la aplicación de la Guía Didáctica

$n_1$ , $n_2$ : Tamaño de cada muestra.

Para muestras grandes (digamos $\mathrm{n} > 30$) las varianzas muéstrales $(S_1^2, S_2^2)$ dan estimaciones adecuadas de las varianzas poblacionales correspondientes.

### 4.3.5 Criterio de decisión.

Si en la Hipótesis Alternativa $(\mathrm{H_a})$ se plantea que la media poblacional de una de las dos poblaciones es menor que la otra $\mu_1 < \mu_2$ y el estadístico de la prueba cae en la región de rechazo: $Z < -Z_\alpha$ (prueba de cola inferior), entonces se rechaza la Hipótesis Nula a favor de la Hipótesis Alternativa.

$Z$: Estadístico de la prueba

$Z_\alpha$: Estadístico teórico (valor crítico)

**Tabla 18: Valores para el cálculo del Estadístico de la Prueba (Z)**

| Estimadores Muestrales Antes del uso de la Guia Didáctica | $\theta$ |
|---|---|
| Media | $\overline{X}_1 = 6.22$ |
| Desviación Estandar | $S_1 = 1.94$ |
| Varianza | $(S_1)^2 = 3.77$ |
| Diferencia de medias poblacionales | $D_0 = \mu_1 - \mu_2 = 0$ |
| **Estimadores Muestrales Después del uso de la Guia Didáctica** | $\theta$ |
| Media | $\overline{X}_2 = 7.00$ |
| Desviación Estandar | $S_2 = 1.62$ |
| Varianza | $(S_2)^2 = 2.63$ |

*Autor: Leonardo Maya Valdano.*

.

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - D_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

$$Z = \frac{(6.22 - 7) - 0}{\sqrt{\frac{(1.94)^2}{66} + \frac{(1.62)^2}{66}}}$$

$Z = -2.50$

$Z_\alpha = Z_{0.05} = 1.64$ valor obtenido de la Tabla de Distribución Normal.

Como el nivel de significancia escogido fue de 0.05 entonces se compararon los valores obtenidos:

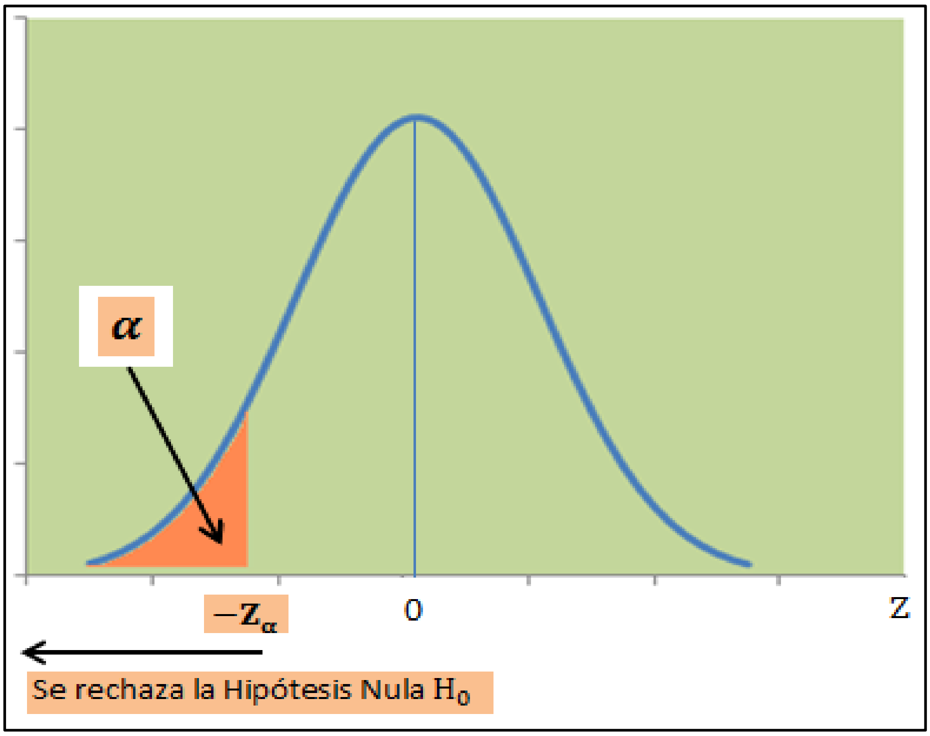
$Z < -Z_\alpha$

$-2.50 < -1.64$

Decisión: Se rechaza la Hipótesis Nula $H_0$ que plantea que no hay diferencia entre las medias poblacionales.

Conclusión: Existe evidencia suficiente al nivel de significación $5\%$ para indicar que la media poblacional de una de las dos poblaciones es menor que la otra $\mu_1 < \mu_2$, esto significa que la media poblacional de las calificaciones antes de la aplicación de la Guía Didáctica es menor que la media poblacional después de aplicar la misma, lo cual hace positiva la implementación de este instrumento educativo.

***Figura 15: Prueba de Hipótesis para muestras grandes "Prueba de Cola Inferior"***




*Autor: Leonardo Maya Valdano.*

# CAPÍTULO 5

## 5. LA PROPUESTA.

### 5.1 Título de la propuesta.

Guía Didáctica para la enseñanza de trigonometría dirigida a estudiantes de Matemáticas del Programa de Diploma de Bachillerato Internacional.

### 5.2 Justificación.

Impartir clases de Matemáticas resulta siempre uno de los mayores retos de la parte educativa a todo nivel, desde la educación inicial hasta el bachillerato y se podría decir que las dificultades se incrementan a medida que el estudiante avanza en su escolaridad año tras año. Es indispensable entonces en algún momento de ese crecimiento incentivar a los alumnos a un aprendizaje autónomo, el cual está relacionado con su nivel de lectura y responsabilidad.

En los primeros años de bachillerato los alumnos llegan a cierto grado de madurez intelectual y es cuando se les debe motivar a la lectura científica y a descubrir conocimientos por sí mismos, es aquí donde la utilidad de una guía didáctica se hace importante, el tener una herramienta pedagógica a parte de un buen libro o de fuentes de información adecuadas hacen que una guía tome una importancia fundamental en el aprendizaje de los estudiantes.

Con la elaboración de una guía didáctica para la enseñanza de trigonometría se pretende:

- Lograr un aprendizaje significativo
- Fomentar un aprendizaje autónomo
- Mejorar el rendimiento académico de los estudiantes.

### 5.3 Guía Didáctica

# Guía didáctica para la enseñanza de Trigonometría

## Ángulos y sus medidas.

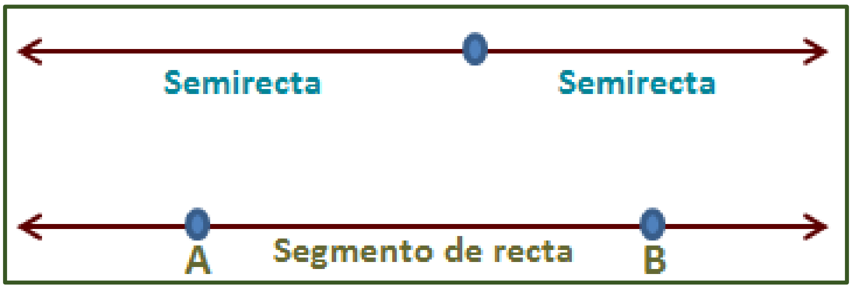
## Objetivos.

Al finalizar esta sección el lector se capaz de:

- Diferenciar entre lo que es el ángulo y la medida de un ángulo.
- Reconocer los diferentes tipos de unidades angulares.
- Establecer la convención de signos que rigen la medida de un ángulo.
- Convertir la medida de un ángulo en grados sexagesimales a radianes y viceversa.
- Ubicar un ángulo en el plano cartesiano.
- Clasificar ángulos según sus características.

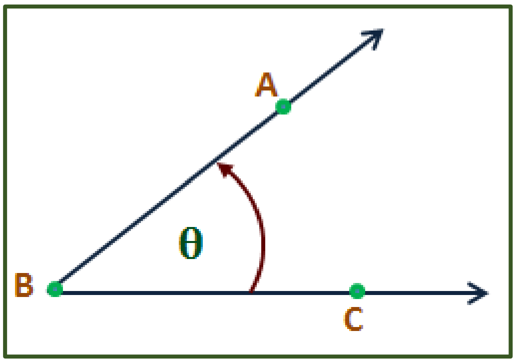
### Ángulos y sus medidas.

Para empezar con la definición de ángulo se debe describir un elemento importante que es la semirecta. Cualquier punto de una recta la divide en dos partes, a cada una de esas partes la llamaremos semirecta. El punto es el origen de la semirecta, mientras que por el otro lado seguirá hasta el infinito lo mismo que sucede en la rectas. Un segmento de recta es cualquier porción de la misma delimitada por dos puntos distintos, a cada uno se lo denominará como extremos del segmento.



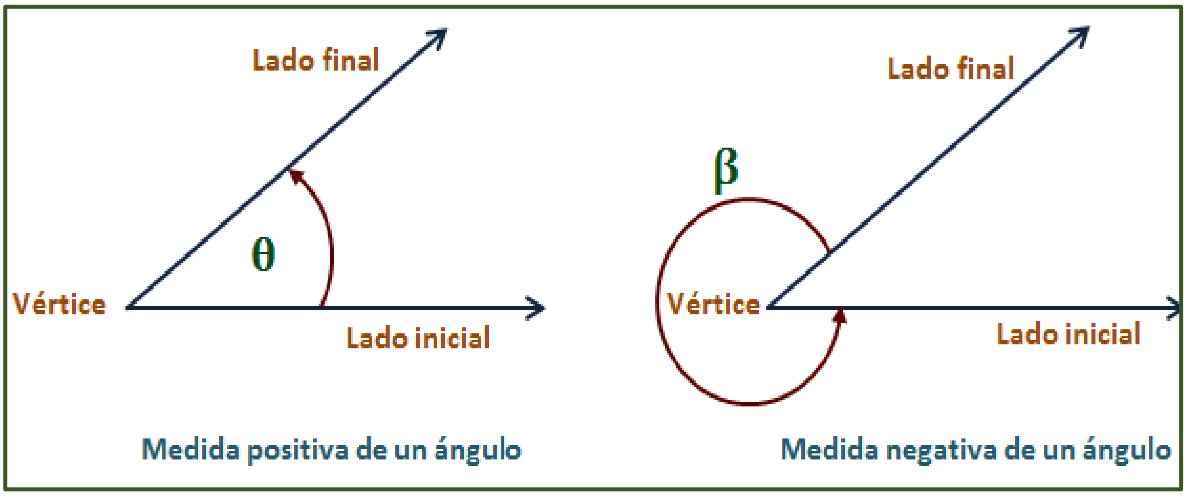
### Definición de ángulo.

Ángulo es la región del plano comprendida entre dos semirectas de origen común, una de las semirectas se conoce como lado inicial del ángulo y la otra toma el nombre d lado terminal o final. El extremo donde se intersectan las semirectas se denomina vértice del ángulo. Es común desinar a los ángulos por medio de los puntos de las semirectas o utilizando solamente el rótulo del vértice.

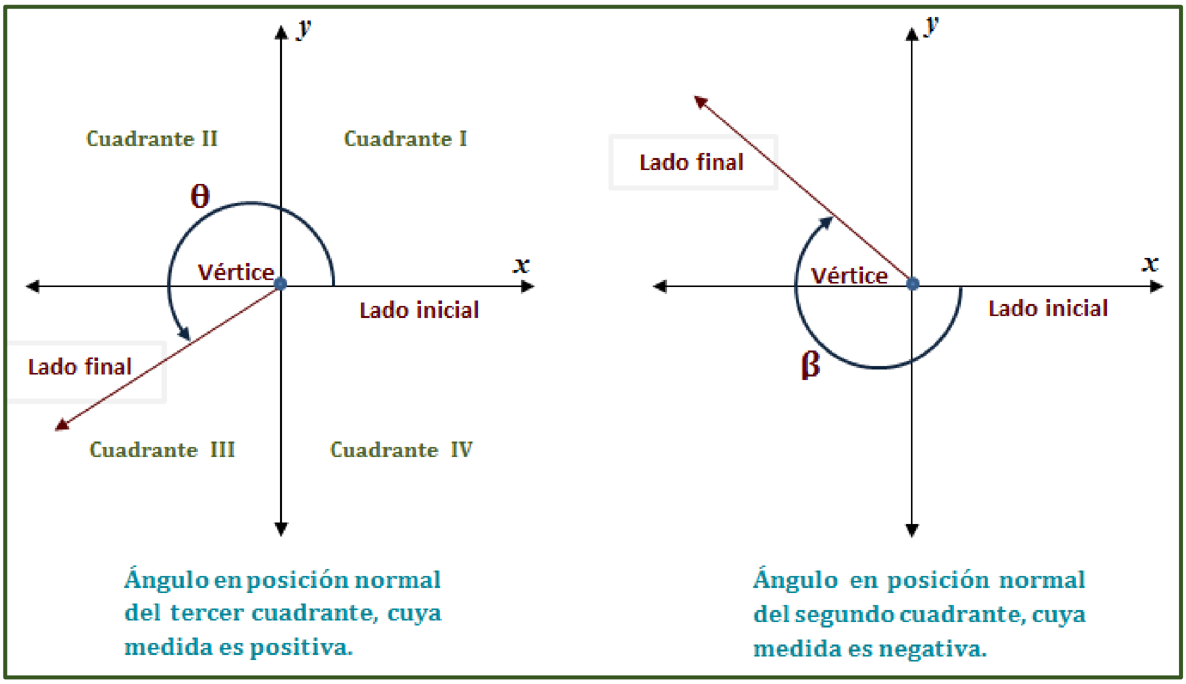



La medida de un ángulo se escribe como m, y cuantifica la abertura entre las dos semirectas.  Es usual designar a la medida de los ángulos con letras del alfabeto griego En consideración de la figura anterior, la medida del ángulo $\theta$ se la escribe como: $\mathrm{m} \sphericalangle \mathrm{CBA}$ o m$\sphericalangle$ es decir $\theta = \mathrm{m} \sphericalangle \mathrm{CBA}$.

Llamaremos lado inicial del ángulo a la semirecta donde inicia la abertura del mismo y lado final a la semirecta donde termina su abertura si ese recorrido se hace en contra de las manecillas del reloj, por convención la medida del ángulo será positiva, si el recorrido se lo realiza a favor de las manecillas del reloj la medida del ángulo será negativa.



Un ángulo se encuentra en posición normal o estándar si su vértice coincide con el origen del sistema de coordenadas rectangulares y su lado inicial coincide con el semieje positivo *X.*

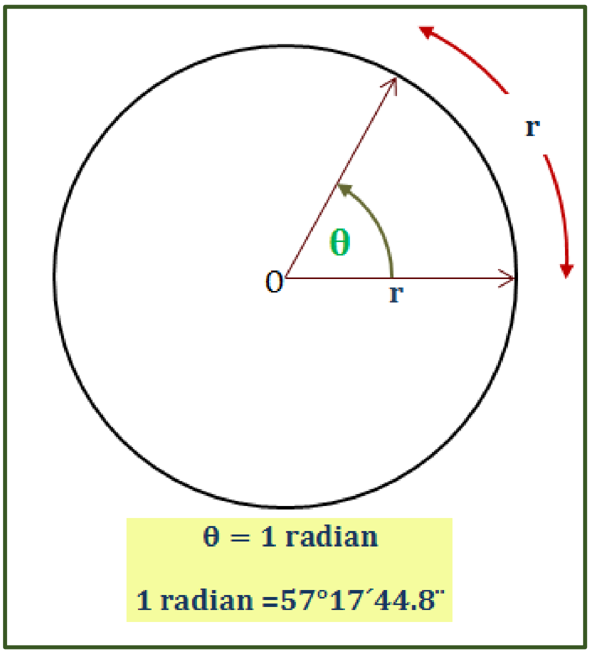



## Unidades Angulares.

En la medición de ángulos y por lo tanto en trigonometría existen cuatro unidades: El grado sexagesimal, el radian, el grado centesimal, la milésima artillera o mil angular.

El sistema sexagesimal es un sistema de unidades cuyo fundamento es dividir a cada unidad en 60 unidades de una orden inferior, es decir, es un sistema de numeración en base 60. Se aplica fundamentalmente para la medida de ángulos y también en la medida dl tiempo. L unidad de medida de ángulos en el sistema sexagesimal es el grado (°) que es el resultado de dividir un ángulo de rotación completa en 360 partes es decir en 360°. Del mismo modo cada grado se subdivide en otras unidades inferiores, por ser 60 la base del sistema las divisiones serán cada 60 unidades, de esta manera cada grado se divide en 60 minutos y cada minuto a su vez en 60 segundos.

Otra de las unidades angulares es el radian que es la medida de un ángulo con vértice en el centro de una circunferencia y cuyos lados delimitan un arco de circunferencia que tiene la misma longitud que el radio. El radián (rad) es la medida para ángulos en el Sistema Internacional de Unidades.




El sistema centesimal divide una circunferencia en 400 partes iguales, y cada una de esas partes se le denomina grado centesimal o gradián y se simboliza con una g minúscula como superíndice del número, por ejemplo $48^g$. A su vez, cada grado centesimal se subdivide en unidades más pequeñas dividiéndolo en 100 pares iguales y dando lugar al minuto. Así, el minuto en este sistema es la centésima parte del grado y el segundo la centésima parte del minuto.

La milésima artillera o mil angular es una unidad de medida de ángulos utilizada en el ámbito militar, principalmente en instrumentos de orientación y señalización, surge de la necesidad de aumentar la precisión en el uso de armamento cada vez más avanzado. Esta medida resulta de dividir en 6400 partes iguales a una circunferencia, por esta razón haciendo uso de la milésima artillera un ángulo de 90° puede dividirse en 1600 partes iguales por lo que se podría determinar con mayor exactitud la posición de cualquier objetivo.

A pesar de la existencia de cuatro unidades de medidas angulares las más utilizados son los grados y los radianes.

### Relación entre grados sexagesimales y radianes.

Como es conocido la longitud de una circunferencia es de $2\pi r$, y para una rotación completa el ángulo mide 360°, por lo que se establece la siguiente relación: $2\pi \text{ radianes} = 360°$

Con esta relación podemos decir que:

| Grados (°) | Radianes |
|---|---|
| 0, 360 | 0 |
| 30 | $\frac{\pi}{6}$ |
| 45 | $\frac{\pi}{4}$ |
| 60 | $\frac{\pi}{3}$ |
| 90 | $\frac{\pi}{2}$ |
| 120 | $\frac{2\pi}{3}$ |
| 135 | $\frac{3\pi}{4}$ |
| 150 | $\frac{5\pi}{6}$ |

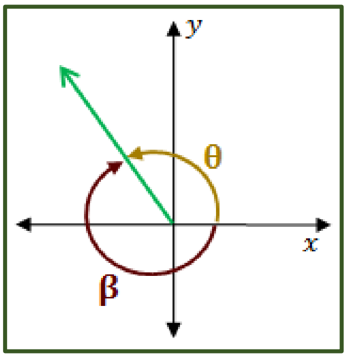
| Grados (°) | Radianes |
|---|---|
| 180 | $\pi$ |
| 210 | $\frac{7\pi}{6}$ |
| 225 | $\frac{5\pi}{4}$ |
| 240 | $\frac{4\pi}{3}$ |
| 270 | $\frac{3\pi}{2}$ |
| 300 | $\frac{5\pi}{3}$ |
| 315 | $\frac{7\pi}{4}$ |
| 330 | $\frac{11\pi}{6}$ |

Para medidas de ángulos mayores a 360°, se debe dividir la medida dada para 360°, el cociente indicará la cantidad de giros o vueltas y el residuo de la división indicará la ubicación del lado terminal del ángulo. Por ejemplo si se quiere ubicar un ángulo cuya medida es de 1020° se debe dividir para 360°, de esta operación se obtiene 2 de cociente y 300 de residuo, esto significa que el ángulo ha dado dos vueltas y su lado terminal se ha ubicado en 300°, lo cual nos indica que es un ángulo del cuarto cuadrante.

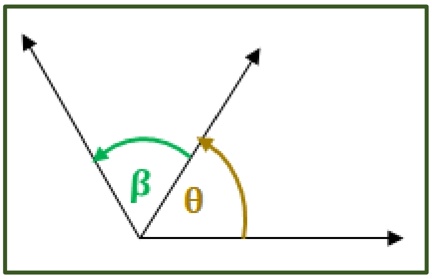
### Clases de ángulos.

A continuación se definirán varios tipos de ángulos:

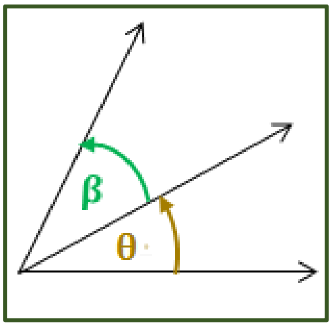
**Ángulos Coterminales:** Son aquellos ángulos que tienen los mismos lados inicial y terminal.



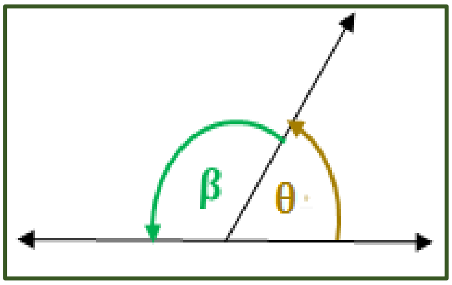

**Ángulos consecutivos:** Dos ángulos son consecutivos  si están en un mismo plano y lo único que tienen en común es uno de sus lados.



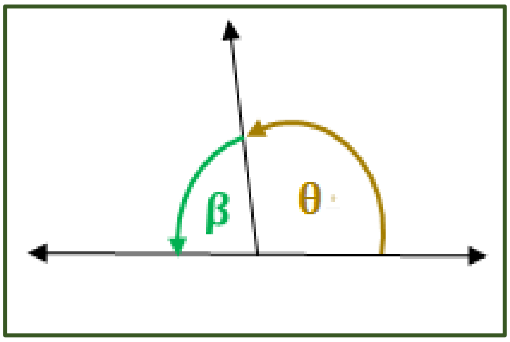

**Ángulos Complementarios:** Dos ángulos son complementarios cuando la suma de sus mediadas  da como resultado la medida de un ángulo recto. (90°)



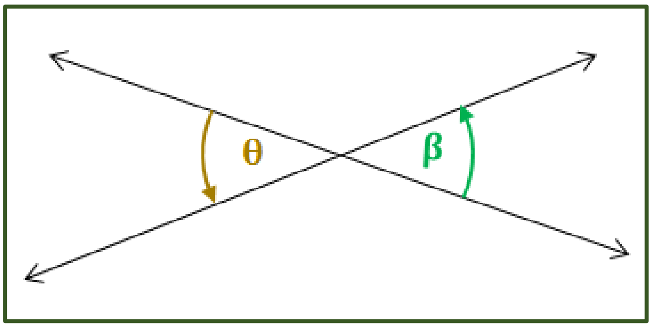

**Ángulos Suplementarios**: Dos ángulos son suplementarios  cuando la suma de sus medidas da como resultado la medida de un ángulo llano (180°)



**Ángulos Adyacentes:** Dos ángulos son adyacentes cuando son consecutivos y suplementarios a la vez.




**Ángulos opuestos por el vértice**: Dos ángulos son opuestos por el vértice cuando los lados de uno de ellos son semirectas opuestas a los lados del otro, verificándose que sus ángulos opuestos son iguales ; $\theta = \beta$




Es importante recordar que si dos ángulos $\theta$ y $\beta$ son complementarios entonces se cumple que:

$\mathrm{sen}(\theta) = \cos(\beta)$

$\mathrm{sen}(\beta) = \cos(\theta)$

$\tan(\theta) = \cot(\beta)$

$\tan(\beta) = \cot(\theta)$

Si dos ángulos $\theta$ y $\beta$ son suplementarios entonces se cumple que:

$\mathrm{sen}(\theta) = \mathrm{sen}(\beta)$

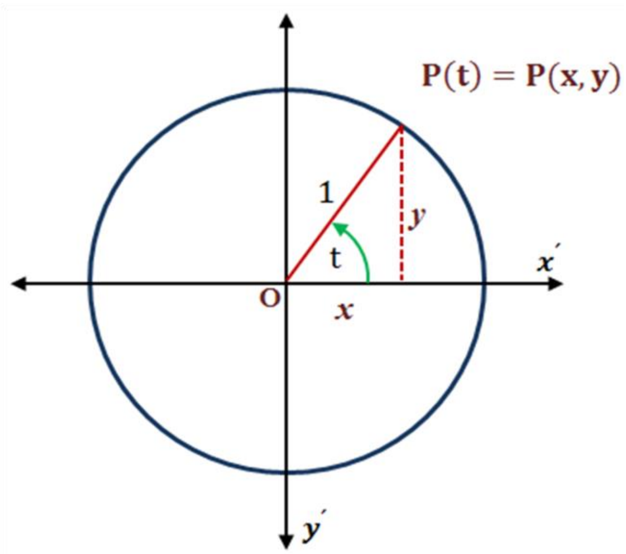
## Funciones trigonométricas elementales.

## Objetivos.

Al finalizar esta sección el lector será capaz de:

- Explicar las seis relaciones trigonométricas mediante la circunferencia de radio unitario.
- Indicar el valor de las seis relaciones trigonométricas de ángulos notables propuestos.
- Reconocer los signos que toma cada función trigonométrica en cada cuadrante

Sea t cualquier número real y $\mathrm{P(t)} = \mathrm{P(x, y)}$, el punto de intersección en el círculo unitario con el lado terminal del ángulo t radianes en posición estándar, entonces las seis funciones trigonométricas del número real t son:




| | |
|---|---|
| $\mathrm{sen(t)} = \frac{\mathrm{y}}{1}$ | $\mathrm{sen(t)} = \mathrm{y}$ |
| $\cos(\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{x}}{1}$ | $\cos(\mathrm{t}) = \mathrm{x}$ |
| $\tan(\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}\ ; \mathrm{x} \neq 0$ | $\tan(\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{sen(t)}}{\cos(\mathrm{t})}$ |
| $\csc(t) = \frac{1}{y} ; y \neq 0$ | $\csc(t) = \frac{1}{sen(t)}$ |
| $\sec(t) = \frac{1}{x} ; x \neq 0$ | $\sec(t) = \frac{1}{\cos(t)}$ |
| $\cot(\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}}\ ; \mathrm{y} \neq 0$ | $\cot(\mathrm{t}) = \frac{\cos(\mathrm{t})}{\mathrm{sen(t)}}$ |

Del triángulo rectángulo que se muestra en el círculo unitario observamos:

$x^2 + y^2 = 1,$ reemplazando los valores de ***x*** y de **y** en la ecuación tenemos:

$\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1$ lo que resulta una identidad denominada Pitagórica

## Análisis de signos de las funciones trigonométricas en cada cuadrante.

Debido a que las deducciones de las relaciones trigonométricas en el círculo unitario se hicieron en el primer cuadrante, todas resultaron ser positivas, pero la variación de signos sería diferente según el cuadrante donde se halla realizado el análisis, por tal razón se muestra a continuación los signos que toman las funciones trigonométricas según el cuadrante en las que se encuentren.

| Función Trigonometrica | Cuadrante I | CuadranteII | Cuadrante III | Cuadrante IV |
|---|---|---|---|---|
| seno | + | + | − | − |
| coseno | + | − | − | + |
| tangente | + | − | + | − |
| cosecante | + | + | − | − |
| secante | + | − | − | + |
| cotangente | + | − | + | − |

En el estudio de trigonometría es importante conocer valores de relaciones trigonométricas de ángulos notables que ayudarán a resolver ejercicios de expresiones, ecuaciones e identidades trigonométricas.

| Función Trigonometrica | $0° = 0$ | $30° = \frac{\pi}{6}$ | $45° = \frac{\pi}{4}$ | $60° = \frac{\pi}{3}$ | $90° = \frac{\pi}{2}$ | $180° = \pi$ | $270° = \frac{3\pi}{2}$ | $360° = 2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sen(x) | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 | $-1$ | 0 |
| cos(x) | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-1$ | 0 | 1 |
| tan(x) | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | no definida | 0 | no definida | 0 |
| csc(x) | no definida | 2 | $\sqrt{2}$ | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | 1 | no definida | $-1$ | no definida |
| sec(x) | 1 | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{2}$ | 2 | no definida | $-1$ | no definida | 1 |
| cot(x) | no definida | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | no definida | 0 | no definida |

Si x es la medida de un ángulo (en grados sexagesimales o en radianes) del primer cuadrante, un ángulo que tendría los mismos valores absolutos para sus seis funciones trigonométricas es:

En el segundo cuadrante $180° - x$

En el tercer cuadrante: $180° + x$

En el cuarto cuadrante: $360° - x$

El signo se determina dependiendo de la ubicación del ángulo.

Una aplicación a lo expuesto anteriormente es:

Las funciones de 240° en valor absoluto son iguales a las funciones de 60° debido a que 240°=180+60°, los signos de cada función estarán dados en relación a lo signos de las funciones trigonométricas en el tercer cuadrante

Como 240 es u ángulo en el tercer cuadrante se cumple que:

$\operatorname{sen}(240°) = -\operatorname{sen}(60) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\qquad \csc(240°) - \csc(60°) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\cos(240°) = -\cos(60°) = -\frac{1}{2}$ $\qquad \sec(240°) = -\sec(60°) - 2$

$\tan(240°) = \tan(60°) = \sqrt{3}$ $\qquad \cot(240°) = \cot(60°) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

## Gráficas de Funciones  Trigonométricas.

### Objetivos.

Al finalizar esta sección el lector se capaz de:

- Reconocer las características de cada una de las funciones trigonométricas tales como sus cortes con los ejes coordenados, sus puntos máximos, sus puntos mínimos, sus cotas, sus asíntotas, sus respectivos períodos, dominios, rangos, amplitudes.

- Realizar gráficas de funciones trigonométricas basándose en las gráficas estándares  de cada una de ellas; aplicando técnicas de graficación con el fin de obtener las nuevas funciones.

### Función Seno.

Si se tiene  $f(x) = \pm A\mathrm{sen}(nx \pm b) \pm c$ ; entonces:

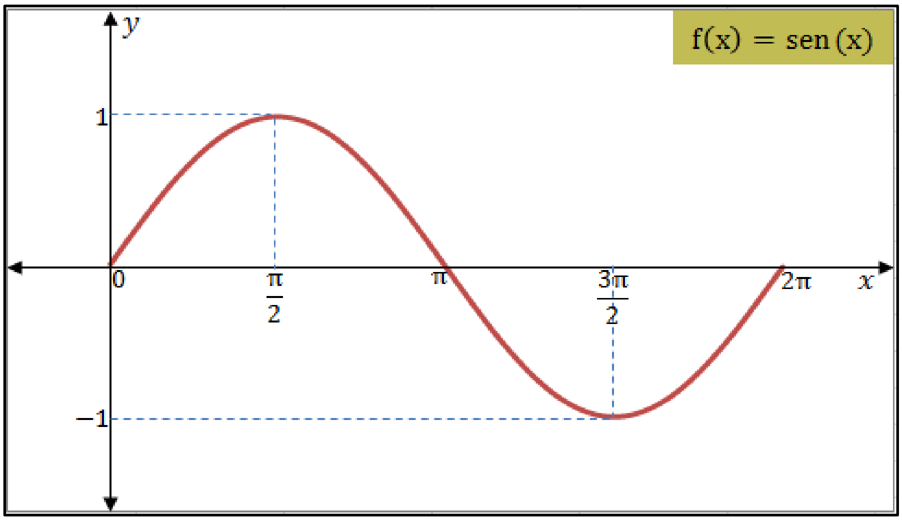
$\mathrm{A}$: es la amplitud de la función

$\mathrm{T}$: es el período donde $T = \frac{2\pi}{n}$

$(nx \pm b\,)$: es el argumento de la función; $\pm \frac{b}{n}$ es su desplazamiento sobre el eje *x*

$\pm c$: es su desplazamiento sobre el eje de las *y.*

El dominio de la función seno son todos los reales, pero en la gráfica de su función estándar el dominio dado será de $[0,2\pi]$ y su período es de $2\pi$.



**Función Coseno.**

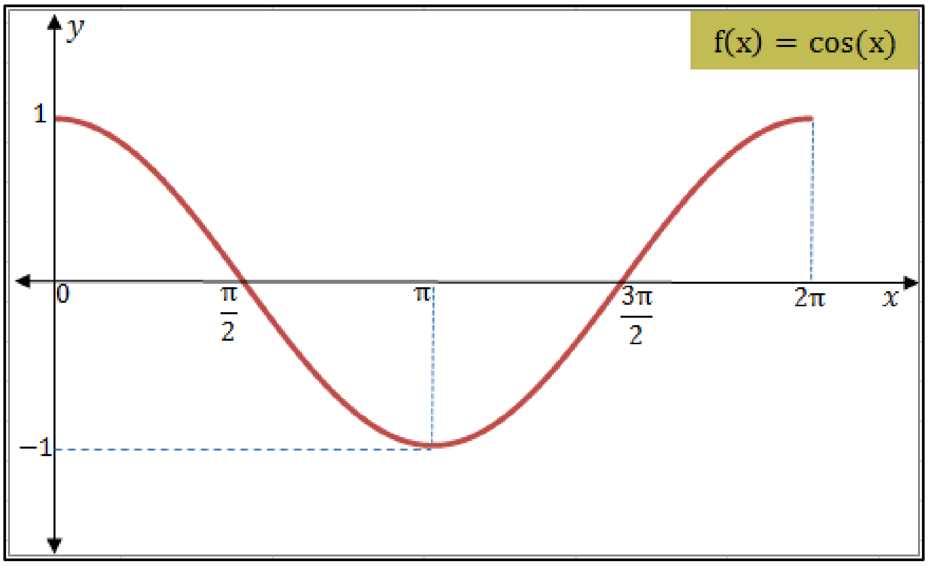
Si se tiene $f(x) = \pm A\cos(nx \pm b) \pm c$ ; entonces:

$\text{A: es la amplitud de la función}$ $\quad$ $\text{T: es el período donde } T = \frac{2\pi}{n}$

$(nx \pm b)$: es el argumento de la función; $\pm\frac{b}{n}$ es su desplazamiento sobre el eje *x*

$\pm c$: es su desplazamiento sobre el eje de las *y.*

El dominio de la función coseno son todos los reales, pero en la gráfica de su función estándar el dominio dado será de $[0,2\pi]$ y su período es de $2\pi$.




Para realizar la gráfica de una función seno o coseno se proponen los siguientes pasos:

a) Si se tiene la función $f(x) = A\text{sen}(nx - b) + c$ , entonces el período es $T = \frac{2\pi}{n}$

b) Al argumento de la función $(nx - b)$ se lo iguala a cero para determinar su desplazamiento sobre el eje de las *x*, dicho valor será una referencia para ir generando valores importantes de la gráfica sobre dicho eje; además este cálculo también es uno de los valores de *x* para el cual f(x)=0 dentro del intervalo dado.

c) Al período se lo divide para cuatro con el fin de generar una escala de la gráfica sobre el eje de las *x.* Al valor referencial se le sumará sucesivamente la escala $\left(\frac{T}{4}\right)$ con el fin de hallar los valores del eje *x* que están a su derecha, así como también se le restará para hallar los valores del eje *x* que están su izquierda.

**Función Tangente.**

Si se tiene $f(x) = \pm A\tan(nx \pm b) \pm c$ ; entonces:

$T$: es el período donde $T = \frac{\pi}{n}$

$(nx \pm b)$: es el argumento de la función; $\pm \frac{b}{n}$ es su desplazamiento sobre el eje *x*

$\pm c$: es su desplazamiento sobre el eje de las *y.*

La función tangente no tiene amplitud debido a que no es acotada.

El dominio de la función tangente son los reales, excepto los valores de la variable *x* que se escriben a continuación:

$nx \pm b = (2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z},$

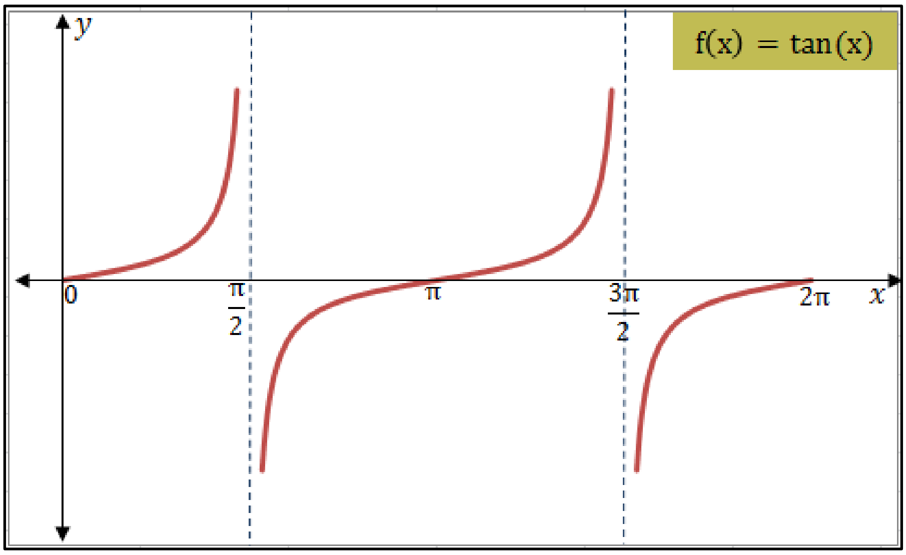
| | | |
|---|---|---|
| $\mathrm{Si}\ k = 0$ | $\mathrm{Si}\ k = 1$ | $\mathrm{Si}\ k = 2$ |
| $nx \pm b = \frac{\pi}{2}$ | $nx \pm b = \frac{3\pi}{2}$ | $nx \pm b = \frac{5\pi}{2}$ |
| $nx = \frac{\pi}{2} \pm b$ | $nx = \frac{3\pi}{2} \pm b$ | $nx = \frac{5\pi}{2} \pm b$ |
| $x = \frac{\pi}{2n} \pm \frac{b}{n}$ | $x = \frac{3\pi}{2n} \pm \frac{b}{n}$ | $x = \frac{5\pi}{2n} \pm \frac{b}{n}$ |

En términos generales los valores que no podrá tomar la variable *x* son:

$$x = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \pm \frac{b}{n}; k \in \mathbb{Z}$$

En gráfica estándar de la función tangente el dominio de f se lo mostrará como:

$$\mathrm{dom} f = \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

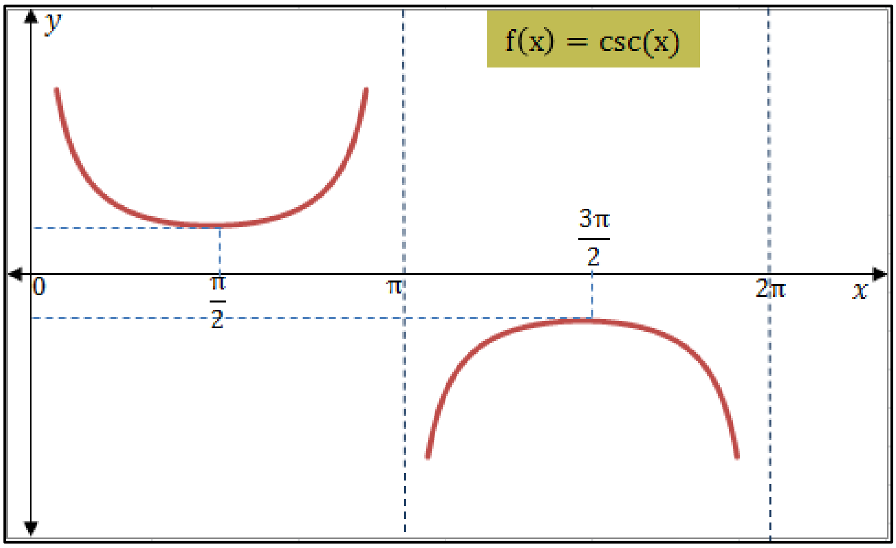



**Función Cosecante**.

Para elaborar la gráfica de la función cosecante nos basaremos en la gráfica de su función recíproca seno. Los valores de la variable independiente para los cuales el valor de f(x)=0 de la función seno, serán las asíntotas verticales para la función cosecante; los puntos máximos de la función seno serán los puntos mínimos para la función cosecante y los puntos mínimos de la función seno serán puntos máximos para la función cosecante.

Se mostrará la gráfica de la función cosecante en el intervalo $[0,2\pi]$.

El período de la función cosecante será igual al periodo de su función recíproca.

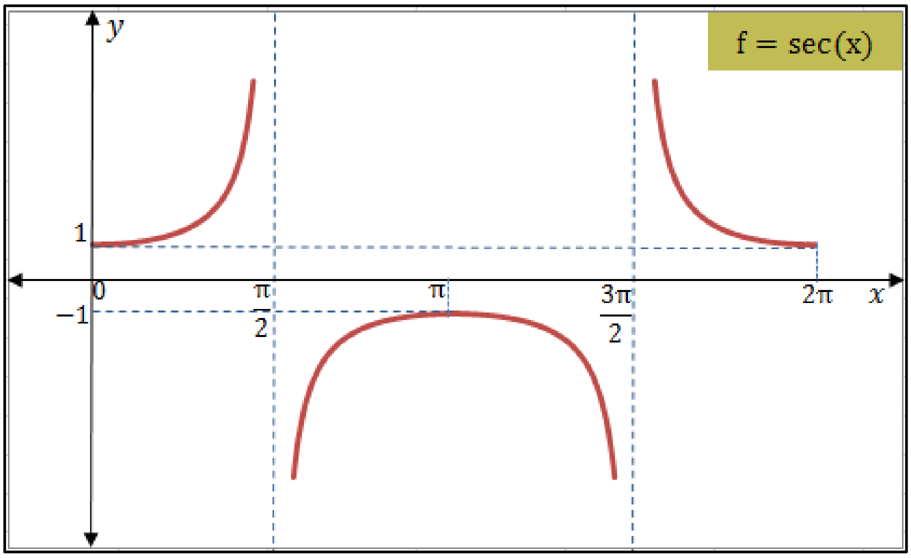


**Función Secante.**

Para elaborar la gráfica de la función secante nos basaremos en la gráfica de su función recíproca coseno. Los valores de la variable independiente para los cuales el valor de f(x)=0 de la función coseno, serán las asíntotas verticales para la función secante; los puntos máximos de la función coseno serán los puntos mínimos para la función secante y los puntos mínimos de la función coseno serán puntos máximos para la función secante.

Se mostrará la gráfica de la función secante en el intervalo $[0,2\pi]$.

El período de la función secante será igual al período de su función recíproca.

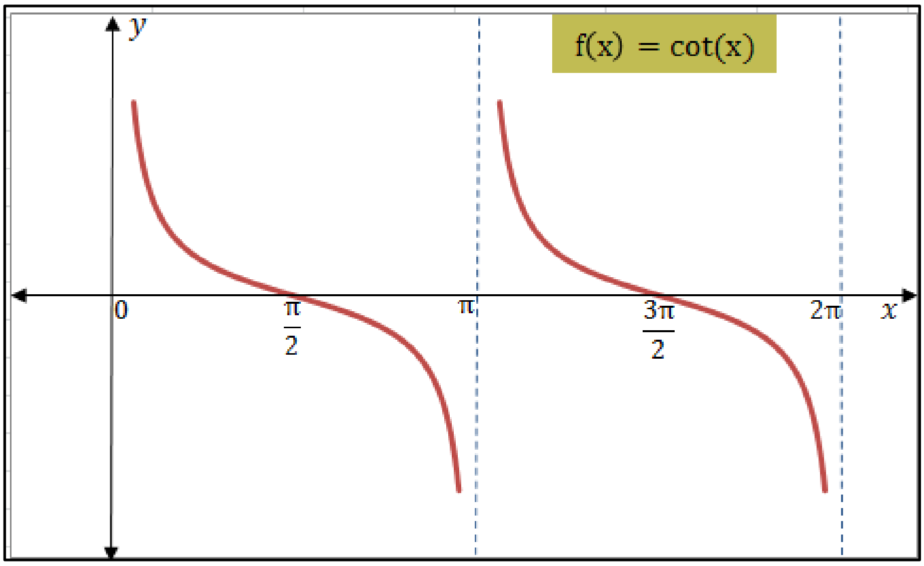



**Función Cotangente.**

Para elaborar la gráfica de la función cotangente nos basaremos en la gráfica de su función recíproca tangente. Los valores de la variable independiente para los cuales el valor de f(x)=0 de la función tangente, serán las asíntotas verticales para la función cotangente; además las asíntotas de la función tangente serán los ceros de la función cotangente; los puntos máximos de la función tangente serán los puntos mínimos para la función cotangente y los puntos mínimos de la función tangente serán puntos máximos para la función cotangente.

Se mostrará la gráfica de la función cotangente en el intervalo $[0,2\pi]$.

El período de la función cotangente será igual al período de su función recíproca.


y
f(x) = cot(x)
0
π
2
π
3π
2
2π
x

## Ejercicios resueltos de Gráficas de Funciones Trigonométricas.

**1.** Dada la función:

$$f(x) = 2\mathrm{sen}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right);\ -\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$$

Realice su grafica estableciendo en la misma sus puntos mínimos y máximos, así como también los cortes con los ejes coordenados.

Desarrollo:

a) Si se tiene la función $f(x) = A\mathrm{sen}(nx - b) + c$ , entonces el período es $T = \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{3}$

b) Al argumento de la función se lo iguala a cero para determinar su desplazamiento sobre el eje de las x, dicho valor será una referencia para ir generando valores importantes (ceros, máximos y mínimos) de la gráfica sobre dicho eje.

$$3x - \frac{\pi}{2} = 0$$

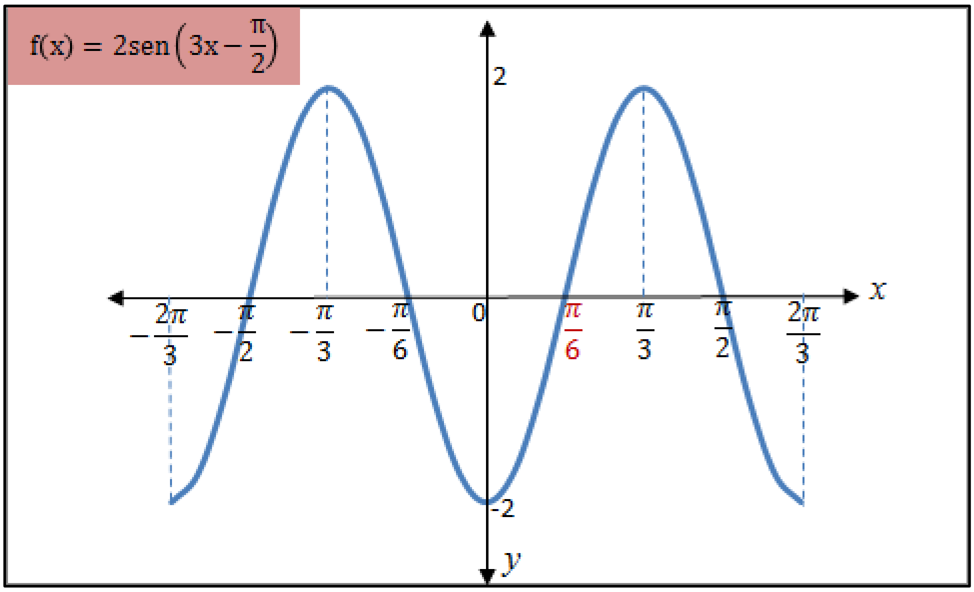
$$3x = \frac{\pi}{2} \quad \text{por lo tanto} \quad x = \frac{\pi}{6} \ (\text{valor referencial})$$

Este cálculo también es uno de los valores de x para el cual f(x)=0 dentro del intervalo dado.

c) Al período se lo divide para cuatro con el fin de generar una escala de la gráfica sobre el eje de las x.

$$\frac{T}{4} = \frac{2\pi}{3} \div 4 = \frac{\pi}{6}$$

Al valor referencial se le sumará sucesivamente la escala $\left(\frac{\pi}{6}\right)$ con el fin de hallar los valores del eje x que están a su derecha, así como también se le restará para hallar los valores del eje x que están su izquierda.




**2.** Dada la función:

$$f(x) = 4\cos(3x - \pi);\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

Realice su grafica estableciendo en la misma sus puntos mínimos y máximos, así como también los cortes con los ejes coordenados.

Desarrollo:

a) Si se tiene la función $f(x) = A\cos(nx - b) + c$ , entonces el período es $T = \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{3}$

b) Al argumento de la función se lo iguala a cero para determinar su desplazamiento sobre el eje de las x, dicho valor será una referencia para ir generando valores importantes de la gráfica (ceros, máximos y mínimos) sobre dicho eje.

$3x - \pi = 0$

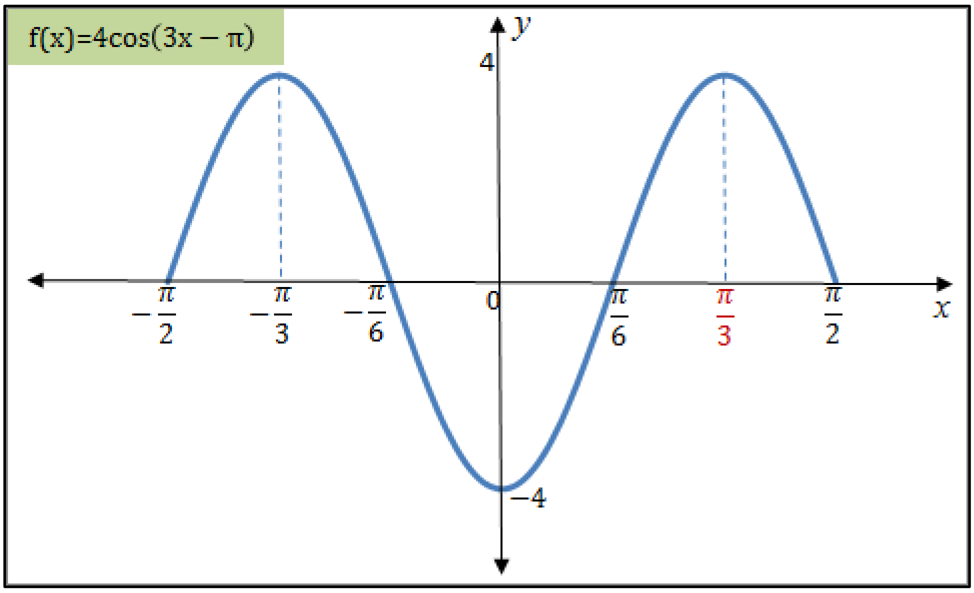
$3x = \pi \quad \text{por lo tanto} \quad x = \frac{\pi}{3}$ (valor referencial)

Este cálculo también es el valor de x para el cual f(x) toma uno de sus máximos dentro del intervalo dado.

c) Al período se lo divide para cuatro con el fin de generar una escala de la gráfica sobre el eje de las x.

$$\frac{T}{4} = \frac{2\pi}{3} \div 4 = \frac{\pi}{6}$$

Al valor referencial se le sumará sucesivamente la escala $\left(\frac{\pi}{6}\right)$ con el fin de hallar los valores del eje x que están a su derecha, así como también se le restará para hallar los valores del eje x que están su izquierda.




**3.** Dada la función:

$$f(x) = \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right);\ -\frac{5\pi}{8} \leq x \leq \frac{7\pi}{8}$$

Realice su grafica estableciendo en la misma sus puntos mínimos y máximos, así como también los cortes con los ejes coordenados.

Desarrollo:

a) Si se tiene la función $f(x) = A\tan(nx - b) + c$, entonces el período es $T = \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{2}$

b) Al argumento de la función se lo iguala a cero para determinar su desplazamiento sobre el eje de las x, dicho valor será una referencia para ir generando valores importantes de la gráfica sobre dicho eje( ceros,asíntotas)

$$2x + \frac{\pi}{4} = 0$$

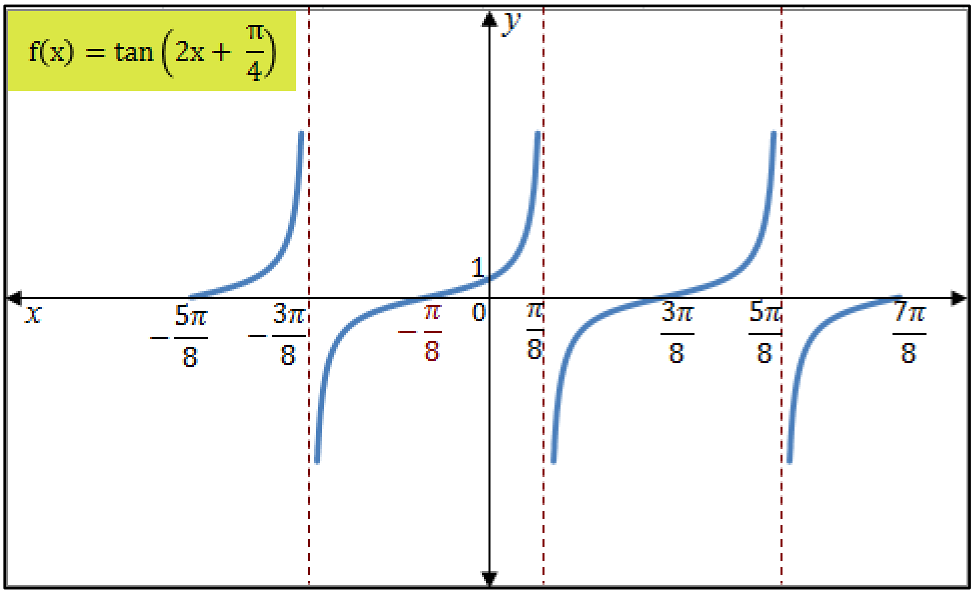
$$2x = -\frac{\pi}{4} \quad \text{por lo tanto } x = \frac{\pi}{8} \text{ (valor referencial)}$$

Este cálculo también es uno de los valores de x para el cual f(x)=0 dentro del intervalo dado.

c) Al período se lo divide para dos con el fin de generar una escala de la gráfica sobre el eje de las x.

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2} \div 2 = \frac{\pi}{8}$$

Al valor referencial se le sumará sucesivamente la escala $\left(\frac{\pi}{8}\right)$ con el fin de hallar los valores del eje x que están a su derecha, así como también se le restará para hallar los valores del eje x que están su izquierda.




Debido a que la función tangente no es acotada la gráfica no muestra ni máximos ni mínimos en el intervalo propuesto en el ejercicio.

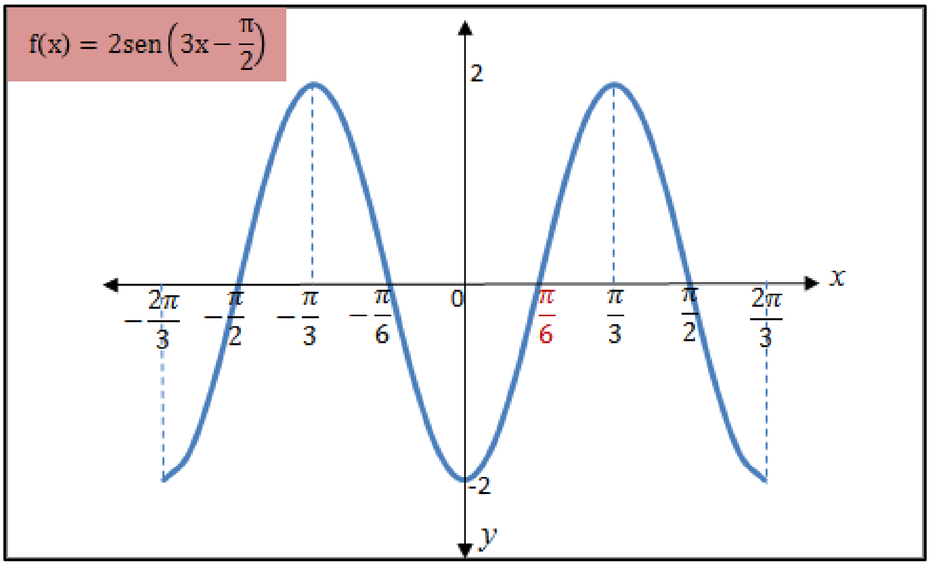
**4.** Dada la función:

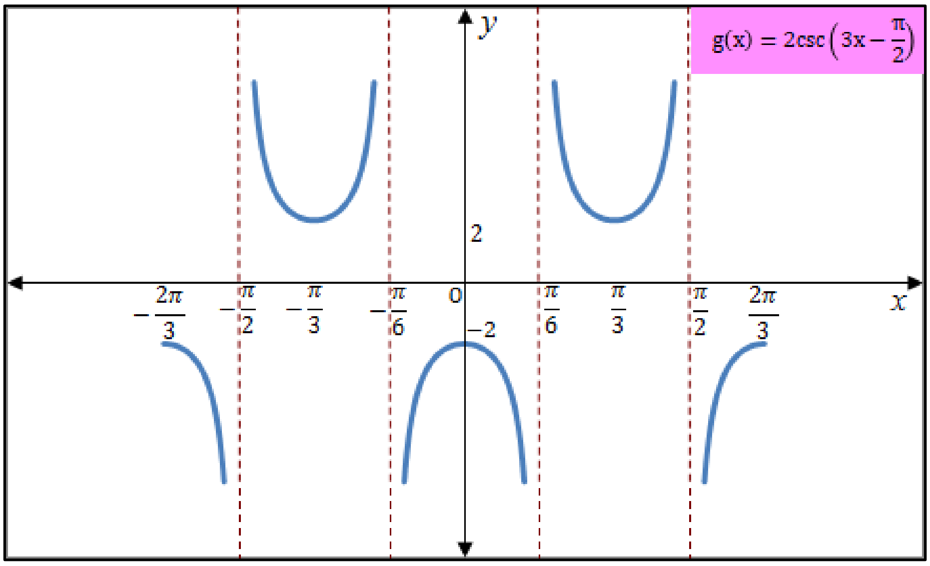
$$g(x) = 2\csc\left(3x - \frac{\pi}{2}\right);\ -\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$$

Realice su grafica estableciendo en la misma sus puntos mínimos y máximos, así como también los cortes con los ejes coordenados.

Desarrollo:

Para construir la gráfica de g(x) nos basaremos en la realizada anteriormente $f(x) = 2\operatorname{sen}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$, debido a que por ser funciones reciprocas se cumple que los ceros de f(x) serán las asíntotas de g(x), los máximos de f(x) serán los mínimos de g(x) y los mínimos de f(x) serán los máximos de g(x).



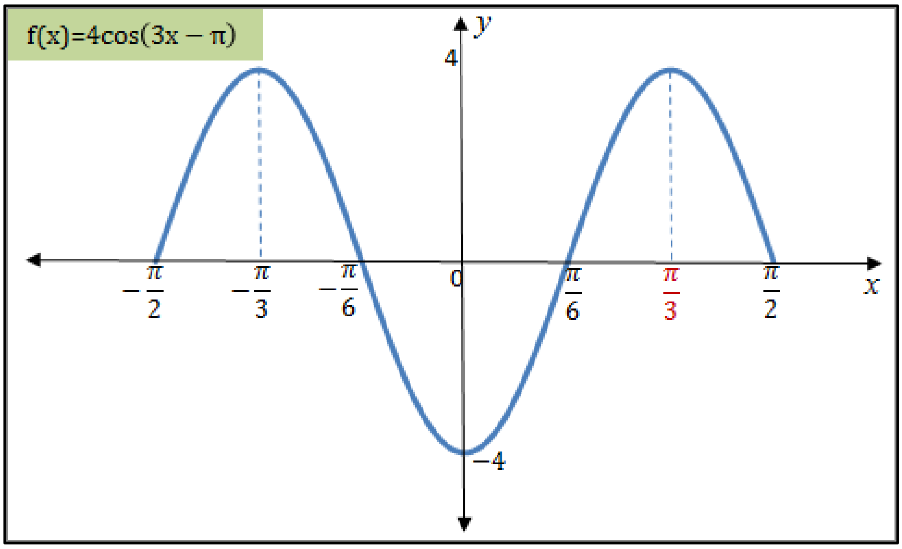
**5.** Dada la función:

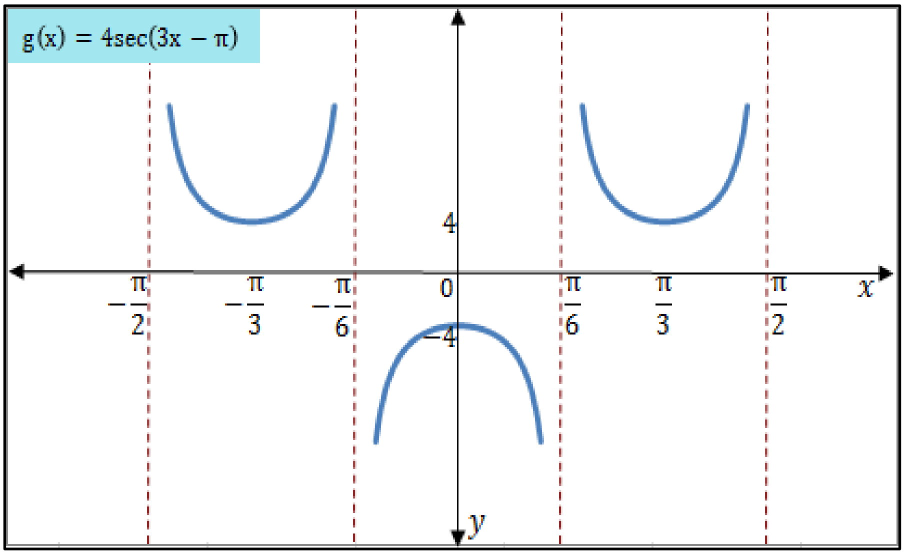
$$g(x) = 4\sec(3x - \pi); \; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

Realice su grafica estableciendo en la misma sus puntos mínimos y máximos, así como también los cortes con los ejes coordenados.

Desarrollo:

Para construir la gráfica de g(x) nos basaremos en la realizada anteriormente $f(x) = 4\cos(3x - \pi)$, debido a que por ser funciones reciprocas se cumple que los ceros de f(x) serán las asíntotas de g(x), los máximos de f(x) serán los mínimos de g(x) y los mínimos de f(x) serán los máximos de g(x).



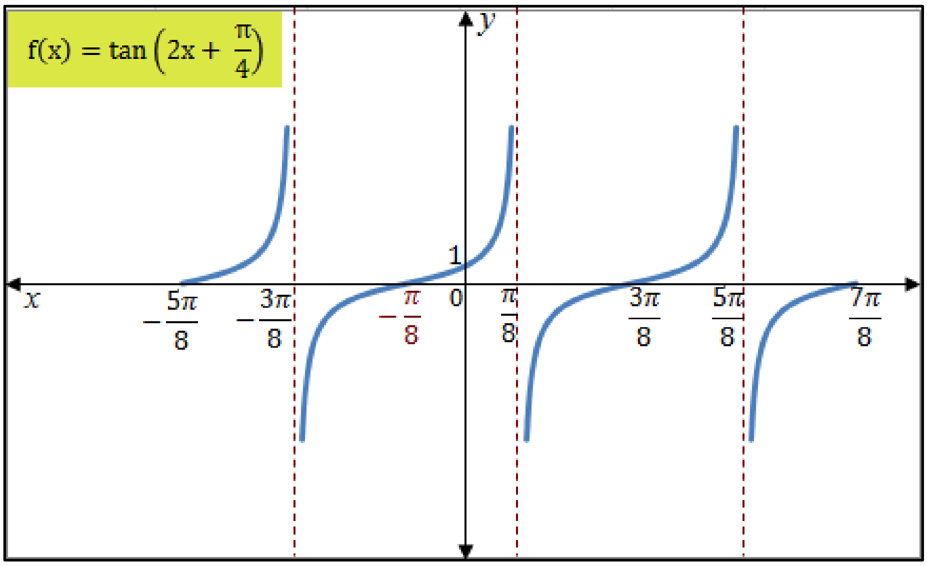
**6.** Dada la función:

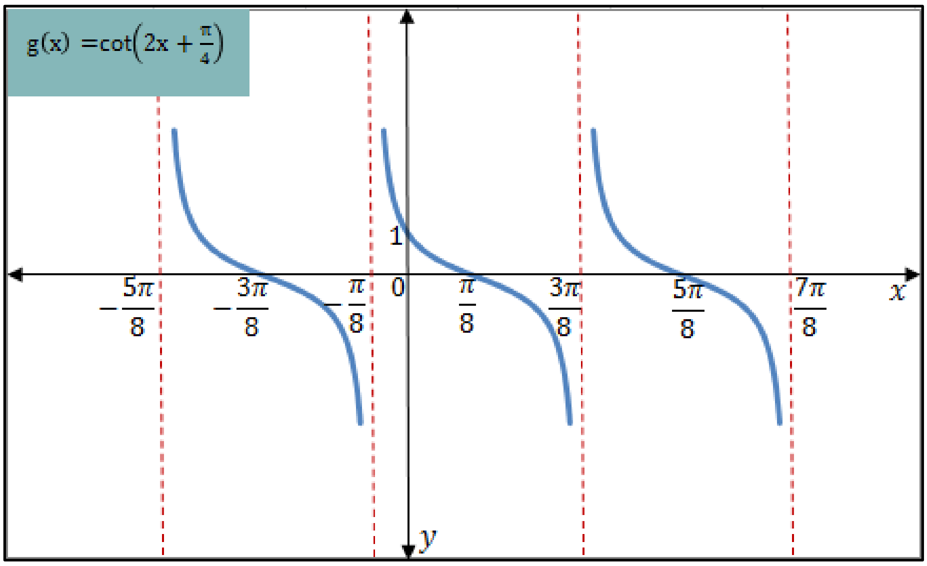
$$g(x) = \cot\left(2x + \frac{\pi}{4}\right);\ -\frac{5\pi}{8} \leq x \leq \frac{7\pi}{8}$$

Realice su grafica estableciendo en la misma sus puntos mínimos y máximos, así como también los cortes con los ejes coordenados.

Desarrollo:

Para construir la gráfica de g(x) nos basaremos en la realizada anteriormente $f(x) = \cot\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$, debido a que por ser funciones reciprocas se cumple que los ceros de f(x) serán las asíntotas de g(x), los máximos de f(x) serán los mínimos de g(x) y los mínimos de f(x) serán los máximos de g(x).



## Funciones Trigonométricas Inversas.

## Objetivos.

Al finalizar esta sección el lector se capaz de:

- Comprender la importancia de redefinir los dominios de las funciones trigonométricas para que las mismas cumplan el criterio de funciones biyectivas y así lograr obtener funciones cuyas relaciones inversa también sean funciones.

- Reconocer lo útil que resulta graficar la función trigonométrica dada, y a partir de la misma tener una idea previa de cómo será la gráfica de su función inversa

- Determinar el dominio, rango, asíntotas, cortes con los ejes coordenados y otras características de funciones trigonométricas inversas.

- Utilizar herramientas tecnológicas tales como calculadoras gráficas, hojas de cálculo, etc., con el fin de construir las gráficas de funciones trigonométricas inversas y mostrar sus gráficas exactas.

- Calcular la regla de correspondencia de una función trigonométrica inversa dada la regla de correspondencia de su función trigonométrica original.

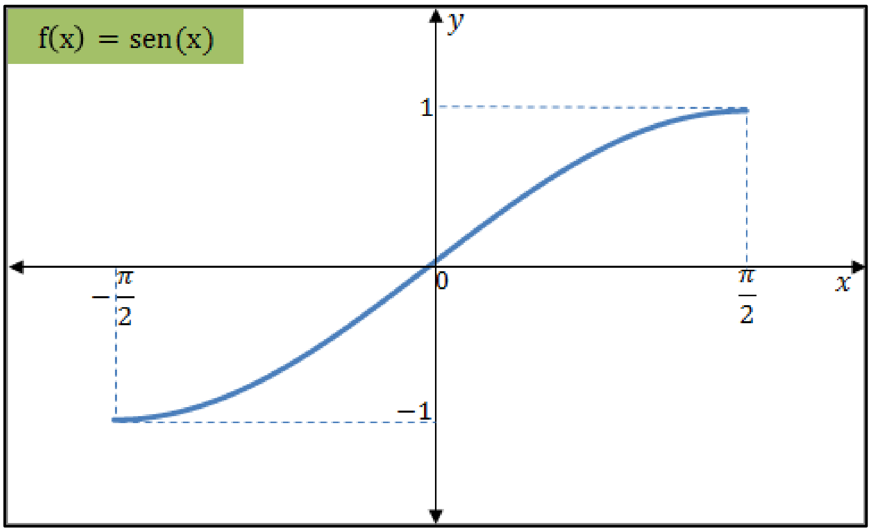
- Analizar el argumento de una expresión trigonométrica inversa e interpretar si el número real que se da en ese argumento es el resultado de una función trigonométrica de ángulo notable.

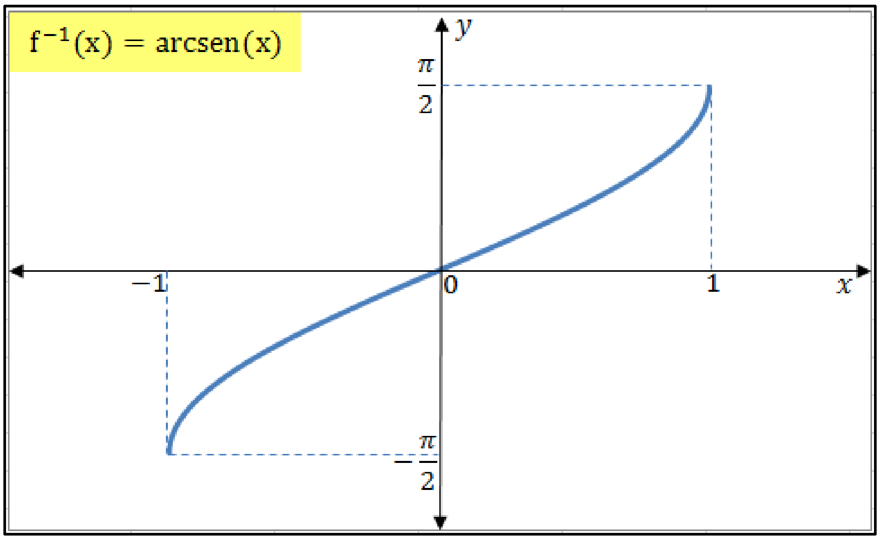
## Gráficas de Funciones Trigonométricas Inversas.

Si una función es biyectiva entonces eso nos garantiza que el gráfico de su relación inversa también sea una función. Las funciones trigonométricas no son inyectivas y no todas son sobreyectivas; por tal razón se debe redefinir sus dominios y sus conjuntos de llegada para poder tener funciones biyectivas y lograr obtener sus respectivas funciones inversas.

### 1. Gráfica de función seno con dominio restringido y gráfica de su inversa.

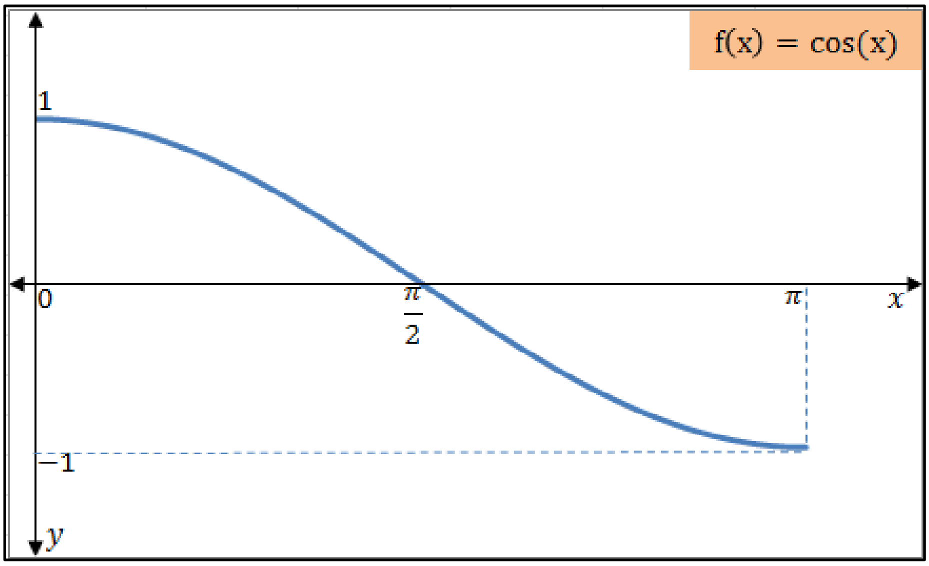
Si se tiene la función $f(x) = sen(x)$ entonces su función inversa se escribe como $sen^{-1}(x)$ o $arcsen(x)$

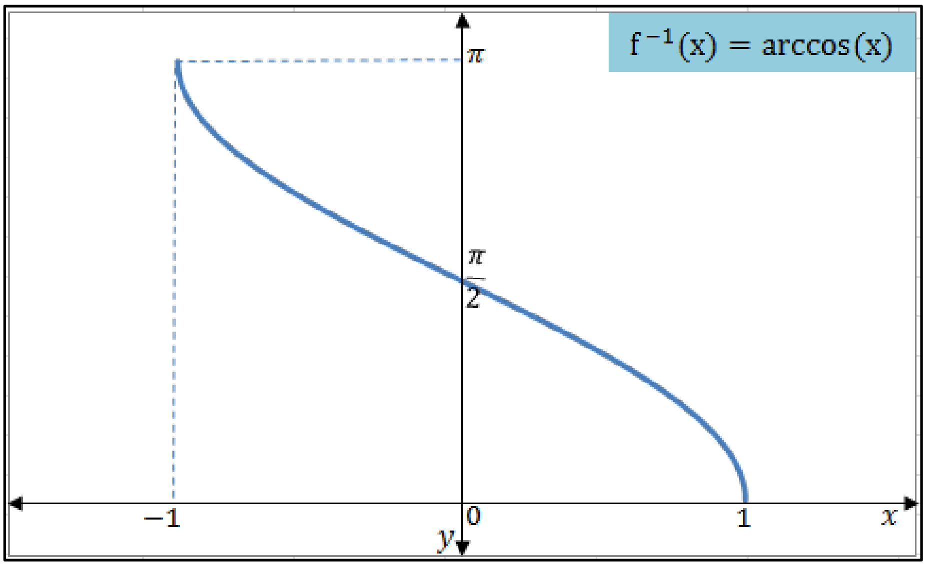


**2. Gráfica de función coseno con dominio restringido y gráfica de su inversa.**

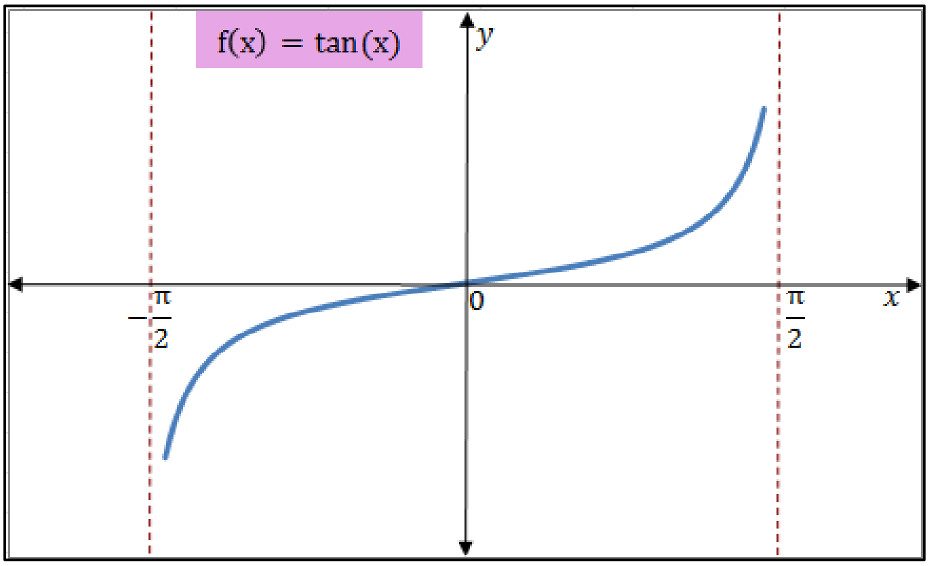
Si se tiene la función $f(x) = \cos(x)$ entonces su función inversa se escribe como $\cos^{-1}(x)$ o $\arccos(x)$

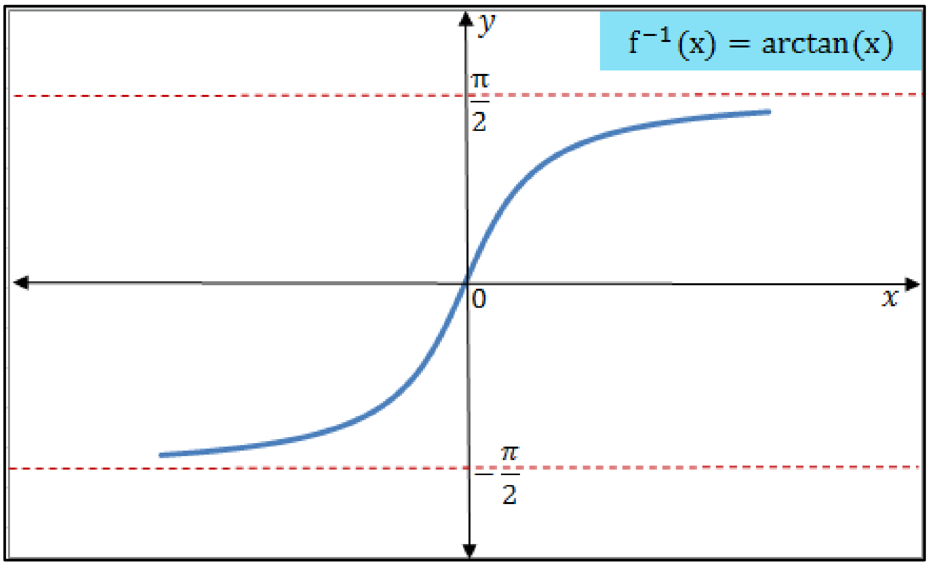


**3. Gráfica de función tangente con dominio restringido y gráfica de su inversa.**

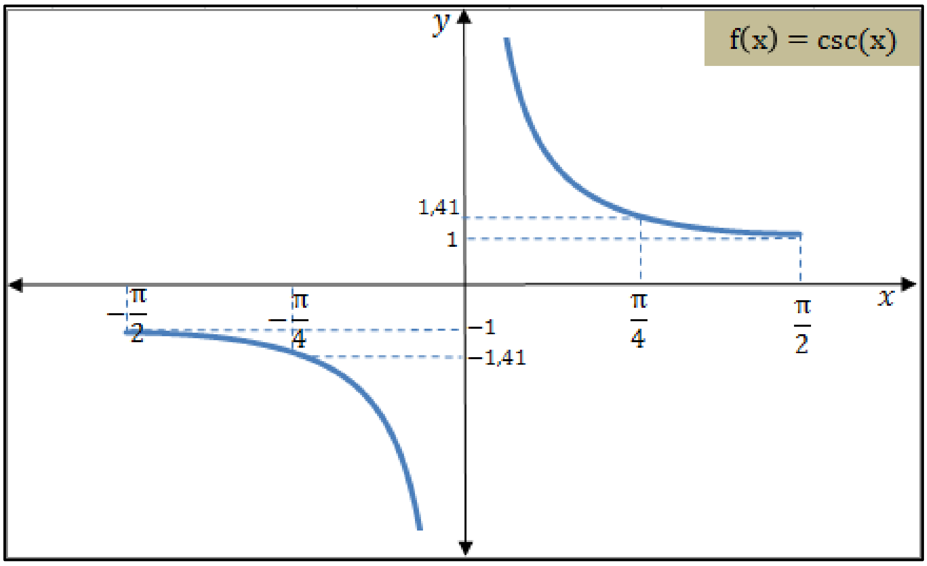
Si se tiene la función $f(x) = \tan(x)$ entonces su función inversa se escribe como $\tan^{-1}(x)$ o $\arctan(x)$

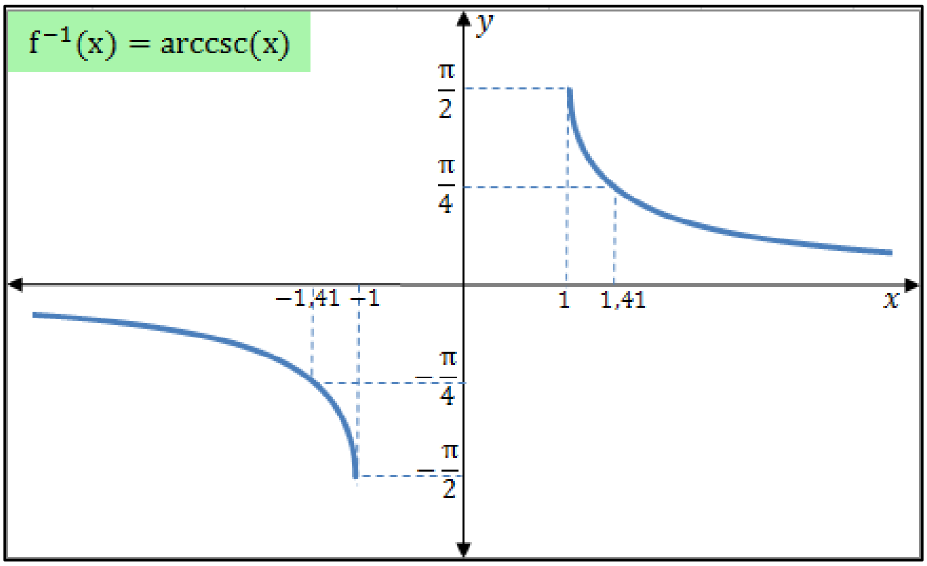


**4. Gráfica de función cosecante con dominio restringido y gráfica de su inversa.**

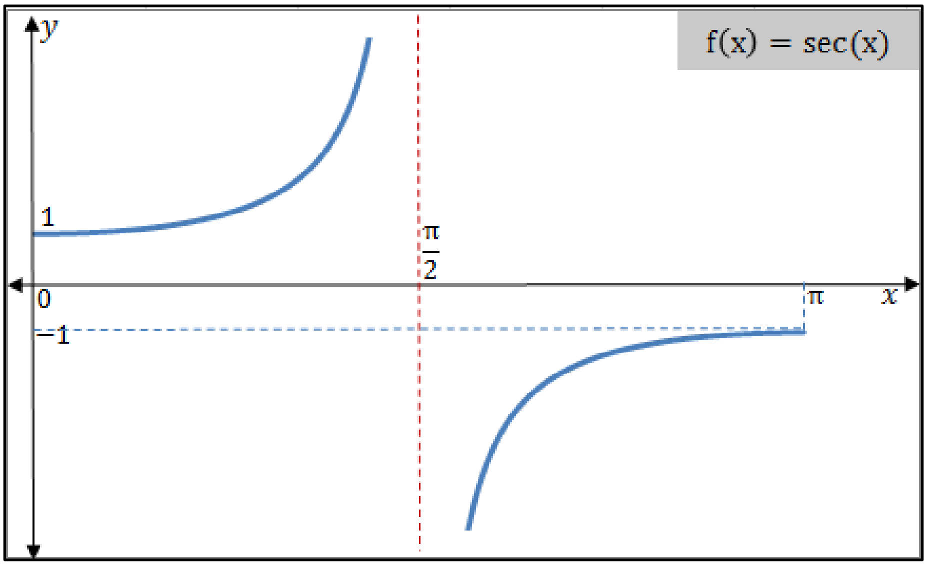
Si se tiene la función $f(x) = \csc(x)$ entonces su función inversa se escribe como $\csc^{-1}(x)$ o $\operatorname{arccsc}(x)$

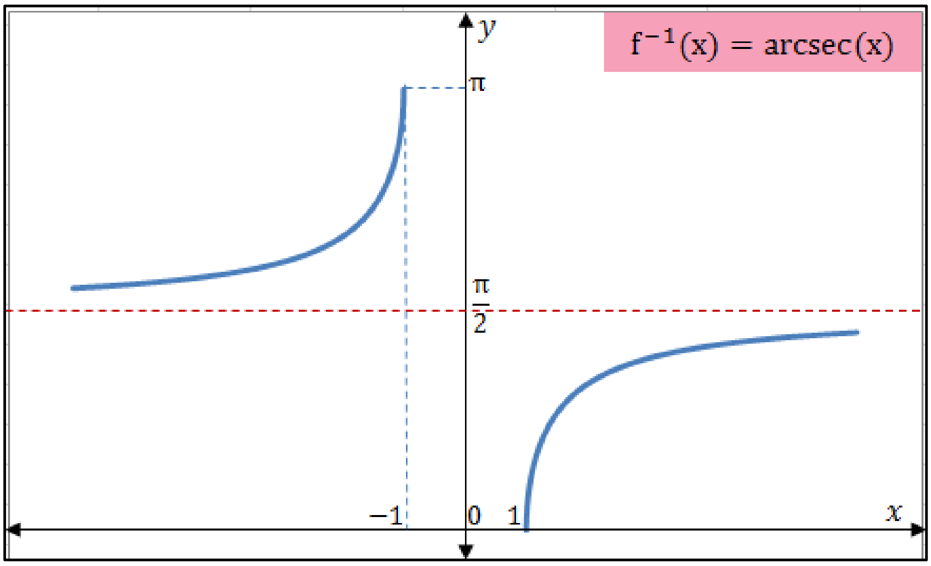


**5. Gráfica de función secante con dominio restringido y gráfica de su inversa.**

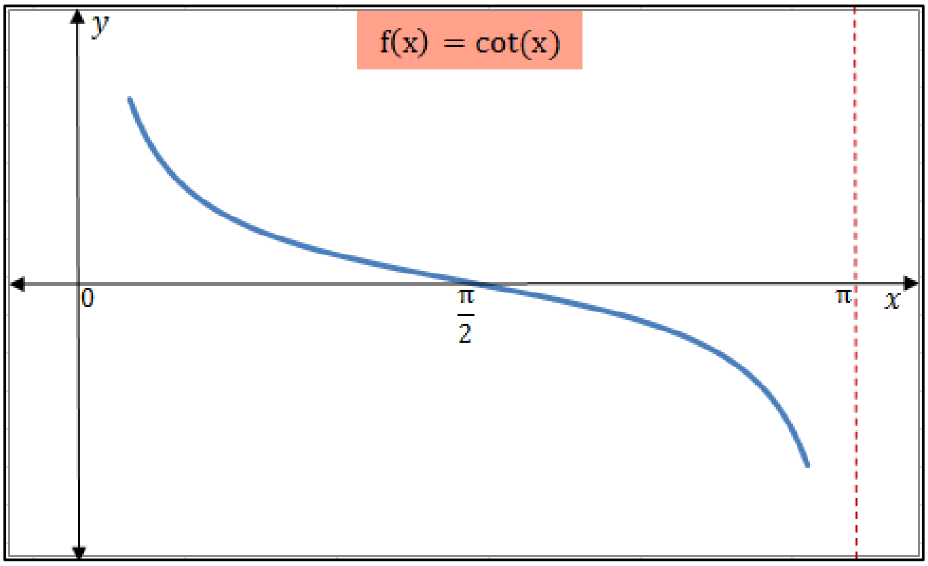
Si se tiene la función $f(x) = sec(x)$ entonces su función inversa se escribe como $\sec^{-1}(x)$ o $\operatorname{arcsec}(x)$

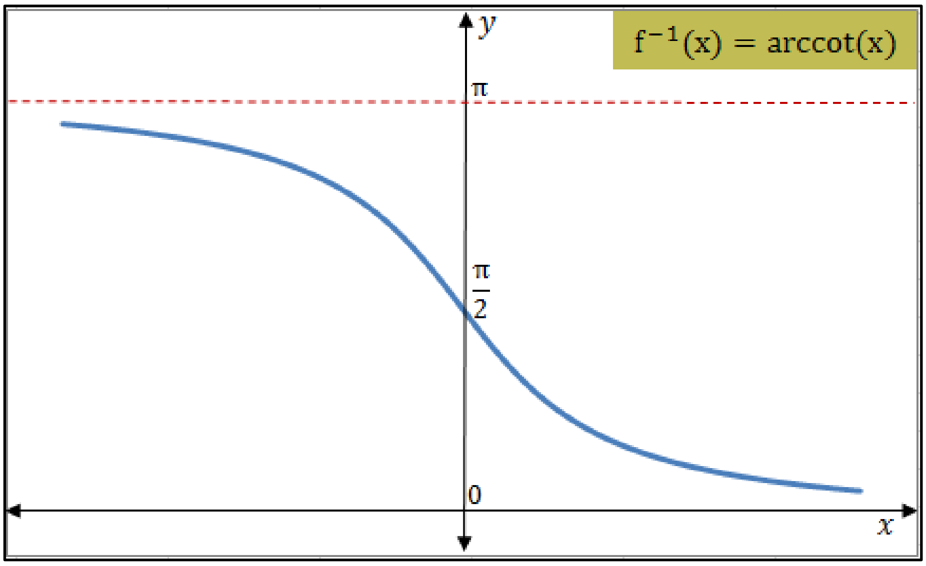


**6. Gráfica de función cotangente con dominio restringido y gráfica de su inversa.**

Si se tiene la función $f(x) = \cot(x)$ entonces su función inversa se escribe como $\cot^{-1}(x)$ o $\text{arccot}(x)$



## Ejercicios resueltos de Funciones Trigonométricas Inversas.

**1.** Dada la siguiente función:

$$f(x) = 4\text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) \;\; ; \; -\frac{\pi}{3} \le x \le 0$$

Realice las siguientes instrucciones:

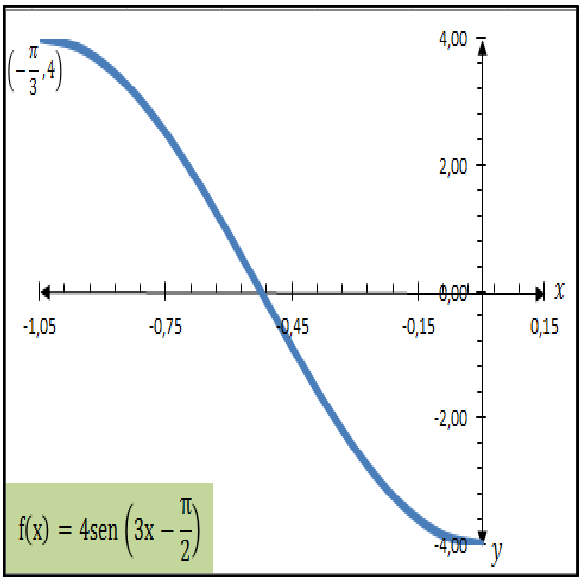
a) Graficar la función f(x)

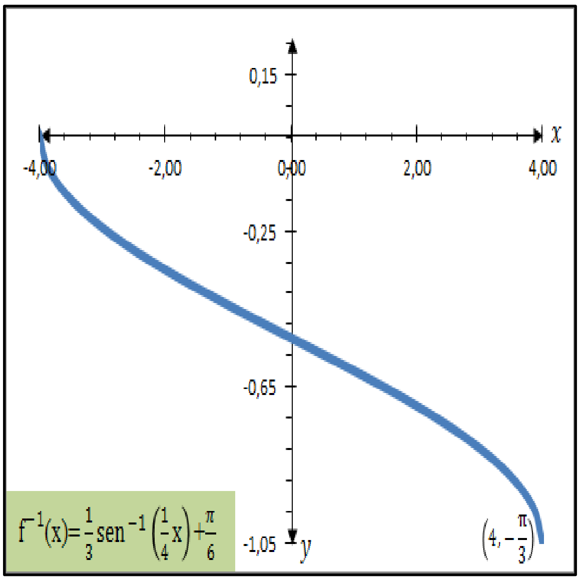
b) Graficar la inversa de f(x)

c) Obtener la regla de correspondencia de la inversa de f(x).

Desarrollo:

| x (Grados) | x (Radianes) | f(x) | x | $f^{-1}(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,00 | -4,00 | -4,00 | 0,00 |
| -5 | -0,09 | -3,86 | -3,86 | -0,09 |
| -10 | -0,17 | -3,46 | -3,46 | -0,17 |
| -15 | -0,26 | -2,83 | -2,83 | -0,26 |
| -20 | -0,35 | -2,00 | -2,00 | -0,35 |
| -25 | -0,44 | -1,04 | -1,04 | -0,44 |
| -30 | -0,52 | 0,00 | 0,00 | -0,52 |
| -35 | -0,61 | 1,04 | 1,04 | -0,61 |
| -40 | -0,70 | 2,00 | 2,00 | -0,70 |
| -45 | -0,79 | 2,83 | 2,83 | -0,79 |
| -50 | -0,87 | 3,46 | 3,46 | -0,87 |
| -55 | -0,96 | 3,86 | 3,86 | -0,96 |
| -60 | -1,05 | 4,00 | 4,00 | -1,05 |



$$f(x) = 4\text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y = 4\text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{1}{4}y = \text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{4}y\right) = \text{sen}^{-1}\left(\text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{4}y\right) = 3x - \frac{\pi}{2}$$

$$\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{4}y\right) + \frac{\pi}{2} = 3x$$

$$\frac{1}{3}\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{4}y\right) + \frac{\pi}{6} = x$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{4}x\right) + \frac{\pi}{6}\ ;\ -4 \leq x \leq 4$$

Como se puede observar en la tabla, los valores de x de la función original pasan a ser valores de y en la función inversa y viceversa, con lo cual se facilita entender las gráficas realizadas, teniendo en cuenta además que el dominio de la función inversa es el rango de la función original.

**2.** Dada la siguiente función:

$$f(x) = -4\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) - 5\ ;\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq -\frac{\pi}{6}$$

Realice las siguientes instrucciones:

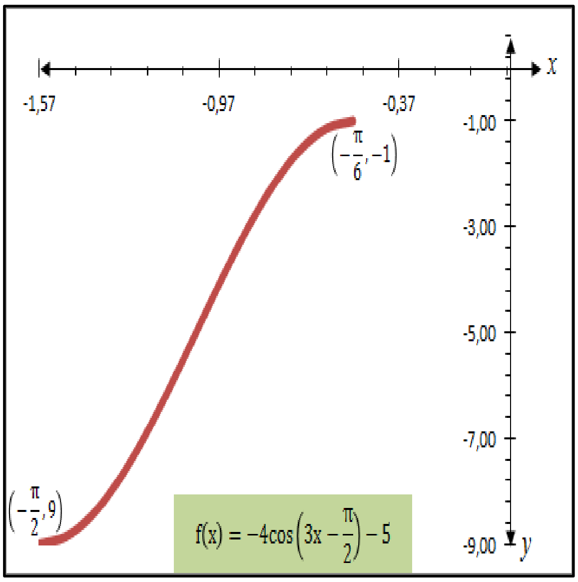
a) Graficar la función f(x)

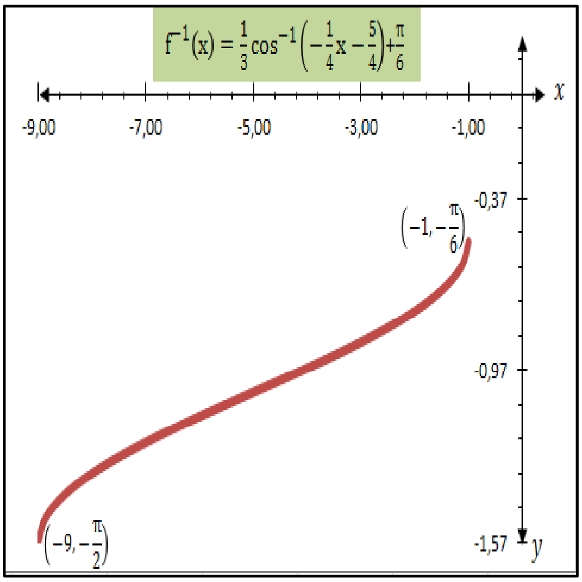
b) Graficar la inversa de f(x)

c) Obtener la regla de correspondencia de la inversa de f(x).

Desarrollo:

| x (Grados) | x (Radianes) | f(x) | x | $f^{-1}(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| -30 | -0,52 | -1,00 | -1,00 | -0,52 |
| -35 | -0,61 | -1,14 | -1,14 | -0,61 |
| -40 | -0,70 | -1,54 | -1,54 | -0,70 |
| -45 | -0,79 | -2,17 | -2,17 | -0,79 |
| -50 | -0,87 | -3,00 | -3,00 | -0,87 |
| -55 | -0,96 | -3,96 | -3,96 | -0,96 |
| -60 | -1,05 | -5,00 | -5,00 | -1,05 |
| -65 | -1,13 | -6,04 | -6,04 | -1,13 |
| -70 | -1,22 | -7,00 | -7,00 | -1,22 |
| -75 | -1,31 | -7,83 | -7,83 | -1,31 |
| -80 | -1,40 | -8,46 | -8,46 | -1,40 |
| -85 | -1,48 | -8,86 | -8,86 | -1,48 |
| -90 | -1,57 | -9,00 | -9,00 | -1,57 |




$$f(x)=-4\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)-5$$

$$y=-4\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)-5$$

$$y + 5 = -4\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{4}y - \frac{5}{4} = \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}y - \frac{5}{4}\right) = \cos^{-1}\left(\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}y - \frac{5}{4}\right) = 3x - \frac{\pi}{2}$$

$$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}y - \frac{5}{4}\right) + \frac{\pi}{2} = 3x$$

$$-\frac{1}{3}\cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}y - \frac{5}{4}\right) + \frac{\pi}{6} = x$$

$$f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}\cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}\right) + \frac{\pi}{6} \; ; \; -9 \le x \le -1$$

Como se puede observar en la tabla, los valores de x de la función original pasan a ser valores de y en la función inversa y viceversa, con lo cual se facilita entender las gráficas realizadas, teniendo en cuenta además que el dominio de la función inversa es el rango de la función original.

**3.** Dada la siguiente función:

$$f(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 3 \; ; \quad \frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$$

Realice las siguientes instrucciones:

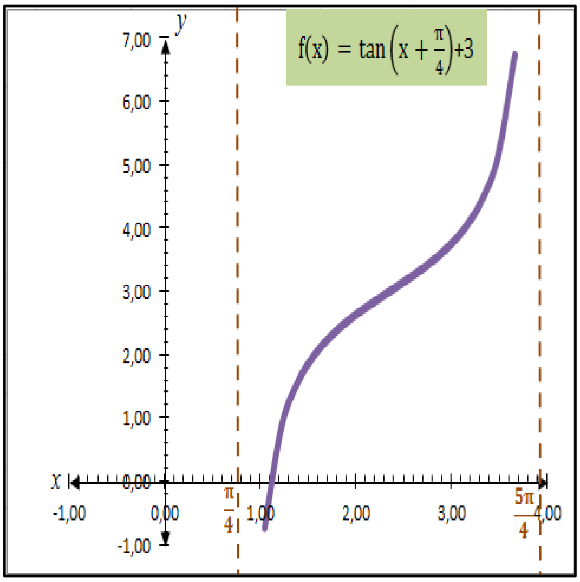
a) Graficar la función f(x)

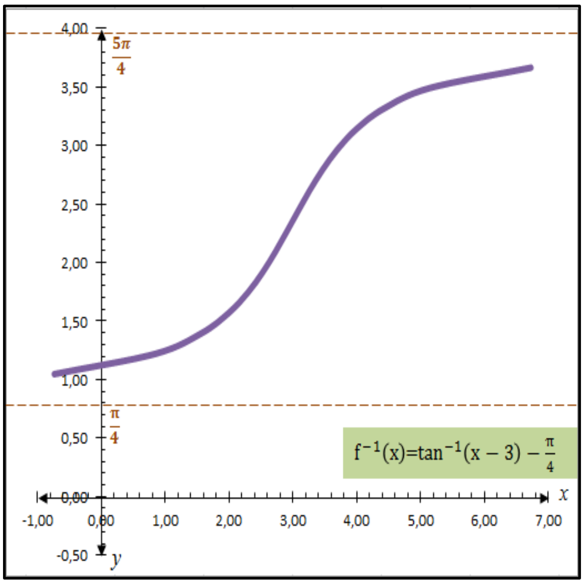
b) Graficar la inversa de f(x)

c) Obtener la regla de correspondencia de la inversa de f(x).

Desarrollo:

| x (Grados) | x (Radianes) | f(x) | x | $f^{-1}(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 45 | 0,79 | no definida | | |
| 60 | 1,05 | -0,73 | -0,73 | 1,05 |
| 70 | 1,22 | 0,86 | 0,86 | 1,22 |
| 80 | 1,40 | 1,57 | 1,57 | 1,40 |
| 90 | 1,57 | 2,00 | 2,00 | 1,57 |
| 100 | 1,75 | 2,30 | 2,30 | 1,75 |
| 110 | 1,92 | 2,53 | 2,53 | 1,92 |
| 120 | 2,09 | 2,73 | 2,73 | 2,09 |
| 130 | 2,27 | 2,91 | 2,91 | 2,27 |
| 140 | 2,44 | 3,09 | 3,09 | 2,44 |
| 150 | 2,62 | 3,27 | 3,27 | 2,62 |
| 160 | 2,79 | 3,47 | 3,47 | 2,79 |
| 170 | 2,97 | 3,70 | 3,70 | 2,97 |
| 180 | 3,14 | 4,00 | 4,00 | 3,14 |
| 190 | 3,32 | 4,43 | 4,43 | 3,32 |
| 200 | 3,49 | 5,14 | 5,14 | 3,49 |
| 210 | 3,67 | 6,73 | 6,73 | 3,67 |
| 225 | 3,93 | no definida | | |




$$f(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 3$$

$$y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 3$$

$$y - 3 = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\tan^{-1}(y-3) = \tan^{-1}\left(\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\tan^{-1}(y-3) = x+\frac{\pi}{4}$$

$$\tan^{-1}(y-3) - \frac{\pi}{4} = x$$

$$f^{-1}(x) = \tan^{-1}(x-3) - \frac{\pi}{4};\ \ -\alpha < x < \alpha$$

Como se puede observar en la tabla, los valores de x de la función original pasan a ser valores de y en la función inversa y viceversa, con lo cual se facilita entender las gráficas realizadas, teniendo en cuenta además que el dominio de la función inversa es el rango de la función original.

**4.** Determine el valor exacto de:

$$\operatorname{sen}\left[\arccos\left(\frac{2}{7}\right) + \arctan\left(\frac{5}{3}\right)\right];\ 0 < \arccos\left(\frac{2}{7}\right) < \frac{\pi}{2}\ \ \wedge\ \ 0 < \arctan\left(\frac{5}{3}\right) < \frac{\pi}{2}$$

Desarrollo:

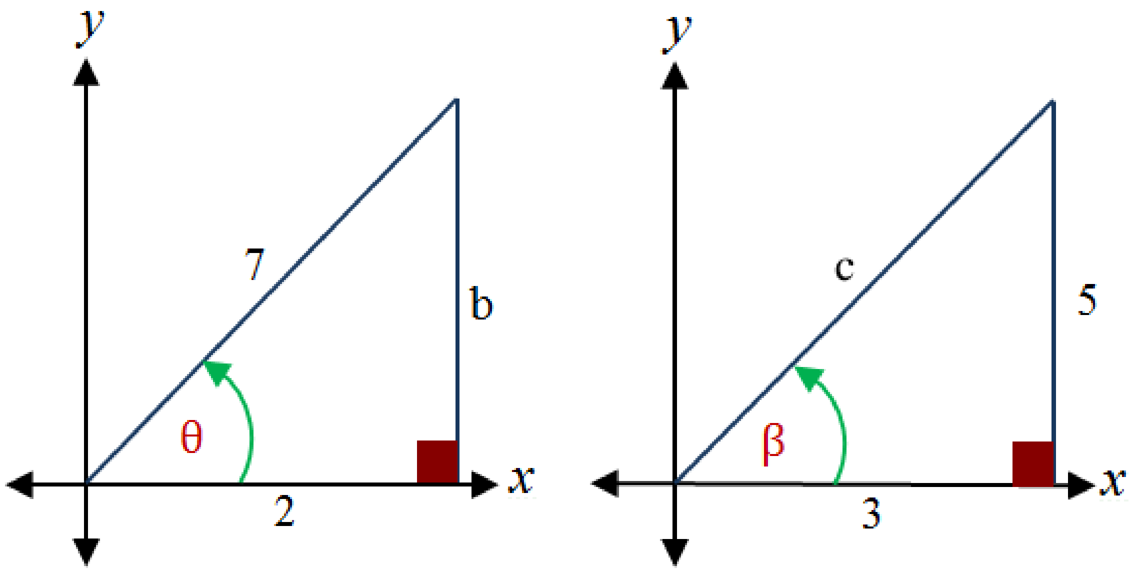
Realicemos un cambio de variable para entender mejor la expresión:

$\theta = \arccos\left(\frac{2}{7}\right) \quad \wedge \quad \beta = \arctan\left(\frac{5}{3}\right)$ ; por lo que tendremos: $\operatorname{sen}(\theta+\beta)$

$$\theta = \arccos\left(\frac{2}{7}\right) \qquad\qquad \beta = \arctan\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$\cos(\theta) = \cos\left(\arccos\left(\frac{2}{7}\right)\right) \qquad\qquad \tan(\beta) = \tan\left(\arctan\left(\frac{5}{3}\right)\right)$$

$$\cos(\theta) = \frac{2}{7} \qquad\qquad \tan(\beta) = \frac{5}{3}$$




Calculamos los valores desconocidos de cada triángulo utilizando el Teorema de Pitágoras

$$b = \sqrt{7^2 - 2^2} \qquad c = \sqrt{5^2 + 3^2}$$

$$b = \sqrt{49 - 4} \qquad c = \sqrt{25 + 9}$$

$$b = \sqrt{45} \qquad c = \sqrt{34}$$

$$\mathrm{sen}(\theta) = \frac{\sqrt{45}}{7} \qquad \cos(\beta) = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

$$\cos(\theta) = \frac{2}{7} \qquad \mathrm{sen}(\beta) = \frac{5}{\sqrt{34}}$$

$$\mathrm{sen}(\theta + \beta) = \mathrm{sen}(\theta)\cos(\beta) + \mathrm{sen}(\beta)\cos(\theta)$$

$$\mathrm{sen}(\theta + \beta) = \frac{\sqrt{45}}{7} * \frac{3}{\sqrt{34}} + \frac{5}{\sqrt{34}} * \frac{2}{7}$$

$$\mathrm{sen}(\theta + \beta) = \frac{3\sqrt{45}}{7\sqrt{34}} + \frac{10}{7\sqrt{34}}$$

$$\mathrm{sen}(\theta + \beta) = \frac{3\sqrt{45} + 10}{7\sqrt{34}} \qquad \mathrm{sen}(\theta + \beta) = \frac{3\sqrt{1530} + 10\sqrt{34}}{238}$$

**5.** Determine el valor exacto de:

$$\cos\left[\arctan\left(-\frac{2}{3}\right)-\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right];\ \frac{\pi}{2}<\arctan\left(-\frac{2}{3}\right)<\pi\ \wedge\ \pi<\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)<\frac{3\pi}{2}$$

Desarrollo:

Realicemos un cambio de variable para entender mejor la expresión:

$$\theta=\arctan\left(-\frac{2}{3}\right)\quad\wedge\quad\beta=\ \arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\ \ ;\ \text{por lo que tendremos: }\cos(\theta-\beta)$$

$$\theta=\arctan\left(-\frac{2}{3}\right)$$

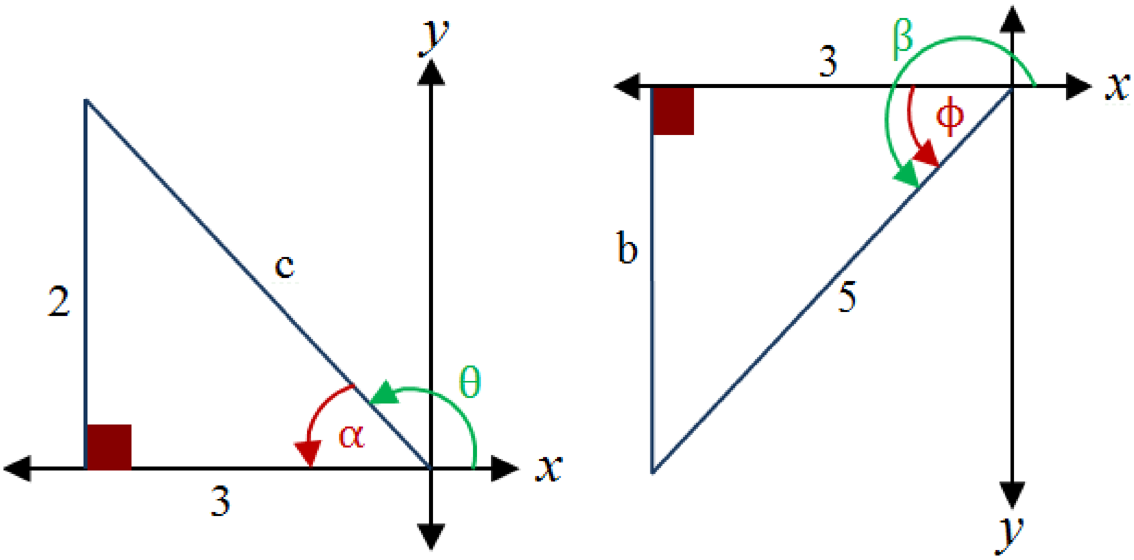
$$\tan(\theta)=\tan\left(\arctan\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$$

$$\tan(\theta)=-\frac{2}{3}$$

$$\beta=\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$\cos(\beta)=\cos\left(\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$$

$$\cos(\beta)=-\frac{3}{5}$$




Calculamos los valores desconocidos de cada triángulo utilizando el Teorema de Pitágoras

$$c=\sqrt{2^2+3^2}$$

$$c=\sqrt{4+9}$$

$$c=\sqrt{13}$$

$$b=\sqrt{5^2-3^2}$$

$$b=\sqrt{25-9}$$

$$b=4$$

$\text{sen}(\theta) = \text{sen}(\alpha)$ $\text{sen}(\beta) = -\text{sen}(\phi)$

$\cos(\theta) = -\cos(\alpha)$ $\cos(\beta) = -\cos(\phi)$

$\text{sen}(\theta) = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$ $\text{sen}(\beta) = -\dfrac{4}{5}$

$\cos(\theta) = -\dfrac{3}{\sqrt{13}}$ $\cos(\beta) = -\dfrac{3}{5}$

$\cos(\theta - \beta) = \cos(\theta)\cos(\beta) + \text{sen}(\theta)\text{sen}(\beta)$

$$\cos(\theta - \beta) = -\frac{3}{\sqrt{13}} * -\frac{3}{5} + \frac{2}{\sqrt{13}} * -\frac{4}{5}$$

$$\cos(\theta - \beta) = \frac{9}{5\sqrt{13}} - \frac{8}{5\sqrt{13}}$$

$$\cos(\theta - \beta) = \frac{1}{5\sqrt{13}}$$

$$\cos(\theta - \beta) = \frac{\sqrt{13}}{65}$$

**6.** Determine el valor exacto de:

$$\text{sen}\left[\text{arcsen}\left(-\frac{2}{5}\right) - \text{arctan}\left(-\frac{3}{2}\right)\right]; \pi < \text{arcsen}\left(-\frac{2}{5}\right) < \frac{3\pi}{2} \wedge \frac{3\pi}{2} < \text{arctan}\left(-\frac{3}{2}\right) < 2\pi$$

Desarrollo:

Realicemos un cambio de variable para entender mejor la expresión:

$$\theta = \text{arcsen}\left(-\frac{2}{5}\right) \quad \wedge \quad \beta = \text{arctan}\left(-\frac{3}{2}\right) \text{ ; por lo que tendremos: } \text{sen}(\theta - \beta)$$

$\theta = \arcsen\left(-\frac{2}{5}\right)$

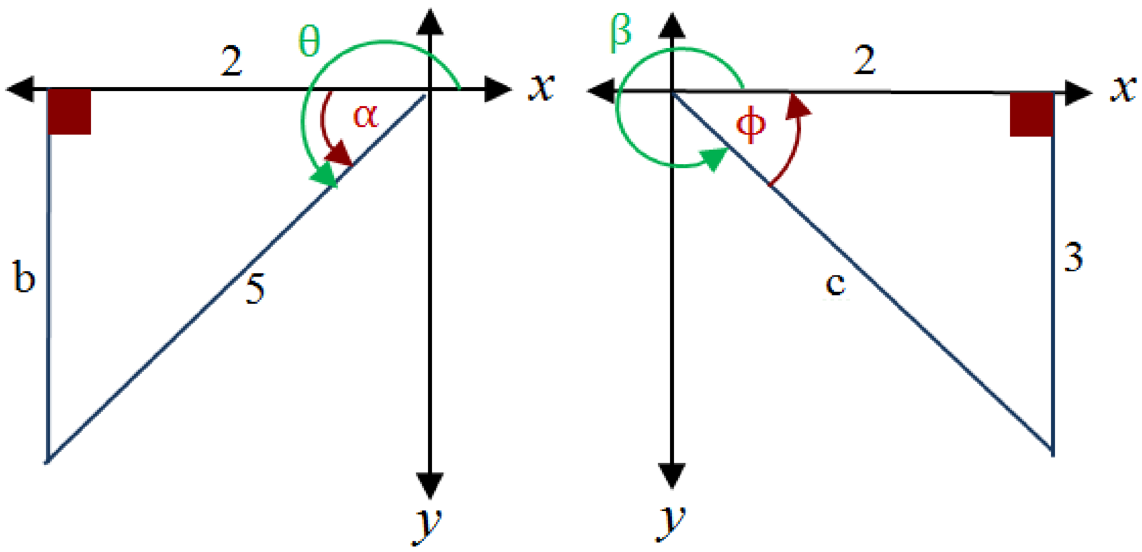
$\operatorname{sen}(\theta) = \operatorname{sen}\left(\arcsen\left(-\frac{2}{5}\right)\right)$

$\operatorname{sen}(\theta) = -\frac{2}{5}$

$\beta = \arctan\left(-\frac{3}{2}\right)$

$\tan(\beta) = \left(\arctan\left(-\frac{3}{2}\right)\right)$

$\tan(\beta) = -\frac{3}{2}$




Calculamos los valores desconocidos de cada triángulo utilizando el Teorema de Pitágoras

$b = \sqrt{5^2 - 2^2}$

$b = \sqrt{25 - 4}$

$b = \sqrt{21}$

$c = \sqrt{2^2 + 3^2}$

$c = \sqrt{4 + 9}$

$c = \sqrt{13}$

$\operatorname{sen}(\theta) = -\operatorname{sen}(\alpha)$

$\operatorname{sen}(\beta) = -\operatorname{sen}(\phi)$

$\cos(\theta) = -\cos(\alpha)$

$\cos(\beta) = \cos(\phi)$

$\cos(\theta) = -\frac{\sqrt{21}}{5}$

$\operatorname{sen}(\beta) = -\frac{3}{\sqrt{13}}$

$$\operatorname{sen}(\theta) = -\frac{2}{5}$$

$$\cos(\beta) = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\operatorname{sen}(\theta - \beta) = \operatorname{sen}(\theta)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\beta)\cos(\theta)$$

$$\operatorname{sen}(\theta - \beta) = -\frac{2}{5} * \frac{2}{\sqrt{13}} - \left(-\frac{3}{\sqrt{13}}\right) - \frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\operatorname{sen}(\theta - \beta) = -\frac{4}{5\sqrt{13}} - \frac{3\sqrt{21}}{5\sqrt{13}}$$

$$\operatorname{sen}(\theta - \beta) = \frac{-4 - 3\sqrt{21}}{5\sqrt{13}}$$

## Identidades Trigonométricas.

## Objetivos.

Al finalizar esta sección el lector se capaz de:

- Demostrar identidades empleando las tres funciones trigonométricas elementales y sus reciprocas.
- Diferenciar entre la demostración de una identidad y la resolución de una ecuación.
- Deducir identidades para la suma o diferencia de ángulos y ángulo doble.
- Aplicar las funciones de ángulos notables en el desarrollo de identidades trigonométricas.
- Demostrar identidades utilizando varios recursos tales como factorización, multiplicación por expresiones conjugadas, operaciones algebraicas, etc.
- Obtener relaciones trigonométricas de medidas de ángulos, a partir de otras relaciones conocidas

Cuando se demuestre una identidad es preferible tratar de escribir la expresión dada en términos de las funciones seno o coseno. Solo se trabaja con un solo término de la expresión y se debe tener muy claro en no confundir con el desarrollo de una ecuación, a continuación se escribirán las principales identidades que se emplearán en la resolución de identidades trigonométricas.

$$\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x)=1$$
$$\tan^2(x)+1=\sec^2(x)$$
$$1+\cot^2(x)=\csc^2(x)$$

$$\operatorname{sen}(2x)=2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$$
$$\cos(2x)=\begin{cases}\cos^2(x)-\operatorname{sen}^2(x)\\ 1-2\operatorname{sen}^2(x)\\ 2\cos^2(x)-1\end{cases}$$
$$\tan(2x)=\frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

$$\tan(x)=\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$$
$$\cot(x)=\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$$
$$\csc(x)=\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$$
$$\sec(x)=\frac{1}{\cos(x)}$$
$$\cot(x)=\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$$

$$\operatorname{sen}(x+y)=\operatorname{sen}(x)\cos(y)+\operatorname{sen}(y)\cos(x)$$
$$\operatorname{sen}(x-y)=\operatorname{sen}(x)\cos(y)-\operatorname{sen}(y)\cos(x)$$
$$\cos(x+y)=\cos(x)\cos(y)-\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$$
$$\cos(x-y)=\cos(x)\cos(y)+\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$$
$$\tan(x+y)=\frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$
$$\tan(x-y)=\frac{\tan(x)-\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)}$$

## Ejercicios resueltos de Identidades Trigonométricas.

**1.** Demuestre la identidad:

$$\frac{\left(1+\frac{\cos(x)}{\cot(x)}\right)\sec^2(x)}{1+\left(\frac{1}{\cot(x)}+\sec(x)\right)^2} \equiv \frac{1}{2}$$

Desarrollo:

$$\frac{\left(1+\frac{\cos(x)}{\cot(x)}\right)\sec^2(x)}{1+\left(\frac{1}{\cot(x)}+\sec(x)\right)^2} \equiv \frac{\left(1+\cos(x)\frac{1}{\cot(x)}\right)\sec^2(x)}{1+\left(\frac{1}{\cot(x)}+\frac{1}{\cos(x)}\right)^2}$$

$$\frac{\left(1+\frac{\cos(x)}{\cot(x)}\right)\sec^2(x)}{1+\left(\frac{1}{\cot(x)}+\sec(x)\right)^2} \equiv \frac{(1+\cos(x)\tan(x))\frac{1}{\cos^2(x)}}{1+\left(\tan(x)+\frac{1}{\cos(x)}\right)^2}$$

$$\frac{\left(1+\frac{\cos(x)}{\cot(x)}\right)\sec^2(x)}{1+\left(\frac{1}{\cot(x)}+\sec(x)\right)^2} \equiv \frac{\left(1+\cos(x)\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\right)\frac{1}{\cos^2(x)}}{1+\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}+\frac{1}{\cos(x)}\right)^2}$$

$$\frac{\left(1+\frac{\cos(x)}{\cot(x)}\right)\sec^2(x)}{1+\left(\frac{1}{\cot(x)}+\sec(x)\right)^2} \equiv \frac{\frac{1+\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)}}{1+\frac{(1+\operatorname{sen}(x))^2}{\cos^2(x)}}$$

$$\frac{\left(1+\frac{\cos(x)}{\cot(x)}\right)\sec^2(x)}{1+\left(\frac{1}{\cot(x)}+\sec(x)\right)^2} \equiv \frac{\frac{1+\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)}}{\frac{\cos^2(x)+(1+\operatorname{sen}(x))^2}{\cos^2(x)}}$$

$$\frac{\left(1+\frac{\cos(x)}{\cot(x)}\right)\sec^2(x)}{1+\left(\frac{1}{\cot(x)}+\sec(x)\right)^2} \equiv \frac{1+\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)+\left(1+\operatorname{sen}(x)\right)^2}$$

$$\frac{\left(1+\frac{\cos(x)}{\cot(x)}\right)\sec^2(x)}{1+\left(\frac{1}{\cot(x)}+\sec(x)\right)^2} \equiv \frac{1+\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)+\left(1+2\operatorname{sen}(x)+\operatorname{sen}^2(x)\right)}$$

$$\frac{\left(1+\frac{\cos(x)}{\cot(x)}\right)\sec^2(x)}{1+\left(\frac{1}{\cot(x)}+\sec(x)\right)^2} \equiv \frac{1+\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)+1+2\operatorname{sen}(x)+\operatorname{sen}^2(x)}$$

$$\frac{\left(1+\frac{\cos(x)}{\cot(x)}\right)\sec^2(x)}{1+\left(\frac{1}{\cot(x)}+\sec(x)\right)^2} \equiv \frac{1+\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)+\operatorname{sen}^2(x)+1+2\operatorname{sen}(x)}$$

$$\frac{\left(1+\frac{\cos(x)}{\cot(x)}\right)\sec^2(x)}{1+\left(\frac{1}{\cot(x)}+\sec(x)\right)^2} \equiv \frac{1+\operatorname{sen}(x)}{1+1+2\operatorname{sen}(x)}$$

$$\frac{\left(1+\frac{\cos(x)}{\cot(x)}\right)\sec^2(x)}{1+\left(\frac{1}{\cot(x)}+\sec(x)\right)^2} \equiv \frac{1+\operatorname{sen}(x)}{2+2\operatorname{sen}(x)}$$

$$\frac{\left(1+\frac{\cos(x)}{\cot(x)}\right)\sec^2(x)}{1+\left(\frac{1}{\cot(x)}+\sec(x)\right)^2} \equiv \frac{1+\operatorname{sen}(x)}{2\left(1+\operatorname{sen}(x)\right)}$$

$$\frac{\left(1+\frac{\cos(x)}{\cot(x)}\right)\sec^2(x)}{1+\left(\frac{1}{\cot(x)}+\sec(x)\right)^2} \equiv \frac{1}{2}$$

**2.** Demuestre la identidad:

$$\frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}+\frac{1}{2\cos^2(x)-1}\equiv\frac{\cos(x)+\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}$$

Desarrollo:

$$\frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}+\frac{1}{2\cos^2(x)-1}\equiv\frac{\cos(x)+\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}$$

$$\frac{2\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}}{1-\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)}}+\frac{1}{2\cos^2(x)-1}\equiv\frac{\cos(x)+\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}$$

$$\frac{2\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}}{\frac{\cos^2(x)-\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)}}+\frac{1}{\cos^2(x)-\operatorname{sen}^2(x)}\equiv\frac{\cos(x)+\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}$$

$$\frac{2\operatorname{sen}(x)\cos^2(x)}{\cos(x)\left(\cos^2(x)-\operatorname{sen}^2(x)\right)}+\frac{1}{\cos^2(x)-\operatorname{sen}^2(x)}\equiv\frac{\cos(x)+\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}$$

$$\frac{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{\cos^2(x)-\operatorname{sen}^2(x)}+\frac{1}{\cos^2(x)-\operatorname{sen}^2(x)}\equiv\frac{\cos(x)+\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}$$

$$\frac{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)+1}{\cos^2(x)-\operatorname{sen}^2(x)}\equiv\frac{\cos(x)+\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}$$

$$\frac{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)+\left(\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x)\right)}{\cos^2(x)-\operatorname{sen}^2(x)}\equiv\frac{\cos(x)+\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2(x)+2\operatorname{sen}(x)\cos(x)+\cos^2(x)}{\cos^2(x)-\operatorname{sen}^2(x)}\equiv\frac{\cos(x)+\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}$$

$$\frac{(\operatorname{sen}(x)+\cos(x))^2}{\cos^2(x)-\operatorname{sen}^2(x)} \equiv \frac{\cos(x)+\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}$$

$$\frac{\big(\cos(x)+\operatorname{sen}(x)\big)\big(\cos(x)+\operatorname{sen}(x)\big)}{\big(\cos(x)+\operatorname{sen}(x)\big)\big(\cos(x)-\operatorname{sen}(x)\big)} \equiv \frac{\cos(x)+\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}$$

$$\frac{\cos(x)+\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)} \equiv \frac{\cos(x)+\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}$$

**3.** Demuestre la identidad:

$$\frac{\cos(x)}{1-\tan(x)}+\frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cot(x)} \equiv \operatorname{sen}(x)+\cos(x)$$

Desarrollo:

$$\frac{\cos(x)}{1-\tan(x)}+\frac{\operatorname{sen}(x)}{1-\cot(x)} \equiv \operatorname{sen}(x)+\cos(x)$$

$$\frac{\cos(x)}{1-\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}}+\frac{\operatorname{sen}(x)}{1-\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}} \equiv \operatorname{sen}(x)+\cos(x)$$

$$\frac{\cos(x)}{\frac{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}}+\frac{\operatorname{sen}(x)}{\frac{\operatorname{sen}(x)-\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}} \equiv \operatorname{sen}(x)+\cos(x)$$

$$\frac{\cos(x)}{\frac{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}}-\frac{\operatorname{sen}(x)}{\frac{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(x)}} \equiv \operatorname{sen}(x)+\cos(x)$$

$$\frac{\cos^2(x)}{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}-\frac{\operatorname{sen}(x)^2}{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)} \equiv \operatorname{sen}(x)+\cos(x)$$

$$\frac{\cos^2(x)-\operatorname{sen}^2(x)}{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)} \equiv \operatorname{sen}(x)+\cos(x)$$

$$\frac{\left(\cos(x)+\operatorname{sen}(x)\right)\left(\cos(x)-\operatorname{sen}(x)\right)}{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)} \equiv \operatorname{sen}(x)+\cos(x)$$

$$\frac{\left(\operatorname{sen}(x)+\cos(x)\right)\left(\cos(x)-\operatorname{sen}(x)\right)}{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)} \equiv \operatorname{sen}(x)+\cos(x)$$

$$\operatorname{sen}(x)+\cos(x) \equiv \operatorname{sen}(x)+\cos(x)$$

**4.** Demuestre la identidad:

$$(\operatorname{sen}(x)+\csc(x))^2 \equiv \operatorname{sen}^2(x)+\cot^2(x)+3$$

Desarrollo:

$$(\operatorname{sen}(x)+\csc(x))^2 \equiv \operatorname{sen}^2(x)+\cot^2(x)+3$$

$$\left(\operatorname{sen}(x)+\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right)^2 \equiv \operatorname{sen}^2(x)+\cot^2(x)+3$$

$$\left(\frac{\operatorname{sen}^2(x)+1}{\operatorname{sen}(x)}\right)^2 \equiv \operatorname{sen}^2(x)+\cot^2(x)+3$$

$$\frac{\operatorname{sen}^4(x)+2\operatorname{sen}^2(x)+1}{\operatorname{sen}^2(x)} \equiv \operatorname{sen}^2(x)+\cot^2(x)+3$$

$$\frac{\operatorname{sen}^4(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}+\frac{2\operatorname{sen}^2(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}+\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} \equiv \operatorname{sen}^2(x)+\cot^2(x)+3$$

$$\operatorname{sen}^2(x)+2+\csc^2(x) \equiv \operatorname{sen}^2(x)+\cot^2(x)+3$$

$$\operatorname{sen}^2(x)+2+\left(1+\cot^2(x)\right) \equiv \operatorname{sen}^2(x)+\cot^2(x)+3$$

$$\operatorname{sen}^2(x)+2+1+\cot^2(x) \equiv \operatorname{sen}^2(x)+\cot^2(x)+3$$

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cot^2(x) + 3 \equiv \operatorname{sen}^2(x) + \cot^2(x) + 3$$

**5.** Demuestre la identidad:

$$\frac{\csc(x)\big(\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\big)^2}{\operatorname{sen}(x)} - \frac{\cos(2x)}{1 - \cos^2(x)} \equiv 2 - 2\cot(x)$$

Desarrollo:

$$\frac{\csc(x)\big(\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\big)^2}{\operatorname{sen}(x)} - \frac{\cos(2x)}{1 - \cos^2(x)} \equiv 2 - 2\cot(x)$$

$$\frac{\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\big(\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\big)^2}{\operatorname{sen}(x)} - \frac{\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} \equiv 2 - 2\cot(x)$$

$$\frac{\big(\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\big)^2}{\operatorname{sen}^2(x)} - \frac{\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} \equiv 2 - 2\cot(x)$$

$$\frac{\cos^2(x) - 2\cos(x)\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}^2(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} - \frac{\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} \equiv 2 - 2\cot(x)$$

$$\frac{\cos^2(x) - 2\cos(x)\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}^2(x) - \big(\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)\big)}{\operatorname{sen}^2(x)} \equiv 2 - 2\cot(x)$$

$$\frac{\cos^2(x) - 2\cos(x)\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}^2(x) - \cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} \equiv 2 - 2\cot(x)$$

$$\frac{2\operatorname{sen}^2(x) - 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} \equiv 2 - 2\cot(x)$$

$$\frac{2\operatorname{sen}^2(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} - \frac{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} \equiv 2 - 2\cot(x)$$

$$2-2\frac{\cos(\mathrm{x})}{\mathrm{sen}(\mathrm{x})} \equiv 2-2\cot(\mathrm{x})$$

$$2-2\cot(\mathrm{x}) \equiv 2-2\cot(\mathrm{x})$$

**6.** Demuestre la identidad:

$$\frac{1+\cos(\mathrm{x})}{\mathrm{sen}(\mathrm{x})}+\frac{\mathrm{sen}(\mathrm{x})}{1+\cos(\mathrm{x})} \equiv \frac{2}{\mathrm{sen}(\mathrm{x})}$$

Desarrollo:

$$\frac{1+\cos(\mathrm{x})}{\mathrm{sen}(\mathrm{x})}+\frac{\mathrm{sen}(\mathrm{x})}{1+\cos(\mathrm{x})} \equiv \frac{2}{\mathrm{sen}(\mathrm{x})}$$

$$\frac{(1+\cos(\mathrm{x}))^2+\mathrm{sen}^2(\mathrm{x})}{\mathrm{sen}(\mathrm{x})(1+\cos(\mathrm{x}))} \equiv \frac{2}{\mathrm{sen}(\mathrm{x})}$$

$$\frac{1+2\cos(\mathrm{x})+\cos^2(\mathrm{x})+\mathrm{sen}^2(\mathrm{x})}{\mathrm{sen}(\mathrm{x})(1+\cos(\mathrm{x}))} \equiv \frac{2}{\mathrm{sen}(\mathrm{x})}$$

$$\frac{1+2\cos(\mathrm{x})+1}{\mathrm{sen}(\mathrm{x})(1+\cos(\mathrm{x}))} \equiv \frac{2}{\mathrm{sen}(\mathrm{x})}$$

$$\frac{2+2\cos(\mathrm{x})}{\mathrm{sen}(\mathrm{x})(1+\cos(\mathrm{x}))} \equiv \frac{2}{\mathrm{sen}(\mathrm{x})}$$

$$\frac{2(1+\cos(x))}{\mathrm{sen}(\mathrm{x})(1+\cos(\mathrm{x}))} \equiv \frac{2}{\mathrm{sen}(\mathrm{x})}$$

$$\frac{2}{\mathrm{sen}(\mathrm{x})} \equiv \frac{2}{\mathrm{sen}(\mathrm{x})}$$

**7.** Demuestre la identidad:

$$\frac{2\text{sen}^2(x) + 3\cos(x) - 3}{\text{sen}^2(x)} \equiv \frac{2\cos(x) - 1}{1 + \cos(x)}$$

Desarrollo:

$$\frac{2\text{sen}^2(x) + 3\cos(x) - 3}{\text{sen}^2(x)} \equiv \frac{2\cos(x) - 1}{1 + \cos(x)}$$

$$\frac{2(1 - \cos^2(x)) + 3\cos(x) - 3}{\text{sen}^2(x)} \equiv \frac{2\cos(x) - 1}{1 + \cos(x)}$$

$$\frac{2 - 2\cos^2(x) + 3\cos(x) - 3}{\text{sen}^2(x)} \equiv \frac{2\cos(x) - 1}{1 + \cos(x)}$$

$$\frac{-2\cos^2(x) + 3\cos(x) - 1}{\text{sen}^2(x)} \equiv \frac{2\cos(x) - 1}{1 + \cos(x)}$$

$$-\frac{2\cos^2(x) - 3\cos(x) + 1}{\text{sen}^2(x)} \equiv \frac{2\cos(x) - 1}{1 + \cos(x)}$$

$$-\frac{(2\cos(x) - 1)(\cos(x) - 1)}{\text{sen}^2(x)} \equiv \frac{2\cos(x) - 1}{1 + \cos(x)}$$

$$\frac{(2\cos(x) - 1)(1 - \cos(x))}{1 - \cos^2(x)} \equiv \frac{2\cos(x) - 1}{1 + \cos(x)}$$

$$\frac{(2\cos(x) - 1)(1 - \cos(x))}{(1 + \cos(x))(1 - \cos(x))} \equiv \frac{2\cos(x) - 1}{1 + \cos(x)}$$

$$\frac{2\cos(x) - 1}{1 + \cos(x)} \equiv \frac{2\cos(x) - 1}{1 + \cos(x)}$$

**8.** Demuestre la identidad:

$$\frac{\operatorname{sen}^3(x)+\cos^3(x)}{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)} \equiv 1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)$$

Desarrollo:

$$\frac{\operatorname{sen}^3(x)+\cos^3(x)}{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)} \equiv 1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)$$

$$\frac{(\operatorname{sen}(x)+\cos(x))\left(\operatorname{sen}^2(x)-\operatorname{sen}(x)\cos(x)+\cos^2(x)\right)}{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)} \equiv 1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)$$

$$\frac{(\operatorname{sen}(x)+\cos(x))\left(\operatorname{sen}^2(x)-\operatorname{sen}(x)\cos(x)+\cos^2(x)\right)}{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)} \equiv 1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)$$

$$\frac{(\operatorname{sen}(x)+\cos(x))\left(\operatorname{sen}^2(x)-\operatorname{sen}(x)\cos(x)+\cos^2(x)\right)}{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)} \equiv 1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)$$

$$\frac{(\operatorname{sen}(x)+\cos(x))(\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x)-\operatorname{sen}(x)\cos(x))}{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)} \equiv 1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)$$

$$\frac{(\operatorname{sen}(x)+\cos(x))(1-\operatorname{sen}(x)\cos(x))}{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)} \equiv 1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)$$

$$1-\operatorname{sen}(x)\cos(x) \equiv 1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)$$

$$1-\operatorname{sen}(x)\cos(x) \equiv 1-\frac{1}{2}(2\operatorname{sen}(x)\cos(x))$$

$$1-\operatorname{sen}(x)\cos(x) \equiv 1-\operatorname{sen}(x)\cos(x)$$

**9.** Demuestre la identidad:

$$\operatorname{sen}(x+y)\operatorname{sen}(x-y) \equiv \operatorname{sen}^2(x) - \operatorname{sen}^2(y)$$

Desarrollo:

$$\operatorname{sen}(x+y)\ \operatorname{sen}(x-y) \equiv \operatorname{sen}^2(x) - \operatorname{sen}^2(y)$$

$$(\operatorname{sen}(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(y)\cos(x))(\operatorname{sen}(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(y)\cos(x)) \equiv \operatorname{sen}^2(x) - \operatorname{sen}^2(y)$$

$$\operatorname{sen}^2(x)\cos^2(y) - \operatorname{sen}^2(y)\cos^2(x) \equiv \operatorname{sen}^2(x) - \operatorname{sen}^2(y)$$

$$\operatorname{sen}^2(x)\left(1 - \operatorname{sen}^2(y)\right) - \operatorname{sen}^2(y)\left(1 - \operatorname{sen}^2(x)\right) \equiv \operatorname{sen}^2(x) - \operatorname{sen}^2(y)$$

$$\operatorname{sen}^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)\operatorname{sen}^2(y) - \operatorname{sen}^2(y) + \operatorname{sen}^2(y)\operatorname{sen}^2(x) \equiv \operatorname{sen}^2(x) - \operatorname{sen}^2(y)$$

$$\operatorname{sen}^2(x) - \operatorname{sen}^2(y) \equiv \operatorname{sen}^2(x) - \operatorname{sen}^2(y)$$

**10.** Demuestre la identidad:

$$\frac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}(x)} - \frac{\cos(3x)}{\cos(x)} \equiv 2$$

Desarrollo:

$$\frac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}(x)} - \frac{\cos(3x)}{\cos(x)} \equiv 2$$

$$\frac{\cos(x)\ \operatorname{sen}(3x) - \operatorname{sen}(x)\cos(3x)}{\operatorname{sen}(x)\cos(x)} \equiv 2$$

$$\frac{\cos(x)\ \operatorname{sen}(2x+x) - \operatorname{sen}(x)\cos(2x+x)}{\operatorname{sen}(x)\cos(x)} \equiv 2$$

$$\frac{\cos(x)\,(\operatorname{sen}(2x)\cos(x)+\operatorname{sen}(x)\cos(2x)) - \operatorname{sen}(x)(\cos(2x)\cos(x)-\operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}(x))}{\operatorname{sen}(x)\cos(x)} \equiv 2$$

$$\frac{\cos^2(x)\operatorname{sen}(2x)+\cos(x)\operatorname{sen}(x)\cos(2x)-\cos(x)\operatorname{sen}(x)\cos(2x)+\operatorname{sen}^2(x)\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}(x)\cos(x)} \equiv 2$$

$$\frac{\cos^2(x)\operatorname{sen}(2x)+\operatorname{sen}^2(x)\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}(x)\cos(x)} \equiv 2$$

$$\frac{\operatorname{sen}(2x)\left(\cos^2(x)+\operatorname{sen}^2(x)\right)}{\operatorname{sen}(x)\cos(x)} \equiv 2$$

$$\frac{\operatorname{sen}(2x)(1)}{\operatorname{sen}(x)\cos(x)} \equiv 2$$

$$\frac{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)\cos(x)} \equiv 2$$

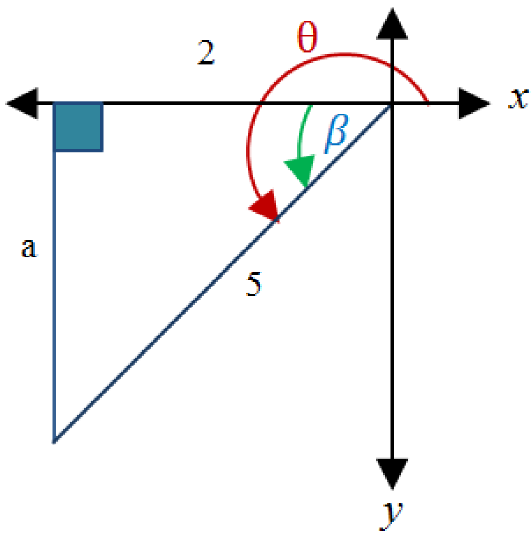
$$2 \equiv 2$$

**11.** Si se conoce que:

$$\cos(\theta) = -\frac{2}{5}\ ;\quad \pi \le \theta \le \frac{3\pi}{2} \quad \text{entonces calcular el valor de } \operatorname{sen}\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$

Desarrollo:

Construimos un gráfico representativo de la información dada:




$$\operatorname{sen}(\theta) = -\operatorname{sen}(\beta)$$

$$\cos(\theta) = -\cos(\beta)$$

$$\operatorname{sen}(\beta) = \frac{\sqrt{21}}{5} \qquad \operatorname{sen}(\theta) = -\frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\cos(\beta) = \frac{2}{5} \qquad \cos(\theta) = -\frac{2}{5}$$

Utilizando el Teorema de Pitágoras calcularemos el valor de a que nos servirá para el desarrollo del ejercicio.

$$a = \sqrt{5^2 - 2^2}$$

$$a = \sqrt{25 - 4}$$

$$a = \sqrt{21}$$

$$\mathrm{sen}(x + y) = \mathrm{sen}(x)\cos(y) + \mathrm{sen}(y)\cos(\theta)$$

$$\mathrm{sen}\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \mathrm{sen}(2\theta)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(2\theta)$$

$$\mathrm{sen}\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) = 2\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(1 - 2sen^2(\theta)\right)$$

$$\mathrm{sen}\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - 2\left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right)^2\right)$$

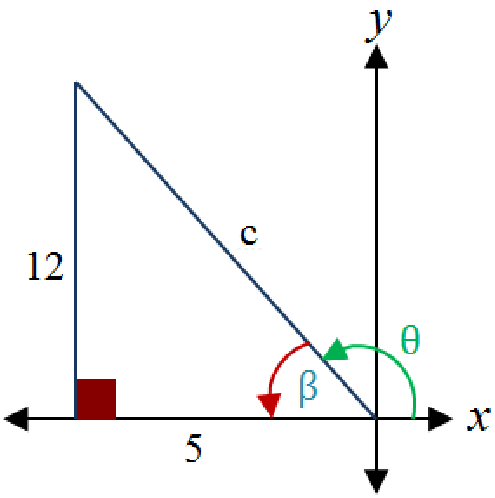
$$\mathrm{sen}\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\sqrt{21}}{25} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{21\sqrt{3}}{25}$$

$$\mathrm{sen}\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{4\sqrt{21} - 17\sqrt{3}}{50}$$

**12.** Si se conoce que:

$$\tan(\theta) = -\frac{12}{5}\ ;\ \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \quad \text{entonces calcular el valor de } \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2\theta\right)$$

Desarrollo:




$$\mathrm{sen}(\theta) = \mathrm{sen}(\beta)$$

$$\cos(\theta) = -\cos(\beta)$$

$$\mathrm{sen}(\beta) = \frac{12}{13} \qquad \mathrm{sen}(\theta) = \frac{12}{13}$$

$$\cos(\beta) = \frac{5}{13} \qquad \cos(\theta) = -\frac{5}{13}$$

Construimos un gráfico representativo de la información dada.

Utilizando el Teorema de Pitágoras calcularemos el valor de c que nos servirá para el desarrollo del ejercicio.

$$c = \sqrt{12^2 + 5^2}$$

$$c = \sqrt{169}$$

$$c = 13$$

$$\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \mathrm{sen}(x)\mathrm{sen}(y)$$

$$\mathrm{os}\left(\frac{\pi}{6} - 2\theta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(2\theta) + \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\mathrm{sen}(2\theta)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2\theta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(2\theta) + \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\mathrm{sen}(2\theta)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2\theta\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - \mathrm{sen}^2(\theta)) + \frac{1}{2}2\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2\theta\right) \equiv \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2\right) + \left(\frac{12}{13}\right)\left(-\frac{5}{13}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2\theta\right) \equiv \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{144}{169}\right) - \left(\frac{60}{169}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2\theta\right) \equiv \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{25}{169}\right) - \left(\frac{60}{169}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2\theta\right) \equiv \frac{25\sqrt{3}}{338} - \frac{60}{169}$$

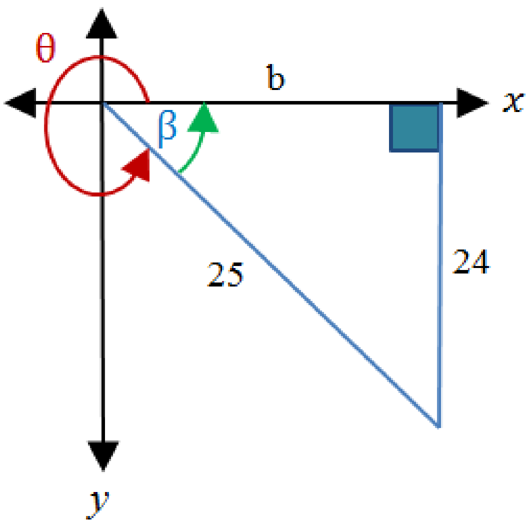
$$\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2\theta\right) \equiv \frac{25\sqrt{3} - 120}{338}$$

**13.** Si se conoce que:

$$\csc(\theta) = -\frac{25}{24}\ ;\ \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi \quad \text{entonces calcular el valor de } \tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

Desarrollo:

Construimos un gráfico representativo de la información dada.




$$\tan(\theta) = -\tan(\beta)$$

$$\tan(\beta) = \frac{24}{7}$$

$$\tan(\theta) = -\frac{24}{7}$$

Utilizando el Teorema de Pitágoras calcularemos el valor de b que nos servirá para el desarrollo del ejercicio.

$b = \sqrt{25^2 - 24^2}$

$b = \sqrt{49}$

$b = 7$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan(x)-\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)}$$

$$\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan(\theta)-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan(\theta)\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\frac{24}{7}-1}{1+\left(-\frac{24}{7}\right)(1)}$$

$$\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\frac{31}{7}}{-\frac{17}{7}}$$

$$\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{31}{17}$$

## Ecuaciones e Inecuaciones Trigonométricas.

## Objetivos.

Al finalizar esta sección el lector se capaz de:

- Dada una ecuación trigonométrica determinar el o los valores de la variable que la satisfacen, utilizando identidades trigonométricas, operaciones algebraicas, descomposición en factores, cambios de variable, etc como herramientas para lograr obtenerlos.

- Dada una ecuación trigonométrica decidir si se la pude resolver Utilizar de forma analítica o gráfica según la estructura de la misma.

- Resolver ecuaciones trigonométricas utilizando tecnología cuando esta se la pueda realizar de forma gráfica

- Aplicar todos los conocimientos adquiridos previamente de trigonometría y utilizarlos en la resolución de ecuaciones trigonométricas.

- Dada una inecuación trigonométrica calcular el o los valores que satisfacen las condiciones dadas de forma analítica o gráfica.

- Reconocer la importancia de graficar correctamente funciones trigonométricas para resolver ejercicios de inecuaciones.

## Ejercicios resueltos de Ecuaciones Trigonométricas.

1. Dada la ecuación trigonométrica:

$$\mathbf{3\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{3}{\sqrt{2}}\ ;\ -\frac{5\pi}{4}\leq x\leq\frac{5\pi}{4}}$$

Calcule correctamente los valores de la variable $x$ que satisfacen la ecuación.

Desarrollo:

$$3\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$\text{Recordar: Si }\cos(\theta)=-\frac{1}{\sqrt{2}};\ 0\leq\theta\leq 2\pi\ \text{ entonces }\ \theta=\frac{3\pi}{4}\quad\vee\quad\theta=\frac{5\pi}{4}$

La función coseno es negativa en el segundo y el tercer cuadrante, por lo tanto el argumento de la función dada toma los valores de:

$$2x-\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}\quad;\ \text{ segundo cuadrante}$$

$$2x=\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{2}$$

$$2x=\frac{5\pi}{4}$$

$$x=\frac{5\pi}{8}=112.5°$$

O podría ser también:

$$2x-\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{4}\ ;\ \ \text{tercer cuadrante}$$

$$2x=\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{2}$$

$$2x=\frac{7\pi}{4}$$

$$x=\frac{7\pi}{8}=157.5°$$

Para determinar los otros valores de $x$ que satisfacen la ecuación, se debe sumar o restar el valor del período de la función a los valores ya calculados, tantas veces sea necesario sin que salgan del dominio establecido del ejercicio.

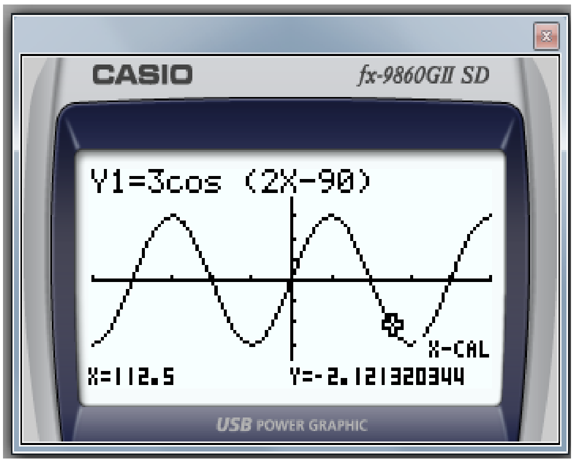
Recordar: Si $f(x)=A\cos(nx\pm b)\pm c$ entonces el periodo de f será $T=\frac{2\pi}{n}$

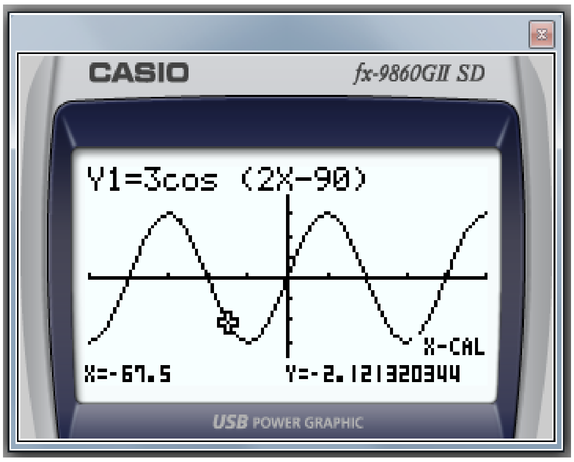
$$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$$

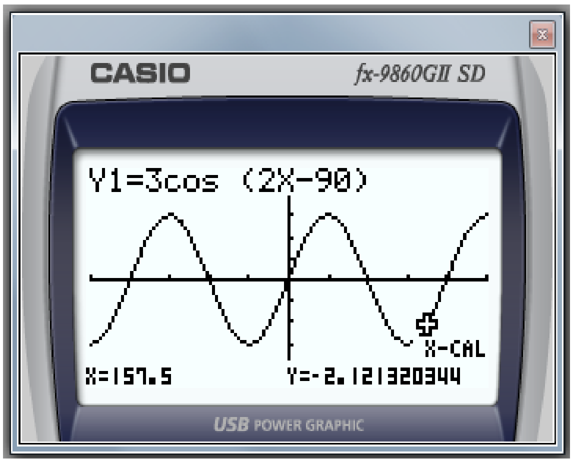
$$\frac{5\pi}{8}-\pi=-\frac{3\pi}{8} \qquad\qquad 112.5°-180°=-67.5°$$

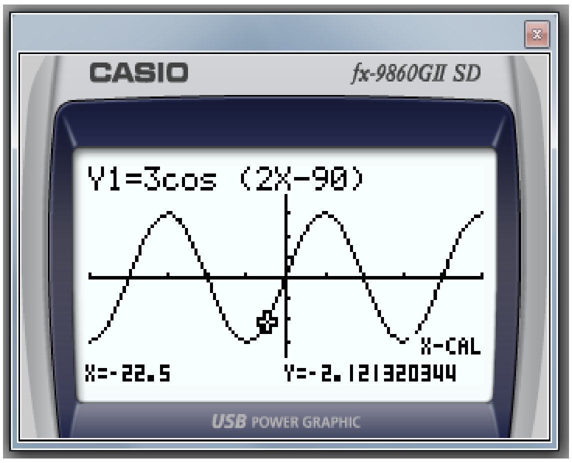
$$\frac{7\pi}{8}-\pi=-\frac{\pi}{8}=22.5° \qquad\qquad 157.5°-180°=-22.5°$$

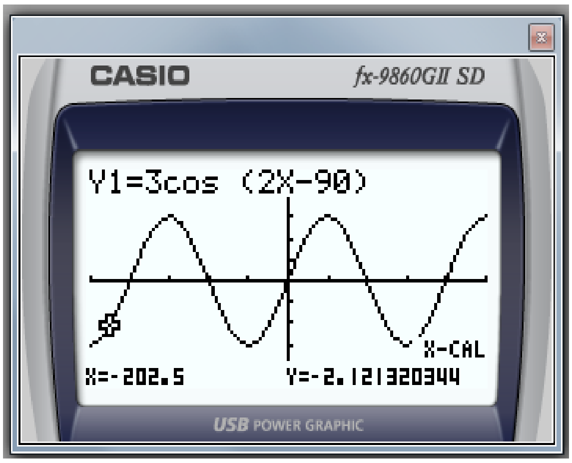
$$-\frac{\pi}{8}-\pi=-\frac{9\pi}{8}=-202.5° \qquad\qquad -22.5°-180°=-202.5°$$




Como se aprecia en las gráficas, existen 5 valores de x para los cuales el valor de $f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. en el intervalo $\left[-\frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$

2. Dada la ecuación trigonométrica:

$$4\,\text{sen}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-2\sqrt{3}\,;\;-\frac{7\pi}{8}\leq x\leq\frac{7\pi}{8}$$

Calcule correctamente los valores de la variable $x$ que satisfacen la ecuación.

Desarrollo:

$$4\,\text{sen}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-2\sqrt{3}$$

$$\text{sen}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Recordar: Si sen}(\theta)=-\frac{\sqrt{3}}{2};\ 0\leq\theta\leq 2\pi\ \text{ entonces }\ \theta=\frac{4\pi}{3}\ \ \vee\ \ \theta=\frac{5\pi}{3}$$

La función seno es negativa en el tercer y cuarto cuadrante, por lo tanto el argumento de la función dada toma los valores de:

$$2x+\frac{\pi}{4}=\frac{4\pi}{3}\ ;\ \text{tercer cuadrante}$$

$$2x=\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$$

$$2x=\frac{13\pi}{12}$$

$$x=\frac{13\pi}{24}=97.5°$$

O podría ser también:

$$2x+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{3}\ ;\ \ \text{cuarto cuadrante}$$

$$2x = \frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$$

$$2x = \frac{17\pi}{12}$$

$$x = \frac{17\pi}{24} = 127.5°$$

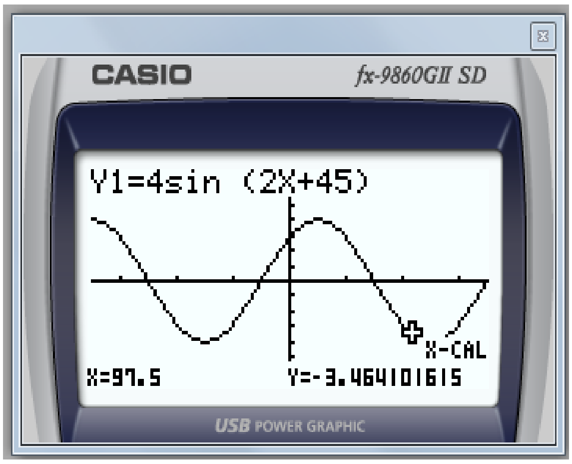
Para determinar los otros valores de $x$ que satisfacen la ecuación, se debe sumar o restar el valor del período de la función a los valores ya calculados, tantas veces sea necesario sin que salgan del dominio establecido del ejercicio.

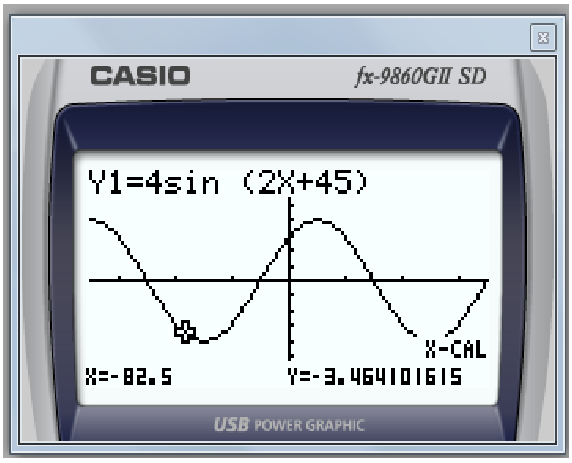
Recordar: Si $f(x) = A\text{sen}(nx \pm b) \pm c$ entonces el período de f será $T = \frac{2\pi}{n}$

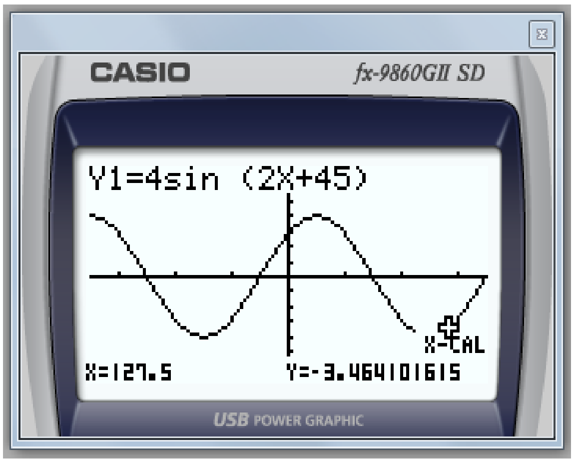
$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

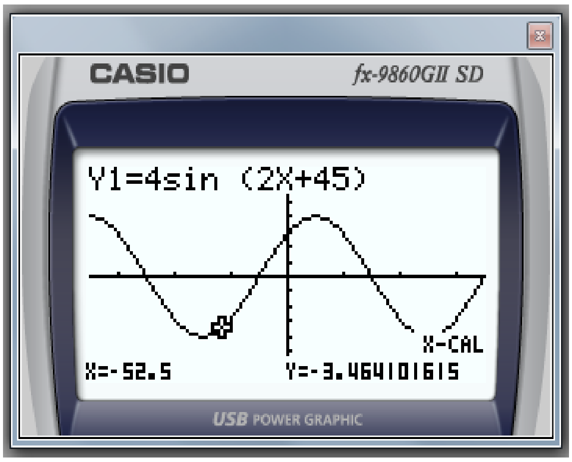
$$\frac{13\pi}{24} - \pi = -\frac{11\pi}{24} \qquad 97.5° - 180° = -82.5°$$

$$\frac{17\pi}{24} - \pi = -\frac{7}{24} \qquad 127.5° - 180° = -52.5°$$








Como se aprecia en las gráficas, existen 4 valores de $x$ para los cuales el valor de $f(x) = -2\sqrt{3}$ en el intervalo de $\left[-\frac{7\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right]$

3. Dada la ecuación trigonométrica:

$$6\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{6\sqrt{3}}{2}\ ;\ -\pi \le x \le \frac{7\pi}{6}$$

Calcule correctamente los valores de la variable $x$ que satisfacen la ecuación.

Desarrollo:

$$6\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{6\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Recordar: Si } \cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ 0 \le \theta \le 2\pi \text{ entonces } \theta = \frac{\pi}{6} \ \vee\ \theta = \frac{11\pi}{6}$$

La función coseno es positiva en el primer y cuarto cuadrante, por lo tanto el argumento de la función dada toma los valores de:

$$3x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}\ ;\ \text{ primer cuadrante}$$

$$3x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}$$

$$3x = \frac{2\pi}{3}$$

$$x = \frac{2\pi}{9} = 40°$$

O podría ser también:

$$3x - \frac{\pi}{2} = \frac{11\pi}{6} \quad ; \quad \text{cuatro cuadrante}$$

$$3x = \frac{11\pi}{6} + \frac{\pi}{2}$$

$$3x = \frac{7\pi}{3}$$

$$x = \frac{7\pi}{9} = 140°$$

Para determinar los otros valores de $x$ que satisfacen la ecuación, se debe sumar o restar el valor del período de la función a los valores ya calculados, tantas veces sea necesario sin que salgan del dominio establecido del ejercicio.

$\text{Recordar: Si } f(x) = A\cos(nx \pm b) \pm c \text{ entonces el período de f será } T = \frac{2\pi}{n}$

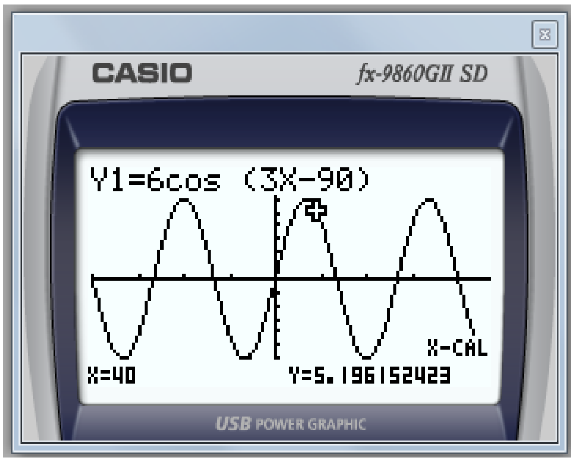
$$T = \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{3}$$

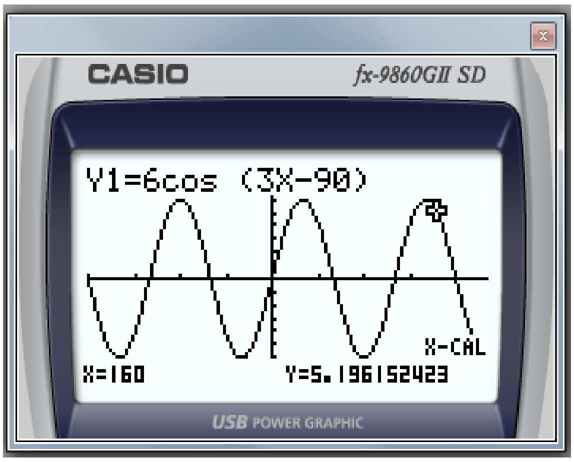
$$\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \frac{8\pi}{9} \qquad 40° + 120° = 160°$$

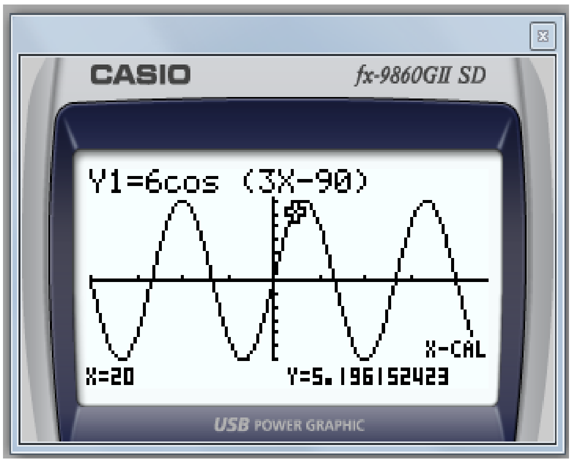
$$\frac{2\pi}{9} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{4\pi}{9} \qquad 40° - 120° = -80°$$

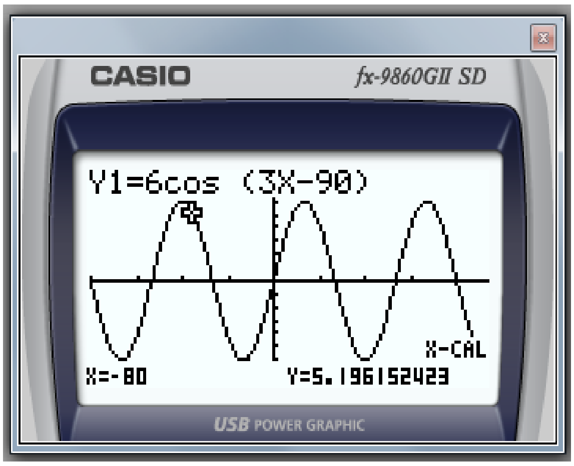
$$\frac{7\pi}{9} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{9} \qquad 140° - 120° = 20°$$

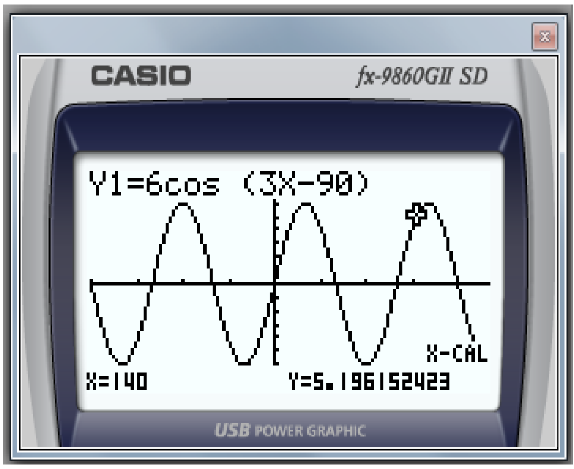
$$\frac{\pi}{9} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{5\pi}{9} \qquad 20° - 120° = -100°$$

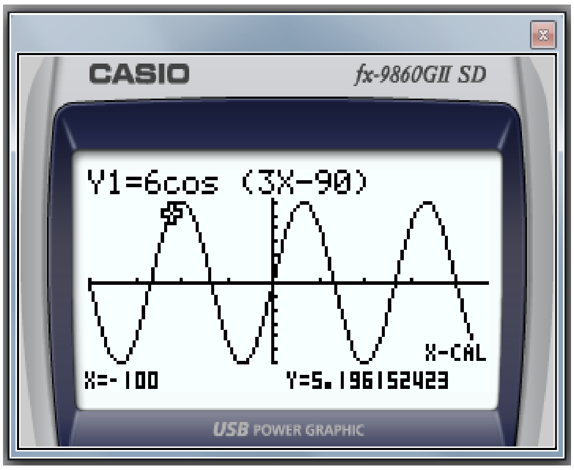





Como se aprecia en las gráficas, existen seis valores de $\mathrm{x}$ para los cuales el valor de $\mathrm{f(x)} = 6\frac{\sqrt{3}}{2}$ en el intervalo de $\left[-\pi, \frac{7\pi}{6}\right]$

4. Dada la ecuación trigonométrica :

$$6\mathrm{sen}\left(4\mathrm{x}+\frac{\pi}{3}\right)-1=2;\ -\frac{\pi}{2}\leq \mathrm{x}\leq \frac{\pi}{2}$$

Calcule correctamente los valores de la variable $x$ que satisfacen la ecuación.

Desarrollo:

$$6\mathrm{sen}\left(4\mathrm{x}+\frac{\pi}{3}\right)-1=2$$

$$6\mathrm{sen}\left(4\mathrm{x}+\frac{\pi}{3}\right)=3$$

$$\mathrm{sen}\left(4\mathrm{x}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$\mathrm{Recordar: Si\ \ sen}(\theta)=\frac{1}{2};\ 0\leq \mathrm{x}\leq 2\pi\ \ \mathrm{entonces}\ \ \theta=\frac{\pi}{6}\ \ \vee\ \ \frac{5\pi}{6}$

$$4x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \;\; ; \;\; \text{primer cuadrante}$$

$$4x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}$$

$$4x = -\frac{\pi}{6}$$

$$x = -\frac{\pi}{24} = -7.5°$$

O podría ser también:

$$4x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} \;\; ; \;\; \text{segundo cuadrante}$$

$$4x = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}$$

$$4x = \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{8} = 22.2°$$

Para determinar los otros valores de $x$ que satisfacen la ecuación, se debe sumar o restar el valor del período de la función a los valores ya calculados, tantas veces sea necesario sin que salgan del dominio establecido del ejercicio.

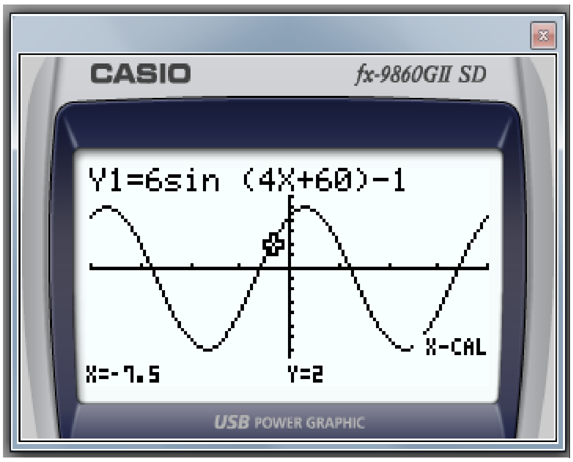
$\text{Recordar: Si } f(x) = \text{Asen}(nx \pm b) \pm c \text{ entonces el período de f será } T = \frac{2\pi}{n}$

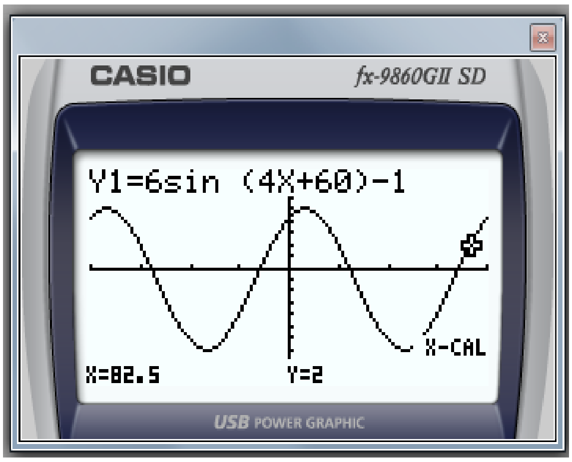
$$T = \frac{2\pi}{n}$$

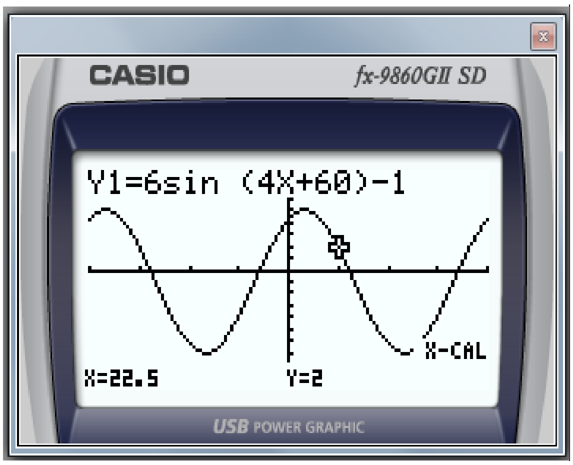
$$T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

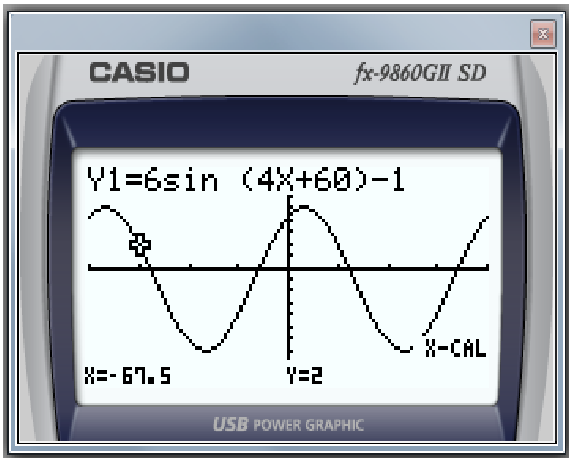
$$-\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2} = \frac{11\pi}{24} \qquad\qquad -7.5° + 90° = 82.5°$$

$$\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{8} \qquad\qquad 22.5° - 90° = -67.5°$$




Como se aprecia en las gráficas, existen 4 valores de x para los cuales el valor de $f(x) = 2$ en el intervalo de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

5. Dada la ecuación trigonométrica: $3\cos(x) - 8\text{sen}(x) = -3\,;\ \ 0 \leq x \leq 2\pi$ , obtenga correctamente los valores de la variable $x$ que satisfacen la ecuación.

Desarrollo:

$3\cos(x) - 8\text{sen}(x) = -3$

$3\cos(x) = -3 + 8\text{sen}(x)$

$(3\cos(x))^2 = (-3 + 8\text{sen}(x))^2$

$9\cos^2(x) = 9 - 48\text{sen}(x) + 64\text{sen}^2(x)$

$9\left(1 - \text{sen}^2(x)\right) = 9 - 48\text{sen}(x) + 64\text{sen}^2(x)$

$9 - 9\text{sen}^2(x) = 9 - 48\text{sen}(x) + 64\text{sen}^2(x)$

$64\text{sen}^2(x) - 48\text{sen}(x) + 9 - 9 + 9\text{sen}^2(x) = 0$

$73\text{sen}^2(x) - 48\text{sen}(x) = 0$

$\text{sen}(x)(73\text{sen}(x) - 48) = 0$

$\text{sen}(x) = 0 \quad \vee \quad 73\text{sen}(x) - 48 = 0$

$x = 0° \qquad 73\text{sen}(x) = 48$

$x = 180° \qquad \text{sen}(x) = 0.658$

$x = 360°$

Recordar que la función seno es positiva en el primer y segundo cuadrante por lo tanto:

$\text{sen}(x) = 0.658$

$\text{sen}^{-1}\left(\text{sen}(x)\right) = \text{sen}^{-1}(0.658)$

$x = 41.11°$

$180° - 41.11° = 138.89°$

Existen cinco posibles soluciones, pero solo dos de estas satisfacen la ecuación inicial.

$\text{Solución}: \{41.11°, 180°\}$ $\qquad$ $\text{Solución}: \{0.228\pi, \pi\}$

6. Dada la ecuación trigonométrica: $3\cos(x) + 4\text{sen}(x) = 5\,;\ \ 0 \leq x \leq 2\pi$ , obtenga correctamente los valores de la variable $x$ que satisfacen la ecuación.

Desarrollo:

$3\cos(x) + 4\text{sen}(x) = 5$

$$3\cos(x) = 5 - 4\text{sen}(x)$$

$$(3\cos(x))^2 = \left(5 - 4\text{sen}(x)\right)^2$$

$$9\cos^2(x) = 25 - 40\text{sen}(x) + 16\text{sen}^2(x)$$

$$9\left(1 - \text{sen}^2(x)\right) = 25 - 40\text{sen}(x) + 16\text{sen}^2(x)$$

$$9 - 9\text{sen}^2(x) = 25 - 40\text{sen}(x) + 16\text{sen}^2(x)$$

$$16\text{sen}^2(x) - 40\text{sen}(x) + 25 + 9\text{sen}^2(x) - 9 = 0$$

$$25\text{sen}^2(x) - 40\text{sen}(x) + 16 = 0; \qquad \text{cambio de varible } \text{sen}(x) = t$$

$$25t^2 - 40t + 16 = 0$$

$$(5t - 4)^2 = 0$$

$$t = \frac{4}{5} \qquad \text{sen}(x) = \frac{4}{5}$$

Recordar que la función seno es positiva en el primer y segundo cuadrante por lo tanto:

$$\text{sen}(x) = \frac{4}{5}$$

$$\text{sen}^{-1}\left(\text{sen}(x)\right) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$x = 53.13°$$

$$180° - 53.13° = 126.87°$$

Existen dos posibles soluciones, pero solo una de esta satisface la ecuación inicial.

Solución: $x = 53.13°$ Solución: $x = 0.295\pi$

7. Dada la ecuación trigonométrica:

$$2\text{sen}^2(x) + \sqrt{3}\cos(x) + \cos^2(x) = -\text{sen}^2(x)\,; \quad 0 \le x \le 2\pi\,,$$

obtenga correctamente los valores de la variable $x$ que satisfacen la ecuación.

Desarrollo:

$$2\text{sen}^2(x) + \sqrt{3}\cos(x) + \cos^2(x) = -\text{sen}^2(x)$$

$$2\text{sen}^2(x) + \sqrt{3}\cos(x) + \cos^2(x) + \text{sen}^2(x) = 0$$

$$2\text{sen}^2(x) + \sqrt{3}\cos(x) + 1 = 0$$

$$2\left(1 - \cos^2(x)\right) + \sqrt{3}\cos(x) + 1 = 0$$

$2 - 2\cos^2(x) + \sqrt{3}\cos(x) + 1 = 0$

$2 - 2\cos^2(x) + \sqrt{3}\cos(x) + 1 = 0$

$-2\cos^2(x) + \sqrt{3}\cos(x) - 3 = 0\,;$ cambio de variable $\cos(x) = t$

$-2t^2 + \sqrt{3}t - 3 = 0$

$2t^2 - \sqrt{3}t + 3 = 0$

$t = \sqrt{3} \quad \vee \quad t = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ desarrollando la ecuación cuadrática

$\cos(x) = \sqrt{3}\,;$ no existe solución debido a que el máximo valor de $\cos(x) = 1$

Recordar que la función coseno es negativa en el segundo y tercer cuadrante; por lo tanto:

$\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$x = 180° - 30°$ $x = 180° + 30°$

$x = 150°$ $x = 210°$

Existen dos soluciones, las cuales satisfacen la ecuación inicial.

Solución: $\{150°, 210°\}$ Solución: $\left\{\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}\right\}$

8. Dada la ecuación trigonométrica: $2\cos(x) - 3\tan(x) = 0;\quad 0 \le x \le 2\pi\,;$ obtenga correctamente los valores de la variable $x$ que satisfacen la ecuación.

Desarrollo:

$2\cos(x) - 3\tan(x) = 0$

$2\cos(x) - 3\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = 0$

$2\cos^2(x) - 3\operatorname{sen}(x) = 0$

$2\left(1 - \operatorname{sen}^2(x)\right) - 3\operatorname{sen}(x) = 0$

$2 - 2\operatorname{sen}^2(x) - 3\operatorname{sen}(x) = 0\,;$ cambio de variable $\operatorname{sen}(x) = t$

$2 - 2t^2 - 3t = 0$

$2t^2 + 3t - 2 = 0$

$(2t - 1)(t + 2) = 0$

$(2t - 1) = 0 \quad \vee \quad (t + 2) = 0$

$t = \frac{1}{2} \quad \vee \quad t = -2$

$\mathrm{sen}(x) = \frac{1}{2} \quad \vee \quad \mathrm{sen}(x) = -2$

$\mathrm{sen}(x) = -2$ ; no existe solución debido a que el mínimo valor de $\mathrm{sen}(x) = -1$

Recordar que la función seno es positiva en el primer y segundo cuadrante por lo tanto:

$\mathrm{sen}(x) = \frac{1}{2}$

$x = 30°$

$180° - 30° = 150°$

Existen dos soluciones, las cuales satisfacen la ecuación inicial.

Solución: $\{30°, 150°\}$ Solución: $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

9. Dada la ecuación trigonométrica: $-2\csc^2(x) + \cot^2(x) + 5 = 0;\ \ 0 \leq x \leq 2\pi$ ; obtenga correctamente los valores de la variable $x$ que satisfacen la ecuación.

Desarrollo:

$-2\csc^2(x) + \cot^2(x) + 5 = 0$

$-2\frac{1}{\mathrm{sen}^2(x)} + \frac{\cos^2(x)}{\mathrm{sen}^2(x)} + 5 = 0$

$-2 + \cos^2(x) + 5sen^2(x) = 0$

$-2 + \left(1 - \mathrm{sen}^2(x)\right) + 5\mathrm{sen}^2(x) = 0$

$-2 + 1 - \mathrm{sen}^2(x) + 5\mathrm{sen}^2(x) = 0$

$4\mathrm{sen}^2(x) - 1 = 0$

$\mathrm{sen}^2(x) = \frac{1}{4}$

$\mathrm{sen}(x) = \frac{1}{2} \quad \vee \quad \mathrm{sen}(x) = -\frac{1}{2}$

Recordar que la función seno es positiva en el primer y segundo cuadrante por lo tanto:

$\mathrm{sen}(x) = \frac{1}{2}$

$x = 30°$

$180° - 30° = 150°$

Recordar que la función seno es negativa en el tercer y cuarto cuadrante por lo tanto:

$\text{sen}(x) = -\dfrac{1}{2}$

$x = 180° + 30$ $\qquad$ $x = 360° - 30°$

$x = 210°$ $\qquad$ $x = 330°$

Existen cuatro soluciones, las cuales satisfacen la ecuación inicial.

$\text{Solución: }\{30°, 150°, 210°, 330°\}$ $\qquad$ $\text{Solución: }\left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right\}$

10. Dada la ecuación trigonométrica:

$$\cos(x)\,\text{sen}(2x) + 3\text{sen}^2(x) = -3\text{sen}(x); \quad 0 \le x \le 2\pi$$

obtenga correctamente los valores de la variable $x$ que satisfacen la ecuación.

Desarrollo:

$\cos(x)\,\text{sen}(2x) + 3\text{sen}^2(x) = -3\text{sen}(x)$

$\cos(x)\,\text{sen}(2x) + 3\text{sen}^2(x) + 3\text{sen}(x) = 0$

$\cos(x)\,\big(2\text{sen}(x)\cos(x)\big) + 3\text{sen}^2(x) + 3\text{sen}(x) = 0$

$2\text{sen}(x)\cos^2(x) + 3\text{sen}^2(x) + 3\text{sen}(x) = 0$

$\text{sen}(x)(2\cos^2(x) + 3\text{sen}(x) + 3) = 0$

$\text{sen}(x) = 0 \quad \vee \quad 2\cos^2(x) + 3\text{sen}(x) + 3 = 0$

$x = 0° \qquad 2\big(1 - \text{sen}^2(x)\big) + 3\text{sen}(x) + 3 = 0$

$x = 180° \qquad 2 - 2\text{sen}^2(x) + 3\text{sen}(x) + 3 = 0$

$x = 360° \qquad -2\text{sen}^2(x) + 3\text{sen}(x) + 3 = 0$

$2\text{sen}^2(x) - 3\text{sen}(x) - 3 = 0$

$(2\text{sen}(x) - 5)(\text{sen}(x) + 1) = 0$

$(2\text{sen}(x) - 5) = 0 \quad \vee \quad (\text{sen}(x) + 1) = 0$

$\text{sen}(x) = \dfrac{5}{2} \quad \vee \quad \text{sen}(x) = -1$

$\text{sen}(x) = \dfrac{5}{2};\;$ no existe solución debido a que el máximo valor de $\text{sen}(x) = 1$

Recordar que si $\text{sen}(x) = -1 \; ; 0 \leq x \leq 1$ entonces el valor de $x = \frac{3\pi}{2}$

Existen cuatro soluciones, las cuales satisfacen la ecuación inicial.

Solución: $\{0°, 180°, 270°, 360°\}$

Solución: $\left\{0, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$

## Ejercicios resueltos de Inecuaciones Trigonométricas.

1. Si se tiene la inecuación trigonométrica:

$$\mathrm{sen}\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) \geq \frac{1}{2};\ -\frac{5\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$$

obtenga los valores de x que satisfacen la inecuación dada .

Desarrollo:

Tener la expresión $\mathrm{sen}\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) \geq \frac{1}{2}$ es equivalente a tener $f(x) \geq \frac{1}{2}$

Esto significa que se debería graficar la función $f(x) = sen\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$ y determinar los valores de x para los cuales esta es mayor o igual a $\frac{1}{2}$

a) Calculamos el período de la función.

$$T = \frac{2\pi}{n} \qquad\qquad T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

b) Igualamos al argumento a cero para determinar el valor referencial que nos ayudará a determinar los valores importantes (ceros, máximos y mínimos) sobre el eje x, sumándole a ese valor sucesivamente la escala sobre cuatro.

$$2x + \frac{\pi}{2} = 0$$

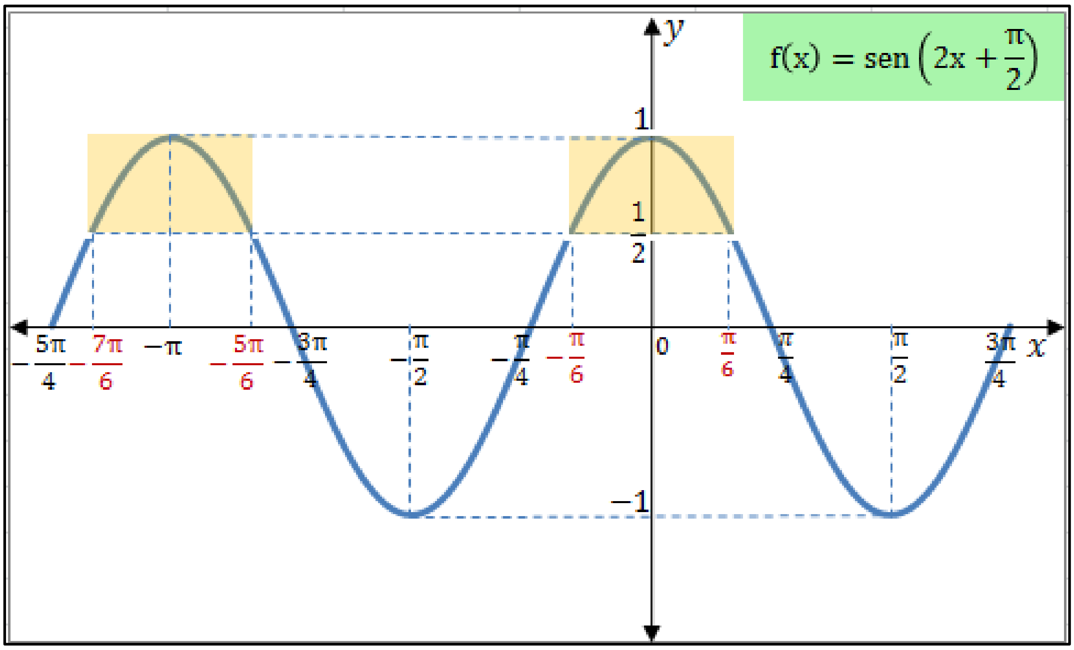
$$2x = -\frac{\pi}{2}$$

$$x = -\frac{\pi}{4}\ \text{(valor referencial)}$$

c) Determinamos una escala para el eje x dividiendo el período para cuatro.

$$\frac{T}{4} = \frac{\pi}{4}$$

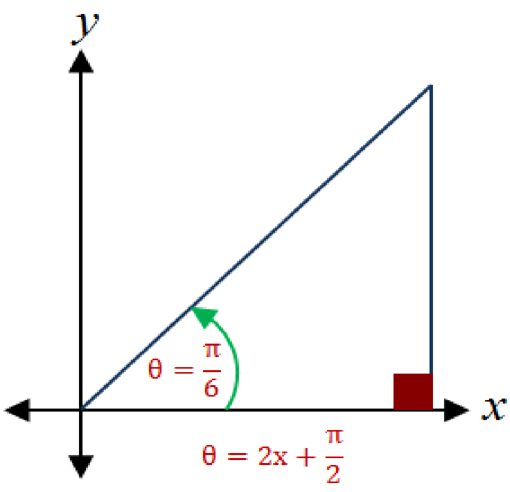
Realizamos la gráfica y observamos cuales son los valores de x que cumplen con la condición dada.

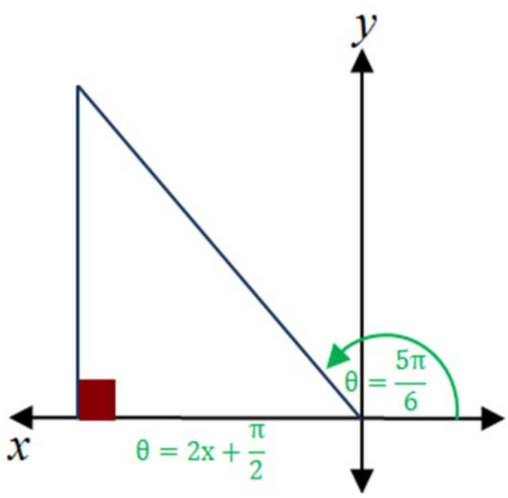



Calculamos los valores de x para los cuales la función es igual a $\frac{1}{2}$

$$\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Como el seno de un ángulo es positivo en el primer y segundo cuadrante entonces tenemos:




Para que se cumpla esta igualdad el argumento de la función debe ser $\frac{\pi}{6}$ v $\frac{5\pi}{6}$

$$2x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} \qquad\qquad 2x + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$$

$2x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $2x = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2}$

$2x = -\frac{\pi}{3}$ $\qquad$ $2x = \frac{\pi}{3}$

$x = -\frac{\pi}{6}$ $\qquad$ $x = \frac{\pi}{6}$

Los otros valores del eje x se los calcula aprovechando la periodicidad de la función:

$\frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}$ $\qquad$ $-\frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{7\pi}{6}$

Como se observa en la gráfica de la función:

$\operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \geq \frac{1}{2}$ en el intervalo de: $\left[-\frac{7\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right]$

2. Si se tiene la inecuación trigonométrica:

$$\cos(3x + \pi) < -\frac{1}{2};\ -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$$

obtenga los valores de x que satisfacen la inecuación dada.

Desarrollo:

Tener la expresión $\cos(3x - \pi) < -\frac{1}{2}$ es equivalente a tener $f(x) < -\frac{1}{2}$

Esto significa que se debería graficar la función $f(x) = \cos(3x - \pi)$ y determinar los valores de x para los cuales esta es menor a $-\frac{1}{2}$

a) Calculamos el período de la función.

$T = \frac{2\pi}{n}$ $\qquad$ $T = \frac{2\pi}{3}$

b) Igualamos al argumento a cero para determinar el valor referencial que nos ayudará a determinar los valores importantes (ceros, máximos y mínimos) sobre el eje, sumándole a ese valor sucesivamente la escala sobre cuatro.

$3x - \pi = 0$

$3x = \pi$

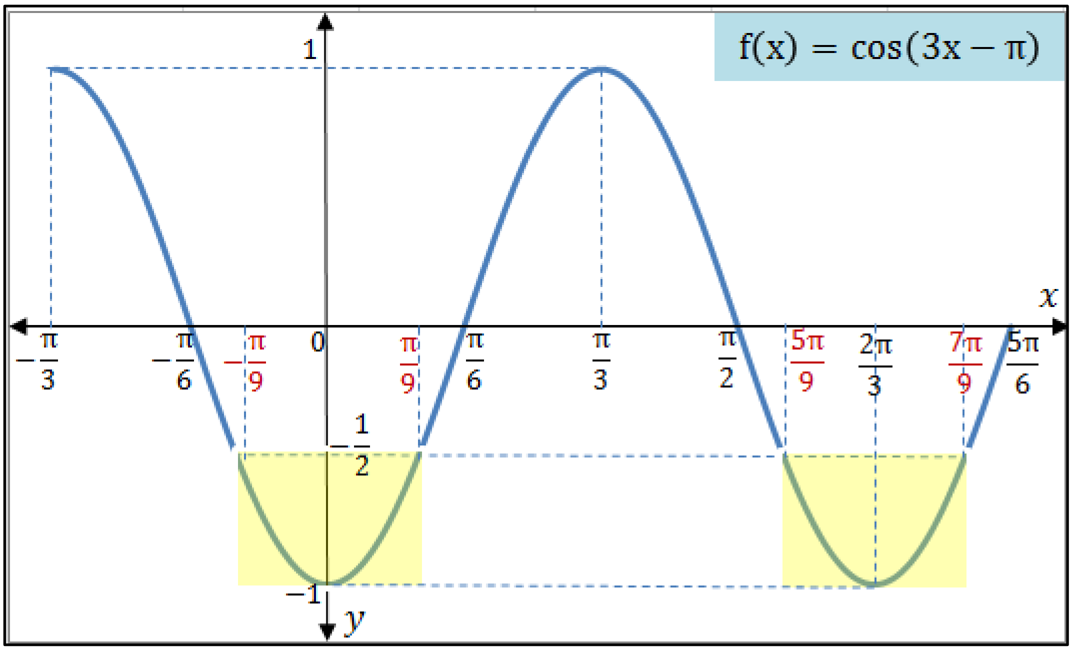
$x = \dfrac{\pi}{3}$ (valor referencial)

c) Determinamos una escala para el eje x dividiendo el período para cuatro.

$\dfrac{T}{4} = \dfrac{2\pi}{3} \div 4$

$\dfrac{T}{4} = \dfrac{\pi}{6}$

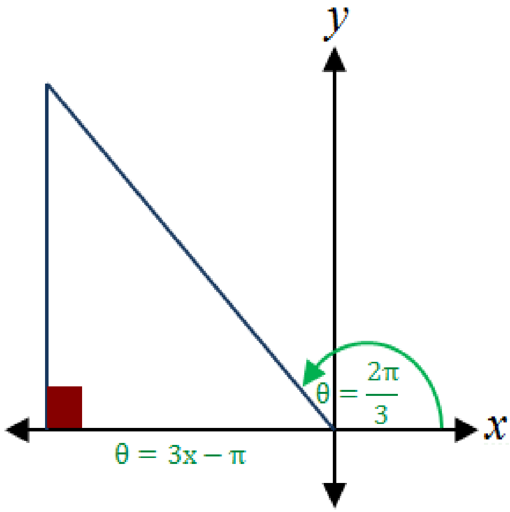
Realizamos la gráfica y observamos cuales son los valores de x que cumplen con la condición dada.

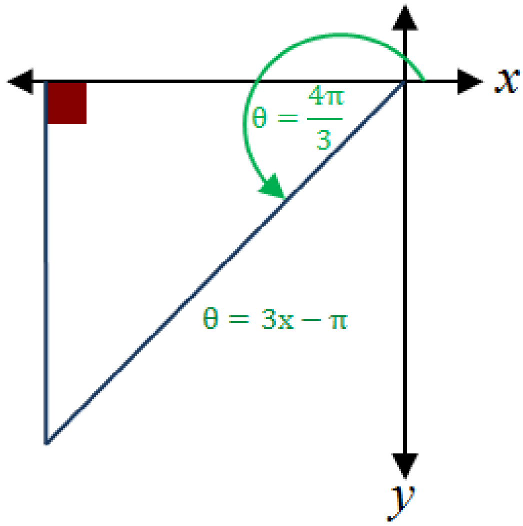



Calculamos los valores de x para los cuales la función es igual a $-\dfrac{1}{2}$

$\cos(3x - \pi) = -\dfrac{1}{2}$

Como el coseno es negativo en el segundo y en el tercer cuadrante entonces tenemos:






Para que se cumpla esta igualdad el argumento de la función debe ser $\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{4\pi}{3}$

$$3x - \pi = \frac{2\pi}{3} \qquad\qquad 3x - \pi = \frac{4\pi}{3}$$

$$3x = \frac{2\pi}{3} + \pi \qquad\qquad 3x = \frac{4\pi}{3} + \pi$$

$$3x = \frac{5\pi}{3} \qquad\qquad 3x = \frac{7\pi}{3}$$

$$x = \frac{5\pi}{9} \qquad\qquad x = \frac{7\pi}{9}$$

Los otros valores del eje x se los calcula aprovechando la periodicidad de la función:

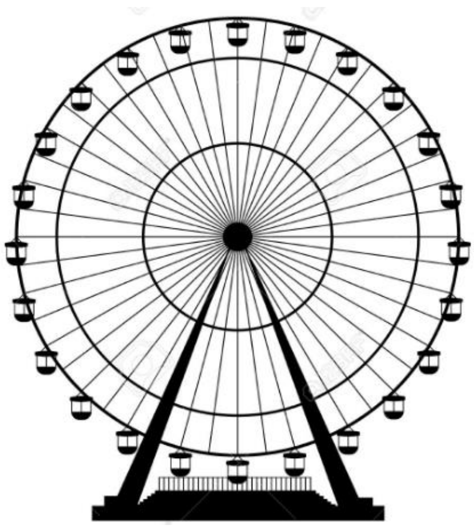
$$\frac{5\pi}{9} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{9} \qquad\qquad \frac{7\pi}{9} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{9}$$

Como se observa en la gráfica de la función:

$\cos(3x - \pi) < -\frac{1}{2}$ en el intervalo de: $\left(-\frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{9}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}\right)$

Ejercicios de Aplicación de Trigonometría.

1. El siguiente diagrama representa una noria cuyo diámetro es de 100 metros.



Una de las sillas esta inicialmente en el punto más bajo de la noria respecto al piso cuya distancia al mismo es de 1 metro, la velocidad de giro es constante en sentido contrario a las manecillas a las agujas del reloj y tarda 24 minutos en dar una vuelta completa.

a. Escriba la altura de la silla que originalmente estaba en el punto más bajo al cabo de:

i) 12 minutos ii) 18 minutos.

Sea h(t) los metros de altura de la silla anteriormente mencionada al cabo de t minutos. En la siguiente tabla se muestran algunos valores de h(t).

| t | h(t) |
|---|---|
| 0 | 1,00 |
| 1 | 2,70 |
| 2 | 7,70 |
| 3 | 15,64 |
| 4 | 26,00 |
| 5 | 38,06 |
| 6 | 51,00 |
| 7 | |
| 8 | |
| 9 | |
| 10 | |
| 11 | |
| 12 | |

| t | h(t) |
|---|---|
| 13 | |
| 14 | |
| 15 | |
| 16 | |
| 17 | |
| 18 | |
| 19 | |
| 20 | |
| 21 | |
| 22 | |
| 23 | |
| 24 | |
| 25 | |

b. Con la información que se da para los primeros 6 minutos, complete la tabla.

c. Con los datos obtenidos grafique h(t); para $0 \leq t \leq 24$

d. Sabiendo que h se puede expresar de la forma $h(t) = a\cos(bt) + c$; halle los valores de a, b, c

Desarrollo:

a. i) Como el período de rotación de la noria es de 24 minutos, en 12 minutos estará a la mitad de su recorrido es decir se encontrará en su punto más alto y si se conoce que el diámetro de la misma es de 100 metros entonces la silla que estaba originalmente a 1 metro del suelo ahora estará a 101 metros del mismo.

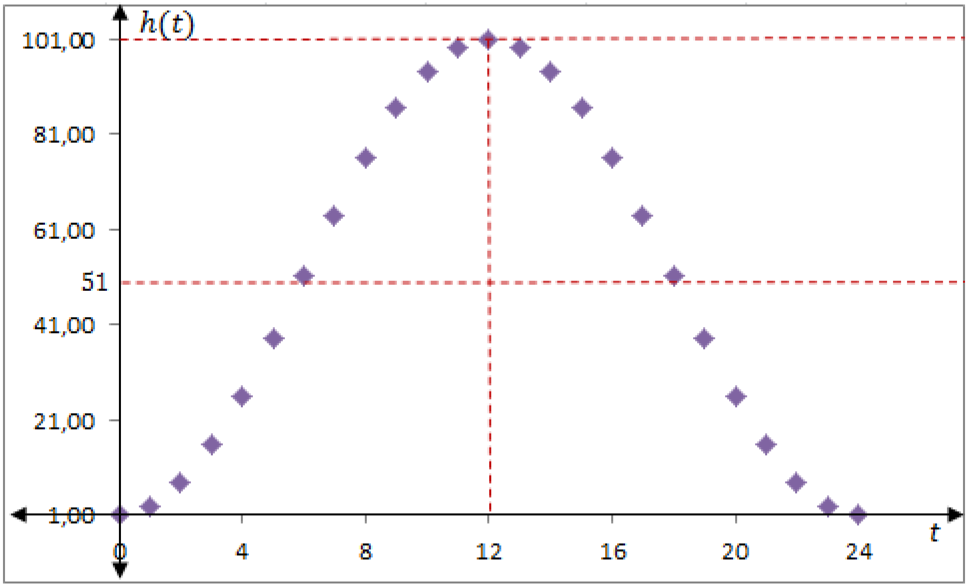
a. ii) Por la misma explicación anterior a los 18 minutos la noria habrá recorrido las tres cuartas partes de su rotación y la silla está descendiendo y ahora estará a 51 metros del suelo.

b. Para completar la tabla dada hay que darse cuenta que nos dan la información de lo que ocurre en la cuarta parte de la rotación lo cual nos ayudará a llenar la tabla interpretando que lo que sube cada segundo es lo que también bajará, es decir de 0 a 1 minuto la noria sube 1.70 metros, por lo tanto del minuto 12 al minuto 13 descenderá también 1.70 metros y será también la altura que tenga la noria en el minuto 11, la altura del minuto 14 será la altura del minuto 10, la altura del minuto 9 será la del minuto 15 y así hasta que complete la rotación.

| t | h(t) |
|---|---|
| 0 | 1,00 |
| 1 | 2,70 |
| 2 | 7,70 |
| 3 | 15,64 |
| 4 | 26,00 |
| 5 | 38,06 |
| 6 | 51,00 |
| 7 | 63,94 |
| 8 | 76,00 |
| 9 | 86,36 |
| 10 | 94,30 |
| 11 | 99,30 |
| 12 | 101,00 |

| t | h(t) |
|---|---|
| 13 | 99,30 |
| 14 | 94,30 |
| 15 | 86,36 |
| 16 | 76,00 |
| 17 | 63,94 |
| 18 | 51,00 |
| 19 | 38,06 |
| 20 | 26,00 |
| 21 | 15,64 |
| 22 | 7,70 |
| 23 | 2,70 |
| 24 | 1,00 |
| 25 | 2,70 |

c. La gráfica con los datos obtenidos es:




d. Si se tiene la función $\mathrm{h(t) = a\cos(bt) + c}$ su período se calcula como:

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\mathrm{b}}$$

Es dato del ejercicio que una rotación completa de la noria es de 24 minutos por lo tanto el periodo es igual a 24.

$$24 = \frac{2\pi}{\mathrm{b}}$$

$$\mathrm{b} = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$$

El valor de la amplitud es $\mathrm{a} = 50$

La gráfica de coseno ha tenido una simetría respecto al eje x por lo que se escribirá como $\mathrm{h(t)} = -50\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{t} + \mathrm{c}$

Evaluamos el punto de la función $(6{,}51)$ y determinamos el valor de c

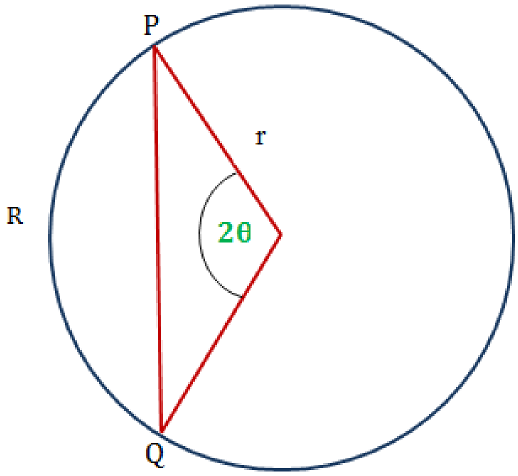
$$51 = -50\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)(6) + \mathrm{c}$$

$$51 = -50\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{c}$$

$$\mathrm{c} = 51$$

Por lo tanto: $\mathrm{h(t)} = -50\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{t} + 51$

2. Considere el círculo, de centro O y radio r.




Los puntos P, R, Q pertenecen a la circunferencia, y

$P\hat{O}Q = 2\theta \text{ para } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

a. Utilice el teorema del coseno para comprobar que $PQ = 2r\text{sen}\theta$

Sea $l$ la longitud del arco $PRQ$.

b. Sabiendo que $1.3\ PQ - l = 0$, halle el valor de $\theta$

Considere la función: $f(\theta) = 2.6\text{sen}\theta - 2\theta, \text{para } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

c. i) Dibuje aproximadamente la gráfica de f.

ii) Escriba la raíz de $f(\theta) = 0$

d. Utilice la gráfica de f para hallar los valores de $\theta$ para los cuales: $l < 1.3PQ$

Desarrollo:

a. El triángulo $POQ$ es isósceles del cual se conocen dos magnitudes de sus lados y el ángulo que estos forman, por lo tanto se tiene que:

$$PQ = \sqrt{r^2 + r^2 - 2r * r\cos(2\theta)}$$

$$PQ = \sqrt{2r^2 - 2r^2\cos(2\theta)}$$

$$PQ = \sqrt{2r^2(1 - \cos(2\theta))}$$

$$PQ = \sqrt{2r^2\left(1 - \left(1 - 2\mathrm{sen}^2(\theta)\right)\right)}$$

$$PQ = \sqrt{2r^2\left(1 - 1 + 2\mathrm{sen}^2(\theta)\right)}$$

$$PQ = \sqrt{2r^2\left(2\mathrm{sen}^2(\theta)\right)}$$

$$PQ = \sqrt{4r^2\mathrm{sen}^2(\theta)}$$

$$PQ = 2r\mathrm{sen}(\theta)$$

b. La longitud de arco $PRQ$ la escribimos como $l$ y su cálculo es:

$l = \beta r$ ; siendo $\beta$ el ángulo central de la región dada, para este ejercicio $\beta = 2\theta$

$l = 2\theta r$

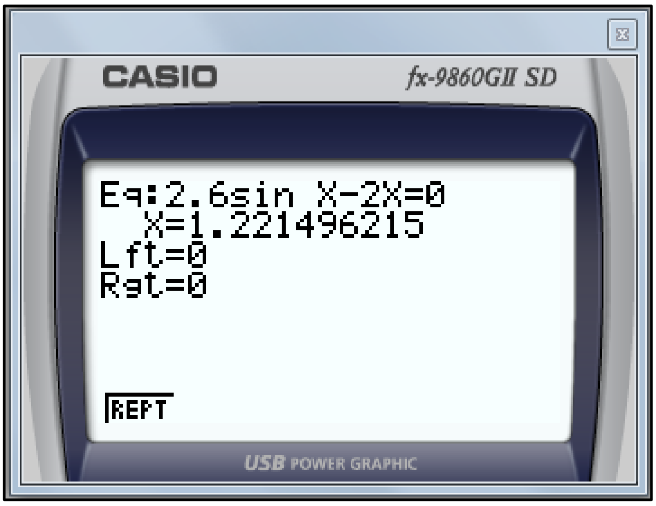
En este literal se pide determinar el valor de $\theta$ que está implícito en el desarrollo de la ecuación: $1.3\ PQ - l = 0,\ \text{para}\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$1.3\left(2r\mathrm{sen}(\theta)\right) - 2\theta r = 0$

$2.6r\mathrm{sen}(\theta) - 2\theta r = 0$

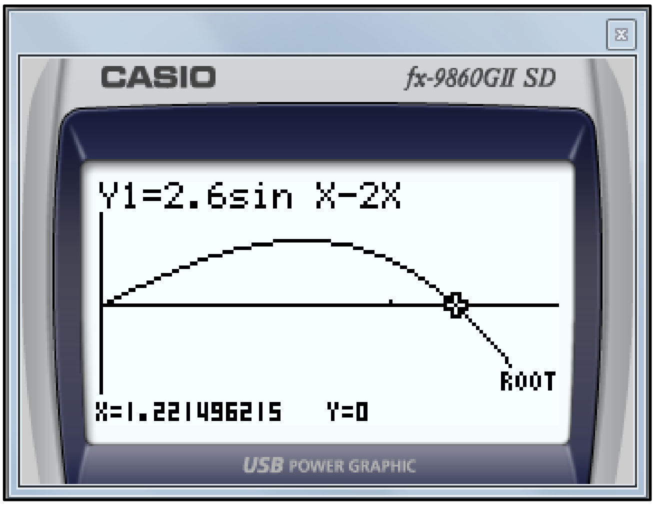
$2.6\mathrm{sen}(\theta) - 2\theta = 0$

Utilizando tecnología para resolver la ecuación en el intervalo dado tenemos:



El valor de la variable que satisface la ecuación es: $\theta = 1.22149$

c. i) La gráfica de f de en el intervalo dado es:




ii) La raíz de $f(\theta) = 0$ ; para $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ es $\theta = 1.22149$

d. Para determinar los valores de $\theta$ en los cuales $l < 1.3\mathrm{PQ}$ realizamos lo siguiente:

$2\theta r < 1.3(2r\,\mathrm{sen}(\theta))$

$2\theta r - 1.3(2r\,\mathrm{sen}(\theta)) < 0$

$2\theta r - 2.6r\,\mathrm{sen}(\theta) < 0$

$2.6\,\mathrm{sen}(\theta) - 2\theta > 0$

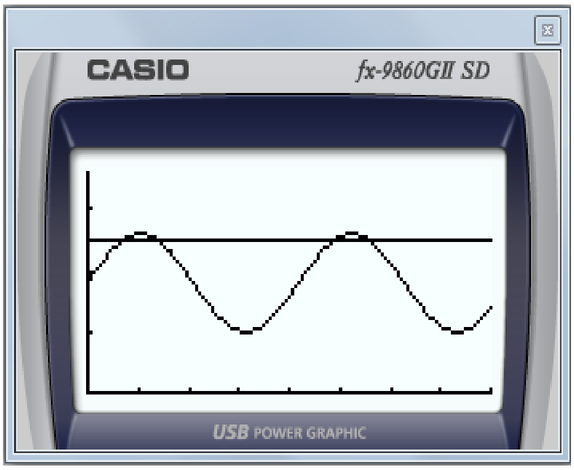
$f(\theta) > 0$

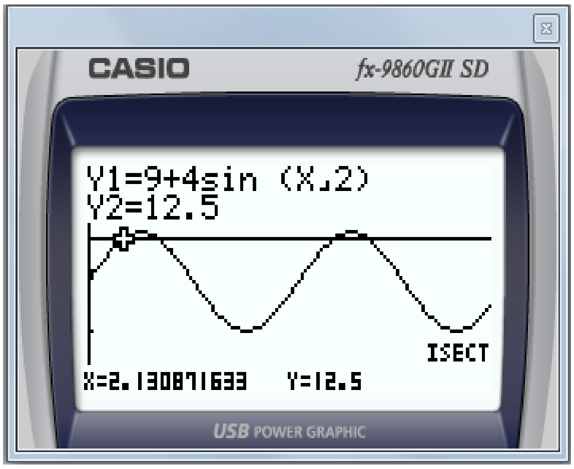
Observando la gráfica la condición $f(\theta) > 0$ se cumple en el siguiente intervalo $(0, 1.22149)$

3. La altura máxima de las olas del océano durante una tormenta viene dada por la ecuación: $h(t) = 9 + 4\mathrm{sen}\left(\frac{t}{2}\right)$ , donde t es el número de horas después de la media noche. Se activa una alerta de tsunami cuando la altura máxima de las olas supera los 12,5 metros. Determine el valor de t cuando la alarma suena por primera vez.

Desarrollo.

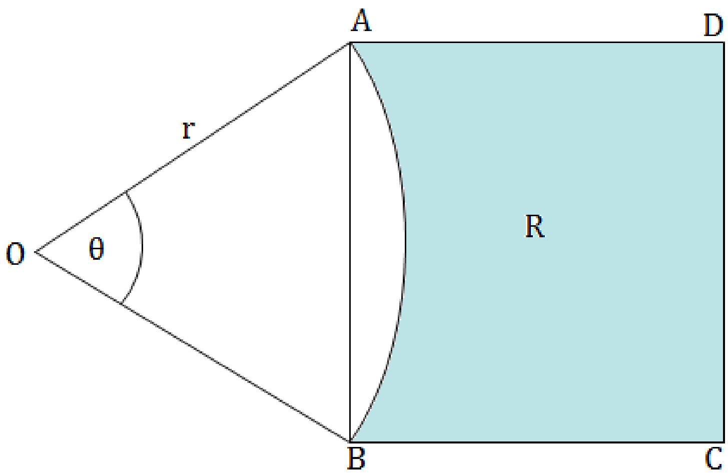
Para el desarrollo de este ejercicio se utilizará tecnología que nos facilite visualizar lo pedido. Se realizará la gráfica de la función h(t) y de la función $y = 12.5$ , se buscará la intersección de ambas curvas y se responderá lo preguntado.




Como se observa el primer punto de intersección entre ambas gráficas es:$(2.13,12.5)$ lo que significa que la alarma sonará 2.13 horas después de la media noche.

4. La siguiente figura muestra un cuadrado $ABCD$ y un sector circular $OAB$ de un circulo de centro O y radio r. Una parte del cuadrado está sombreado y lleva el rótulo $R$.



$A\hat{O}B = \theta\, ,\text{donde}\ \ 0.5 \leq \theta \leq \pi$

a. Muestre que el área del cuadrado $ABCD$ es igual a $2r^2(1 - \cos(\theta))$

b. Cuando $\theta = \alpha$ , el área del cuadrado $ABCD$ es igual al área del sector circular $OAB$

i) Escriba el área del sector circular cuando $\theta = \alpha$

ii) A partir de lo anterior, halle $\alpha$.

c. Cuando $\theta = \beta$, el área de R es más del doble del área del sector circular. Halle todos los posibles valores de $\beta$.

Desarrollo.

Para calcular el área del cuadrado tendremos que determinar la magnitud de uno de sus lados, el cual coincide con el tamaño de uno de los lados del triángulo que se muestra en la figura. Utilizando la ley del coseno hallaremos el valor del lado del triángulo al denotaremos por *l.*

$l^2 = r^2 + r^2 - 2r * r\cos(\theta)$

$l^2 = 2r^2 - 2r^2\cos(\theta)$

$l^2 = 2r^2(1 - \cos(\theta))$

Área del cuadrado = $l^2$

Área del cuadrado= $2r^2(1 - \cos(\theta))$

b. El área del sector circular= $\frac{1}{2}r^2\theta$

Si $\theta = \alpha$ por la condición del problema tendremos: $\frac{1}{2}r^2\alpha = 2r^2(1 - \cos(\alpha))$

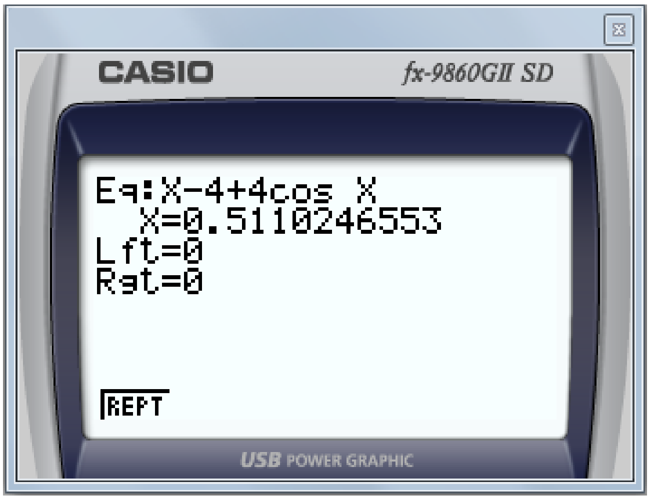
$r^2\alpha = 4r^2(1 - \cos(\alpha))$

$r^2\alpha - 4r^2(1 - \cos(\alpha)) = 0$

$r^2\alpha - 4r^2 + 4r^2\cos(\alpha) = 0$

$\alpha - 4 + 4\cos(\alpha) = 0$

Utilizando tecnología calculamos el valor de $\alpha$




El valor de $\alpha$ que satisface la ecuación en el intervalo dado es $\alpha = 0.51102$

c. Para calcular lo pedido en este literal primero debemos hallar una expresión para el área de R.

$$\text{Área del segmento circular} = \text{Área del sector circular} - \text{Área del triángulo.}$$

$$\text{Área del segmento circular} = \tfrac{1}{2}\mathrm{r}^2\theta - \tfrac{1}{2}\mathrm{r} * \mathrm{rsen}(\theta)$$

$$\text{Área del segmento circular} = \frac{1}{2}\mathrm{r}^2\theta - \frac{1}{2}\mathrm{r}^2\mathrm{sen}(\theta)$$

$$\text{Área de R} = \text{Área del cuadrado} - \text{Área del segmento circular}$$

$$\text{Área de R} = 2\mathrm{r}^2(1-\cos(\theta)) - \left(\frac{1}{2}\mathrm{r}^2\theta - \frac{1}{2}\mathrm{r}^2\mathrm{sen}(\theta)\right)$$

$$\text{Área de R} = 2\mathrm{r}^2(1-\cos(\theta)) - \frac{1}{2}\mathrm{r}^2\theta + \frac{1}{2}\mathrm{r}^2\mathrm{sen}(\theta)$$

Si $\theta = \beta$ entonces el área de R es más del doble del área del sector circular

$$\text{Área de R} > 2\left(\frac{1}{2}\mathrm{r}^2\theta\right)$$

$$2\mathrm{r}^2(1-\cos(\beta)) - \frac{1}{2}\mathrm{r}^2\beta + \frac{1}{2}\mathrm{r}^2\mathrm{sen}(\beta) > \mathrm{r}^2\beta$$

$$2(1-\cos(\beta)) - \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\mathrm{sen}(\beta) > \beta$$

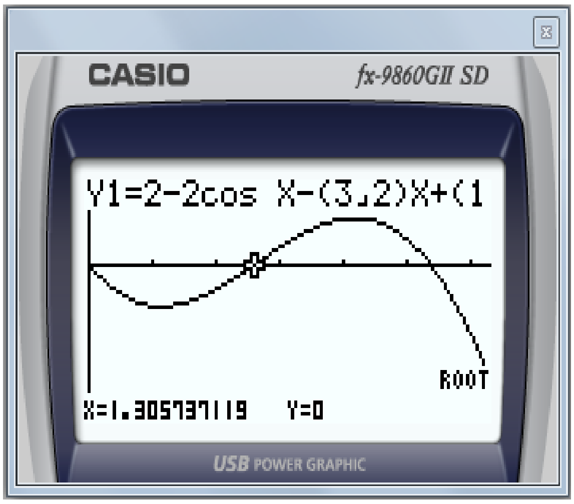
$$2 - 2\cos(\beta) - \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\mathrm{sen}(\beta) - \beta > 0$$

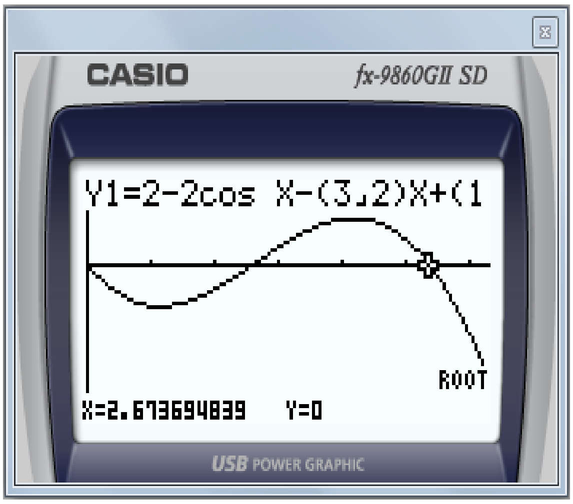
$$f(\beta) = 2 - 2\cos(\beta) - \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\beta) - \beta$$

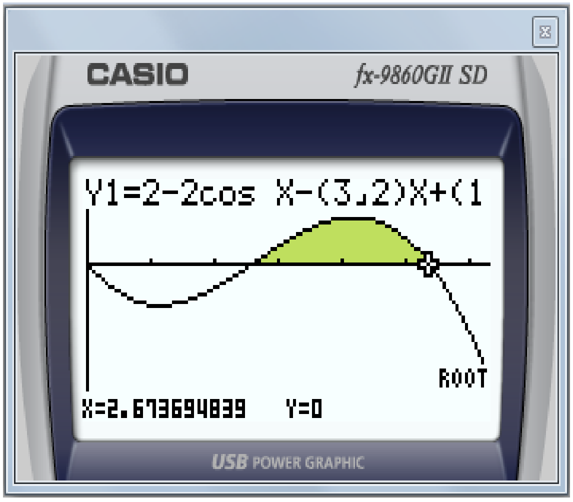
$$f(\beta) = 2 - 2\cos(\beta) - \frac{3}{2}\beta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\beta)$$

$$f(\beta) > 0$$

Utilizamos la tecnología para determinar los valores de β que cumplen la condición anterior.




Los valores de β que cumplen la condición $f(\beta) > 0$ son : $(1.3057, 2.67369)$

## Ejercicios Propuestos.

**1.** Si se tiene la expresión: $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) \div \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$ , entonces cuál de las siguientes opciones representa el valor exacto de la operación efectuada:

A) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ B) $-\ 2-\sqrt{3}$

C) $-2-\sqrt{3}$ D) $-\sqrt{2}-\sqrt{3}$

**2.** Si se tiene la expresión: $\mathrm{sen}\left(\frac{7\pi}{12}\right) \div \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$ , entonces cuál de las siguientes opciones representa el valor exacto de la operación efectuada:

A) $2+\sqrt{3}$ B) $-\ 2-\sqrt{3}$

C) $-2-\sqrt{3}$ D) $-\sqrt{2}-\sqrt{3}$

**3.** Si se tiene la expresión: $\mathrm{sen}(x)+\mathrm{cosec}(x)$, entonces cuál de las siguientes opciones representa una identidad para la misma:

A) $\mathrm{sen}^2(x)+\tan^2(x)+3$ B) $\cos^2(x)+\cot^2(x)+3$

C) $\cot^2(x)+\tan^2(x)+3$ D) $\mathrm{sen}^2(x)+\cot^2(x)+3$

**4.** Si se tiene la expresión: $\frac{\cos(x)}{1-\tan(x)}+\frac{\mathrm{sen}(x)}{1-\cot(x)}$, entonces cuál de las siguientes opciones representa una identidad para la misma:

A) $\mathrm{sen}(x)-\cos(x)$ B) $\mathrm{sen}(x)+\cos(x)$

C) $\cos(x)-\mathrm{sen}(x)$ D) $\csc(x)+\sec(x)$

**5.** Si se conoce que la función $f(x)=2\cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)-5$, tiene dos mínimos locales en el intervalo de $-\frac{2\pi}{3}\le x\le\frac{2\pi}{3}$, entonces cuál de las siguientes opciones representan las coordenadas de dichos puntos:

A) $\left(-\frac{\pi}{2},-7\right)$ y $\left(\frac{\pi}{6},-7\right)$ B) $\left(-\frac{\pi}{6},-7\right)$ y $\left(\frac{\pi}{2},-7\right)$

C) $\left(-\frac{\pi}{2},-2\right)$ y $\left(\frac{\pi}{6},-2\right)$ D) $\left(-\frac{\pi}{6},-2\right)$ y $\left(\frac{\pi}{2},-2\right)$

**6.** Si se conoce que la función $f(x)=2sen\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)-5$, tiene dos mínimos locales en el intervalo de $-\frac{2\pi}{3}\leq x\leq\frac{2\pi}{3}$, entonces cuál de las siguientes opciones representan las coordenadas de dichos puntos:

A) $\left(-\frac{\pi}{3},-7\right)$ y $\left(\frac{\pi}{3},-7\right)$

B) $\left(-\frac{\pi}{6},-7\right)$ y $\left(\frac{\pi}{2},-7\right)$

C) $\left(-\frac{\pi}{2},-2\right)$ y $\left(\frac{\pi}{6},-2\right)$

D) $\left(-\frac{\pi}{6},-2\right)$ y $\left(\frac{\pi}{2},-2\right)$

**7.** Si se tiene la ecuación trigonométrica: $\cos(x)\,\mathrm{sen}(2x)+3\mathrm{sen}^2(x)=-3\mathrm{sen}(x)$, para $0\leq x\leq 2\pi$ , entonces, ¿cuál de las siguientes opciones representa el conjunto solución de la misma?

A) $\{0,\pi,2\pi\}$

B) $\left\{0,\pi,\frac{3\pi}{2}2\pi\right\}$

C) $\left\{0,\frac{\pi}{2},2\pi\right\}$

D) $\left\{0,\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}2\pi\right\}$

**8.** Si se tiene la ecuación trigonométrica: $\mathrm{sen}(\theta)+\sqrt{3}\cos(\theta)=1$, para $0\leq\theta\leq 2\pi$ , entonces, ¿cuál de las siguientes opciones representa el conjunto solución de la misma?

A) $\left\{\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right\}$

B) $\left\{\frac{\pi}{2},\frac{11\pi}{6}\right\}$

C) $\left\{\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right\}$

D) $\left\{\frac{\pi}{3},\frac{11\pi}{6}\right\}$

**9.** Si se tiene la ecuación trigonométrica: $\cot^2(\theta)-2\csc^2(\theta)+5=0$ para valores $0\leq\theta\leq 2\pi$ , entonces ¿cuál de las siguientes opciones representa el conjunto solución de la misma?

A) $\left\{\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right\}$

B) $\left\{\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right\}$

C) $\left\{\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right\}$

D) $\left\{\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right\}$

**10.** Si se tiene la ecuación trigonométrica: $2\cos(x) - 3\tan(x) = 0$ , para $0 \leq x \leq 2\pi$ , entonces ¿cuál de las siguientes opciones representa el conjunto solución de la misma?

A) $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$ B) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

C) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}\right\}$ D) $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$

**11.** Dada la ecuación trigonométrica: $\tan^2(x) - \tan(x) = 2$; para $-90° \leq x \leq 0$, ¿cuál de las siguientes opciones representa su conjunto solución?

A)$45°$ B)$-45°$

C)$135°$ D)$225°$

**12.** Si se conoce que $\cos(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ , entonces cuál de las siguientes opciones representan las posibles medidas del ángulo $\theta$.

A)$30°, 150°$ B)$30°, 210°$

C)$120°, 240°$ D)$150°, 210°$

**13.** El valor de la expresión trigonométrica: $\frac{\text{sen}(150°) - \cos(240°)}{\sec(60°)}$ es:

A) $\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$

C) $-1$ D) $-2$

**14.** Si se conoce que $\tan(\theta) = -\frac{8}{15}$ , $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$ ; entonces cuál de las siguientes opciones representa el valor de la $\csc(\theta)$

A) $\frac{8}{17}$ B) $\frac{17}{8}$

C) $-\frac{8}{17}$ D) $-\frac{17}{8}$

**15.** El valor de la expresión trigonométrica: $\frac{\text{sen}(330°) + \cos(120°)}{\cot(60°)}$ es:

A) $3$ B) $-3$

C) $-\sqrt{3}$ D) $\sqrt{3}$

## Test de Aprendizaje N° 1.

**1.** Dada la siguiente función: (2 puntos)

$f(x) = 4\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ ; $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq -\frac{\pi}{6}$

Realizar las siguientes órdenes:

a) Graficar la función f

b) Obtener la regla de correspondencia de la función inversa de f

c) Graficar la función inversa de f

**2.** Calcular los valores exactos de las siguientes expresiones trigonométricas:

$\mathrm{sen}(4710°) =$ (1punto)

$\cos(9180°) =$

$\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right) =$

$\csc\left(\frac{7\pi}{4}\right) =$

**3.** Si se conoce que $\mathrm{sen}(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , entonces calcule los posibles valores del ángulo $\theta$ para que se cumpla la igualdad dada. (1punto)

**4.** Si se conoce que los ángulos $\theta$ y $\beta$ son complementarios y que $\mathrm{sen}(\theta) = 5a$, entonces calcule los valores que debe tomar "a" para que se cumpla la siguiente igualdad $\cos(\beta) - a^2 - 6 = 0$ (2 puntos

**5.** Determine el valor exacto de la expresión: $\cos\left[\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$; si los ángulos dados pertenecen al intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ (2 puntos)

**6.** Dada la expresión trigonométrica: (2 puntos)

$$\cos^2(x) = \frac{3(1 - \sin(x))}{2} \ ; \ 0 \leq x \leq 2\pi$$

obtenga correctamente los valores de la variable x que satisfacen la ecuación.

## Test de Aprendizaje N° 2.

**1.** Dada la siguiente función: (2 puntos)

$f(x) = -4\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) - 5 \;; \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq -\frac{\pi}{6}$

Realizar las siguientes órdenes:

a) Graficar la función f

b) Obtener la regla de correspondencia de la función inversa de f

c) Graficar la función inversa de f

**2.** Calcular los valores exactos de las siguientes expresiones trigonométricas:

$\cos(4710°) =$ (1punto)

$\operatorname{sen}(9180°) =$

$\operatorname{cotan}\left(\frac{7\pi}{6}\right) =$

$\sec\left(\frac{7\pi}{4}\right) =$

**3.** Si se conoce que $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ y $\cos x = -\frac{3}{5}$ , entonces calcule el valor de $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ (1punto)

**4.** Si los ángulos $\alpha$, $\beta$ están en el primer cuadrante y son complementarios; además de conocer que: $\sin(\alpha) = a$ y $\sin(\beta) = b$, entonces calcule el valor de $\sin(\alpha + \beta) - b^2$ en términos de a (2 puntos)

**5.** Determine el valor exacto de: (2 puntos)

$\operatorname{sen}\left[\arccos\left(\frac{2}{7}\right) + \arctan\left(\frac{5}{3}\right)\right]$ ; para valores de ángulos $\in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

**6.** Dada la ecuación trigonométrica: $13\sin x + \sqrt{3}\cos x = 8$ ; para $0 \leq x \leq 2\pi$; obtenga correctamente los valores de la variable x que satisfacen la ecuación dada. (2 puntos)

## Test de Aprendizaje N° 3.

**1.** Dada la siguiente función: (2 puntos)

$f(x) = 5\,\text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) + 1\,; \quad -\frac{\pi}{3} \leq x \leq 0$

Realizar las siguientes órdenes:

a) Graficar la función.

b) Obtener la regla de correspondencia de la función inversa.

c) Graficar la función inversa.

**2.** Calcular los valores exactos de las siguientes expresiones trigonométricas:

$\text{sen}(-4710°) =$ (1punto)

$\cos(-9180°) =$

$\tan\left(-\frac{7\pi}{6}\right) =$

$\csc\left(-\frac{7\pi}{4}\right) =$

**3.** Si se conoce que $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ y $\cos x = -\frac{3}{5}$ , entonces calcule el valor de $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ (1punto)

**4.** Si los ángulos $\alpha$, $\beta$ son suplementarios, $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \pi$; además de conocer que: $\sin(\alpha) = a$ y $\cos(\alpha) = b$ , entonces calcule correctamente el valor de $\cos(\alpha - \beta) + b^2$ en términos de a. (2 puntos)

**5.** Determine el valor exacto de: (2 puntos)

$\text{sen}\left[\arccos\left(\frac{2}{7}\right) - \arctan\left(\frac{5}{3}\right)\right]$ ; para valores de ángulos $\in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

**6.** Dada la ecuación trigonométrica: $\cot^2 x - 2\csc^2 x + 5 = 0$ , para $0 \leq x \leq 2\pi$ obtenga correctamente los valores de la variable x que satisfacen la ecuación dada (2 puntos)

## Test de Aprendizaje N° 4.

**1.** Dada la siguiente función: (2 puntos)

$f(x) = -5\,\text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) - 2\;; \quad -\frac{\pi}{3} \leq x \leq 0$

Realizar las siguientes órdenes:

a) Graficar la función.

b) Obtener la regla de correspondencia de la función inversa.

c) Graficar la función inversa.

**2.** Calcular los valores exactos de las siguientes expresiones trigonométricas:

$\cos(-5625°) =$ (2 puntos)

$\text{sen}\,(4350°) =$

$\text{cotan}\left(-\frac{7\pi}{6}\right) =$

$\sec\left(\frac{7\pi}{4}\right) =$

**3.** Dada la siguiente ecuación trigonométrica:

$$4\,\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -2\sqrt{3}\;; \; -\frac{7\pi}{8} \leq x \leq \frac{7\pi}{8}$$

Calcule los valores del ángulo x para que se cumpla la igualdad en el intervalo dado (2 puntos)

**4.** Sea la función $h(t) = -50\cos(2t - 4) + 50$, además el punto $(t, 25)$ pertenece a la misma, entonces calcule el valor de t, teniendo en cuenta que $h(t)$ es la altura en metros para cualquier instante de tiempo y que t esta dado en minutos; $0 \leq t \leq 5$. (2 puntos)

**5.** Dada la siguiente ecuación trigonométrica: $\tan 2\theta = \tan\theta\,, 0° \leq \theta \leq 2\pi$ determine los valores del ángulo $\theta$ para que se cumpla la igualdad en el intervalo dado. (2 puntos)

# CONCLUSIONES

La aportación de las diferentes teorías de aprendizajes sirvieron para realizar la propuesta de esta guía didáctica para el aprendizaje de trigonometría especialmente las que fomentan al alumno a utilizar estrategias cognitivas que le ayuden a desarrollar su potencial y que logren alcanzar un objetivo por sí mismos, brindándoles recursos pedagógicos que le ayuden a resolver sus inquietudes y logren de forma autónoma nuevos aprendizajes.

El uso de la guía didáctica ayudó a reforzar los conocimientos de los estudiantes de Segundo Bachillerato, situación que se pudo evidenciar cuando se compararon los resultados de las evaluaciones realizadas antes y después de la aplicación de la misma, lo que nos hace suponer que la herramienta pedagógica contribuyó de manera positiva en la parte cognitiva de los alumnos, lo que se puede explicar con el hecho de que ellos adquirieron conocimiento a su ritmo, dándole al docente de la asignatura un recurso valioso que contribuyó en el aprendizaje de los estudiantes.

Se elaboró un análisis de correlación lineal con los promedios de las calificaciones obtenidas por los estudiantes antes y después de la aplicación de la guía didáctica teniendo como resultado un valor de coeficiente de correlación lineal de Pearson de 0.89, lo que significa que la relación entre ambos conjuntos de datos es positiva fuerte, situación que nos lleva a la conclusión de que el uso de la guía fue el medio para la mejora de las notas de las evaluaciones de trigonometría. Este resultado se puede interpretar de mejor manera con el coeficiente de determinación cuyo valor es de 0.7921 que significa que el 79.21% de la variación del conjunto de datos de promedio de calificaciones antes del uso de la guía se ven afectados por el conjunto de datos del promedio de calificaciones después del uso de la guía.

La guía está estructurada de manera organizada y clara, donde el estudio de trigonometría se empieza desde lo más básico hasta los conceptos más elaborados de tal forma que el aprendizaje de los estudiantes resulte significativo, además se contribuye al aprendizaje autónomo debido a que se utilizó un lenguaje escrito formal y un desarrollo detallado tanto en la teoría como en los ejercicios resueltos, con el fin de atrapar la atención del estudiante y motivarlo a seguir leyendo, usando este recurso pedagógico el cual servirá como un andamio, haciendo referencia a la metáfora utilizada por Jerome Bruner en la teoría del andamiaje, que le ayude a resolver inquietudes cognitivas por sí mismo.

Para el desarrollo de la guía didáctica se revisaron los sílabos de matemáticas nivel medio y de nivel superior que propone el programa de diploma del Bachillerato Internacional, así como también los textos guías de las asignaturas, logrando mejorar el enfoque de ciertos temas en los cuales los libros antes mencionados no profundizaban, con lo que se logró un mejor entendimiento de los mismos, ofreciéndoles a los estudiantes una fuente de consulta que les brinde la oportunidad de comprender mejor los contenidos de la asignatura.

# RECOMENDACIONES.

Se recomienda que esta guía didáctica forme parte de alguna plataforma educativa que permita socializar conocimientos con los estudiantes especialmente en tiempos donde nos remontamos a un aprendizaje online, de tal forma que el alumno obtenga conocimientos de manera autónoma pero con la supervisión del profesor de la asignatura con el objetivo de que se cumplan los objetivos de enseñanza de acuerdo a las exigencias del Bachillerato Internacional.

Estimular a los estudiantes a emplear herramientas tecnológicas tales como el uso de las calculadoras permitidas por el Programa de Diploma, ya que el mismo evalúa dos tipos de pruebas en la asignatura de matemáticas, una con calculadora y otra sin ella. La prueba con calculadora tiene la particularidad de evaluar cuanto el estudiante conoce del manejo de la misma, proponiendo ejercicios que no se podrían resolver sin el uso de este recurso.

Incentivar a los directivos para que los profesores de matemáticas de la institución educativa elaboren otras guías basadas en los sílabos de matemáticas nivel medio o nivel superior del programa del diploma del Bachillerato Internacional con el fin de tener una herramienta adicional para los estudiantes, especialmente en temas como Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Estadística , Vectores en los cuales la dificultad de aprendizaje se incrementa por la dificultad que se asocia al estudio de los mismos.

Es importante reconocer que tener guías didácticas en diferentes temas en la asignatura de matemáticas ayudaría a fomentar el trabajo autónomo, el estudiante con una guía bien elaborada podría mejorar su aprendizaje, construyendo por si nuevos conocimientos y teniendo en estos recursos didácticos una fuente de información que les permita despejar inquietudes de algún tema en particular que se esté analizando.

# REFERENCIAS.

Abreu, O., Gallegos, M., Jácome, J., & Martínez, R. (4 de Enero de 2017). La Didáctica: Epistemología y Definición en la Facultad de Ciencias Administrativas y Económicas de la Universidad Técnica del Norte del Ecuador. *Formación Universitaria, 10*, 81-92.

Cabrerizo Aparicio, C. (22 de Enero de 2019). *Las destrezas del pensamiento.* Recuperado el 3 de noviembre de 2019, de http://revistaventanaabierta.es/?s=las+destrezas+del+pensamiento

Chávez Rojas , A. D. (16 de junio de 2011). *Paradigmas de Aprendizaje. Aporte Grupal.* Recuperado el 28 de septiembre de 2019, de https://educarparaaprender.wordpress.com/tag/paradigma-conductista/

Coloma Manrique, C. R., & Tafur Puente, R. (septiembre de 1999). *El constructivismo y sus implicancias en educación.* Recuperado el 30 de octubre de 2019, de Educación: http://revistas.pucp.edu.pe/index.php/educacion/article/view/5245

Comunidad. (26 de Febrero de 2019). *Ecuador reprobó en Matemáticas en evaluación internacional.* Recuperado el 10 de septiembre de 2019, de El Universo: https://www.eluniverso.com/guayaquil/2019/02/26/nota/7207946/matematicas-no-se-paso-prueba?amp

Elizalde , M., Parra , N., Palomino, C., Reyna , A., & Trujillo, I. (Diciembre de 2010). *Aprendizaje por descubrimiento y su eficacia en la enseñanaza de la Biotecnología.* Recuperado el 12 de Noviembre de 2019, de Revista de Investigación: https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/3705007.pdf

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, M. (2014). *Metodología de la Investigación.* (Sexta Edición ed.). Mexico: McGRAW-HILL / INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey. (s.f). *Paradigma Histórico-Social.* Recuperado el 5 de noviembre de 2019, de http://www.cca.org.mx/profesores/cursos/cep21/modulo_1/main0_34.htm

Ortiz Granja, D. (18 de septiembre de 2015). *El constructivismo como teoría y método de enseñanza.* Recuperado el 3 de Noviembre de 2019, de Sophia, Colección de Filosofía de la Educación: https://www.redalyc.org/pdf/4418/441846096005.pdf

Pastrana Sotto, J. (23 de noviembre de 2016). Desarrollo del Aprendizaje Autónomo de los estudiantes pertenecientes a la asignatura de Inglés IV del programa de Licenciatura en Inglés. Recuperado el 11 de Noviembre de 2019, de Revista Erasmus Semilleros de Investigación: https://journalusco.edu.co/index.php/erasmus/article/view/1381/2595

Pereira Pérez, Z. (9 de Marzo de 2011). Los diseños de método mixto en la investigación en educación :Una experiencia concreta. *Revista Electrónica Educare , 15(1)*, 15-29.

Perez, M. (s.f). *Los 10 tipos de Paradigmas más importantes.* Recuperado el 23 de septiembre de 2019, de https://www.lifeder.com/tipos-paradigma/

Ponce Silva, N. E. (26 de Juliio de 2019). La enseñanza y aprendizaje de Trigonomtría Plana a los estudiantes de nivelación de la Facultad de Ingienería de la Universidad Laica Eoy Alfaro de Manabí. *Revista Electrónica Formación y Calidad Educativa (REFCalE), 7(2)*, 146-157.

Rodrigues Da Silva, A. (26 de Enero de 2017). *Paradigma cognitivo: caracterización e implicaciones.* Recuperado el 2 de Octubre de 2019, de http://vinculando.org/psicologia_psicoterapia/caracterizacion-del-paradigma-cognitivo-sus-implicaciones.html

Zapata Ros, M. (2012). *Teorías y modelos sobre el aprendizaje en entornos conectados y ubicuos.* Recuperado el 6 de noviembre de 2019, de http://eprints.rclis.org/17463/1/bases_teoricas.pdf

# ANEXOS.

**Anexo A: Cuestionario para la encuesta que se realizó a los estudiantes con preguntas respecto a la Guía Dictada para la Enseñanza de Trigonometría.**

1. ¿Le gustaría aprender Trigonometría Plana mediante el uso de una guía didáctica?

a) Si

b) No

2. ¿Habías usado una guía didáctica de Matemáticas alguna vez?

a) Si

b) No

3. ¿Ayudó la teoría previa al desarrollo de los ejercicios propuestos en la guía didáctica a facilitar el estudio de cada contenido de Trigonometría?

a) Si

b) No

4. ¿Estuvieron las resoluciones de los ejercicios desarrollados en la guía didáctica de manera ordenada y secuencial?

a) Si

b) No

5. ¿Cree usted que el uso de la guía didáctica sirvió para entender mejor las clases de Trigonometría de tu profesor?

a) Si

b) No

6. ¿Ayudó el uso de la guía didáctica a mejorar sus calificaciones en Trigonometría?

a) Si

b) Invariantes

c) No

7. ¿Ha incentivado el uso de la guía didáctica a su aprendizaje autónomo?

a) Mucho

b) Poco

c) Nada.

8. ¿Cree usted que esta guía didáctica ayudará al estudio de Trigonometría a los estudiantes de Matemáticas Nivel Medio y Nivel Superior del Programa de Diploma del Bachillerato Internacional?

a) Si

b) No

9. ¿Ha ayudado el uso de la guía didáctica a comprender mejor el texto guía de la asignatura de Matemáticas del Bachillerato Internacional?

a) Mucho

b) Poco

c) Nada.

10. ¿Qué es lo que más le gustó de la estructura de la Guía Didáctica?

a) Su enfoque teórico

b) Los ejercicios resueltos.

c) Los ejercicios propuestos

d) Las test de aprendizajes.

11. ¿Estuvieron los contenidos de la Guía Didáctica basada en el curriculum de Matemáticas Nivel Medio y Nivel Superior del Programa de Diploma del Bachillerato Internacional?

a) Si

b) No

12. ¿Recomendaría a sus compañeros y a los profesores de la institución a la cual pertenece a usar una guía didáctica para la enseñanza de contenidos específicos?

a) Si

b) No

**Anexo B: Estudiantes de la Institución educativa donde se aplicó el trabajo investigativo. Rindiendo una de las pruebas de matemáticas referente a Trigonometría luego del uso de la Guía Didáctica.**

**Figura A1: Estudiantes de Segundo Bachillerato Ciencias.**

*Autor: Leonardo Maya Valdano*