CAPITULO 3

"No se lo que puedo parecer al mundo; pero para mí mismo, sólo he sido como un niño, jugando a la orilla del mar, y divirtiéndome al hallar de vez en cuando un guijarro más suave o una concha más hermosa que de costumbre, mientras que el gran océano de la verdad permanecía sin descubrir ante mí"

Isaac Newton

DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES ESCALARES

3.1 LÍMITE Y CONTINUIDAD

En este capítulo ampliaremos los conceptos básicos del cálculo diferencial a funciones de varias variables, en esta oportunidad comenzaremos con las funciones escalares y para organizar mejor nuestro trabajo daremos algunas definiciones básicas que nos permitirán definir luego; límite, continuidad, derivada y diferencial.

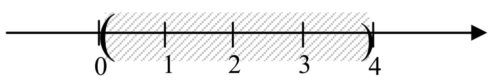
Definición:

> Se llama ***<u>n-bola abierta</u>*** de centro en X_0 y radio δ, denotada por $B_n(X_0;\delta)$, al conjunto $\{X \in R^n / \|X - X_0\| < \delta\}$; $X_0 \in R^n$, $\delta \in R$ pequeño y positivo.

Para n = 1, $B(X_0;\delta)$ representa un intervalo abierto.

Ejemplo 3-1 Analizar el intervalo abierto que representa $|x-2|<2$

Solución: $|x - 2| < 2$; $-2 < x - 2 < 2$; $0 < x < 4$



Para n = 2, $B_2(X_0;\delta)$ representa el interior de un disco circular (un círculo).

Ejemplo 3-2 Analizar lo que representa una $B_2((2,3);4)$ en R^2

Solución: La solución esta en la *figura 3-1*

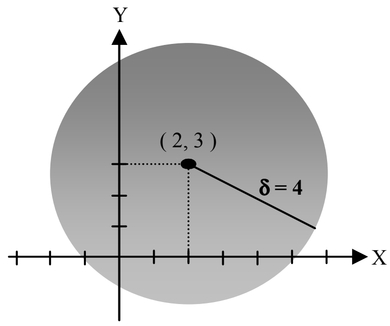


Figura 3-1

Ejemplo 3-3 Demostrar que el punto (4,4) pertenece a una bola $B_2((2,3),4)$.

Solución: $\|(4,4)-(2,3)\| = \|2,1\| = \sqrt{5}\,;\ \sqrt{5} < 4$ ∀

Para n = 3, $B_3(X_0;\delta)$ representa el interior de una esfera. La *figura 3-2* representa una 3-bola abierta centrada en (x_0, y_0, z_0) y radio δ

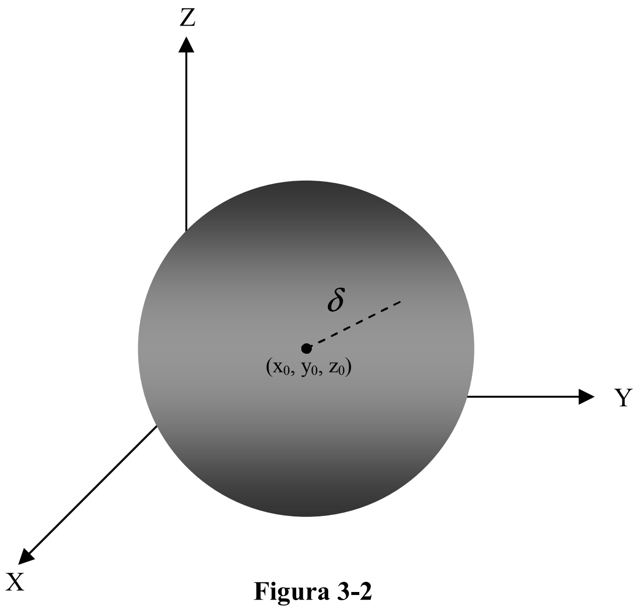


Figura 3-2

Definición:

Dado: $U \subset R^n$, $X_0 \in R^n$; se dice que X_0 es un ***punto interior*** de U, si y sólo si, $\forall \delta > 0, \exists B_n(X_0;\delta)$ totalmente contenida en U.

Es decir que todo punto X_0 interior a U puede rodearse de una n-bola centrada en X_0 y radio δ tal que $B_n(X_0;\delta) \subseteq U$. El conjunto de todos los puntos interiores a U determina ***el interior de U*** y se lo denota por $\operatorname{int} U$.

Definición:

$U \subset R^n$, es un <u>***conjunto abierto***</u> si todos sus puntos son interiores a U.

Es decir; U es un conjunto abierto, si y sólo si, $U = \operatorname{int} U$.

Ejemplo 3-4 Sea $U \subset R^2$ tal que $1 < x^2 + y^2 < 4$ graficar el espacio e indicar que tipo de conjunto es.

Solución: La *figura 3-3* representa este espacio y se trata de una corona circular entre las circunferencias de radio 1 y radio 2, es un conjunto abierto porque esta formado por todos los puntos interiores a U. ✓

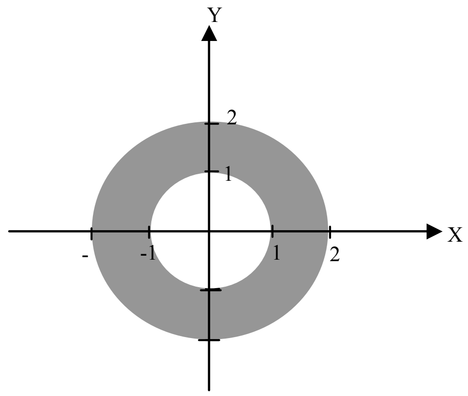


Figura 3-3

Ejemplo 3-5 El producto cartesiano de dos intervalos abiertos es un conjunto abierto.

Solución: La *figura 3-4* indica este conjunto abierto dado por el producto cartesiano de los intervalos abiertos:

$(a,b)\times(c,d)$.

Como se ve es un rectángulo. ✓

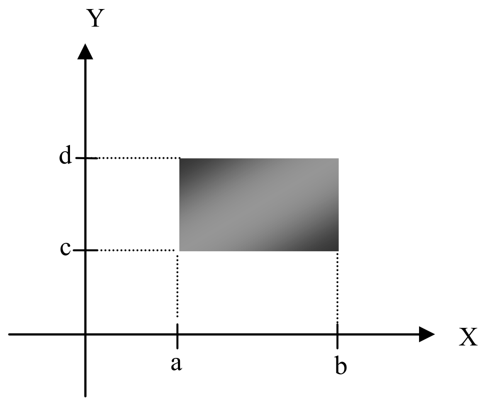


Figura 3-4

Definición:

Dado: $U \subset R^n$, $X_0 \in R^n$; se dice que X_0 es un ***punto exterior*** de U, si y sólo si, $\forall \delta > 0, \exists B_n(X_0;\delta)$ totalmente fuera de U.

Es decir que todo punto X_0 exterior a U puede rodearse de una n-bola centrada en X_0 y radio δ tal que $B_n(X_0;\delta) \not\subset U$. El conjunto de todos los puntos exteriores a U determina ***el exterior de U*** y se lo denota por $extU$.

Definición:

Se dice que X_0 es un ***punto de frontera*** de U, si no es ni interior ni exterior a U.

El conjunto de todos los puntos de frontera de un espacio U forma la frontera de U y se la designa por ∂U.

Definición:

$U \subset R^n$, es un ***conjunto cerrado*** si su complemento es abierto.

Ejemplo 3-6 En los siguientes casos, sea U el conjunto de todos los puntos (x, y) de R^2 que satisfacen las condiciones dadas, analizar el conjunto U en cada caso y dar una razón geométrica para calificarlo como abierto, cerrado, abierto y cerrado, ni abierto ni cerrado.

a.- $x^2 + y^2 \geq 0$

Solución: **Abierto y cerrado**; porque es todo R^2 y R^n es abierto y cerrado a la vez. Le dejamos al lector la demostración de esto último.

b.- $x^2 + y^2 < 0$

Solución: **Abierto y cerrado**; porque es Φ y el conjunto vacío es abierto y cerrado a la vez. Le dejamos al lector la demostración de esto último.

c.- $x^2 + y^2 \leq 1$

Solución: **Cerrado**; Porque es la parte interior del círculo de radio 1 y la circunferencia de radio 1, su complemento es abierto.

d.- $1 \leq x^2 + y^2 < 4$

Solución: **Ni abierto ni cerrado**; porque es la corona circular entre los círculos de radio 1 y radio 2, incluye la circunferencia de radio 1 pero no la de radio 2.

e.- $1 \leq x \leq 4$, $3 \leq y \leq 5$

Solución: **Cerrado**; Porque es la unión de conjuntos cerrados. La unión de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado, la unión de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

f.- $1 \leq x < 4$, $3 \leq y \leq 5$

Solución: **Ni abierto ni cerrado**; Porque no es unión de conjuntos cerrados ni tampoco unión de conjuntos abiertos.

g.- $y = x^2$

Solución: **Cerrado**; Porque son los puntos que se ajustan a la curva y su complemento es abierto.

h.- $y \geq x^2$

Solución: **Cerrado**; Porque su complemento es abierto.

Definición de Límite:

Sea $F(x): U \subset R^n \to R^m$; donde U es un conjunto abierto, X_0 un punto de U o de la frontera de **U**, y sea **V** una vecindad de $L \in R^m$, decimos que: $\lim_{X \to X_0} F(x) = L$, si y solo si, $\forall \xi \geq 0$, $\exists \delta \geq 0$ de manera que si existe una n-bola en **U**, centrada en X_0 y de radio δ, exista una m-bola en **V**, centrada en L y de radio ξ, tal que si: $X \in B_n(X_0; \delta) \Rightarrow F(x) \in B_m(L; \xi)$

Analizando la definición podemos ver que $F(x)$ no necesariamente debe estar definida en X_0 y si X tiende a X_0 en el dominio, $F(x)$ debe de tender a L en el rango de la función.

El símbolo de límite también puede expresarse de otras maneras equivalentes:

$\underset{\|X-X_0\|\to 0}{Lim} \|f(x)-L\|=0$, esta es la forma corriente de límite en el cálculo elemental.

Llamando $h=X-X_0$ podemos escribir otra forma equivalente:

$$\underset{\|h\|\to 0}{Lim} \|f(X_0+h)-B\|=0$$

Si $f(x,y):R^2 \to R$, escribimos: $\underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{Lim} f(x,y)=l$.

Si $f(x,y,z):R^3 \to R$, escribimos: $\underset{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)}{Lim} f(x,y,z)=l$

Si $f(x):R^n \to R$, escribimos: $\underset{x\leftarrow x_0}{Lim} f(x)=l$

Teorema 3-1 Unicidad del límite.

Sea $f(x):U\subset R^n \to R$; donde U es un conjunto abierto, X_0 un punto de U; si:

$\underset{x\leftarrow x_0}{Lim} f(x)=a$ y $\underset{x\leftarrow x_0}{Lim} f(x)=b$ entonces a es igual a b.

Hagamos las siguientes observaciones sobre la definición de límite:

1. El límite es una tendencia.
2. El límite es único.
3. Puede existir o no y si existe es un número real.
4. Puede la función no estar definida en un cierto punto, sin embargo el límite puede existir.
5. El cálculo es complicado para funciones de variable real, más aún para funciones de varias variables.
6. La definición es bastante abstracta.

Para realizar cálculos prácticos de límites necesitamos de algunas reglas que nos permitan hacerlo; estas reglas nos las da el siguiente teorema:

Teorema 3-2

Sean *F(x)* y *G(x)* dos funciones definidas en U$\subset R^n \to R^m$; U abierto, $A, B \in R^m$, $X_0 \in U$ o a la frontera de U; entonces; si:

$$\lim_{\|X-X_o\|\to 0} F(\vec{x}) = A \quad ; \quad \lim_{\|X-X_o\|\to 0} G(\vec{x}) = B$$, entonces:

1. $\lim_{\|X-X_o\|\to 0} [F(x) \pm G(x)] = A \pm B$

2. $\lim_{\|X-X_o\|\to 0} [\alpha F(x)] = \alpha A$

3. $\lim_{\|X-X_o\|\to 0} (F(x) \bullet G(x)) = (A \bullet B)$

4. $\lim_{\|X-X_o\|\to 0} \|F(x)\| = \|A\|$

Si: $f(x): U \subset R^n \to R$; $g(x): U \subset R^n \to R$; $a, b \in R$, (funciones escalares)

5. $\lim_{\|X-X_o\|\to 0} [f(x)g(x)] = ab$

6. $\lim_{\|X-X_o\|\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$; g(x) ≠0; b ≠ 0.

⇨ Demostremos el literal 3 y 4 y dejamos el resto de demostraciones como ejercicios para el lector:

Podemos escribir:

$$F(x) \bullet G(x) - A \bullet B = (F(x) - A) \bullet (G(x) - B) + A \bullet (G(x) - B) + B \bullet (F(x) - A)$$

Aplicando la desigualdad triangular y la desigualdad de Schwarz obtenemos:

$$0 \le \|F(x) \bullet G(x) - A \bullet B\| \le \|F(x) - A\| \|G(x) - B\| + \|A\| \|G(x) - B\| + \|B\| \|F(x) - A\|$$

Como; $\|F(x)-A\| \to 0$ y $\|G(x)-B\| \to 0$ cuando $x \to x_0$, entonces:

$\|F(x) \bullet G(x) - A \bullet B\| \to 0$ cuando $x \to x_0$, lo cual prueba (3)

Para probar (4) hagamos $G(x) = F(x)$ en (3) y tenemos:

$\lim\limits_{\|x-x_0\|} F(x) \bullet G(x) = A \bullet A$, o lo que es lo mismo:

$\lim\limits_{\|x-x_0\|} \|F(x)\|^2 = \|A\|^2$, que demuestra (4).

<u>El límite de cualquier operación es la misma operación con los límites:</u>

Ejemplo 3-7 Dada la siguiente función escalar en R^2:

$$f(x,y) = \frac{sen(x^2+y^2)}{x^2+y^2}.$$

Calcular su límite cuando (x, y) → (0, 0)

Solución: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{sen(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$; tomemos V = (x, y) ∈ R^2,

$x^2+y^2 = \|V\|^2 = \alpha$, entonces se transforma en:

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{sen\alpha}{\alpha} = 1 \qquad \therefore \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$$

Ejemplo 3-8 Sea: $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 3$, encontrar: $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)$

Solución: $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} (x^2+2y^2-3) = (1)^2 + 2(2)^2 - 3 = 6$

Ejemplo 3-9 Calcular $\lim_{(x,y,z)\to(0,1,0)} \dfrac{\cos z}{e^x + e^y}$

Solución: $\lim_{(x,y,z)\to(0,1,0)} \dfrac{\cos z}{e^x + e^y} = \dfrac{\cos 0}{e^0 + e} = \dfrac{1}{1+e}$

Ejemplo 3-10 Encontrar: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$

Solución: En la dirección del eje "X"; y = 0;

$\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$

En la dirección del eje "Y"; x = 0;

$\lim_{y\to 0} \dfrac{0}{y^2} = 0$

Por lo tanto en (0, 0) esta función no tiene límite.

Ejemplo 3-11 Encontrar $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

Solución: En la dirección del eje "X"; y = 0;

$\lim_{x\to 0} \dfrac{0}{x^4} = 0$,

En la dirección del eje "Y"; x = 0;

$\lim_{y\to 0} \dfrac{0}{y^2} = 0$,

En la dirección de todas las rectas de la forma $y = mx$,

$\lim_{x\to 0} \dfrac{mx^3}{x^4 + m^2 x^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{mx}{x^2 + m^2} = 0$,

Podríamos pensar que su límite es 0; sin embargo si averiguamos sobre la curva $y = x^2$, tenemos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x, y) \text{ no tiene límite.}$$

Ejemplo 3-12 Encontrar $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{sen2x - 2x + y}{x^3 + y}$

Solución: En la dirección del eje "X"; y = 0;

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen2x - 2x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{2\cos 2x - 2}{3x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-4sen2x}{6x} = \lim_{x \to 0} \frac{-8\cos 2x}{6} = \frac{-4}{3}$$

Aplicando la regla de L'Hopital.

En la dirección del eje "Y"; x = 0;

$$\lim_{y \leftarrow 0} \frac{y}{y} = 1 \Rightarrow \text{ el límite no existe.}$$

Obsérvese en los ejemplos anteriores que para asegurar la existencia del límite se debe demostrar que este existe y es igual en todas las direcciones posibles, lo cual lo torna sumamente complicado y difícil de calcular. Como el límite de una función vectorial es igual al límite de cada una de sus componentes, entonces el cálculo de límites para una función vectorial se reduce al cálculo de límites para funciones escalares.

Definición de continuidad:

Sea $F(x): U \subset R^n \to R^m$; donde U representa su dominio, X_0 un punto de U. Decimos que $F(x)$ es **continua** en X_0, si y solo si:

$$\lim_{X \to X_0} F(x) = F(x_0)$$

Decimos que es **continua** en todo su dominio U, si y sólo si es continua en cada uno de los puntos de U.

Observaciones:

- La definición de continuidad es puntual.

- Es imposible utilizar la definición para demostrar la continuidad de una función en un intervalo o sub-espacio de R^n.

- Por lo anterior, necesitamos conocer algunas reglas que nos permitan analizar la continuidad de una función de varias variables en su dominio U.

Para ayudarnos en la limitante que nos deja la definición de continuidad disponemos de los siguientes teoremas.

Teorema 3-3

Sean; $F(x): U \subset R^n \to R^m$ y $G(x): U \subset R^n \to R^m$, $x_0 \in U$ y $\alpha \in R$:

1. Si $F(x)$ es continua en x_0; entonces $\alpha F(x)$ también es continua en x_0.
2. Si $F(x)$ y $G(x)$ son continuas en x_0; entonces $F(x) \pm G(x)$ también es continua en x_0.
3. Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones escalares y continuas en x_0; entonces $f(x)g(x)$ también es continua en x_0.
4. Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones escalares y continuas en x_0; entonces $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ también es continua en x_0, si $g(x) \neq 0$.
5. Si $f(x)$ es una función escalar continua en x_0; entonces $\dfrac{1}{f(x)}$ también es continua en x_0, si $f(x) \neq 0$.
6. Una función vectorial es continua, si y sólo si, cada una de sus componentes es continua.

Cualquier operación que se realice con funciones continuas es continua excepto la división cuando el denominador sea cero.

Ejemplo 3-13 La función identidad $F(X) = X : R^n \to R^n$, es continua en todo R^n.

Solución: Las componentes de la función identidad son:

$f_1(x) = x_1$, $f_2(x) = x_2$, $f_3(x) = x_3$,…………, $f_n(x) = x_n$.

Como todas son continuas en R^n, entonces la función también es continua en todo R^n. ⮛

Ejemplo 3-14 Sea $F(X): R^n \to R^m$ una transformación lineal, demostrar que es continua en R^n.

Solución: Si es una transformación lineal, entonces:

$F(X+Y) = F(X) + F(Y)$

Si $F(X)$ y $F(Y)$ son continuas en todo R^n, entonces la transformación también. ⮛

Ejemplo 3-15 Sea $$F(x, y, z) = (x^2 yz, \frac{x^2+1}{x^2+y^2+z^2+2}, x+y+z),$$

función vectorial de la forma $F: R^3 \to R^3$, demostrar que es continua en R^3.

Solución: La primera componente es un producto de funciones continuas; por lo tanto es continua, la segunda componente es un cociente de funciones continuas y la función denominador nunca será cero entonces también es continua, y la tercera componente es la suma de tres funciones continuas y también es continua; por lo tanto, como todas sus componentes son continuas, la función es continua. ⮛

Teorema 3-4

> Sean: $G(x): U \subset R^n \to R^p$, $F(x): R^p \to R^m$, $x_0 \in U$; tal que $F \circ G = F(G(x))$ exista; si $G(x)$ es continua en x_0 y $F(x)$ es continua en $G(x_0)$; entonces $F \circ G$ es continua en x_0.

⇨ Demostración:

Tomemos: $y = g(x)$ y $A = g(x_0)$

$f(g(x)) - f(g(x_0)) = f(y) - f(A)$

Por hipótesis cuando $x \to x_0 \qquad y \to A$, así que tenemos:

$\lim_{\|x - x_0\| \to 0} \|f(g(x)) - f(g(x_0))\| = \lim_{\|y - A\| \to 0} \|f(y) - f(A)\| = 0$, lo que indica:

$\lim_{\|x - x_0\| \to 0} \|f(g(x)) - f(g(x_0))\| = 0 \qquad \therefore \qquad f \circ g$ es continua en x_0 .

Ejemplo 3-16 En base al teorema anterior analizar la continuidad de las siguientes funciones:

1. $f(x, y) = sen(x^2 y)$
2. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$
3. $f(x, y) = \dfrac{e^{x+y}}{x + y}$
4. $f(x, y) = \ln(\cos(x^2 + y^2)$

Solución: La primera función; $x^2 y$ es continua en todo R^2, y como $sen(x)$ no tiene restricciones para su dominio podemos concluir que esta es continua en todo R^2.

La segunda función; $x^2 + y^2$ es continua en todo R^2, y su valor es: $x^2 + y^2 \geq 0$, la función $\ln(x)$ tiene restringido su dominio para valores > 0. Esto nos hace concluir que en este caso la función tiene restringido su intervalo de continuidad de la siguiente forma: $\{\forall (x, y) \in R^2 / (x, y) \neq (0,0)\}$.

La tercera función es el cociente de dos funciones; la función numerador es la composición de e^x con $x + y$, la interna es continua en todo R^2 y la externa, que es la exponencial, no tiene restricciones para su dominio; por la tanto e^{x+y} es continua; sin embargo debemos eliminar los valores que hagan cero el denominador y estos son $y = -x$, esto hace que para este caso la región de continuidad sea: $\{(x, y) \in R^2 / y \neq -x\}$.

La cuarta es la composición de tres funciones; la interna $x^2 + y^2$ es continua en todo R^2 y es ≥ 0, la intermedia es $\cos(x)$ y no tiene restricciones para su dominio; mientras que la externa $\ln(x)$ si tiene restricciones para su dominio donde x = 0, esto hace que para este caso la región de continuidad quede definida de la siguiente manera:

$$\left\{(x, y) \in R^2 /(x^2 + y^2) \neq \frac{(2n-1)\pi}{2}; n = 1,2,3,.....\right\}.$$

Ejemplo 3-17 Analizar la continuidad de la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}, \text{ en } (0, 0).$$

Solución: En un corte sobre el eje "X"; y = 0:

$$\lim_{x \to 0} \frac{0}{x^2} = 0 \quad ; \text{ cumple.}$$

En un corte sobre el eje "Y"; x = 0:

$$\lim_{y \to 0} \frac{0}{y^2} = 0 \quad ; \text{ cumple.}$$

En un corte sobre la función identidad $y = x$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \tfrac{1}{2} \quad ; \text{ no cumple.}$$

$\therefore$ La función no es continua en (0, 0).

Como se puede observar en el *ejemplo 3-17*, para que una función escalar sea continua en un punto dado debe cumplirse la definición de continuidad en todas las direcciones posibles por las que nos podamos acercar a este punto en una vecindad del mismo. Esto hace complicada esta técnica de demostración puesto que existen infinitas maneras de aproximarse a una función en una vecindad de un punto dado.

3.2 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN ESCALAR.

En la sección 3-1 dimos los conceptos elementales que nos permitan tener la capacidad de hacer otras definiciones importantes del cálculo; una de ellas es la definición de derivada de una función escalar con respecto a un vector. Sea $f(x): U \subset R^n \to R$, un campo escalar en R^n, deseamos tener la capacidad de estudiar la variación de $f(x)$ cuando nos acercamos a cualquier punto desde x_0 dentro de su dominio. Por ejemplo supongamos que la función representa la temperatura en el interior de una habitación con aire acondicionado en un día de calor; es obvio que la variación de temperatura será diferenta cundo nos acercamos en la dirección del aparato del aire acondicionado que cuando nos acercamos en la dirección de la ventana que esta frente al sol, esto nos induce a pensar que al hablar de campos escalares la definición de derivada estará supeditada a la dirección en la cual se la defina.

Supongamos que la dirección esta dada por un vector $\vec{V}$ en R^n y que nos acercamos del punto x_0 al punto x_0 + $\vec{V}$, siguiendo el segmento de recta que une a x_0 con x_0 + $\vec{V}$ cada punto de esta recta tiene la forma x_0 + h$\vec{V}$ donde h es un número real cualquiera, la variación de este desplazamiento esta dada por $|h|\|V\|$, como $\vec{V}$ sólo indica la dirección del desplazamiento, no nos importa el valor de su norma y de esta forma podemos decir que sólo h es un indicador de la magnitud de este desplazamiento, es obvio que la variación que sufre la función como consecuencia de este desplazamiento en su dominio es $(f(x_0) + hV) - f(x_0)$, la razón de estas dos variaciones, como en el caso de funciones de variable real, es lo que nos lleva a la definición de derivada de un campo escalar con respecto a un vector.

Definición de Derivada de un campo escalar con respecto a un vector:

Sea $f(x): U \subset R^n \to R$; donde U es un conjunto abierto, X_0 un punto de U, $h \in R$, y sea $\vec{V}$ un vector cualquiera de R^n, la derivada de $f(x)$ en x_0 y con respecto a V se representa con el símbolo $f'(x_o;V)$ y se define por:

$$f'(x_0;V) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hV) - f(x_0)}{h}$$

Cuando este límite existe.

Observaciones:

- La derivada es un límite, por lo tanto si existe es un número real y tiene todas las propiedades de los límites.
- La derivada representa la razón de cambio sobre un perfil de la función en la dirección del vector $\vec{V}$.
- Para que la función sea derivable en un punto x_0, este límite debe existir para todas las direcciones posibles $\vec{V}$ que llegan a x_0.
- Puede usarse para encontrar la ecuación de la recta tangente al perfil de $f(x)$ en la dirección del vector $\vec{V}$.
- El vector $\vec{V}$ representa la dirección del corte de $f(x)$ y por lo tanto no necesita pertenecer al dominio de la función.

Ejemplo 3-18 Si $\vec{V}$ es el vector cero, demostrar que la derivada direccional de cualquier función escalar existe y vale cero.

Solución:

$$f'(x_0;0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h0) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0;0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0)}{h} = 0$$

Ejemplo 3-19 Demostrar que la derivada de una transformación lineal en un punto cualquiera siempre existe y es igual al valor de la función evaluada en el vector dirección $\vec{V}$.

Solución: Sea $f(x): U \subset R^n \to R$; una transformación lineal cualquiera.

$$f'(Xo;V) = \lim_{h\to 0} \frac{f(Xo + hV) - f(Xo)}{h}$$

$$f'(Xo;V) = \lim_{h\to 0} \frac{f(Xo) + hf(V) - f(Xo)}{h} = f(V)$$

Teorema 3-5

Si $g(t) = f(x_0 + tV)$ y si una de las derivadas, $g'(t)$ o $f'(x_0 + tV;V)$ existen, entonces también existe la otra y son iguales:

$$g'(t) = f'(x_0 + tV;V)$$

En particular cuando t = 0, $g'(0) = f'(x_0;V)$

⇨ Demostración:

$$g'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{g(t+h)-g(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+(t+h)V)-f(x_0+tV)}{h}$$

Que se lo puede también escribir de la forma:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f((x_0+tV)+hV)-f(x_0+tV)}{h} = f'(x_0+tV;V)$$

Ejemplo 3-20 Dado el campo escalar $f(x) = \|X\|^2 \quad \forall X \in R^n$.
Calcular $f'(X_0;V)$.

Solución: Primero se busca una función de variable real talque:

$g(t) = f(X_0+tV)$, entonces:

$g(t) = \|X_0+tV\|^2$

como; $\|V\|^2 = V \bullet V$, entonces:

$$g(t) = (X_0+tV)\bullet(X_0+tV)$$
$$g(t) = (X_0 \bullet X_0)+(tX_0 \bullet V)+(tV \bullet X_0)+t^2(V \bullet V)$$
$$g(t) = (X_0 \bullet X_0)+2t(X_0 \bullet V)+t^2(V \bullet V)$$

$g(t) = \|X_0\|^2 + 2t(X_0 \bullet V)+t^2\|V\|^2$, derivando con respecto a t.

$$g'(t) = 2(X_0 \bullet V)+2t\|V\|^2$$

Como $g'(0) = f'(X_0;V)$, entonces:

$$f'(X_0;V) = 2(X_0 \bullet V)$$

Teorema 3-6. Teorema del valor medio para campos escalares

Si existe la derivada $f'(x_0 + tV; V)$ para cada t en el intervalo $0 \leq t \leq 1$. Entonces para un cierto número real α en el intervalo abierto $0 < \alpha < 1$ tenemos:

$$f(x_0 + V) - f(x_0) = f'(u; V), \text{ donde } u = x_0 + \alpha V$$

⇨ Demostración:

Hagamos $g(t) = f(x_0 + tV)$ y apliquemos el teorema del valor medio para funciones de variable real a $g(t)$ en el intervalo $[0,1]$ y tenemos:

$$g(1) - g(0) = g'(\alpha), \text{ donde } 0 < \alpha < 1$$

como $g(1) - g(0) = f(x_0 + V) - f(x_0)$, y
$g'(\alpha) = f'(x_0 + \alpha V; V)$; ya esta demostrado el teorema.

Definición de Derivadas direccionales y derivadas parciales:

Si en la definición de derivada de un campo escalar con respecto a un vector el vector dirección $\vec{V}$ es unitario, $f'(x_0; V)$ se llama **derivada direccional** de $f(x)$ en x_0 y en la dirección $\vec{V}$.
En particular si $\vec{V} = e_k$ (el k-esimo vector coordenado unitario) la derivada direccional $f'(x_0; e_k)$ se denomina **derivada parcial** de $f(x)$ respecto a e_k y se la representa por: $D_k f(x_0)$, $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)$, $f'_{x_k}(x_0)$.

Para una función escalar en R^2 $f(x, y)$;

$$\frac{\partial f}{\partial x};\quad D_x f(x,y);\quad f'_x(x,y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y};\quad D_y f(x,y);\quad f'_y(x,y)$$

Para una función escalar en R^3 $f(x,y,z)$;

$$\frac{\partial f}{\partial x};\quad D_x f(x,y,z);\quad f'_x(x,y,z)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y};\quad D_y f(x,y,z);\quad f'_y(x,y,z)$$
$$\frac{\partial f}{\partial z};\quad D_z f(x,y,z);\quad f'_z(x,y,z)$$

De la definición anterior podemos concluir que las derivadas parciales, por ser cortes paralelos a los ejes coordenados, facilitan su cálculo para una función de varias variables; por cuanto cada perfil solo depende de una variable (la variable del corte) y las demás son constantes. Esto permite aplicar las reglas comunes de la derivación como si se tratara de funciones de variable real, tomando como variable solo la del corte y las demás como constantes .

Ejemplo 3-21 Dado: $f(x,y)=\ln(xy)+sen(x^2+y^2)+\frac{e^{xy}}{x}$, encontrar sus derivadas parciales.

Solución:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{xy}y+2xCos(x^2+y^2)+\frac{xye^{xy}-e^{xy}}{x^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{x}+2x\cos(x^2+y^2)+\frac{e^{xy}(xy-1)}{x^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{xy}x+2yCos(x^2+y^2)+\frac{1}{x}xe^{xy}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{y}+2y\cos(x^2+y^2)+e^{xy}$$

➤

3.3 DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN SUPERIOR:

Las derivadas parciales definidas anteriormente y calculadas como se lo hizo en el *ejemplo 3-20*, para el caso de una función escalar en R^2, son nuevas funciones escalares y estas pueden seguir derivándose parcialmente con los mismos criterios que hemos utilizado, a estas nuevas derivadas parciales las llamaremos derivadas parciales de orden superior y son, de segundo orden, cuatro para una función escalar en R^2 y nueve para una función escalar en R^3; así:

En R^2:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f'_{xx} = D_{xx}(f(x,y))$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial xy} = f'_{xy} = D_{xy}(f(x,y))$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f'_{yx} = D_{yx}(f(x,y))$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f'_{yy} = D_{yy}(f(x,y))$$

En R^3:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f'_{xx} = D_{xx}(f(x,y,z))$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial xy} = f'_{xy} = D_{xy}(f(x,y,z))$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = f'_{xz} = D_{xz}(f(x,y,z))$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f'_{yx} = D_{yx}(f(x,y,z))$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f'_{yy} = D_{yy}(f(x,y,z))$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial yz}=f'_{yz}=D_{yz}(f(x,y,z))$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial zx}=f'_{zx}=D_{zx}(f(x,y,z))$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}=f'_{zy}=D_{zy}(f(x,y,z))$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=f'_{zz}=D_{zz}(f(x,y,z))$$

Las derivadas parciales de segundo orden: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, son derivadas parciales de segundo orden dobles y las mezcladas se las llama derivadas parciales mixtas.

Ejemplo 3-22 Encontrar las derivadas parciales dobles del *ejemplo 3-21*:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\frac{1}{x^2}-4x^2sen(x^2+y^2)+\frac{x^2(e^{xy}(y)+(xy-1)ye^{xy})-e^{xy}(xy-1)2x}{x^4}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\frac{1}{x^2}-4x^2sen(x^2+y^2)+\frac{e^{xy}(x^2y^2-2xy+2)}{x^3}$$

Solución:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-4xySen(x^2+y^2)+\frac{1}{x^2}(xe^{xy}(xy-1)+e^{xy}(x))$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-4xysen(x^2+y^2)+ye^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-4xySen(x^2+y^2)+ye^{xy}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\frac{1}{y^2}-4y^2Sen(x^2+y^2)+xe^{xy}$$

➤

Teorema 3-7

Si $f: U \subset R^n \to R$; es de tipo C^2 en $U \subset R^n$, (quiere decir doblemente continua en U o diferenciable) $\Rightarrow$ las derivadas parciales mixtas de segundo orden son iguales.

Ejemplo 3-23 Obtener las derivadas parciales de primer y segundo orden de la función escalar:

$$f(x,y,z) = x^2 \cos(x^2 + y^2 + z^2).$$

Y comprobar que las mixtas son iguales:

Solución:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xCos(x^2+y^2+z^2) - 2x^3\, Sen(x^2+y^2+z^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x^2 y Sen(x^2+y^2+z^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -2x^2 z Sen(x^2+y^2+z^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2Cos(x^2+y^2+z^2) - 10x^2 Sen(x^2+y^2+z^2) - 4x^4 Cos(x^2+y^2+z^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4xySen(x^2+y^2+z^2) - 4x^3 yCos(x^2+y^2+z^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = -4xzSen(x^2+y^2+z^2) - 4x^3 zCos(x^2+y^2+z^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4xySen(x^2+y^2+z^2) - 4x^3 yCos(x^2+y^2+z^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x^2 Sen(x^2+y^2+z^2) - 4x^2 y^2 Cos(x^2+y^2+z^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = -4x^2 yzCos(x^2+y^2+z^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -4xzSen(x^2+y^2+z^2) - 4x^3 zCos(x^2+y^2+z^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -4x^2 yzCos(x^2+y^2+z^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -2x^2 Sen(x^2+y^2+z^2) - 4x^2 z^2 Cos(x^2+y^2+z^2)$$

Como se puede ver en el desarrollo anterior:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$$

Ejercicio 3-24 Obtener las derivadas parciales de primer y segundo orden de la función escalar:

$$f(x, y, z) = x^3 y^2 z + z\cos(x^2 + y^2) + e^{xy} + x^3 + y^3 + z^3$$

Y comprobar que las mixtas son iguales:

Solución: Las derivadas parciales de primer orden son:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y^2 z - 2xzSen\ (x^2 + y^2) + ye^{xy} + 3x^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3 yz - 2yzSen\ (x^2 + y^2) + xe^{xy} + 3y^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^3 y^2 + Cos\ (x^2 + y^2) + 3z^2$$

Las derivadas parciales de segundo orden son:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy^2 z - 2zSen\ (x^2 + y^2) - 4x^2 zCos\ (x^2 + y^2) + y^2 e^{xy} + 6x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6x^2 yz - 4xyzCos\ (x^2 + y^2) + xye^{xy} + e^{xy}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 3x^2 y^2 - 2xSen\ (x^2 + y^2)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6x^2 yz - 4xyzCos\ (x^2 + y^2) + xye^{xy} + e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^3 z - 2zSen\ (x^2 + y^2) - 4y^2 zCos\ (x^2 + y^2) + x^2 e^{xy} + 6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 2x^3 y - 2ySen\ (x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 3x^2 y^2 - 2xSen\ (x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 2x^3 y - 2ySen\ (x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 6z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$$

3.4 DERIVABILIDAD Y CONTINUIDAD; DIFERENCIABILIDAD:

En el curso de cálculo elemental el estudiante debe haber aprendido la importancia que tiene la derivada para calcular razones de cambio y para poder analizar el gráfico de una función de variable real, estudiando su continuidad valores extremos, concavidad y puntos de inflexión. En una función escalar, de varias variables en su dominio, la derivada también tiene aplicaciones similares; sin embargo, el gráfico de una función escalar no es tan fácil de analizar como el gráfico de una función de variable real. ¿Qué nos puede decir la derivada de una función escalar, definida en la sección 3-2, acerca de la continuidad de la función?, recordemos que para una función de variable real es válida la afirmación:

"**la derivabilidad es una condición necesaria y suficiente para la continuidad**".

Por supuesto, sabemos que la continuidad es una condición **necesaria pero no suficiente** para la derivabilidad, por la presencia de picos en el gráfico de la función. El gráfico de una función escalar también puede tener picos o pliegues que no le permiten definir planos tangentes a la superficie en todos sus puntos; es importante analizar superficies suaves que puedan tener bien definidos planos tangentes en todos los puntos de su dominio, investiguemos si esta afirmación válida para funciones de variable real, también es válida para funciones de varias variables.

Es fácil demostrar que para una función de variable real, la existencia de la derivada en un punto cualquiera implica la continuidad en dicho punto:

$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}h$, haciendo el límite de esta igualdad cuando h tiende a cero obtenemos:

$\lim_{h\to 0}(f(x_0+h)-f(x_0))=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)\lim_{h\to 0}h$, como $\lim_{h\to 0}h=0$ y $\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)=f'(x_0)$; entonces la existencia de la derivada implica que $f(x)$ sea continua en x_0.

Apliquemos el mismo razonamiento para una función escalar $f(x):U\subset R^n$ en $X_0\subset U$ y en la dirección de un vector $V\subset R^n$:

$f(x_0+hV)-f(x_0)=\frac{f(x_0+hV)-f(x_0)}{h}h$, haciendo el límite de la igualdad cuando $X\to X_0$ tenemos idéntico razonamiento que el que hicimos para una función de variable real, sobre la dirección del vector V; esto que es cierto sobre un perfil que tiene la dirección del vector V aparentemente debería ser cierto sobre todas las otras direcciones posibles; pero veamos con mucha sorpresa lo que nos dice el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3-25 Dada la función:

$$f(x,y)\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & ; \quad x\neq 0\\ 0 & ; \quad (0,y)\end{cases}$$

Analizar su derivabilidad y continuidad en (0, 0).

Solución: Analicemos primero su derivabilidad para cualquier vector $V=(a,b)\in R^2$:

$$f'((0,0);(a,b))=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f((0,0)+h(a,b))-f(0,0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(ha,hb)-f(0,0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{(ha)(hb)^2}{(ha)^2+(hb)^4}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^3ab^2}{h(h^2a^2+h^4b^4)}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^3ab^2}{h^3(a^2+h^2b^4)}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{ab^2}{a^2+h^2b^4}=\frac{ab^2}{a^2}=\frac{b^2}{a}\therefore existe \quad \forall a\neq 0$$

Veamos ahora que pasa para $V=(0,b)$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f((0,0)+h(0,b))-f(0,0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,hb)-f(0,0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0\therefore existe \quad \forall a=0$$

$\therefore$ $f(x,y)$ es derivable en (0,0) porque existen todas sus derivadas direccionales.

Analicemos ahora la continuidad en (0, 0):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)$$

Sobre el eje "X"; $y = 0$, $\lim_{x \to 0} \frac{0}{x^2} = 0$.

Sobre el eje "Y"; $x = 0$, $\lim_{y \to 0} \frac{0}{y^4} = 0$.

Sobre el eje la recta $y = mx$;

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \lim_{x \to 0} \frac{m^2 x^3}{x^2 + m^4 x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{m^2 x}{1 + m^4 x^2} = 0$$

Sobre la curva $x = y^2$;

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \lim_{x \to 0} \frac{y^4}{y^4 + y^4} = \lim_{x \to 0} \frac{y^4}{2y^4} = \tfrac{1}{2}$$

$\therefore$ $f(x, y)$ no es continua en (0, 0); porque en la dirección $x = y^2$ el límite es diferente.

Del ejemplo anterior podemos concluir que a pesar de que $f(x, y)$ es derivable en (0, 0) sin embargo no es continua, entonces la afirmación anterior no es cierta para funciones de varia variables.

Con esto comprobamos que la derivabilidad no es condición necesaria y suficiente para la continuidad en funciones de varias variables.

$$[Derivabilidad] \;\not\Rightarrow\; [Continuidad]\;; \qquad \text{Para } f : R^n \to R$$

$\therefore$ Debe existir una definición más fuerte que la derivada tal que implique continuidad, y esta es la definición de diferencial.

La definición de derivada (Definición de Newton) difiere de la definición de diferencial (Definición de Leibniz) en su filosofía; Newton definió a la derivada como el límite de una razón de cambio que es la definición que nosotros usamos y conocemos; mientras que Leibniz definió lo mismo pero como "una buena aproximación a una función lineal en la vecindad de un punto". Esta nueva forma presentada por Leibniz en el siglo XVII en la actualidad la conocemos como la manera de definir diferencial. $f(x): R^n \rightarrow R$ es diferenciable en $x_o \Leftrightarrow$ existe una función lineal capaz de sustituir a $f(x)$ en una vecindad de x_o.

La filosofía que define al diferencial tiene dos ideas que son importantes de definir desde el punto de vista matemático y estas son:

"La función lineal a la cual se hace la aproximación"; que es la recta tangente para una función de variable real y el plano tangente para una función escalar de varias variables.

"La buena aproximación" que matemáticamente quiere decir que el límite de la razón entre el error de aproximación y el acercamiento en el dominio debe tender a cero, cuando la norma del vector acercamiento en el dominio tiende a cero; así:

$$\lim_{\|X-X_0\|\to 0} \frac{|error\ de\ aproximación|}{\|X-X_0\|} \rightarrow 0$$

Para el caso de una función de variable real la *figura 3-5* indica, cuando existe y cuando no existe, una buena aproximación en la vecindad de un punto.

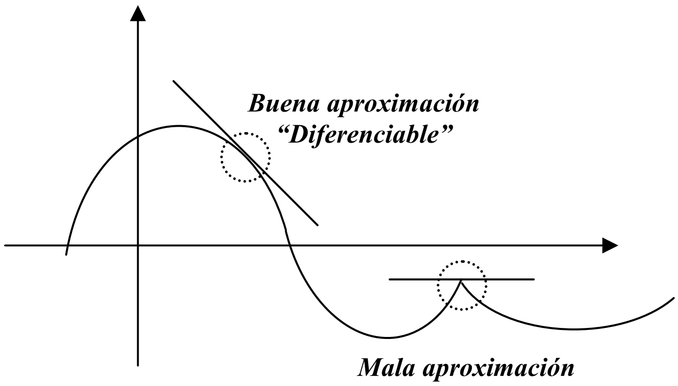


Figura 3-5

Para una función de variable real, la función lineal es la recta tangente:

$y = f(x_o) + m(x - x_o)$, y la pendiente esta dada por: $m = f'(x_o)$

Definición de diferencial para una función de variable real:

Sea $f(x):(a,b)\subset R \rightarrow R$, $x_0 \in (a,b)$; se dice que $f(x)$ es diferenciable en $x_o \in (a,b) \Leftrightarrow y = f(x_o) + f'(x_0)(x - x_o)$ es una buena aproximación de $f(x)$ en una vecindad de x_o , entendiéndose por buena aproximación que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left| f(x) - f(x_o) - f'(x_0)(x - x_o) \right|}{\Delta x} = 0$$

En esta definición $f'(x_o)$ (que es el responsable de la buena aproximación) se lo llama diferencial.

Como se puede apreciar en la definición anterior la derivada y el diferencial para una función de variable real son iguales; tienen la misma jerarquía.

En forma similar generalicemos esta definición para una función de R^2 a R. La función lineal es el plano tangente y tiene dos inclinaciones, una en el sentido del eje "X" y otra en el sentido del eje "Y", que están dadas por las derivadas parciales con respecto a cada variable respectivamente, de tal forma que el plano tangente, en forma similar a la recta tangente lo podemos escribir así:

$$z = f(x_o, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_o) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) \qquad \textbf{8-1}$$

Posteriormente estaremos en capacidad de demostrar, con mejor criterio, que la ecuación 8-1 representa el plano tangente a una superficie $z = f(x, y)$ en una vecindad del punto (x_0, y_0).

Ejemplo 3-26 Encontrar la ecuación del plano tangente al paraboloide $z = x^2 + y^2$ en el punto (1, 1).

Solución: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$, evaluadas en el punto (1, 1)

$\frac{\partial f(1,1)}{\partial x} = 2$ $\frac{\partial f(1,1)}{\partial y} = 2$, $f(1,1) = 2$; con esto:

$$z = 2 + 2(x-1) + 2(y-1)$$
$$z = 2x + 2y - 2$$

Definición de diferencial para una función de R^2 a R:

Sea $f(x,y): D \subset R^2 \to R$, $(x_0, y_0) \in U$; se dice que $f(x,y)$ es diferenciable en:

$$(x_o, y_0) \in U \Leftrightarrow z = f(x_o, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_o) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

es una buena aproximación de $f(x,y)$ en una vecindad de (x_o, y_0), entendiéndose por buena aproximación que:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\left| f(x,y) - f(x_o,y_0) - \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x - x_o) - \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y - y_0) \right|}{\left\| (x,y) - (x_0 - y_0) \right\|} = 0$$

En esta definición $\left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \right)$ (que es el responsable de la buena aproximación) se lo llama diferencial.

Como se puede apreciar en la definición anterior la existencia de las derivadas parciales no garantiza una buena aproximación; pero si existen las derivadas parciales y son continuas, esto si tendría la suficiente jerarquía para asegurar la aproximación.

Generalicemos esta definición para una función escalar, de R^n a R. La función lineal es el plano tangente y tiene "n" inclinaciones, en cada sentido de los ejes "X_i", que están dadas por las derivadas parciales con respecto a cada variable respectivamente, de tal forma que el plano tangente, en forma similar al caso anterior lo podemos escribir así:

$$z = f(X_o) + \frac{\partial f(X_0)}{\partial x_1}(x_1 - x_{o1}) + \frac{\partial f(X_0)}{\partial x_2}(x_2 - x_{02}) + \dots\dots + \frac{\partial f(X_0)}{\partial x_n}(x_n - x_{0n}) \qquad \textbf{8-2}$$

Si definimos los siguientes vectores:

$$\nabla f(X_0) = \left(\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(X_0)}{\partial x_2}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \frac{\partial f(X_0)}{\partial x_n} \right),$$

$$(X - X_0) = (x_1 - x_{01}, x_2 - x_{02}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, x_n - x_{0n})$$

Podemos escribir la ecuación 8-2, del plano tangente, de la forma:

$$z = f(X_0) + \nabla f(X_0) \bullet (X - X_0) \qquad \textbf{8-3}$$

Al vector $\nabla f(X)$, definido anteriormente y en cualquier punto, se lo conoce como el ***GRADIENTE*** del campo escalar, que lo definiremos formalmente en la *sección 3-6*. Con esto podemos presentar la definición general de diferencial para una función escalar.

Definición general de diferencial para una función escalar:

Sea $f(X): U \subset R^n \rightarrow R$, $X_0 \in U$; se dice que $f(X)$ es diferenciable en: $X_o \in U \Leftrightarrow z = f(X_o) + \nabla f(X_0) \bullet (X - X_0)$ es una buena aproximación de $f(X)$ en una vecindad de X_o, entendiéndose por buena aproximación que:

$$\lim_{\|X-X_0\|\to 0} \frac{|f(X) - f(X_o) - \nabla f(X_0) \bullet (X - X_0)|}{\|X - X_0\|} = 0$$

En esta definición $\nabla f(X_0)$ (que es el responsable de la buena aproximación) se lo llama diferencial.

Observaciones:

- La matriz diferencial de una función escalar se llama ***GRADIENTE*** de $f(x)$ y se la representa por $\nabla f(X)$.
- El gradiente es un vector, por lo tanto puede expresarse así:
  $$\nabla f(x_o) = \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{X_o} e_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{X_o} e_2 + \cdots + \left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{X_o} e_n \cdot$$
  O como una matriz renglón así:

$$\nabla f(x_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

- Solo si la función es diferenciable tiene gradiente.
- El gradiente cumple la misma función que la derivada en calculo elemental.
- El gradiente sólo está definido para una función escalar.

Para una función $f : R^3 \to R$

$$\nabla f(x) = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$$

Ejemplo 3-27 Encontrar el gradiente, si existe, de la siguiente función escalar:

Solución: $f(x, y, z) = 3x^2 + 2y - z$ en el punto (1,0,1)

$$\nabla f(x, y, z) = (6x, 2, -1)$$

$$\nabla f\big|_{(1,0,1)} = 6i + 2j - k$$

La definición anterior se la puede generalizar para una función cualquiera en varias variables de la siguiente forma:

Definición general de diferencial:

Sea $F(X) : U \subset R^n \to R^m$, $X_0 \in U$; se dice que $F(X)$ es diferenciable en $X_o \in U \Leftrightarrow Z = F(X_o) + D[F(X_0)][X - X_0]$ es una buena aproximación de $F(X)$ en una vecindad de X_o, entendiéndose por buena aproximación que:

$$\lim_{\|X - X_0\| \to 0} \frac{\|F(X) - F(X_0) - D[F(X_0)][X - X_0]\|}{\|X - X_0\|} = 0$$

En esta definición $D[F(X_0)]$ (que es el responsable de la buena aproximación) se lo llama diferencial.

En esta definición el diferencial es una matriz $m \times n$ y $[X - X_0]$ se maneja como una matriz columna.

La matriz diferencial $[D\,[F(X)]]$ es:

$$[D[F(X)]] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_3} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Y al vector $[X - X_0]$ se lo maneja así:

$$[X - X_0] = \begin{bmatrix} x_1 - x_{01} \\ x_2 - x_{02} \\ . \\ . \\ . \\ \\ x_n - x_{0n} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3-28 Encontrar la matriz diferencial de la función:

$$F(x, y, z) = (x^2 + y^2; xyz; (x + y)z; x^3 y^2 z)$$

Solución: $[D\,[F(X)]]$ es una matriz 4×3

$$\begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 \\ yz & xz & xy \\ z & z & x + y \\ 3x^2y^2z & 2x^3yz & x^3y^2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3-29 Dada la función:

$$F(x,y,z)=\left(x^2y^2z^2,x^2+y^2+z^2,xyz,\ln(x+y+z)\right)$$

Encontrar su matriz diferencial en los puntos $(1,1,1)$; $(0,0,0)$.

Solución:

$$D\left[F(x)\right]=\begin{bmatrix} 2xy^2z^2 & 2x^2yz^2 & 2x^2y^2z \\ 2x & 2y & 2z \\ yz & xz & xy \\ \dfrac{1}{x+y+z} & \dfrac{1}{x+y+z} & \dfrac{1}{x+y+z} \end{bmatrix}$$

$$D\left[F(1,1,1)\right]=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

En el punto $(0,0,0)$ no existe la matriz; por lo tanto esta función no es diferenciable en este punto.

Como observamos en el ejemplo anterior para que $D\left[F(X)\right]$ exista, deben existir todas las derivadas parciales y ser continuas.

Por lo tanto la existencia de todas las derivadas parciales y que sean continuas implica diferenciabilidad.

Teorema 3-8

Si $f:U\subset R^n\rightarrow R$; $x_o\in U$, es diferenciable en x_o entonces existen todas las derivadas direccionales y es contínua en x_o.

⇨ Demostración:

$$\Delta X=\left\|X-X_0\right\|;\ \text{cuando}\ \ X\rightarrow X_0\Rightarrow\Delta X\rightarrow 0$$

$$f(X) - f(X_0) = f(X_0 + \Delta X) - f(X_0) = \Delta f$$

$$\lim_{X \to X_0} \left[f(X) - f(X_0) \right] = \lim_{\Delta X \to 0} \Delta f = \lim_{\|X - X_0\| \to 0} \Delta f$$

Como $f(X)$ es diferenciable en X_0, z es una buena aproximación de $f(X)$ en una vecindad de X_0, ecuación 8-3.

$$z = f(X_0) + \nabla f(X_0) \bullet (X - X_0)$$

$f(X) - z = error\ de\ aproximación = \varepsilon$, entonces:

$$f(X) = f(X_0) + \nabla f(X_0) \bullet (X - X_0) + \varepsilon$$

$$f(X) - f(X_0) = \nabla f(X_0) \bullet (X - X_0) + \varepsilon$$

$$f(X) - f(X_0) = \nabla f(X_0) \bullet (X - X_0) + \varepsilon \frac{\Delta X}{\Delta X}$$

$$\lim_{X \to X_0} (f(X) - f(X_0)) = \lim_{\|X - X_0\| \to 0} (\nabla f(X_0) \bullet (X - X_0)) + \lim_{\Delta X \to 0} (\frac{\varepsilon}{\Delta X}) \lim_{\Delta X \to 0} (\Delta X)$$

$\lim_{\Delta X \to 0} (\frac{\varepsilon}{\Delta X}) = 0$, por cuanto z es una buena aproximación, $\lim_{\Delta X \to 0} (\Delta X) = 0$.

$\lim_{\|X - X_0\| \to 0} (\nabla f(X_0) \bullet (X - X_0)) = 0$, si $\nabla f(X_0)$ existe, lo cual prueba que existen todas las derivadas parciales, entonces:

$\lim_{X \to X_0} (f(X) - f(X_0)) = 0$, que indica que $f(X)$ es continua en X_0.

La *figura 3-6* indica la relación entre diferenciabilidad, derivabilidad y continuidad para una función escalar en R^n, Es necesario hacer hincapié en la importancia que tiene el vector gradiente en el análisis de funciones escalares; por ejemplo, cuando V es un vector unitario la derivada direccional tiene una relación sencilla y muy importante con el vector gradiente, es la proyección escalar del vector gradiente en la dirección del vector V, esta y otras más aplicaciones las estudiaremos con mayor detenimiento en la sección 3-7 y en el capítulo 4 donde haremos un estudio más detallado de todas los beneficios que tiene el vector gradiente, por ahora nos conformamos con solamente haberlo definido y entender la importancia de este como el diferencial de una función escalar.

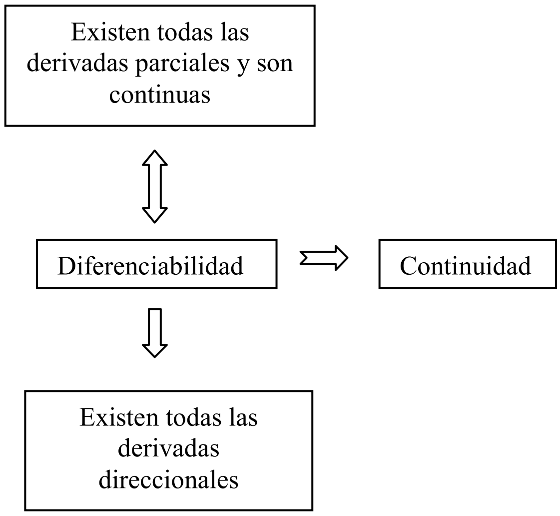


Figura 3-6

3.5 PROPIEDADES DE LA DERIVADA:

En el curso de cálculo elemental se estudió la forma de derivar sumas, productos y cocientes así como la regla de la cadena, que es la forma de derivar composición de funciones. Veamos como generalizar estas técnicas a funciones de varias variables; pero desde el punto de vista del diferencial que es la definición que substituye en jerarquía a la derivada para funciones de varias variables.

Teorema 3-9

Sean $f(x): U \subset R^n \to R$ y $g(x): U \subset R^n \to R$, funciones escalares ambas diferenciables en $x_0 \in U$ y $\alpha \in R$. Entonces:

1. $D_{Xo}\,\alpha[f(x)] = \alpha D_{Xo}\,[f(x)]$.
   (Producto de un escalar por una matriz).
2. $D_{Xo}\,[f(x) \pm g(x)] = D_{Xo}\,[f(x)] \pm D_{Xo}\,[g(x)]$.
   (Suma o diferencia de matrices).

3. $D_{Xo}\left[f(x)g(x)\right]= \quad f(x)D_{Xo}\left[g(x)\right]+g(x)D_{Xo}\left[f(x)\right].$

(Producto de un escalar por una matriz y suma de matrices).

4. $D_{Xo}\left[f(x)/g(x)\right]= \dfrac{g(x)D_{Xo}\left[f(x)\right]-f(x)D_{Xo}\left[g(x)\right]}{g^2(x)} \quad ; \quad g(x)\neq 0\cdot$

(Producto de un escalar por una matriz y resta de matrices).

Probemos 1 y 2 dejando al lector como ejercicio la prueba de 3 y 4.

Debemos ver que: $\lim\limits_{X\to X_0}\dfrac{\left|\alpha f(X)-\alpha f(X_0)-\alpha D\left[f(X_0)\right]\bullet(X-X_0)\right|}{\left\|X-X_0\right\|}=0$,

sacando α de factor común:

$\alpha\lim\limits_{X\to X_0}\dfrac{\left|f(X)-f(X_0)-D\left[f(X_0)\right]\bullet(X-X_0)\right|}{\left\|X-X_0\right\|}=0$, lo cual es cierto por ser $f(X)$ diferenciable en X_0.

Para el segundo numeral:

Debemos ver que:

$$\lim_{X\to X_0}\frac{\left|f(X)\pm g(X)-(f(X_0)\pm g(X_0))-(D\left[f(X_0)\right]\pm D\left[g(X_0)\right])\bullet(X-X_0)\right|}{\left\|X-X_0\right\|}=0$$

Esto se puede reagrupar de la siguiente forma:

$$\lim_{X\to X_0}\frac{\left|(f(X)-f(X_0)-D\left[f(X_0)\right]\bullet(X-X_0))\pm(g(X)-g(X_0)-D\left[g(X_0)\right]\bullet(X-X_0))\right|}{\left\|X-X_0\right\|}=0$$

Que se pueden separar como dos límites:

$$\lim_{X\to X_0}\frac{\left|f(X)-f(X_0)-D\left[f(X_0)\right]\bullet(X-X_0)\right|}{\left\|X-X_0\right\|}\pm\lim_{X\to X_0}\frac{\left|g(X)-g(X_0)-D\left[g(X_0)\right]\bullet(X-X_0)\right|}{\left\|X-X_0\right\|}$$

Que cumplen de ser ambos cero porque tanto $f(X)$ como $g(X)$ son diferenciables en X_0.

Ejemplo 3-30 Dado un campo escalar: $f(x,y)=x^2y\,sen(x^2+y^2)$, encontrar el diferencial del campo aplicando el teorema anterior y en forma directa.

Solución: $\left[Df\right]=x^2y\left[D\left(Sen\left(x^2+y^2\right)\right)\right]+Sen\left(x^2+y^2\right)\left[D\left(x^2y\right)\right]$

$$= x^2 y\left[2xCos(x^2+y^2) \quad 2yCos(x^2+y^2)\right] + Sen\left(x^2+y^2\right)\left[2xy \quad x^2\right]$$

$$= \left[2x^3 yCos(x^2+y^2) \;\; 2x^2y^2Cos(x^2+y^2)\right] +$$
$$\left[2xySen(x^2+y^2) \quad x^2Sen(x^2+y^2)\right]$$

$$= \left[2x^3 yCos(x^2+y^2) + 2xySen(x^2+y^2)\right.$$
$$\left. 2x^2y^2Cos(x^2+y^2) + x^2Sen(x^2+y^2)\right]$$

En forma directa:

$$\left[Df\right] = (2xySen(x^2+y^2) + 2x^3 yCos(x^2+y^2),$$
$$x^2Sen(x^2+y^2) + 2x^2y^2Cos(x^2+y^2))$$

Teorema 3-10: Regla de la Cadena

Sea $g(X): U \subset R^n \to R^p$ y $f(X): V \subset R^p \to R^m$, U y V conjuntos abiertos; si g es diferenciable en $X_0 \in U$ y $f(X)$ es diferenciable en $g(X_0) \in V$ entonces $f \circ g$ es diferenciable en X_0 y su diferencial es:

$$D_{Xo}\left[f \, o \, g\right] = D_{g(x_o)}\left[f\right] D_{x_o}\left[g\right]$$

Ver la demostración de este teorema, usando la fórmula de Taylor, en el próximo capítulo *ejemplo 4-4*.

Ejemplo 3-31 Dadas:

$$F(u,v,w) = (u^2vw, v^2 - w^2, w^3, uvw)$$
$$G(x,y,z) = (x^2y, xy^2z, e^{-xz})$$

Calcular $D\left[F \circ G\right]_{(1,1,0)}$

Solución: $D\left[F \circ G\right] = D\left[F\right] D\left[G\right]$

$$D[F]_{(1,0,1)} = \begin{bmatrix} 2uvw & u^2w & u^2v \\ 0 & 2v & -2w \\ 0 & 0 & 3w^2 \\ vw & uw & uv \end{bmatrix}_{(1,0,1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D[G]_{(1,1,0)} = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ y^2z & 2xyz & xy^2 \\ -ze^{-xz} & 0 & -xe^{-xz} \end{bmatrix}_{(1,1,0)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D[[F \circ G]]_{(1,1,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Existen dos aplicaciones importantes de la Regla de la Cadena que por su utilidad es necesario tratarlas por separado; estas son:

Aplicación # 1:

Sea f un campo escalar diferenciable en R^3; definido $R^3 \to R$ de la forma $f(u, v, w)$; G un campo vectorial diferenciable en: $U \subset R^3; R^3 \to R^3$ definido de la forma: $(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$.

El diferenciable de $f \circ G$ está dado por:

$$D(foG) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(foG)}{\partial x} & \frac{\partial(foG)}{\partial y} & \frac{\partial(foG)}{\partial z} \end{bmatrix}; \text{ donde:}$$

$$\frac{\partial(foG)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dx}$$

$$\frac{\partial(foG)}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dy}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dy}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dy}$$
$$\frac{\partial(foG)}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dz}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dz}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dz}$$

La demostración de este caso se la hace aplicando directamente la regla de la cadena de la siguiente forma:

$$D[foG]=D[f]D[G]$$

$$D[f]=\nabla(f)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w}\end{bmatrix}$$
$$D[G]=\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z}\\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z}\end{bmatrix}$$

Multiplicando estas dos matrices obtenemos cada uno de los términos de la matriz diferencial de la composición que están expuestos anteriormente.

Aplicación # 2:

Sea f un campo escalar diferenciable en R^3; definido $R^3 \to R$ de la forma $f(x,y,z)$; G una trayectoria en R^3 diferenciable en: $(a,b)\subset R; R\to R^3$ definido de la forma: $G(t)=(x(t),y(t),z(t))$.

El diferenciable de $f\circ G$ está dado por:

$$D[foG]=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

La demostración de este caso, también se la hace aplicando directamente la regla de la cadena de la siguiente forma:

$$D[foG] = D[f]D[G]$$

$$D[f] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}; \qquad D[G] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix}$$

Multiplicando estas dos matrices obtenemos la matriz diferencial de la composición que esta expuesta anteriormente.

La matriz diferencial de G, que es una matriz columna, expresada como vector representa el vector velocidad de una partícula de masa que viaja sobre la trayectoria G(t), esta matriz la estudiaremos más detenidamente en el capítulo 5.

Ejemplo 3-32 Dadas:

$$f(u,v,w) = u^2 + v^2 - w$$
$$G(x,y,z) = (x^2 y, y^2, e^{-xyz})$$

Calcular $D[f \circ G]$

Solución: $h(x,y,z) = f \circ G = f(G(x,y,z))$

$D[h] = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix}$, donde:

$$\frac{\partial(h)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dx}$$
$$\frac{\partial(h)}{\partial x} = 2u(2xy) + 0 - (-yze^{-xyz}) = 4x^3y^2 + yze^{-xyz}$$

$$\frac{\partial(h)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dy} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dy} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dy}$$

$$\frac{\partial(h)}{\partial y} = 2u(x^2) + 2v(2y) + (-1)(-xze^{-xyz})$$

$$= 2x^4y + 4y^3 + xze^{-xyz}$$

$$\frac{\partial(h)}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dz} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dz} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dz}$$

$$\frac{\partial(h)}{\partial z} = 0 + 0 + (-1)(-xye^{-xyz}) = xye^{-xyz}$$

Ejemplo 3-33 Dadas:

$$G(t) = (t^2 + t; \quad 2t - 1; \quad t^3)$$

$$f(x, y, z) = 3x^2y + z + y^3$$

Calcular $D[f \circ G]_{t=1}$

Solución:

$$D[f \circ G] = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}$$

$$D[f \circ G] = (6xy)(2t+1) + 3(x^2 + y^2)2 + (1)3t^2$$

$$t = 1 \Rightarrow x = 2, y = 1, z = 1$$

$$D[f \circ G]_{t=1} = 36 + 30 + 3 = 69$$

3.6 GRADIENTE Y DERIVADAS DIRECCIONALES.

En el curso de cálculo elemental el estudiante utilizó la derivada para aplicaciones geométricas en el grafico de funciones de variable real; en el caso de funciones escalares de varias variables, muchas de estas aplicaciones están dadas por el vector gradiente, que como lo enunciamos en la *sección 3-5,* es una herramienta poderosa para las aplicaciones del cálculo en funciones de varias variables.

Formalicemos la definición de gradiente que ya fue mencionada en la sección anterior.

Definición de gradiente de un campo escalar:

Sea $f(x,y,z):U\subset R^3\to R$, un campo escalar en R^3 diferenciable en U, el gradiente de $f(x,y,z)$ es un vector en R^3 dado por:

$$\nabla f(x,y,z)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\end{bmatrix}.$$

Si $f(X):U\subset R^n\to R$, un campo escalar en R^n diferenciable en U, entonces el gradiente es un vector en R^n dado por:

$$\nabla f(X)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots\cdots\cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

No olvidar que el vector gradiente es el diferencial del campo escalar; $\nabla f(X)=D[f(X)]$.

Ejemplo 3-34 Encontrar el vector gradiente del campo escalar: $f(x,y,z)=e^{xyz}+z\cos(x^2+y^2)+x^2+y^2+z^2$, en el punto $(0,0,0)$.

Solución:

$$\nabla f=\begin{bmatrix} yze^{xyz}-2xzsen(x^2+y^2)+2x \\ xze^{xyz}-2yzsen(x^2+y^2)+2y \\ xye^{xyz}+\cos(x^2+y^2)+2z \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(0,0,0)=(0,0,1)$$

Las aplicaciones del vector gradiente se concentran en los tres teoremas siguientes.

Teorema 3-11

Sea $f(X): \quad U \subset R^n \rightarrow R$ diferenciable en $X_o \in U$; $\hat{V} \in R^n$ un vector unitario que representa una dirección cualquiera en R^n. la derivada direccional de f en X_o y en la dirección de $\hat{V}$ esta dada por :

$$f'(X_o;\hat{V}) \quad = \quad \nabla f(X_o) \bullet \hat{V}$$

De acuerdo a este teorema podemos observar que la derivada direccional es la proyección escalar del gradiente en la dirección de V.

⇨ Demostración:

Sea $\sigma(t) = X_0 + t\hat{V}$; es la parametrización de una recta en R^3.

$g(t) = f(X_0 + t\hat{V})$; $g(t) = f(\sigma(t)) = f \circ \sigma$,

de la segunda aplicación de la regla de la cadena:

$g'(t) = \nabla f(X_0) \bullet \sigma'(t) = \nabla f(X_0) \bullet \hat{V}$; del *teorema 3-5*

$g'(t) = f'(X_0 + t\hat{V};\hat{V})$; $g'(0) = f'(X_0;\hat{V})$: entonces :

$f'(X_0;\hat{V}) = \nabla f(X_0) \bullet \hat{V}$, lo que demuestra el teorema.

Ejemplo 3-35 Sea: $f(x,y,z) = x^2 + xyz + z^2$, encontrar la derivada direccional de f en la dirección 2i + j – k y en el punto (1, 2, 1).

Solución: $\nabla f = (2x + yz, xz, xy + 2z)$; $\nabla f(1,2,1) = (4,1,4)$

$$f'((1,2,1);(2,1,-1)) = (4,1,4) \bullet (2,1,-1)\tfrac{1}{\sqrt{6}} = (8+1-4)\tfrac{1}{\sqrt{6}} = \tfrac{5}{\sqrt{6}}$$
$$= \frac{5\sqrt{6}}{6}$$

Teorema 3-12

> Sea $f(X):\ U \subset R^n \to R$ diferenciable en $X_o \in U$; el gradiente apunta al mayor crecimiento de f.

Hay que tomar en cuenta que este teorema se refiere al gráfico de la función escalar.

⇨ Demostración:

Sea $\hat{V} \in R^n$ un vector cualquiera, del *teorema 3-11*, la derivada direccional de f en la dirección de $\hat{V}$ esta dada por:

$$f'(X_0;\hat{V}) = \nabla f(X_0) \bullet \hat{V}$$
$$= \|\nabla f(X_0)\| \|\hat{V}\| Cos\theta$$
$$= \|\nabla f(X_0)\| Cos\theta$$

Para que $f'(X_0;\hat{V})$ sea máxima, $\cos\theta = 1$

Para que $\cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 0°$

Si $\theta = 0° \Rightarrow \nabla f(X_o) \parallel \hat{V}$, lo que demuestra el teorema.

Ejemplo 3-36 Encontrar la máxima derivada direccional de la función escalar $f(x,y) = 2x^2 + 3xy$ en el punto (1, 2).

Solución: $f'_{\max}((1,2);\hat{\nabla} f(1,2)) = \nabla f(1,2) \bullet \hat{\nabla} f(1,2)$

$$\nabla f(x,y) = (4x+3y,3x)\ ;\ \ \nabla f(1,2) = (10,3)$$

$$\hat{\nabla} f(1,2) = \tfrac{1}{\sqrt{109}}(10,3)$$

$$f'_{\max}((1,2);\hat{\nabla} f(1,2)) = (10,3)\bullet \tfrac{1}{\sqrt{109}}(10,3) = \sqrt{109}$$

Teorema 3-13

> Sea $f(X):\ U \subset R^n \to R$, $f(X) = k$ una superficie de nivel S, diferenciable en X_o; el gradiente es perpendicular a la superficie de nivel S.

⇨ Demostración:

Sea $\sigma(t)$, la parametrización de una trayectoria cualquiera sobre S, y $\sigma(0) = (x_0, y_0, z_0)$, V un vector tangente a $\sigma(t)$ de tal forma que en t = 0 $V = \sigma'(0)$.

Como: $f(X) = k$, $f'((x_0, y_0, z_0);V) = 0$; del *teorema 3-11*:

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0)\bullet \sigma'(0) = 0 \Rightarrow \nabla f(x_0, y_0, z_0) \perp \sigma'(0)$$

Como $V = \sigma'(0)$ es tangente a S $\Rightarrow \nabla f \perp S$, lo que demuestra el teorema.

Aprovechando este teorema podemos decir que el vector gradiente de una superficie S es el vector normal al plano tangente a la superficie en cualquier punto.

Ejemplo 3-37 Encontrar la ecuación del plano tangente a una superficie $S : z = f(x,y)$, en el punto (x_0, y_0, z_0).

Solución: Primero escribamos la superficie "S" como un conjunto de nivel: $S : z - f(x,y) = 0$ y encontremos el gradiente de "S"

$$\nabla S(x_0, y_0, z_0) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)_{(x_0, y_0)}$$

$V \in \pi$, vector posición entre dos puntos del plano π

$$V = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)_{(x_0, y_0)} \bullet (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0, \Rightarrow$$

$$-\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} (x - x_0) - \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} (y - y_0) + (z - z_0) = 0$$

como $z_0 = f(x_0, y_0)$, entonces:

$$z = f(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} (x - x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} (y - y_0)$$

Definición de plano tangente a una superficie S en R^3:

Sea $z = f(x, y)$, una superficie S en R^3 diferenciable en (x_0, y_0, z_0), la ecuación del plano tangente a la superficie S en el punto (x_0, y_0, z_0) esta dada por:

$$z = f(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} (x - x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} (y - y_0)$$

La *figura 3-7* representa el plano tangente π a una superficie $S : z = f(x, y)$ en el punto $P_0 : (x_0, y_0, z_0)$

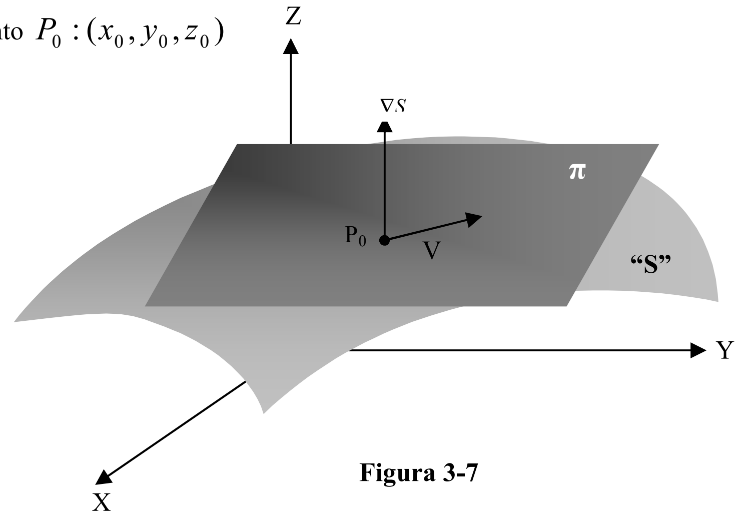


Figura 3-7

Ejemplo 3-38 Encontrar la ecuación del plano tangente a la superficie, $3xyz + x^3y^2 + z^3 = 4$ en el punto $(1,2,1)$.

Solución:

$$\nabla S = \left(3yz + 3x^2y^2, \quad 3xz + 2x^3y, \quad 3xy + 3z^2\right)$$
$$\nabla S\big|_{(1,2,1)} = (18,7,9)$$
$$(18,7,9) \bullet (x-1,\, y-2,\, z-1) = 0$$
$$18(x-1) + 7(y-2) + 9(z-1) = 0$$
$$18x - 18 + 7y - 14 + 9z - 9 = 0$$

$18x + 7y + 9z = 41$, es la ecuación del plano tangente. ⮟

Los tres teoremas anteriores resumen las aplicaciones del vector gradiente en los siguientes términos:

GRADIENTE:

1. Para encontrar la derivada direccional.
   $f'(x_0, V) = \langle \nabla f(x_0) \bullet V \rangle$
2. Apunta en la dirección de mayor crecimiento de la función.
3. Es perpendicular a las superficies de nivel.

Supongamos que $T = f(x, y)$ representa la temperatura de las partículas de una placa metálica sometida a una fuente de calor en el punto P como lo muestra la *figura 3-8*, los círculos concéntricos al punto P $T = f(x,y) = k$ se llaman isotermas y son curvas de nivel que corresponden a las partículas de la

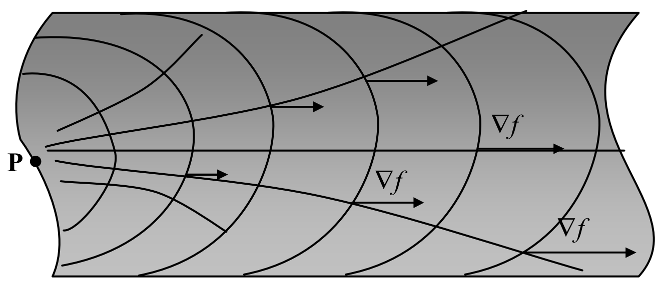


Figura 3-8

placa que están a igual temperatura, las líneas ortogonales a las isotermas y que siguen el recorrido del flujo calorífico se llaman líneas de flujo.

En el gráfico podemos ver como el vector gradiente en cada punto es perpendicular a las curvas de nivel (isotermas) y apunta al mayor crecimiento de la función, tangente a las líneas de flujo.

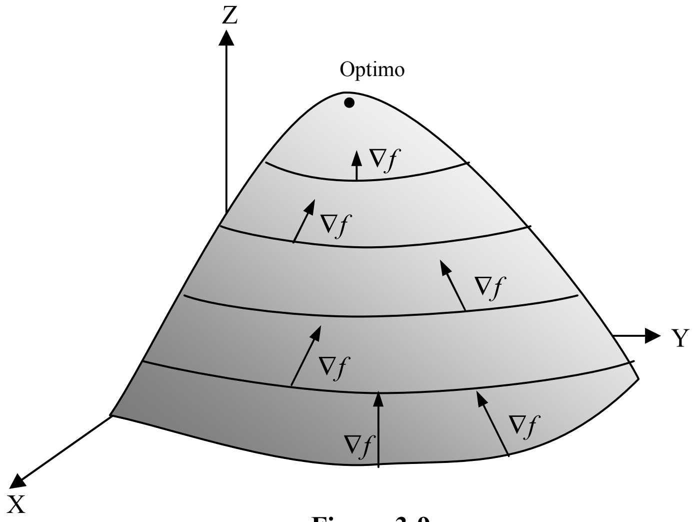


Figura 3-9

De igual manera si $z = f(x, y)$ es una función escalar en R^2 que representa la superficie de una montaña, como se muestra en la *figura 3-9*, z representa la cota del punto (x, y); las curvas de nivel $f(x, y) = k$ representan a los puntos de igual cota sobre la montaña, la figura permite ver como el vector gradiente tiene la dirección de mayor crecimiento (apunta a la cima de la montaña) y es perpendicular a las curvas de nivel.

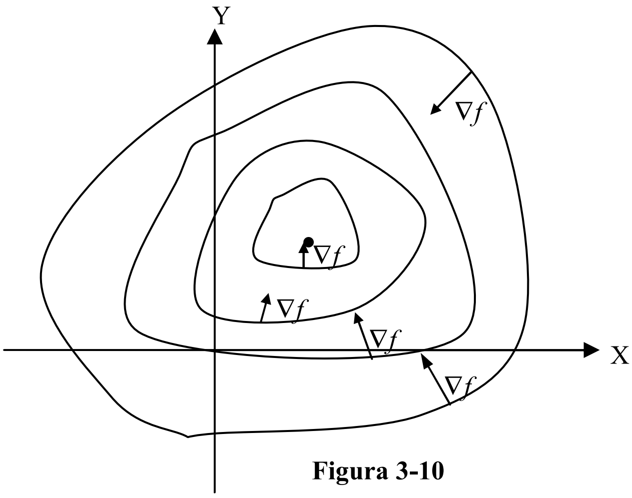


Figura 3-10

La *figura 3-10* es la proyección de las curvas de nivel de la función de la *figura 3-9* y también permite apreciar las características del vector gradiente de apuntar al mayor crecimiento de la función y de ser perpendicular a las curvas de nivel. Tanto los ejemplos de la *figura 3-8*, como los de la *figura 3-9* y *figura 3-10* se refieren a una función escalar de

$R^2 \to R$ en la cual su grafico esta en R[3] y los conjuntos de nivel son curvas de nivel en R[2]; podemos hacer similar razonamiento para un función escalar de $R^3 \to R$ solo que en este caso para sus superficies de nivel que es lo que podemos manejar físicamente.

Supongamos que $I = f(x, y, z)$ representa la intensidad de señal en el punto (x, y, z), de una estación de radio o televisión ubicada en un punto P, las superficies de nivel son esferas concéntricas de igual intensidad de onda, aquí también podemos observar el efecto del vector gradiente de apuntar al mayor crecimiento de la función y ser perpendicular a las superficies de nivel. Este efecto lo podemos apreciar gráficamente en la *figura 3-11.*

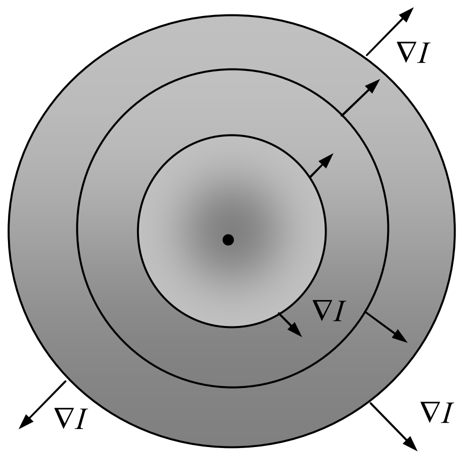


Figura 3-11

3.7 APROXIMACIONES Y DERIVACION IMPLICITA.

En la sección anterior definimos la ecuación del plano tangente a una superficie en un punto dado, en esta sección vamos a utilizar este plano como la aproximación de la superficie en una vecindad del punto. En el siguiente capítulo hablaremos más a fondo de este tipo de aproximaciones cuando definamos la fórmula de Taylor para una función escalar, también definimos en la *sección 3-4* la diferenciabilidad como una buena aproximación en la vecindad de un punto, usaremos esta definición para ver las aplicaciones que podemos dar a las aproximaciones en funciones de varias variables.

Sea $z = f(x, y)$ una función escalar de dos variables cuyas derivadas parciales existen y son continuas en una vecindad de (x_0, y_0), entonces la función es diferenciable y continua en (x_0, y_0) y un incremento de la función esta dada por: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$

En la *figura 3-12* podemos apreciar el incremento de la función medido en el plano tangente que es el que usamos para expresar esta aproximación. Como lo indica la figura y usando la ecuación del plano tangente, ya que al ser $f(x, y)$ diferenciable, este es una buena aproximación de la superficie en una vecindad de (x_0, y_0) podemos calcular el valor de la función incrementada utilizando la ecuación de este plano:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y \qquad \textbf{8-4}$$

Si la función escalar es de tres variables y existen sus derivadas parciales y son continuas en (x_0, y_0, z_0) el incremento de la función definido anteriormente para dos variables queda expresado de la siguiente manera:

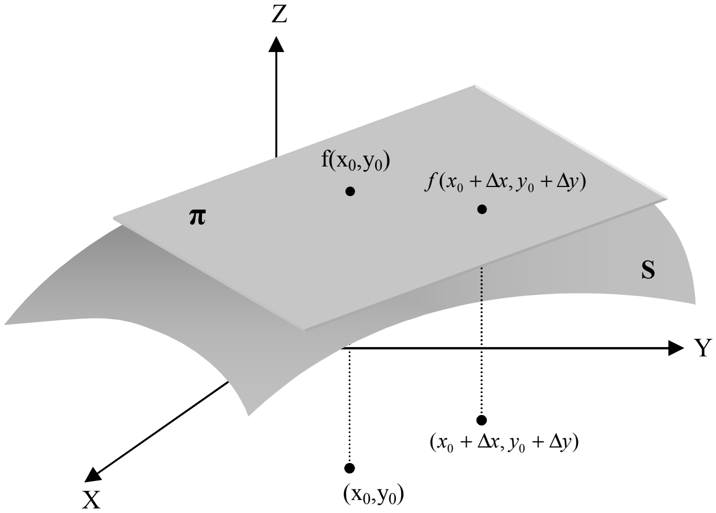


Figura 3-12

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) \\ &\approx f'_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y + f'_z(x_0, y_0, z_0)\Delta z \end{aligned}$$

Ejemplo 3-39 Una caja abierta de 4mt. de largo por 2mt. de ancho y por 1mt. de alto esta construida por un material que cuesta \$ 10 el mt^2 lateral y \$20 el mt^2 de fondo. Calcular el costo del cajón y usar incrementos para estimar la variación del costo cuando el largo aumenta en 2cmt. el ancho disminuya en 1cmt. y la altura aumenta en 3cmt.

Solución: Sea x: largo, y: ancho, z: el alto.

$$C = 10(2xz + 2yz) + 20xy = 20xz + 20yz + 20xy$$

$$C = \$280$$

$$C'_x = 20z + 20y; \quad C'_x\,(4,2,1) = 60$$
$$C'_y = 20z + 20x; \quad C'_y\,(4,2,1) = 100$$
$$C'_z = 20x + 20y; \quad C'_z\,(4,2,1) = 120$$

$$\Delta C = C'_x\,(4,2,1)\Delta x + C'_y\,(4,2,1)\Delta y + C'_z\,(4,2,1)\Delta z$$
$$\Delta C = (60)(0.02) + (100)(-0.01) + (120)(0.03)$$

$\Delta C = 3.8$; el costo aumentará en aproximadamente \$3.8.

Ejemplo 3-40 Se mide el radio y la altura de un cilindro circular recto con errores aproximados de mas menos 3% y 2%, respectivamente. Usando aproximaciones estimar el porcentaje de error que se puede cometer al calcular su volumen.

Solución:

$$\frac{\Delta r}{r} \approx \pm 0.03; \quad \frac{\Delta h}{h} \approx \pm 0.02$$

$$V = \pi r^2 h$$

$$\Delta V = V'_r\,\Delta r + V'_h\,\Delta h$$

$$\Delta V = 2\pi rh(\pm 0.03r) + \pi r^2(\pm 0.02h)$$

$$\Delta V = \pm 0.06\pi r^2\,h + (\pm 0.02\,\pi r^2 h)$$

$$\Delta V = \pm 0.08V$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \pm 0.08\,.$$

El porcentaje de error que se puede cometer en el volumen es de aproximadamente mas menos 8%.

En el caso de una función de una variable $y = f(x)$, escribimos dy por la regla de correspondencia $dy = f'(x)dx$, esto también lo podemos ampliar para una función escalar de más de una variable.

Definición de diferencial total de una función escalar:

Sea $z = f(x, y) : U \subset R^2 \to R$, un campo escalar en R^2 Δx ; Δy incrementos de las variables x, y, respectivamente, si escribimos $dx = \Delta x$; $dy = \Delta y$ como los diferenciales de las variables x, y, respectivamente; entonces ***la diferencial total*** de $f(x, y)$ es:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$$

De igual forma si la función es de tres variables:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = f'_x(x, y, z)dx + f'_y(x, y, z)dy + f'_z(x, y, z)dz$$

La diferencial total es aplicable para aproximar el incremento Δf cuando este no es fácilmente calculable; ejemplos:

Ejemplo 3-41 En cierta fábrica la producción diaria está dada por: $Q = 60K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}}$, donde K representa el capital invertido en miles de dólares y L representa la fuerza laboral en horas hombre. En la actualidad se han invertido $900.000 y se emplean 1.000 horas hombre cada día, calcular el cambio de producción, si la inversión de capital se aumenta en $1.000 y la fuerza laboral también aumenta en 2 horas hombre.

Solución:

$$K = 900; \quad L = 1.000$$
$$dK = \Delta K = 1; \quad dL = \Delta L = 2$$

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial K}dK + \frac{\partial Q}{\partial L}dL$$
$$dQ = (30K^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}})dK + (20K^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{2}{3}})dL$$
$$dQ = 10(1) + 6(2) = 22 \ \ unidades \ ;$$

Quiere decir que la producción aumentará en 22 unidades aproximadamente.

La diferencial total también se puede utilizar para calcular rapidez de variación o cambio en funciones de más de una variable, de la siguiente forma:

Supongamos que $z = f(x, y)$ y que tanto x como y son funciones de t; aplicando la regla de la cadena, que vimos en *la sección 3-5*, podemos escribir:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Donde $\frac{dz}{dt}$ es la rapidez de variación de la variable z y $\frac{dx}{dt}$; $\frac{dy}{dt}$ son las rapideces de variación de las variables x, y, respectivamente.

De igual forma si la función es de tres variables $u = f(x, y, z)$:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Donde $\frac{du}{dt}$ es la rapidez de variación de la variable u y $\frac{dx}{dt}$; $\frac{dy}{dt}$; $\frac{dz}{dt}$ son las rapideces de variación de las variables x, y, z, respectivamente.

Ejemplo 3-42 Una farmacia vende dos tipos de multivitaminas, la marca A y la marca B. La estadística de ventas indica que si la marca A se vende a x dólares el frasco y la marca B se vende a y dólares el frasco, la demanda de la marca A será:

$$Q(x, y) = 300 - 20x^2 + 30y \quad \textit{frascos} \quad \textit{por} \quad \textit{mes}.$$

Se estima que dentro de t meses el precio del frasco de la marca A será :

$$x = 2 + 0.05t \qquad \textit{dólares} \quad \textit{por} \quad \textit{frasco}.$$

El precio del frasco de la marca B será:

$$y = 2 + 0.1\sqrt{t} \quad dolares \quad por \quad frasco.$$

¿A que razón cambiará la demanda de los frascos de la marca A con respecto al tiempo dentro, de 5 meses?.

Solución:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = 0.05$$

$\frac{dy}{dt} = 0.05t^{-\frac{1}{2}}$; dentro de 5 meses, $\frac{dy}{dt} = \frac{0.05}{\sqrt{5}}$.

$\frac{\partial Q}{\partial x} = -40x$; dentro de 5 meses, $x = 2.25$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = -90$.

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = 30.$$

$$\frac{dQ}{dt} = (-90)(0.05) + (30)\left(\frac{0.05}{\sqrt{5}}\right) = -3.83.$$

Lo que quiere decir que la demanda de frascos de la marca A disminuirá aproximadamente en 3.83 frascos por mes dentro de 5 meses.

Derivación implícita:

En el curso de cálculo elemental usamos esta técnica cuando no era posible expresar la variable dependiente en función de la variable independiente; esto es, expresar $y = f(x)$; por ejemplo:

$$x^2y^3 + \ln(xy) - x^3y^2 + e^{x^2y} = 4$$

En este ejercicio es difícil poder obtener y como una función de x para poder aplicar las reglas de derivación conocidas. En este caso usamos la técnica de derivación implícita considerando:

$\dfrac{dx}{dx}=1$, $\dfrac{dy}{dx}=y'$, y aplicando las reglas comunes de derivación.

$$2xy^3+3x^2y^2y'+\frac{1}{xy}(y+xy')-3x^2y^2-2x^3yy'+(2xy+x^2y')e^{x^2y}=0.$$

Despejando y' obtenemos:

$$y'=\frac{3x^2y^2-2xy^3-\frac{1}{x}-2xye^{x^2y}}{3x^2y^2+\frac{1}{y}-2x^3y+x^2e^{x^2y}}.$$

De igual manera podemos derivar implícitamente considerando $f(x,y)=0$ y aplicando la regla de la cadena a esta última expresión:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{dx}{dx}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}=0$; de aquí:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} \qquad \textbf{8-5}$$

Expresión que sirve para derivar implícitamente cualquier función de variable real como la anterior.

Para el ejercicio anterior:

$$f(x,y)=x^2y^3+\ln(xy)-x^3y^2+e^{x^2y}-4=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy^3+\frac{1}{xy}y-3x^2y^2+2xye^{x^2y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=3x^2y^2+\frac{1}{xy}x-2x^2y+x^2e^{x^2y}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2xy^3-\frac{1}{x}+3x^2y^2-2xye^{x^2y}}{3x^2y^2+\frac{1}{y}-2x^2y+x^2e^{x^2y}}$$, que es el mismo resultado anterior.

De igual forma si tenemos $f(x,y,z)=0$, que representa una función implícita de $R^2 \to R$, y aplicando la regla de la cadena con respecto a x, obtenemos:

$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0$, y sabiendo que:

$\frac{\partial x}{\partial x}=1; \quad \frac{\partial y}{\partial x}=0$, obtenemos:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\partial f/\partial x}{\partial f/\partial z} \qquad \textbf{8-6}$$

De igual forma aplicando la regla de la cadena con respecto a y:

$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0$, y sabiendo que:

$\frac{\partial y}{\partial y}=1; \quad \frac{\partial x}{\partial y}=0$, obtenemos:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-\partial f/\partial y}{\partial f/\partial z} \qquad \textbf{8-7}$$

Fórmulas que sirven para encontrar las derivadas parciales en forma implícita de una función escalar : $R^2 \to R$.

Ejemplo 3-43 Encontrar las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$; $\frac{\partial z}{\partial y}$ de la función:

$$Sen(x^2 + y^2 + z^2) + x^2y^3z^2 - (x^2 + y^2)^2 = 3$$

Solución:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xCos(x^2 + y^2 + z^2) + 2xy^3z^2 - 4x(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2yCos(x^2 + y^2 + z^2) + 3x^2y^2z^2 - 4y(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2zCos(x^2 + y^2 + z^2) + 2x^2y^3z$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{4x(x^2 + y^2) - 2xCos(x^2 + y^2 + z^2) - 2xy^3z^2}{2zCos(x^2 + y^2 + z^2) + 2x^2y^3z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4y(x^2 + y^2) - 2yCos(x^2 + y^2 + z^2) - 3x^2y^2z^2}{2zCos(x^2 + y^2 + z^2) + 2x^2y^3z}.$$

$f(x, y, z, u) = 0$ es la forma implícita de una función escalar de $R^3 \to R$, con un análisis similar al anterior podemos obtener sus derivadas parciales:

$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, sabiendo que:

$\frac{\partial x}{\partial x} = 1;\quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = 0$; obtenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-\partial f/\partial x}{\partial f/\partial u} \qquad \textbf{8-8}$$

Con respecto a y:

$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=0$, sabiendo que:

$\frac{\partial y}{\partial y}=1; \quad \frac{\partial x}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}=0$; obtenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-\partial f/\partial y}{\partial f/\partial u} \tag{8-9}$$

Con respecto a z:

$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}=0$, sabiendo que:

$\frac{\partial z}{\partial z}=1; \quad \frac{\partial x}{\partial z}=\frac{\partial y}{\partial z}=0$; obtenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{-\partial f/\partial z}{\partial f/\partial u} \tag{8-10}$$

Ejemplo 3-44 Encontrar las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$; $\frac{\partial z}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial z}$; de la función:

$$e^{xyzu}+tng(x^2+y^2+u^2)-\ln(xy)=x^2yz^3u$$

Solución: $f(x,y,z,u)=e^{xyzu}+tng(x^2+y^2+u^2)-\ln(xy)-x^2yz^3u=0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yzue^{xyzu} + 2x\sec^2(x^2+y^2+u^2) - \frac{1}{xy}y - 2xyz^3u$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xzue^{xyzu} + 2y\sec^2(x^2+y^2+u^2) - \frac{1}{xy}x - x^2z^3u$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xyue^{xyzu} - 3x^2yz^2u$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = xyze^{xyzu} + 2u\sec^2(x^2+y^2+u^2) - x^2yz^3$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-yzue^{xyzu} - 2x\sec^2(x^2+y^2+u^2) + \frac{1}{x} + 2xyz^3u}{xyze^{xyzu} + 2u\sec^2(x^2+y^2+u^2) - x^2yz^3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-xzue^{xyzu} - 2y\sec^2(x^2+y^2+u^2) + \frac{1}{y} + x^2z^3u}{xyze^{xyzu} + 2u\sec^2(x^2+y^2+u^2) - x^2yz^3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-xyue^{xyzu} + 3x^2yz^2u}{xyze^{xyzu} + 2u\sec^2(x^2+y^2+u^2) - x^2yz^3}$$

EJERCICIOS

1. Calcular:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x+y}{2x^2-y^2}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \left[\frac{x^2-1}{x-1} + \frac{y-1}{y^2-1}\right]$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(senx)(sen3y)}{2xy}$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^4+y^2}$

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2}$

2. Sea la función:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^5}{2x^4+3y^{10}} & ;si(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;si(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

¿Es la función f continua en R^2? Justifique su respuesta.

3. Dadas las siguientes funciones, de ser posible, definirlas de una manera adecuada, en el punto dado, para que sean continuas:

a) $\dfrac{sen(x+y)}{x+y}$; *en* (0,0)

b) $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$; *en* (0,0)

4. Calcule los limite indicados

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^3+y^3}$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x-y^2}{2x^2+y}$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(e^x-1)(e^{2y}-1)}{xy}$

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\cos x-1-\frac{x^2}{2}}{x^4+y^4}$

5. Estudie la continuidad de la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}; & x^2+y^2\neq 0\\ 0\quad ; & x^2+y^2=0\end{cases}$$

6. Sea $f(x,y)=\left\{\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right.$

a) Muestre que:

$$\lim_{x\to0}\left[\lim_{y\to0}f(x,y)\right]=\lim_{y\to0}\left[\lim_{x\to0}f(x,y)\right]$$

b) Se puede decir que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

7. Sea $f(x,y) = 2xye^{-x^2y}$, mostrar que:

$$\lim_{y\to\infty}\int_0^1 f(x,y)dx \neq \int_0^1 \lim_{y\to\infty} f(x,y)dx$$

8. Sea $f(x,y) = \dfrac{x^6y^6}{x^4+ay}$ ¿Para que valores de ***a*** existe el $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

9. Considere las funciones $f : R^2 \to R$ y tal que:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(Senx)(Sen3y)}{2xy}; & x^2+y^2 \neq 0 \\ K; & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

Determinar, si es posible, el valor de K de tal forma que f sea continua en todo su dominio.

10. Determine si la siguiente función es continua o no en cero.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^4}{x^4+y^4} & Si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & Si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

11. Califique la siguiente proposición como verdadera V o falsa F. (justifique su respuesta)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{x^2y^2}{x^4+x^2y^2+y^4}\right] = 0$$

12. Analizar la continuidad de la función.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$$

13. Analice la continuidad de la función

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)sen\left(\frac{1}{x}\right)sen\left(\frac{1}{y}\right); & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 \quad ; & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

14. Dada la función

$$f(x,y)=\left\{\frac{2xy^2}{x^2+y^2};(x,y)\neq(0,0);\quad f(x,y)=0;(x,y)=(0,0)\right.$$

a) Analizar su derivabilidad en el punto (0,0).
b) Analizar su continuidad en el punto(0,0).
c) Indicar si es o no diferenciable en este punto.

15. Dada la función $f(x,y)=\frac{senx}{y}; y\neq 0, f(x,y)=0; y=0$

a) Demostrar si es o no continua en (0,0).
b) Demostrar si es o no derivable en (0,0).
c) Que se puede decir de su diferenciabilidad en (0,0).

16. Encontrar $\frac{\partial z}{\partial x}$; $\frac{\partial z}{\partial y}$, para:

a) $z=Cos(xy)-\ln(3x^2y)$
b) $z=4x(2x+3y)-xy+x^2y^2$

17. Encuentre todas las derivadas parciales de las siguientes funciones:

a) $f(x,y)=(2x+3y)^4-x^y+y^x$
b) $f(x,y,z)=sen(x^2+y^2-2z)+e^{\sqrt{x^2+y^2}}-2\ln(y+z^2)$
c) $f(x,y,z)=x^y+y^x+z^{xy}$

18. Dada la función:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}; & (x,y)\neq(0,0)\\ 0; & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Usar la definición de derivada parcial para hallar $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0); \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

19. Calcular las derivadas parciales de $f(x,y)$, considerando que $g(t)$ es continua.

a) $f(x,y) = \int_{x}^{xy} g(t)dt$

c) $f(x,y) = \int_{x^y}^{y^x} g(t)dt$

b) $f(x,y) = \int_{x}^{xy} sen(t)dt$

20. Demuestre que la función dada satisface a la expresión dada:

a) $z = f(x,y) = x^2\phi(x^2y)$ $\qquad x\frac{\partial f}{\partial x} - 2y\frac{\partial f}{\partial y} = 2z$

b) $f(x,y) = x^2\phi(3x + y^2)$ $\qquad 2xy\frac{\partial f}{\partial x} - 3x\frac{\partial f}{\partial y} = 4yz$

21. Dada $w(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2x$ verificar

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = (x+y+z)^2 .$$

22. Dado $z = u(x,y)e^{ax+by}; \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$ Hallar los valores de las constantes a y b tales que: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0$

23. Demostrar que $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$; si: $z = x^y$.

24. Calcular, si existe la derivada mixta

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

25. Si $z = f(x, ay) + g(x, -ay)$, demostrar que: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

26. Dada la siguiente función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2 - xy^3}{x^2 + y^2}; & Si(x,y) \neq (0,0) \\ 0; & Si(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Hallar: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = ??$; y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = ??$

27. Dada $f(x,y)$ determine si esta satisface a la ecuación dada:

$$f(x,y) = e^x(\cos y + seny)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

28. Si $W = 2x^2y^2z^3 + 2\ln(x^2y^2) + sen(z^2y^2x)$ hallar todas las derivadas parciales de segundo orden

29. Dada la siguiente función $z = sen(x^2 + y^2)$ determine si satisface la ecuación

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

30. Encontrar la derivada direccional de la función: $f(x,y,z) = e^x\cos(yz)$ en el punto $(0,0,0)$ y en la dirección $2i + j - 2k$.

31. En qué dirección la derivada dirección de $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ en $(1,1)$ es igual a cero?

32. Hallar la derivada direccional de la función $f(x,y,z) = xy + yz + zx$ en el punto $(2,1,3)$ en la dirección que va desde éste al punto $(5,5,15)$.

33. Para el campo escalar $f(x, y, z) = xy^2 e^z$ calcular la derivada direccional en el punto $(1,3,0)$ en la dirección de $(1,3,-1)$.

34. Si el Potencial Eléctrico en cualquier punto en R^3 se define:

$$V(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Determinar:
La razón de cambio de V en (2,2,-1) en la dirección del vector 2i- 3j+ 6k.

35. Dada la función $f(x,y,z) = x^2 - yz + z^2 x$ y los puntos P(1,-4,3); Q(2,-1,8), encontrar la derivada direccional de f en la dirección de P a Q en el punto P.

36. Dada: $f(x) : U \subset R^n \to R$; Si $\underset{x \to x_0}{Lim} f(x) = f(x_0)$; entonces existen todas las derivadas direccionales de f en x_0. Verdadero o Falso justifique su respuesta.

37. Dada: $f(x,y) = x^2 e^{-2y}, P(2,0); Q(-3,1)$, encontrar, la derivada direccional de f en P y en la dirección PQ.

38. La derivada direccional de $f(x,y,z) = z^2 x + y^3$ en (1,1,2) en la dirección $(\frac{1}{\sqrt{5}})i + (\frac{2}{\sqrt{5}})j$, es $2\sqrt{5}$. Justifique su respuesta.

39. Encontrar la ecuación del plano tangente a la superficie $f(x,y,z) = 3x^2 y^2 z^2 + xyz^3 + 3z^2 + x^2$ en el punto (3,0,-l) y encontrar la ecuación de la recta tangente a esta superficie en el mismo punto y en la dirección del vector(2,2,-5).

40. Dada la función $f(x,y,z) = x^2 e^{-yz}$, calcular la razón de cambio de f en la dirección $\frac{1}{3}(1,1,1)$.

41. Dada la función:

$$f(x,y,z) = x^2 y^2 + 2xy + y^3 z^3$$

a) Encontrar un vector perpendicular a las superficies de nivel.
b) Encontrar un vector que apunte al mayor crecimiento de f

c) Calcular la ecuación del plano tangente a la superficie de nivel cuando f(x, y, z) = 4 en el punto P(l,0,-l).
d) Encontrar la derivada direccional máxima en el punto P(l,0,-l).

42. Hallar un par de ecuaciones cartesianas para la recta que es tangente a las dos superficies: $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4; z = e^{x-y}$ en el punto (1,1,1).

43. Un insecto se halla en un medio tóxico, el nivel de toxicidad esta dado por $T(x, y) = 2x^2 - 4y^2$. El insecto está en (-1, 2). ¿En que dirección deberá moverse para disminuir lo más rápido la toxicidad?

44. Dada la función $f(x, y) = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$
a) En que dirección crece más rápidamente en el punto (1,0)
b) Encontrar la ecuación del plano tangente a la superficie en este punto.

45. Encontrar el plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^2$ en el punto $(1,-2,5)$ y representarlo gráficamente.

46. Encontrar la dirección en la cual la función $f(x, y) = x^2 + xy$ crece más rápidamente en el punto $(-1,1)$.

47. Calcular el plano tangente a la superficie: $x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 10$ en el punto $(0, \sqrt{2}, 1)$.

48. Hallar los puntos de la superficie $x^2 + 4x + y^2 + z^2 - 2z = 11$ en los cuales su plano tangente es horizontal.

49. Determine el plano tangente y la recta normal a la superficie $x^2 + 4y^2 - 2z^2 = 1$ en el punto del primer octante donde el plano tangente es paralelo al plano $x - y - z = 1$.

50. Encuentre un punto de la superficie $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 12$ donde el plano tangente es perpendicular a la recta: $\ell = \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + 8t \\ z = 2 - 6t \end{cases}$

51. Dada la superficie $z = xy$ y las rectas: $z = y_0 x$; $y = y_0$, $z = x_0 y$; $x = x_0$. Determinar si el plano tangente a la superficie contiene o no a estas rectas en el punto(x_0, y_0, z_0).

52. Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que es tangente a las superficies: $x^2 + y^2 + z^2 = 6$; $z = y + x$ en el punto $(1,1,2)$.

53. La elevación de una montaña sobre el nivel del mar en (x, y) es: $3000 \quad e^{-(x^2 + 2y^2)/100}$ mt. El semieje positivo de las *"x"* apunta hacia el este y el de las *"y"* hacia el norte. Un alpinista que esta ubicado exactamente arriba de $(10,10)$. Si se mueve hacia el noroeste; ¿asciende o desciende? Y ¿con qué rapidez?.

54. Demostrar que el plano $2x - 6y + 3z - 49 = 0$ es tangente a la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 49$.

55. Calcule el ángulo entre los gradientes de las funciones $f(x,y,z) = x^4 + 3y^4 z$ y $g(x,y,z) = x + 3y - 2z$ en el punto (1, 2, 1).

56. Dada la función $f(x,y,z) = x^2 - yz + z^2 x$ y los puntos P(1,-4,3) Q(2,-1,8) encontrar:
   a) La razón de crecimiento máximo de f en P.
   b) El plano tangente a f en Q.

57. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^2 - 4x$, y que es perpendicular a la recta $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -2t \\ z = 1 + t \end{cases}$

58. Calcular la ecuación del plano tangente a la superficie $x^3 - 2y^3 + z^3 = 0$ en el punto (1,1,1).

59. Encuentre los puntos del elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ en los que la recta normal que pasa por ellos es perpendicular al plano $4x - 6y + 3z = 7$.

60. Las superficies:

$f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2=1, \quad g(x,y,z)=x+y+z=5$ se cortan formando la curva "C". Hállese las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a "C" en el punto (1,2,2).

61. Determine la ecuación del plano tangente a la superficie $z=x^2+xy$ que sea perpendicular a los planos $x+y-z=3$; $2x-y+z=4$.

62. Dada la siguiente función $z=x^2+3y^2$; $x=e^t$; $y=Cos(t)$. Encontrar: $\dfrac{\partial z}{\partial t}$.

63. Sea $z=f(e^{4t},6\ln t)$ encuentre la derivada de z con respecto a t.

64. Demuestre que $z=f(x+y,-x-y)$, donde f es una función diferenciable, satisface esta ecuación $\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$

65. Sea la función $z=f\left(\dfrac{x}{y}\right)$ calcular $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}$

66. Demostrar que $z=f\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)$ satisface la ecuación: $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$

67. Califique de verdadera o falsa la siguiente proposición:

Dado $f:R^2\rightarrow R$ derivable, $f(x,y)=\dfrac{1}{x}f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ para $x\neq 0$;

entonces:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=-f(x,y)$$

68. Si la función $z = f(x, y)$ satisface la ecuación de Laplace: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, demostrar que la función $z=f(x-2y, 2x+y)$ también satisface esta ecuación.

69. Dado: $f(x,y) = xe^{x^2+y^2}$; $\sigma(t) = (t,-t)$.
Encontrar: $D(f \circ \sigma)$.

70. Dado $f(x,y) = (x^2+1, y^2)$ y $g(u,v) = (u+v, u, v^2)$. Calcular usando la regla de la cadena $D(g \circ f)\big|_{(1,1)}$.

71. Dado: $f(x,y,z) = xe^{x^2+y^2+z^2}$; $r(t) = (t,-t,t^2)$. Encontrar: $D(f \circ r)$ ó $d/dt(f(r(t)))$.

72. Encontrar $\frac{\partial}{\partial s}(f \circ T)\big|_{(0,0)}$ donde:
$f(u,v) = \cos u \; sen\, v$; $T(s,t) = \left(\cos t^2 s, \ln\sqrt{1+s^2}\right)$

73. Dado $F(x,y) = (x^2+1, y^2)$ y $G(u,v) = (u+v, u, v^2)$ calcular, usando la regla de la cadena, la matriz diferencial de $G \circ F$ en el punto $(1,1)$.

74. Sea $z = 4x^3 - 2xy + y^2$ estimar el cambio en Δz y dz cuando (x, y) cambia de los puntos (2.98, 1.03) al punto (3, 1).

75. Sea $P = k\left(\frac{T}{V}\right)$, donde k es una constante, sirve para calcular la presión de un gas en función de su volumen y temperatura. Encontrar el máx. porcentaje de error aproximado que se puede obtener en el calculo de la presión, si se puede introducir un error de $\pm$ 0.4% de la temperatura y $\pm$ 0.9% en la medida del volumen.

76. El radio y la altura de un cilindro circular recto se mide con un posible error del 4% y del 2% respectivamente, estimar el máximo porcentaje de error, que eso implica para la medida del volumen.

77. El posible error involucrado al medir cada una de las dimensiones de una caja son 0.5, 0.2, 0.15 cm. Encuentre cual es la variación o error de volumen relativo de la caja.

78. Si el radio de un cilindro aumenta en 1% y la altura en un 2%, determine el porcentaje en el cual cambia el volumen.

79. Al medir el diámetro y el lado de un cono circular recto se obtiene 10 cm. y 20 cm. respectivamente. Si en cada medida hay un error probable de 0.2 cm. Cuál es, aproximadamente el mayor error posible en el valor calculado del volumen.