CAPITULO 8

"Nuestras almas, cuyas facultades pueden comprender la maravillosa arquitectura del mundo, y medir el curso de cada planeta vagabundo, aún escalan tras el conocimiento infinito"

Christopher Marlowe.

INTEGRALES DE SUPERFICIE

8.1 PARAMETRIZACIÓN DE UNA SUPERFICIE EN R^3.

Al igual que una curva en R^3 puede ser parametrizada por una función σ, definida en R y cuya imagen es la representación de la curva en el espacio tridimensional. Así mismo una superficie en R^3 puede ser expresada como la imagen de una función Φ definida en R^2.

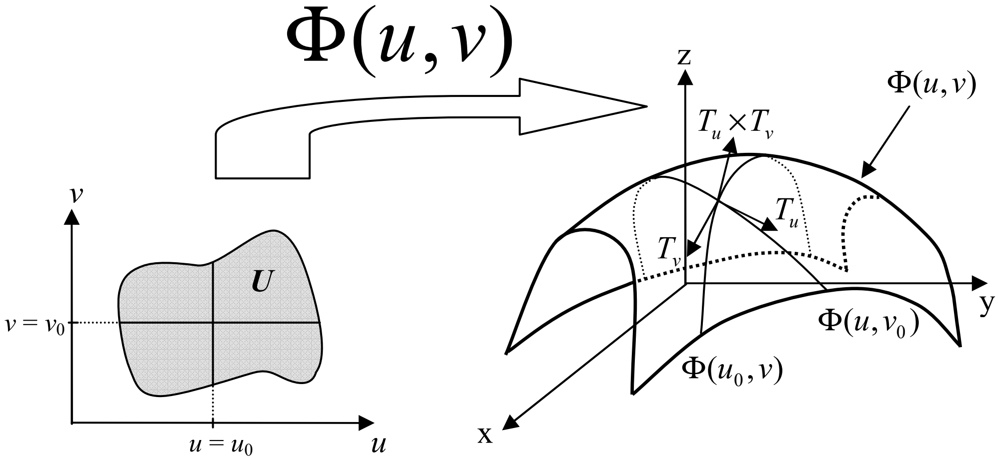


Figura 8-1

Definición:

> Una superficie parametrizada es una función $\Phi : U \subset R^2 \rightarrow R^3$ de la forma $\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, tal que su imagen representa una superficie "*S*" en R^3. Donde $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ son sus componentes. La función Φ es de tipo C^1 (diferenciable, hasta sus derivadas contínuas) en su dominio *U* si cada una de sus componentes son también de tipo C^1 en *U*.

Si se fija u en u_0 y v en v_0 se obtienen las rectas $u = u_0$ y $v = v_0$ que en R^3 representan las trayectorias $\Phi(u_0, v)$ y $\Phi(u, v_0)$ respectivamente, el punto (u_0, v_0) se proyecta como $\Phi(u_0, v_0)$.

$$\Phi(u, v_0) = (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0))$$
$$\Phi(u_0, v) = (x(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v))$$

En el punto (u_0, v_0) o en cualquier otro punto, se pueden trazar los vectores tangentes a cada trayectoria:

$$T_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right)$$

Vectores Tangentes Elementales

$$T_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

T_u y T_v se llaman vectores tangentes elementales y pueden evaluarse en cualquier punto de $\Phi(u,v)$.

Si hacemos el producto cruz entre los vectores tangentes elementales obtenemos:

$$T_u \times T_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

El vector $T_u \times T_v$ se denomina vector producto elemental y representa un vector normal a la superficie en cualquier punto de $\Phi(u,v)$.

Definición:

> Se dice que una superficie es suave cuando no tiene picos ni pliegues; esto se reconoce matemáticamente cuando el vector producto elemental es diferente de cero; entonces el punto o los puntos donde el vector producto elementa es cero la superficie es no suave.

Ejemplo 8-1 Dado el cono $z^2 = x^2 + y^2$ parametrizado en forma cilindrica: $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, r)$. Demostrar que ésta es una parametrización no suave del cono en el origen.

Solución: Los vectores tangentes elementales:

$$T_r = (\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta, 1)$$

$$T_\theta = (-r\,\mathrm{sen}\,\theta, r\cos\theta, 0)$$

Entonces el vector producto elemental:

$$T_r \times T_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 1 \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \left(-r\cos\theta, -r\operatorname{sen}\theta, r\cos^2\theta + r\operatorname{sen}^2\theta\right)$$
$$= \left(-r\cos\theta, -r\operatorname{sen}\theta, r\right)$$

Si evaluamos en punto $(0,0,0)$, es decir cuando $r = 0$

$T_r \times T_\theta = (0,0,0)$

$\therefore$ La parametrización no es suave en el origen ⮟

Ejemplo 8-2 Probar que la parametrización usual de cualquier función escalar $f : R^2 \to R$, cuya gráfica es una superficie en R^3, es siempre suave.

Solución: Parametrizamos la superficie de forma usual:

$\Phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$

Los vectores tangentes elementales:

$$T_x = \left(1,0,\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$
$$T_y = \left(0,1,\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Entonces el vector producto elemental:

$$T_x \times T_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) \neq (0,0,0)$$

$\therefore$ La parametrización usual es siempre suave ⮟

8.2 ÁREA DE UNA SUPERFICIE EN R^3.

Dada una superficie "*S*" en R^3 parametrizada por la función $\Phi : D \subset R^2 \to R^3$ de la forma $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.

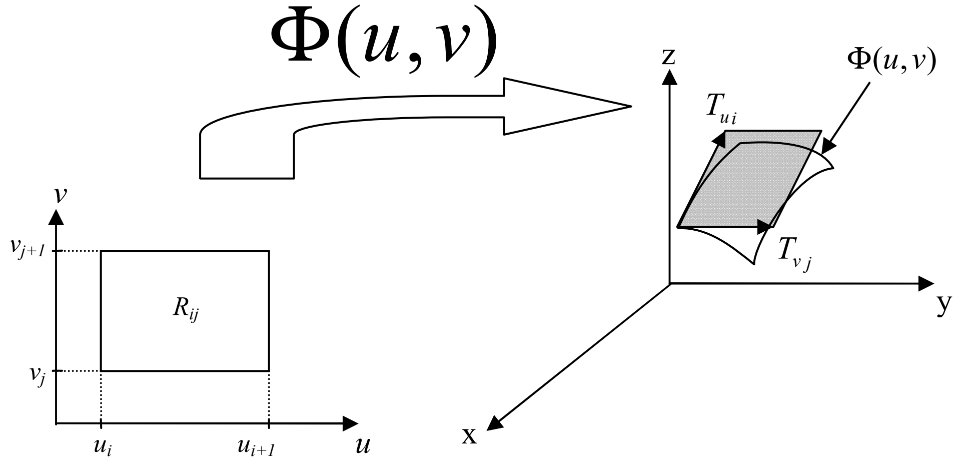


Figura 8-2

Por simplicidad asumimos que D es un rectángulo, entonces dividimos a D en "n" celdas. Sea R_{ij} el ij-ésimo rectángulo en la partición con vértices: (u_i, v_j), (u_{i+1}, v_j), (u_i, v_{j+1}) y (u_{i+1}, v_{j+1}), $0 \le i \le n-1$, $0 \le j \le n-1$.

Si se fija u en u_i y v en v_j se obtienen las rectas $u = u_i$ y $v = v_j$ que en R^3 representan las trayectorias:

$$\sigma(v) = \Phi(u_i, v);\ \sigma : [v_j, v_{j+1}] \to R^3$$

$$\rho(u) = \Phi(u, v_j);\ \rho : [u_i, u_{i+1}] \to R^3$$

Para un segmento de curva muy pequeño su longitud es aproximadamente la magnitud del vector velocidad por lo cual tendremos para cada trayectoria:

$$\Delta l_v = \|\sigma'(v)\|(v_{i+1} - v_i) = \|\sigma'(v)\|\Delta v$$

$$\Delta l_u = \|\rho'(u)\|(u_{i+1} - u_i) = \|\rho'(u)\|\Delta u$$

Tomando las expresiones anteriores en forma vectorial y considerando las definiciones de los vectores tangentes elementales:

$$\Delta L_v = \sigma'(v_j)\Delta v = T_{vj}\Delta v$$

$$\Delta L_u = \rho'(u_i)\Delta u = T_{ui}\Delta u$$

Sea ΔS el área de la porción de la superficie "S" que es la imagen de la región R_{ij}, si Δu y Δv son incrementos infinitesimales, entonces ΔS puede considerarse como un paralelogramo; si recordamos que el área del paralelogramo generado por dos vectores es la norma de su producto cruz, aplicando la anterior obtenemos:

$$\Delta S = \|\Delta L_u \times \Delta L_v\| = \|T_{ui}\Delta u \times T_{vi}\Delta v\| = \|T_{ui} \times T_{vi}\|\Delta u \Delta v$$

Si consideramos $A[S]$ como la suma del área de todas las particiones ΔS

$$A[S] = \sum \Delta S = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \| T_{u\,i} \times T_{v\,i} \| \Delta u \Delta v$$

Cuando se toma un número de particiones "n" muy grande entonces tendremos:

$$A[S] = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \| T_{u\,i} \times T_{v\,i} \| \Delta u \Delta v$$

$$A[S] = \iint_D \| T_u \times T_v \| \partial u \partial v$$

Definición:

Dada una superficie parametrizada por la función $\Phi : D \subset R^2 \to R^3$ de la forma $\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, suave en *D*, tal que su imagen representa una superficie "*S*" en R^3. Entonces el área de "*S*" está dada por la integral:

$$A[S] = \iint_D \| T_u \times T_v \| \partial u \partial v$$

Ejemplo 8-3 Encontrar el área de la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Solución: Parametrizamos la superficie usando coordenadas esféricas:

$$\Phi(u,v) = (R \cos u \operatorname{sen} v, R \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, R \cos v); \quad \begin{cases} 0 \le u \le 2\pi \\ 0 \le v \le \pi \end{cases}$$

Los vectores tangentes elementales:

$$T_u = (-R \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, R \cos u \operatorname{sen} v, 0)$$

$$T_v = (R \cos u \cos v, R \operatorname{sen} u \cos v, -R \operatorname{sen} v)$$

Entonces el vector producto elemental:

$$T_u \times T_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -R \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v & R \cos u \operatorname{sen} v & 0 \\ R \cos u \cos v & R \operatorname{sen} u \cos v & -R \operatorname{sen} v \end{vmatrix}$$

$$= \left(-R^2 \cos u \operatorname{sen}^2 v, -R^2 \operatorname{sen} u \operatorname{sen}^2 v, -R^2 \operatorname{sen} v \cos v\right)$$

El área de la superficie de la esfera es:

$$
\begin{aligned}
A[S] &= \iint_D \|T_u \times T_v\| \partial u \partial v \\
&= \iint_D \sqrt{R^4 \cos^2 u \operatorname{sen}^4 v + R^4 \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen}^4 v + R^4 \operatorname{sen}^2 v \cos^2 v}\ \partial u \partial v \\
&= R^2 \iint_D \operatorname{sen} v\ \partial v \partial u \\
&= R^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} v\ \partial v\, \partial u \\
&= R^2 \int_0^{2\pi} [-\cos v]_0^{\pi}\ \partial u \\
&= 2R^2 \int_0^{2\pi} \partial u \\
A[S] &= 4\pi R^2
\end{aligned}
$$

8.3 DEFINICIÓN Y CÁLCULO DE UNA INTEGRAL DE SUPERFICIE PARA UNA FUNCIÓN ESCALAR.

En el capítulo anterior se estudiaron las integrales de trayectoria: se tenía una función escalar continua $f : U \subset R^3 \to R$ y $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ la parametrización de una trayectoria en R^3, $\sigma(t) : [a, b] \subset R \to R^3$. Entonces la integral de trayectoria de *f* sobre σ es:

$$
\int_\sigma f\ \partial s = \int_a^b (f \circ \sigma) \|\sigma'(t)\| \partial t
$$

Así mismo se encontrará una expresión que permita evaluar la integral de una función escalar cuya región de integración será una superficie en R^3.

Dada una función $f(x, y, z) : U \subset R^3 \to R$ diferenciable y acotada en *U*, $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ la parametrización suave de una superficie "*S*" en R^3, $\Phi : D \subset R^2 \to U \subset R^3$.

Dividimos a *D* en "n" celdas. Es decir que la superficie "*S*" dividida en "n" porciones. Si tomamos la ij-ésima porción de superficie cuya área está definida por ΔS_{ij}. Definimos el producto:

$$
\Delta H_{ij} = f(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) \Delta S_{ij}
$$

Al considerar la parametrización tendremos que los puntos de la superficie se definen de la siguiente manera:

$$\left(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}\right) = \Phi\left(u_i, v_j\right)$$

Para una porción de superficie muy pequeña su área es aproximadamente:

$$\Delta S_{ij} = \left\| T_{u\,i} \times T_{v\,j} \right\| \Delta u \Delta v$$

Si consideramos H como la suma de todos los ΔH_{ij}:

$$H = \sum \Delta H = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\Phi\left(u_i, v_j\right)\right) \left\| T_{u\,i} \times T_{vi} \right\| \Delta u \Delta v$$

Cuando se toma un número de particiones "n" muy grande entonces tendremos:

$$H = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\Phi\left(u_i, v_j\right)\right) \left\| T_{u\,i} \times T_{vi} \right\| \Delta u \Delta v$$

$$H = \iint_D (f \circ \Phi) \left\| T_u \times T_v \right\| \partial u \partial v = \iint_S f \, dS$$

Definición:

Sea $f(x, y, z)$ una función escalar definida en $U \subset R^3 \to R$, diferenciable y acotada en *U*, $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ de una superficie "*S*" en R^3, $\Phi : D \subset R^2 \to U \subset R^3$. Se llama ***integral de superficie de f en S*** a la integral:

$$\iint_S f \, dS = \iint_D (f \circ \Phi) \left\| T_u \times T_v \right\| \partial u \partial v$$

Ejemplo 8-4 Evaluar la integral $\iint_S f \, dS$ del campo escalar $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$; y *S* la superficie del helicoide $\sigma(r, \theta) = (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta, \theta)$; donde $r \in [0,1]$ y $\theta \in [0, 2\pi]$.

Solución: Determinamos los vectores tangentes elementales:

$$T_r = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$$

$$T_\theta = (-r \operatorname{sen}\theta, r \cos\theta, 1)$$

Entonces el vector producto elemental:

$$T_r \times T_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta, r\cos^2\theta + r\operatorname{sen}^2\theta\right)$$

$$= \left(\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta, r\right)$$

Resolvemos la integral de acuerdo a la definición:

$$\iint_S f\,dS = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{r^2\cos^2 t + r^2\operatorname{sen}^2 t + 1}\,\left\|\left(\operatorname{sen} t, -\cos t, r\right)\right\| \partial r\,\partial\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{r^2+1}\sqrt{r^2+1}\,\partial r\,\partial\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(r^2+1\right)\partial r\,\partial\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3}+r\right]_0^1 \partial\theta = \frac{4}{3}\int_0^{2\pi}\partial\theta$$

$$\iint_S f\,dS = \frac{8}{3}\pi$$

También se puede expresar la integral de línea de un campo escalar utilizando la parametrización usual para la superficie de la siguiente forma:

$$\iint_S f\,dS = \iint_D \frac{f\left(x, y, z(x,y)\right)}{\cos\theta}\partial x\,\partial y$$

Donde θ es el ángulo entre el vector normal N y el eje "z".Esta forma se usa cuando la superficie es plana, porque el término cos θ es constante.

Demostración:

Sea la superficie S parametrizada de forma usual:

$$\Phi(x,y) = \left(x, y, f(x,y)\right)$$

Entonces el vector normal será:

$$N = T_x \times T_y = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$$

El producto punto entre el vector normal N y el vector k:

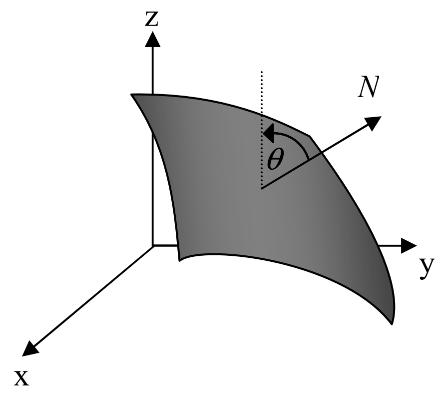


Figura 8-3

$N \bullet k = \|N\|\|k\|\cos\theta$ $\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) \bullet (0,0,1) = \|N\|\cos\theta$ $1 = \|N\|\cos\theta$ $\|N\| = \frac{1}{\cos\theta}$	

Reemplazando en la definición de integral de superficie para campos escalares:

$$\iint_S f\, dS = \iint_D f(x, y, z(x, y))\|T_x \times T_y\| \partial x \partial y = \iint_D \frac{f(x, y, z(x, y))}{\cos\theta} \partial x\, \partial y$$

Ejemplo 8-5 Evaluar la integral de superficie $\iint_S x\, dS$, donde S es el triángulo de vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$.

Solución: Determinamos el vector normal:

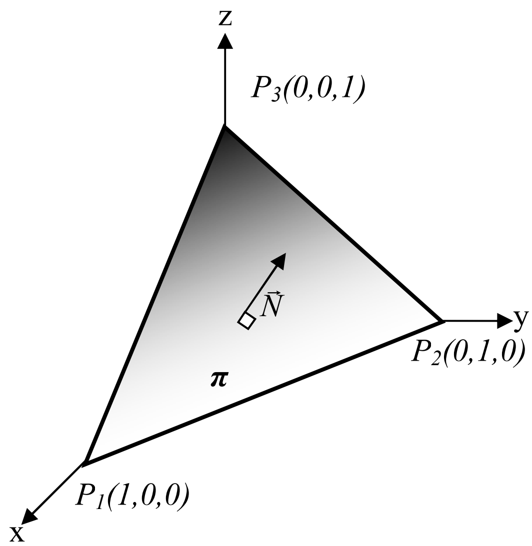


Figura 8-4

$$N = V_1 \times V_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,1,1)$$

$$N \bullet k = \|N\|\|k\|\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{N \bullet k}{\|N\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Resolvemos la integral:

$$\iint_S x\,dS = \iint_D \frac{x}{\cos\theta}\partial y\partial x = \sqrt{3}\int_0^1\int_0^{1-x} x\,\partial y\,\partial x$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 [xy]_0^{1-x}\,\partial x = \sqrt{3}\int_0^1 \left(x - x^2\right)\partial x$$

$$= \sqrt{3}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{1-x}$$

$$\iint_S f\,dS = \frac{\sqrt{3}}{6}$$ ➤

8.4 DEFINICIÓN Y CÁLCULO DE UNA INTEGRAL DE SUPERFICIE PARA UNA FUNCIÓN VECTORIAL.

Definición:

Sea $F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$ una función vectorial definida en $U \subset R^3 \rightarrow R^3$, diferenciable y acotada en *U*; $\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ de una superficie "*S*" en R^3, $\Phi : D \subset R^2 \rightarrow U \subset R^3$. Se llama ***integral de superficie de F en S*** a la integral:

$$\iint_S F \bullet dS = \iint_D (F \circ \Phi) \bullet (T_u \times T_v)\partial u \partial v$$

Ejemplo 8-6 Dado el campo vectorial $F(x,y,z) = xi + yj + zk$; y S la superficie de la semiesfera superior de radio 1 $\Phi(u,v) = (\cos u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos v)$; donde $u \in [0,2\pi]$ y $v \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Evaluar la integral $\iint_S F \bullet dS$.

Solución: Determinamos los vectores tangentes elementales:

$$T_u = (-\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos u \operatorname{sen} v, 0)$$
$$T_v = (\cos u \cos v, \operatorname{sen} u \cos v, -\operatorname{sen} v)$$

Entonces el vector producto elemental:

$$T_u \times T_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v & \cos u \operatorname{sen} v & 0 \\ \cos u \cos v & \operatorname{sen} u \cos v & -\operatorname{sen} v \end{vmatrix}$$
$$= \left(-\cos u \operatorname{sen}^2 v, -\operatorname{sen} u \operatorname{sen}^2 v, -\operatorname{sen} v \cos v\right)$$

Resolvemos la integral de acuerdo a la definición:

$$\iint_S F \bullet dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (F \circ \Phi) \bullet (T_u \times T_v) \partial v \, \partial u$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\cos u^2 \operatorname{sen}^3 v - \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen}^3 v - \operatorname{sen} v \cos^2 v\right) \partial v \, \partial u$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\operatorname{sen} v) \partial v \, \partial u = \int_0^{2\pi} [\cos v]_0^{\frac{\pi}{2}} \, \partial u = -\int_0^{2\pi} \partial u$$
$$\iint_S F \bullet dS = -2\pi \quad \forall$$

8.5 INTEGRALES DE SUPERFICIE ORIENTADAS.

Definición:

> Se consideran superficies orientadas aquellas que tienen dos caras bien definidas, cuando no es posible, la superficie es no orientada.

Una superficie orientada tiene dos vectores normales, uno externo y otro interno (uno que entra y otro que sale). Ambos vectores normales son opuestos, es decir, tienen direcciones contrarias.

Como ejemplo vamos a tomar un plano que es una superficie orientada ya que tiene dos caras bien definidas.

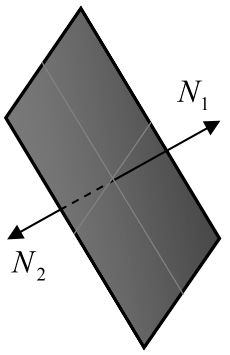


Figura 8-5

Dos parametrizaciones del planos serían:

$$\phi_1(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

$$\phi_2(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$$

De tal manera que el vector normal a la superficie, de acuerdo a cada parametrización será:

$$N_1 = T_u \times T_v$$

$$N_2 = T_s \times T_t$$

Se observa que:

$$N_1 = -N_2$$

Entonces al evaluar la integral de superficie de una función vectorial $F : U \subset R^3 \to R^3$:

$$\iint_S F \bullet N_1 = -\iint_S F \bullet N_2$$

Cambiar de orientación significa cambiar el sentido del vector normal. Una cierta parametrización puede provocar este efecto, entonces se debe tomar en cuenta que cuando se cambia la orientación de la superficie se está cambiando su signo.

Una superfiice en el espacio puede ser abierta o cerrada. Si una superficie limita un sólido entonces se la denomina ***superficie cerrada***; caso contrario, entonces se la denomina ***superficie abierta***.

Una superficie suave cerrada puede estar formada por la unión de varias superficies abiertas suaves, por ejemplo el cubo unitario está formado por 6 superficies abiertas suaves (planos):

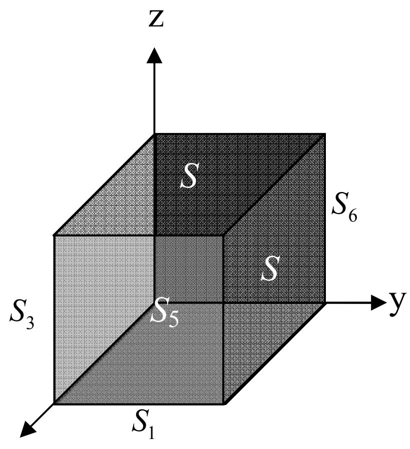


Figura 8-6

La integral de superficie en superficies como éstas es la suma de las integrales de superficie de cada una de las superficies individuales que la conforman.

Sea “S” el cubo unitario, entonces:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5 \cup S_6$$

Entonces la integral de superficie de F en S es:

$$\iint_S F \bullet dS = \iint_{S_1} F \bullet dS + \iint_{S_2} F \bullet dS + \iint_{S_3} F \bullet dS + \iint_{S_4} F \bullet dS + \iint_{S_5} F \bullet dS + \iint_{S_6} F \bullet dS$$

Ejemplo 8-7 Dado el campo vectorial $F(x, y, z) = (x, y, z)$; y S la superficie de la semiesfera superior de radio 1. Calcular la integral de superficie $\iint_S F \bullet dS$:

a.- Utilizando la parametrización esférica.

b.- Utilizando la parametrización usual.

Solución: ***a.-*** $\Phi(u, v) = (\cos u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos v)$

Entonces el vector producto elemental:

$$T_u \times T_v = \left(-\cos u \operatorname{sen}^2 v, -\operatorname{sen} u \operatorname{sen}^2 v, -\operatorname{sen} v \cos v\right)$$

Resolvemos la integral:

$$\iint_S F \bullet dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (F \circ \Phi) \bullet (T_u \times T_v)\partial v\, \partial u$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\cos u^2 \operatorname{sen}^3 v - \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen}^3 v - \operatorname{sen} v \cos^2 v\right)\partial v\, \partial u$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\operatorname{sen} v)\partial v\, \partial u = \int_0^{2\pi} [\cos v]_0^{\frac{\pi}{2}}\, \partial u = -\int_0^{2\pi} \partial u$$

$$\iint_S F \bullet dS = -2\pi$$ ∀

b.- $\Phi(x, y) = \left(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right)$

Entonces el vector producto elemental:

$$T_x \times T_y = \left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, 1\right)$$

Resolvemos la integral:

$$\iint_S F \bullet dS = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}\right) \bullet \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, 1\right) \partial y \partial x$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \partial y \partial x = \int_0^{2\pi}\int_0^{1} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \partial r \partial \theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-\sqrt{1-r^2}\right]_0^1 \partial \theta = \int_0^{2\pi} \partial \theta$$

$$\iint_S F \bullet dS = 2\pi$$

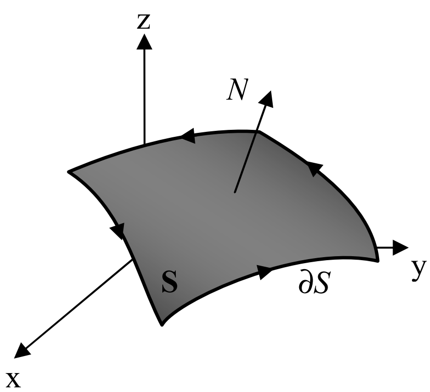
La parametrización esférica cambia la orientación de la superficie y la usual no.

8.6 TEOREMA DE STOKES.

Sea *F* un campo vectorial de $R^3 \rightarrow R^3$; continuo e integrable en *S*. Si *S* es una superficie parametrizada por la función $\Phi : D \subset R^2 \rightarrow R^3$ definida de la forma $\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, donde *D* una región plana tipo 3, donde "∂S" es el contorno de *S* orientado positivamente, entonces:

$$\oint_{\partial S} F \bullet \partial r = \iint_S \text{rot } F \bullet \partial S$$

El teorema de Strokes relaciona un integral de superficie con una integral de línea en el contorno de la superficie. Cumple la misma función que el teorema de Green sobre una superficie en R^3.



La orientación positiva del contorno se asume en el sentido que caminaría un observador de pie con dirección ala normal exterior de la superficie de tal forma que la superficie quede a su izquierda

Figura 8-7

El teorema de Strokes permite evaluar una integral de superficie en función de una integral de línea, o viceversa; una integral de línea como una de superficie, dependiendo de lo que sea más fácil de resolver.

Ejemplo 8-8 Verificar el teorema de Stokes para la superficie del paraboloide semiesfera unitaria superior utilizando la función vectorial $F(x,y,z)=(y,z,x)$.

Solución: Como podemos observar en la figura 8-8 el problema nos pide resolver dos integrales una integral de línea cuya región de integración es la curva que limita la semiesfera y una integral de línea cuya región de integración es la superficie de la semiesfera.

Por tratarse de resolver una integral de línea es conveniente calcular su rotor para determinar si el campo vectorial es un campo conservativo

$$\operatorname{rot}F=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix}=(-1,-1,-1)$$

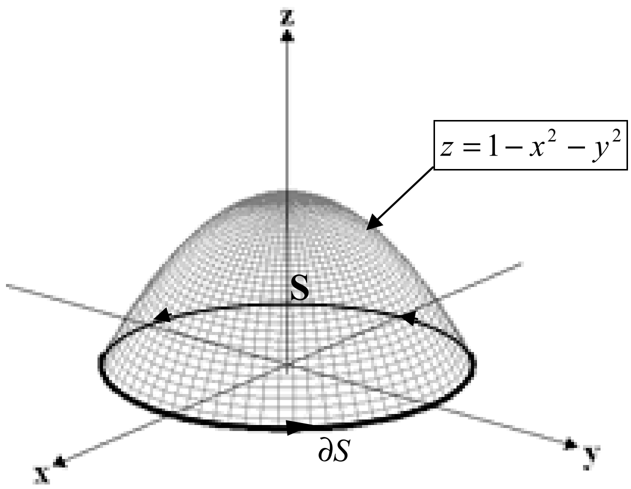


Figura 8-8

Parametrizamos la curva que limita la superficie:

$$\partial S:\sigma(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t,0);\ t\in[0,2\pi]$$

Resolvemos la integral de línea acuerdo a la definición:

$$\int_{\partial S} F \bullet \partial r = \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} t, 0, \cos t) \bullet (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)\partial t = \int_0^{2\pi} -\operatorname{sen}^2 t \, \partial t$$

$$= -\int_0^{2\pi} \left(\frac{1-\cos 2t}{2} \right) \partial t = -\left[\frac{1}{2}\theta - \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} \right]_0^{2\pi}$$

$$\int_{\partial S} F \bullet \partial r = -\pi \quad \checkmark$$

Ahora resolvemos aplicando el teorema de Stokes, para lo cual tenemos que resolver un integral de superficie, entonces parametrizamos la superficie:

$$\Phi(x, y) = (x, y, 1 - x^2 - y^2)$$

Entonces el vector producto elemental:

$$T_x \times T_y = (2x, 2y, 1)$$

$$\int_{\partial S} F \bullet \partial r = \iint_S \operatorname{rot} F \bullet \partial S$$

$$= \iint_D (-1,-1,-1) \bullet (2x, 2y, 1) \partial y \, \partial x = \iint_D (-2x - 2y - 1) \partial y \, \partial x$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-2r\cos\theta - 2r\operatorname{sen}\theta - 1) r \, \partial r \partial\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{2}{3} r^3 (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) - \frac{r^2}{2} \right]_0^1 \partial\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{2}{3}\cos\theta - \frac{2}{3}\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2} \right) \partial\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (-4x^2 + 16x - 16) \partial\theta = \left[-\frac{2}{3}\operatorname{sen}\theta + \frac{2}{3}\cos\theta - \frac{1}{2}\theta \right]_0^{2\pi}$$

$$\int_{\partial S} F \bullet \partial r = -\pi \checkmark$$

8.7 TEOREMA DE GAUSS.

Sea F un campo vectorial de $R^3 \to R^3$; continuo e integrable en Ω. Sea Ω es una región tipo 4 en R^3, "$\partial\Omega$" es su contorno, una superficie orientada cerrada que limita a Ω, entonces:

$$\oiint_{\partial\Omega} F \bullet \partial S = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F \, \partial V$$

El teorema de Gauss relaciona un integral triple con una integral de superficie en el contorno de la región. Como los teoremas anteriores relaciona las integrales en un todo y en su contorno.

Ejemplo 8-9 Verificar el teorema de Gauss para evaluar $\iint_S F \bullet n \partial S$, donde S es la superficie cerrada determinada por $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ y $z = 2$. Utilizando el campo vectorial $F(x, y, z) = (4x, -2y^2, z^2)$.

Solución: Como podemos observar en la figura 8-9 el problema nos pide resolver una integral de superficie en una superficie cerrada. Por lo que podemos resolver el primera como una integral de superficie o aplicado Gauss y resolviendo una integral triple.
Dado que el problema nos pide que lo resolvamos de ambas maneras, primero resolvemos como una integral de superficie:

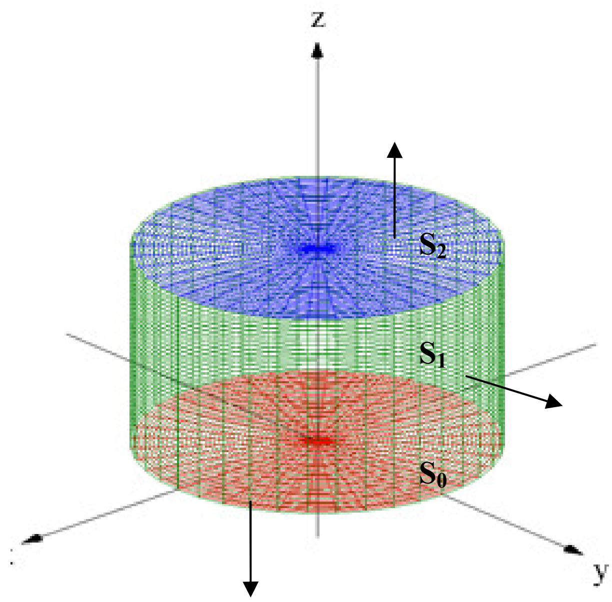


Figura 8-9

Para resolver la integral en toda superficie debemos dividirla en tres porciones de superficie, parametrizar cada superficie y orientar sus vectores normales al exterior, como se indica en la figuara 8-9.
Entonces la integral de superficie en la superfcie total S será:

$$\iint_S F \bullet \partial S = \iint_{S_0} F \bullet \partial S + \iint_{S_1} F \bullet \partial S + \iint_{S_2} F \bullet \partial S$$

Resolvemos para la superficie S_0, parametrizamos la superficie y hallamos el vector producto cruz elemental:

$$S_0 : \Phi(x, y) = (x, y, 0); \quad x^2 + y^2 \leq 4$$

$$T_x \times T_y = (0,0,1)$$

El vector producto cruz elemental está en dirección contraria del normal exterior:

$$N_0 = -(0,0,1)$$

Calculamos la integral:

$$\iint_{S_0} F \bullet \partial S = \iint_{D_0} (4x, -2y^2, 0) \bullet (0,0,-1) \partial x \partial y = 0$$

Ahora resolvemos para la superficie S_1, parametrizamos la superficie y hallamos el vector producto cruz elemental:

$$S_1 : \Phi(\theta, z) = (2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, z); \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 2$$

$$T_\theta \times T_z = (2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, 0)$$

El vector producto cruz elemental coincide con el normal exterior:

$$N_1 = (2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, 0)$$

Calculamos la integral:

$$\iint_{S_1} F \bullet \partial S = \iint_{D_1} \left(4(2\cos\theta), -2(2\operatorname{sen}\theta)^2, z^2\right) \bullet (2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, 0) \partial\theta \partial z$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (16\cos^2\theta - 16\operatorname{sen}^3\theta) \partial\theta \partial z$$

$$= 16 \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2} - \operatorname{sen}\theta + \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta \right) \partial\theta \partial z$$

$$= 16 \int_0^2 \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen}2\theta + \cos\theta - \cos^3\theta \right]_0^{2\pi} \partial z$$

$$= 16\pi \int_0^2 \partial z$$

$$= 32\pi$$

Finalmente resolvemos para la superficie S_2, parametrizamos la superficie y hallamos el vector producto cruz elemental:

$$S_2 : \Phi(x, y) = (x, y, 2); \quad x^2 + y^2 \leq 4$$

$$T_x \times T_y = (0,0,1)$$

El vector producto cruz elemental coincide con el normal exterior:

$$N_2 = (0,0,1)$$

Calculamos la integral:

$$\iint_{S_2} F \bullet \partial S = \iint_{D_2} \left(4x, -2y^2, (2)^2\right) \bullet (0,0,1) \partial x \partial y$$

$$= 4 \iint_{D_2} \partial x \partial y = 4A[D_2] = 4(4\pi)$$

$$= 16\pi$$

Por lo tanto la integral de superficie en la superfcie total S será:

$$\oiint_{S} F \bullet \partial S = \iint_{S_0} F \bullet \partial S + \iint_{S_1} F \bullet \partial S + \iint_{S_2} F \bullet \partial S$$

$$= 0 + 32\pi + 16\pi$$

$$\oiint_{S} F \bullet \partial S = 48\pi$$

Ahora resolvemos aplicando el teorema de Gauss, para lo cual tenemos que calcular el divergente del campo vectorial y resolver una integral triple:

$$\oint\!\!\oint_S F \bullet \partial S = \iiint_\Omega \operatorname{div} F \,\partial V = \iiint_\Omega (4 - 4y + 2z)\partial V$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^2 (4 - 4r \operatorname{sen}\theta + 2z) r\,\partial z \partial r \partial\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left[4rz - 4r^2 z \operatorname{sen}\theta + rz^2\right]_0^2 \partial r \partial\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (12r - 8r^2 \operatorname{sen}\theta)\partial r \partial\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[6r^2 - \frac{8}{3}r^3 \operatorname{sen}\theta\right]_0^2 \partial\theta$$

$$= 8\int_0^{2\pi}\left(3 - \frac{8}{3}\operatorname{sen}\theta\right)\partial\theta$$

$$= 8\left[3\theta - \frac{8}{3}\cos\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$\oint\!\!\oint_S F \bullet \partial S = 48\pi$$

8.8 APLICACIONES.