CAPITULO 7

"Nuestras almas, cuyas facultades pueden comprender la maravillosa arquitectura del mundo, y medir el curso de cada planeta vagabundo, aún escalan tras el conocimiento infinito"

Christopher Marlowe.

INTEGRALES DE LÍNEA Y TEOREMA DE GREEN

7.1 DEFINICIÓN, CÁLCULO Y APLICACIONES DE LA INTEGRAL DE TRAYECTORIA.

Dada una función $f(x,y,z):U \subset R^3 \to R$ diferenciable y acotada en $\sigma(t)$, $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ la parametrización de una trayectoria en R^3, $\sigma(t):[a,b] \subset R \to R^3$.

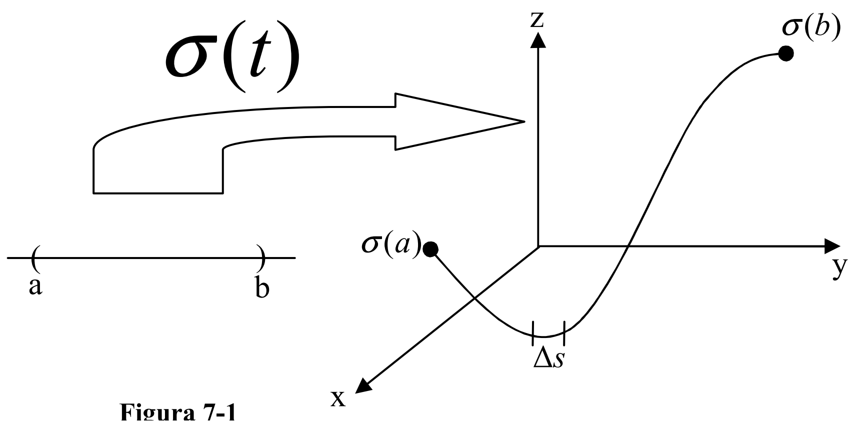


Figura 7-1

Dividimos a la trayectoria en “n” particiones. Queda la curva dividida en “n” segmentos de curva y cada uno tiene una longitud de curva Δs_i. Definimos el producto:

$$\Delta S_i = f(x_i, y_i, z_i)\Delta s_i$$

Al considerar la parametrización tendremos que los puntos de la curva se definen de la siguiente manera:

$$(x_i, y_i, z_i) = \sigma(t_i)$$

Para un segmento de curva muy pequeño su longitud es aproximadamente la magnitud del vector velocidad por lo cual tendremos:

$$\Delta s_i = \|\sigma'(t_i)\|\Delta t_i$$

Si consideramos S como la suma de todos los ΔS_i:

$$S = \sum \Delta S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} f(\sigma(t_i))\|\sigma'(t_i)\|\Delta t_i$$

Cuando se toma un número de particiones “n” muy grande entonces tendremos:

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (f \circ \sigma)\Big|_{t_i} \|\sigma'(t_i)\|\Delta t_i$$

$$S = \int_a^b (f \circ \sigma)\|\sigma'(t)\|\partial t = \int_\sigma f\, ds$$

Definición:

Sea $f(x,y,z)$ una función escalar definida en $U \subset R^3 \to R$, diferenciable y acotada en *U*, $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ la parametrización de una trayectoria en *R*³, $\sigma(t) : [a,b] \subset R \to R^3$. Se llama ***integral de trayectoria de f sobre σ*** a la integral:

$$\int_{\sigma} f\,\partial s = \int_{a}^{b} (f \circ \sigma) \|\sigma'(t)\| \partial t$$

Observaciones:

- La integral de trayectoria es una versión escalar de la integral de línea que es la versión vectorial.
- Cuando se habla de la integral de trayectoria no es necesario asociar una orientación a σ.
- La integral de trayectoria se puede evaluar como una integral definida

Ejemplo 7-1 Evaluar la integral del campo escalar $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$; sobre la trayectoria de una hélice $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ de $[0, 2\pi]$.

Solución: Resolvemos la integral de acuerdo a la definición:

$$\int_{\sigma} f\,\partial s = \int_{0}^{2\pi} (\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t + t^2) \|(-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)\| \partial t$$

$$= \int_{0}^{2\pi} (1 + t^2) \sqrt{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t + 1}\, \partial t$$

$$= \sqrt{2} \int_{0}^{2\pi} (1 + t^2) \partial t$$

$$= \sqrt{2} \left[t + \frac{t^3}{3} \right]_{0}^{2\pi}$$

$$\int_{\sigma} f\,\partial s = \sqrt{2}\left(2\pi + \frac{8}{3}\pi^{3}\right) ✓$$

Aplicaciones de la integral de trayectoria

1era. Aplicación:

Dada una función $f(x,y,z)=1$. Al integrar esta función, sobre una región σ, obtendremos la suma de las longitudes de los segmentos de curva. Es decir tendremos la longitud total de la curva σ.

$$\int_{\sigma} f\,\partial s = \int_{\sigma} \partial s = \int_{a}^{b} \left\|\sigma'(t)\right\| \partial t = L[\sigma]$$

Ejemplo 7-2 Calcule la longitud de curva de una hélice $\sigma(t)=(a\cos t, a\,\mathrm{sen}\,t, bt)$, donde $t \in [0,2\pi]$.

Solución: Resolvemos la integral de acuerdo a la definición:

$$\begin{aligned}
L[\sigma] &= \int_{\sigma} \partial s \\
&= \int_{0}^{2\pi} \left\|(-a\,\mathrm{sen}\,t, a\cos t, b)\right\| \partial t \\
&= \int_{0}^{2\pi} \sqrt{a^{2}\,\mathrm{sen}^{2}\,t + a^{2}\cos^{2} t + b^{2}}\; \partial t \\
&= \sqrt{a^{2}+b^{2}} \int_{0}^{2\pi} \partial t
\end{aligned}$$

$$L[\sigma] = 2\pi\sqrt{a^{2}+b^{2}} ✓$$

2da. Aplicación:

Sirve para encontrar el valor promedio del campo escalar *f* a través de la curva σ.

$$V_{p} = \frac{\int_{\sigma} f\,ds}{L[\sigma]}$$

3ra. Aplicación:

Dada una función $f(x,y):U \subset R^2 \rightarrow R$, continua e integrable en $D \subset R^2$ tal que $f(x,y) > 0$, $\forall (x,y) \in D$; $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ la parametrización de una trayectoria en R^2, $\sigma(t):[a,b] \subset R \rightarrow D \subset R^2$. Entonces la integral $\int_\sigma f\,\partial s$ representa el área de la valla levantada desde la curva plana σ, hasta la función *f*.

$$\text{Área de la valla} = \int_\sigma f\,\partial s$$

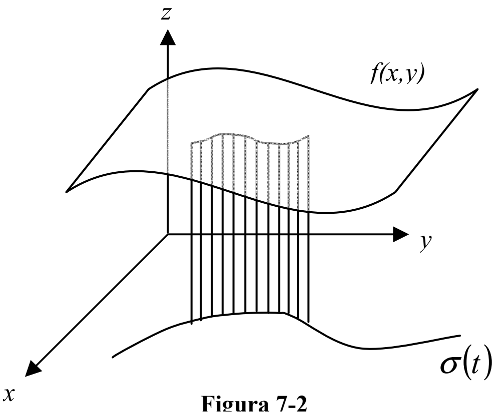


Figura 7-2

Ejemplo 7-3 Encontrar el área de la valla sobre la recta $x + y = 1$ y limitada por el paraboloide $f(x,y) = x^2 + y^2$ en el primer cuadrante del plano "*xy*"

Solución: Como podemos observar en la figura 7-3 el problema nos pide determinar el área de la valla que se levanta desde la recta en el plano "*xy*" hasta el paraboloide

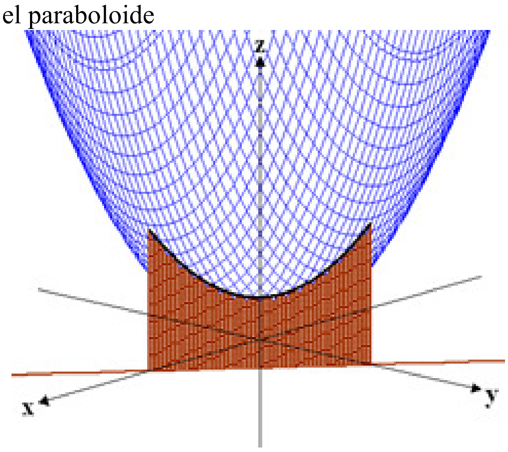


Figura 7-3

Primero parametrizamos la curva plana y determinamos su vector velocidad:

$$\sigma(t) = (t, 1-t)$$

$$\sigma'(t) = (1, -1)$$

Resolvemos la integral de acuerdo a la definición

$$A[Valla] = \int_{\sigma} f \, \partial s$$

$$= \int_{0}^{1} \left(t^2 + (1-t)^2\right)\sqrt{2}\, \partial t$$

$$= \sqrt{2}\int_{0}^{1} \left(2t^2 - 2t + 1\right)\partial t$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{2t^3}{3} - t^2 + t\right]_0^1$$

$$A[Valla] = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

7.2 DEFINICIÓN Y CÁLCULO DE LA INTEGRAL DE LÍNEA, COMO UNA INTEGRAL VECTORIAL.

Definición:

Sea $F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$ una función vectorial definida en $U \subset R^3 \to R^3$, diferenciable y acotada en U; $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ la parametrización de una trayectoria en R^3, $\sigma(t): [a,b] \subset R \to R^3$. Se llama ***integral de línea de F sobre σ*** a la integral:

$$\int_{\sigma} F \bullet \partial s = \int_{a}^{b} (F \circ \sigma) \bullet (\sigma'(t))\partial t$$

Existe otra forma más usual de expresar la integral de línea si tenemos en cuenta que el vector diferencial de curva se puede expresar de la siguiente manera:

$$\partial s = (\partial x, \partial y, \partial z)$$

Entonces al resolver el producto punto obtendremos otra expresión equivalente:

$$\int_{\sigma} F \bullet \partial s = \int_{\sigma} \left(F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)\right) \bullet (\partial x, \partial y, \partial z)$$

$$\int_{\sigma} F \bullet \partial s = \int_{\sigma} F_1(x,y,z)\partial x + \int_{\sigma} F_2(x,y,z)\partial y + \int_{\sigma} F_3(x,y,z)\partial z$$

Ejemplo 7-4 Evaluar la integral de línea del campo vectorial $F(x,y,z) = xi + yj + zk$ sobre la trayectoria de una hélice $\sigma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t)$ de $[0,2\pi]$

Solución: Resolvemos la integral de acuerdo a la definición

$$\int_{\sigma} F \bullet \partial s = \int_{0}^{2\pi} (\operatorname{sen} t, \cos t, t) \bullet (\cos t, -\operatorname{sen} t, 1)\partial t$$

$$= \int_{0}^{2\pi} (\operatorname{sen} t \cos t - \operatorname{sen} t \cos t + t)\partial t$$

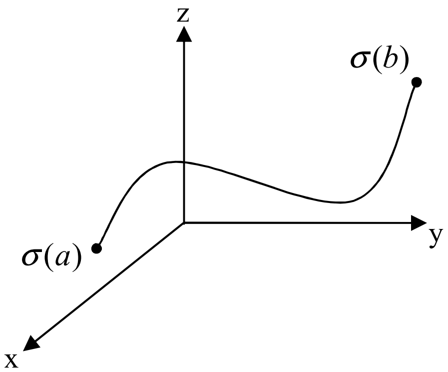
$$= \int_{0}^{2\pi} t\,\partial t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{4\pi^2}{2}$$

$$\int_{\sigma} F \bullet \partial s = 2\pi^2$$ ∀

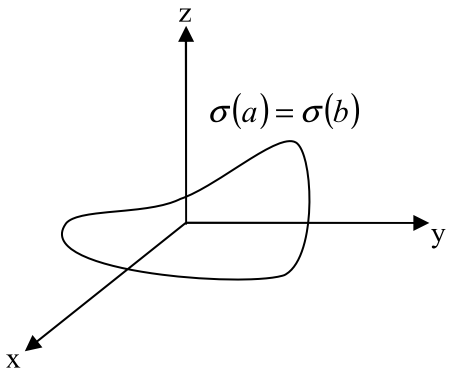
7.3 ORIENTACIÓN EN UNA INTEGRAL DE LÍNEA.

Una curva en el espacio puede ser abierta o cerrada. Sea $\sigma(t)$ la parametrización de una curva y $\sigma(a)$, $\sigma(b)$; si $\sigma(a) = \sigma(b)$ entonces se la denomina ***curva cerrada*** y si $\sigma(a) \neq \sigma(b)$ entonces se la denomina ***curva abierta***.

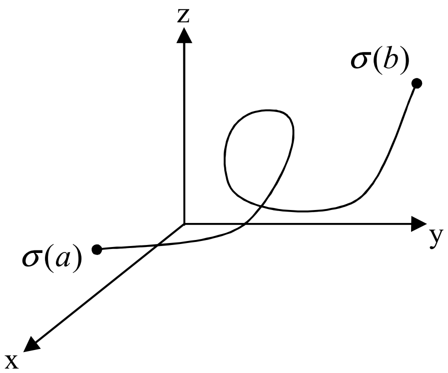
Además de abierta o cerrada, una trayectoria en el espacio puede ser simple o no simple. Una ***curva simple*** es una curva que no se cruza a si misma y una ***curva no simple*** es aquella que se cruza a si misma.



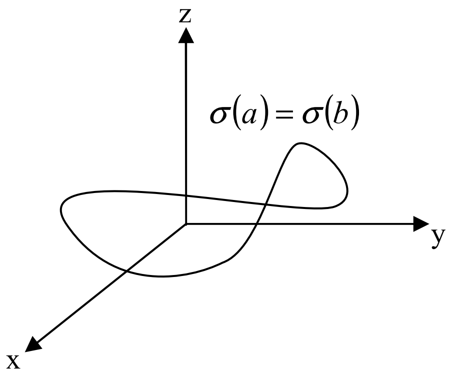
Curva Abierta y Simple



Curva Cerrada y Simple



Curva Abierta y No Simple

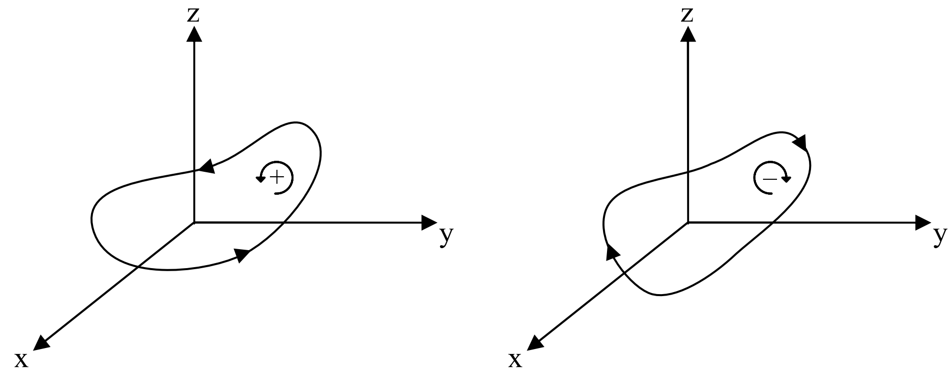


Curva Cerrada y No Simple

Figura 7-4

Cuando la curva es abierta, vamos a asumir orientación positiva hacia arriba y hacia la derecha; hacia abajo y hacia la izquierda será orientación negativa.

Cuando la curva es cerrada vamos a asumir orientación positiva cuando es en sentido contrario a la rotación de las manecillas del reloj; cuando es a favor se tratará de orientación negativa



Orientación Positiva *Orientación Negativa*

Figura 7-5

Una trayectoria puede ser puede ser reparametrizada de tal manera que pueden conservar su orientación original o cambiar la orientación original.

Ejemplo 7-5 Dado el campo vectorial $F(x,y,z)=(x,y,z)$. Calcule la integral de línea en el segmento de la recta que une a los puntos $(0,1,0)$ y $(1,2,2)$, parametrizandola positivamente y luego reparametrizándola de tal manera que cambie su orientación.

Solución: Una parametrización positiva del segmento de recta es:

$\sigma(t)=(t,t+1,2t)$; donde $0\le t\le 1$

Evaluando la integral con dicha parametrización:

$$\int_{\sigma} F\bullet\partial s=\int_0^1 (t,t+1,2t)\bullet(1,1,2)\partial t=\int_0^1 (6t+1)\partial t=\left[3t^2+t\right]_0^1$$

$$\int_{\sigma} F\bullet\partial s=4$$

Ahora reparametrizándola de tal manera que cambie su orientación:

$\rho(t)=(1-t,2-t,2-2t)$; donde $0\le t\le 1$

Evaluando la integral con dicha parametrización:

$$\int_{\rho} F\bullet\partial s=\int_0^1 (1-t,2-t,2-2t)\bullet(-1,-1,-2)\partial t=\int_0^1 (6t-7)\partial t=\left[3t^2-7t\right]_0^1$$

$$\int_{\rho} F\bullet\partial s=-4$$

Teorema 7-1

Sea $F : U \subset R^3 \to R^3$ seccionalmente continua, σ la parametrización de una curva suave, simple y orientada, y sea ρ la reparametrización de la curva, entonces:

$$\int_\sigma F \bullet \partial s = \int_\rho F \bullet \partial s \qquad \text{si } \rho \text{ no cambia de orientación de la curva}$$

$$\int_\sigma F \bullet \partial s = -\int_\rho F \bullet \partial s \qquad \text{si } \rho \text{ cambia de orientación de la curva}$$

Teorema 7-2

Sea $F : U \subset R^3 \to R^3$ seccionalmente continua, σ la parametrización de una curva suave, no simple y orientada, y sea ρ la reparametrización de la curva, entonces:

$$\int_\sigma f\, ds = \int_\rho f\, ds \quad \text{sea que } \rho \text{ cambie o no cambie la orientación de la curva}$$

7.4 APLICACIÓN DE LA INTEGRAL DE LÍNEA AL CÁLCULO DE TRABAJO.

El trabajo en la física elemental se define como "trabajo es igual a fuerza por distancia", es decir que el trabajo que se efectúa sobre el cuerpo se da por: $W = Fd$, donde *F* es una fuerza constante que actúa sobre el cuerpo y que es paralela al desplazamiento y *d* es la magnitud del desplazamiento.

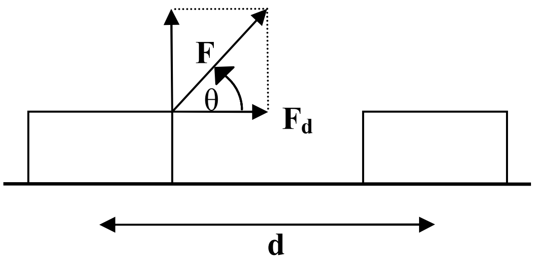


Figura 7-6

Para la figura 7-6 el trabajo se define de la siguiente manera:

$$W = F_d\, d$$

Donde F_d es la componente de la fuerza *F* paralela al desplazamiento:

$$F_d = F\cos\theta$$

Tenemos entonces el trabajo expresado por:

$$W = Fd\cos\theta$$

Asumiendo que $F : U \subset R^3 \to R^3$ representa un campo de fuerza en R^3; $\sigma(t)$ la parametrización de una trayectoria en R^3, $\sigma(t) : [a,b] \subset R \to R^3$.

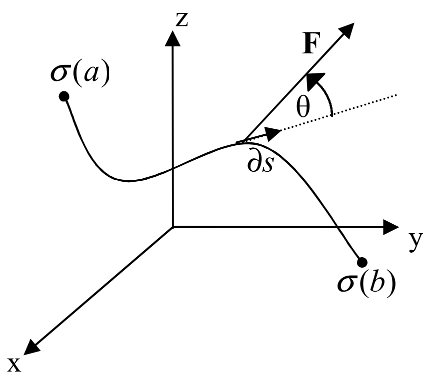


Figura 7-7

El trabajo realizado por F en un punto de la trayectoria es:

$$\partial W = F\,\partial s\cos\theta$$

Como F y ∂s son vectores podemos expresar la expresión anterior como un producto punto:

$$\partial W = F \bullet \partial s$$

Calculamos entonces el trabajo del campo de fuerzas para transportar una partícula a lo largo de la curva σ, es:

$$W = \int_{\sigma} F \bullet \partial s$$

Ejemplo 7-6 Dado el campo de fuerzas $F(x,y,z) = \langle 2x+2y, 2x, 3z^2 \rangle$. Encontrar el trabajo que realizará F al mover una partícula a través de los puntos: $(0,0,0) \rightarrow (1,2,0) \rightarrow (1,2,5)$.

Solución: El problema nos pide determinar el trabajo de un campo de fuerzas para mover una partícula a través de una curva, así que se trata de una integral de línea. Como podemos observar en la figura 7-8, la curva C es seccionalmente continua así que debemos dividirla en dos curvas:

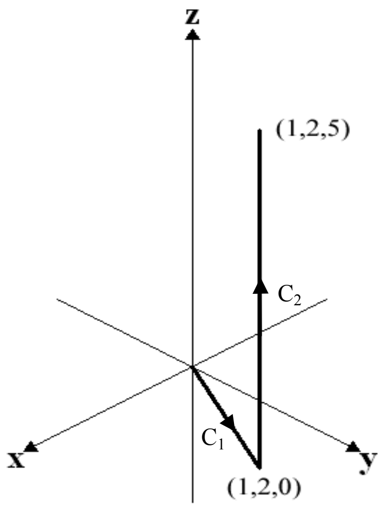


Figura 7-8

Donde cada curva la parametrizamos:

$$C_1^+ : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases} \qquad C_2^+ : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}$$

$$0 \le t \le 1 \qquad 0 \le t \le 5$$

Resolvemos la integral de línea acuerdo a la definición:

$$\int_C F \bullet \partial s = \int_{C_1^+} F \bullet \partial s + \int_{C_2^+} F \bullet \partial s$$

$$= \int_0^1 F(t,2t,0) \bullet (1,2,0)\partial t + \int_0^5 F(1,2,t) \bullet (0,0,1)\partial t$$

$$= \int_0^1 10t\,\partial t + \int_0^5 3t^2 \partial t$$

$$= \left[5t^2\right]_0^1 + \left[t^3\right]_0^5$$

$$= 5 + 125$$

$$\int_C F \bullet \partial s = 130$$

7.5 INTEGRALES DE LÍNEA EN CAMPOS CONSERVATIVOS.

En el capítulo 5 se estudiaron un tipo particular de campos vectoriales, los campos vectoriales gradientes (también conocidos como campos vectoriales conservativos).

Sea $F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$ un campo vectorial gradiente definida en $U \subset R^3 \to R^3$, diferenciable y acotada en U; $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ la parametrización de una trayectoria en R^3, $\sigma(t) : [a,b] \subset R \to R^3$, entonces la integral de línea se puede definir como:

$$\int_\sigma F \bullet \partial s = \int_a^b (F \circ \sigma) \bullet (\sigma'(t))\partial t$$

Como $F(x,y,z) = (F_1, F_2, F_3)$ es un campo vectorial gradiente, entonces existe una función escalar $f(x,y,z)$ definida en $R^3 \to R$, tal que:

$$F = \nabla f$$

$$(F_1, F_2, F_3) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Entonces la integral de línea queda de la siguiente manera:

$$\int_{\sigma} F \bullet \partial s = \int_a^b (\nabla f \circ \sigma) \bullet (\sigma'(t)) \partial t$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\sigma(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(\sigma(t)), \frac{\partial f}{\partial z}(\sigma(t)) \right) \bullet \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t} \right) \partial t$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\sigma(t)) \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}(\sigma(t)) \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}(\sigma(t)) \frac{\partial z}{\partial t} \right) \partial t$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial t}(\sigma(t)) \right) \partial t$$

$$= \int_a^b (\partial f(\sigma(t)))$$

$$\int_{\sigma} F \bullet \partial s = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a))$$

Ejemplo 7-7 Sea $F(x, y, z) = (2xyz + \operatorname{sen} x)\mathbf{i} + x^2 z\mathbf{j} + x^2 y\mathbf{k}$, determinar*:*

a.- Si F es un campo gradiente y si lo es encontrar su función potencial.

b.- $\int_C F \cdot \partial r$ donde C es el segmento de recta que une los puntos $(0,0,0)$ y $(1,2,3)$.

c.- $\int_C F \bullet \partial r$ donde C es el segmento de recta que une los puntos $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,2,0)$ y $(1,2,3)$.

d.- $\int_C F \bullet \partial r$ donde C es la intersección del plano $y = x$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Solución: a.- Para determinar si F es un campo gradiente calculamos su rotor:

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz + \operatorname{sen} x & x^2 z & x^2 y \end{vmatrix} = \left(x^2 - x^2, 2xy - 2xy, 2xz - 2xz\right)$$

$$\operatorname{rot} F = (0,0,0)$$

$\therefore \quad F$ es un campo gradiente porque su rotor es igual a cero

Entonces determinamos la función potencial de F:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xyz + \operatorname{sen} x \qquad f(x,y,z) = \int_x (2xyz + \operatorname{sen} x)\partial x = x^2 yz - \cos x + k(y,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 z \qquad f(x,y,z) = \int_y x^2 z \partial y = x^2 yz + k(x,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^2 y \qquad f(x,y,z) = \int_z x^2 y \partial z = x^2 yz + k(x,y)$$

$$f(x,y,z) = x^2 z - \cos x + k \ \forall$$

b.- Como F es un campo gradiente podemos calcular la integral de línea evaluando su función potencial en el punto final, menos su valor en el punto inicial:

$$\int_C F \bullet \partial r = f(1,2,3) - f(0,0,0) = 6 - \cos(1) - 1$$

$$\int_C F \bullet \partial r = 5 - \cos(1) \ \forall$$

c.- Calculamos la integral de igual manera que en el literal anterior:

$$\int_C F \bullet \partial r = f(1,2,3) - f(0,0,0) = 6 - \cos(1) - 1$$

$$\int_C F \bullet \partial r = 5 - \cos(1) \ \forall$$

d.- Como la curva es cerrada y el campo es conservativo la integral de línea es cero:

$$\oint_C F \bullet \partial r = 0 \ \forall$$

7.6 TEOREMA DE GREEN, APLICACIONES

Sean $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ funciones definidas en $D \subset R^2 \to R$; de tal forma que $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$. D una región plana tipo 3, "∂D" su contorno orientado positivamente: entonces:

$$\int_{\partial D} P\,\partial x + Q\partial y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \partial x\,\partial y$$

Demostración:

$$\int_{\partial D} P\,\partial x + Q\,\partial y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \partial x\,\partial y$$

$$\int_{\partial D} P\,\partial x + \int_{\partial D} Q\,\partial y = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,\partial x\,\partial y - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,\partial x\,\partial y$$

Primero se demostrará que: $\int_{\partial D} P\,\partial x = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,\partial x\,\partial y$

Para esto consideramos a D como una región tipo 1:

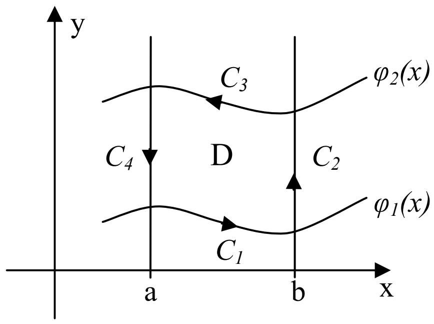


Figura 7-9

$$D: \left\{ (x,y) \in R^2 \,/\, \begin{array}{c} a \le x \le b \\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \end{array} \right\}$$

Definimos la curva ∂D como:

$$\partial D^{(+)} = C_1^{+} \cup C_2^{+} \cup C_3^{-} \cup C_4^{-}$$

Donde cada curva la parametrizamos:

$$C_1^{+}: \begin{cases} x = t \\ y = \varphi_1(t) \end{cases} \quad C_2^{+}: \begin{cases} x = a \\ y = t \end{cases}$$

$$C_3^{-}: \begin{cases} x = t \\ y = \varphi_2(t) \end{cases} \quad C_4^{-}: \begin{cases} x = b \\ y = t \end{cases}$$

Entonces la integral de línea queda:

$$\int_{\partial D} P\,\partial x = \int_{C_1^{+}} P\,\partial x + \int_{C_2^{+}} P\,\partial x + \int_{C_3^{-}} P\,\partial x + \int_{C_4^{-}} P\,\partial x$$

$$= \int_a^b P(t, \varphi_1(t))\,\partial t - \int_a^b P(t, \varphi_2(t))\,\partial t$$

La integral doble queda:

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\partial x\,\partial y = -\int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\partial y\,\partial x$$

$$= -\int_a^b \left[P(x,y)\right]_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\partial x$$

$$= -\int_a^b \left(P(x,\varphi_2(x)) - P(x,\varphi_1(x))\right)\partial x$$

$$= \int_a^b \left(P(x,\varphi_1(x)) - P(x,\varphi_2(x))\right)\partial x$$

Haciendo un cambio de variable de $x = t$, tenemos que:

$$\int_{\partial D} P\,\partial x = \int_a^b P(t,\varphi_1(t))\partial t - \int_a^b P(t,\varphi_2(t))\partial t = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\partial x\,\partial y$$

Ahora se demostrará que: $\int_{\partial D} Q\,\partial y = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\partial x\,\partial y$

Para esto consideramos a *D* como una región tipo 2:

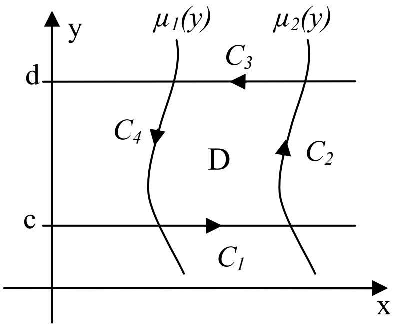


Figura 7-10

$$D: \left\{ (x,y) \in R^2 \,/\, \begin{matrix} \mu_1(x) \le x \le \mu_2(x) \\ c \le y \le d \end{matrix} \right\}$$

Definimos la curva ∂D como:

$$\partial D^{(+)} = C_1^{\,+} \cup C_2^{\,+} \cup C_3^{\,-} \cup C_4^{\,-}$$

Donde cada curva la parametrizamos:

$$C_1^{\,+}: \begin{cases} x = t \\ y = c \end{cases} \qquad C_2^{\,+}: \begin{cases} x = t \\ y = \mu_2(t) \end{cases}$$

$$C_3^{\,-}: \begin{cases} x = t \\ y = d \end{cases} \qquad C_4^{\,-}: \begin{cases} x = t \\ y = \mu_1(t) \end{cases}$$

Entonces la integral de línea queda:

$$\int_{\partial D} Q\,\partial y = \int_{C_1^+} Q\,\partial y + \int_{C_2^+} Q\,\partial y + \int_{C_3^-} Q\,\partial y + \int_{C_4^-} Q\,\partial y$$

$$= \int_a^b P(t,\mu_2(t))\partial t - \int_a^b P(t,\mu_1(t))\partial t$$

La integral doble queda:

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\partial x\,\partial y = \int_c^d \int_{\mu_1(y)}^{v_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\partial x\,\partial y$$

$$= \int_a^b \left[Q(x,y)\right]_{\mu_1(y)}^{\mu_2(y)} \partial y$$

$$= \int_a^b \left(Q(\mu_2(y),y) - Q(\mu_1(y),y)\right)\partial y$$

Haciendo un cambio de variable de $x = y$, tenemos que:

$$\int_{\partial D} Q\,\partial y = \int_a^b P(t,\mu_2(t))\partial t - \int_a^b P(t,\mu_1(t))\partial t = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\partial x\,\partial y$$

Ejemplo 7-8 Verificar el teorema de Green en la integral $\oint_C 2(x^2+y^2)\partial x + (x+y)^2\partial y$, siendo C el contorno del triángulo con vértices en los puntos $(1,1)$, $(2,2)$ y $(1,3)$.

Solución: Como podemos observar en la figura 7-11 el problema nos pide determinar la integral de línea a lo largo de una curva cerrada que limita una región plana.

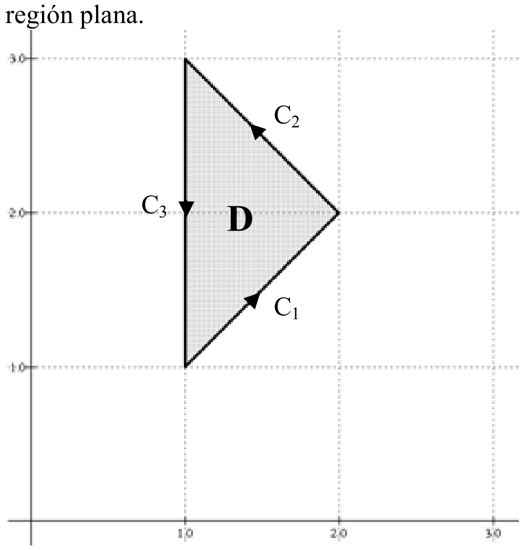


Figura 7-11

Donde cada curva la parametrizamos:

$$C_1^+ : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \qquad C_2^- : \begin{cases} x = t \\ y = 4 - t \end{cases} \qquad C_3^- : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases}$$

$$1 \le t \le 2 \qquad 1 \le t \le 2 \qquad 1 \le t \le 3$$

Resolvemos la integral de línea acuerdo a la definición:

$$\int_C F \bullet \partial s = \int_{C_1^+} F \bullet \partial s + \int_{C_2^-} F \bullet \partial s + \int_{C_3^-} F \bullet \partial s$$

$$= \int_1^2 F(t,t) \bullet (1,1) \partial t - \int_1^2 F(t,4-t) \bullet (1,-1) \partial t - \int_1^3 F(1,t) \bullet (0,1) \partial t$$

$$= \int_1^2 8t^2 \partial t - \int_1^2 \left(4t^2 - 16t + 16\right) \partial t - \int_1^3 \left(t^2 + 2t + 1\right) \partial t$$

$$= \left[\frac{8t^3}{3}\right]_1^2 - \left[\frac{4t^3}{3} - 8t^2 + 16t\right]_1^2 - \left[\frac{t^3}{3} + t^2 + t\right]_1^3$$

$$= \frac{56}{3} - \frac{28}{3} + 24 - 16 - \frac{26}{3} - 8 - 2$$

$$\int_C F \bullet \partial s = -\frac{4}{3}$$

Ahora resolvemos aplicando el teorema de Green:

$$\int_C F \bullet \partial s = \iint_D \left(2(x+y) - 4y\right) \partial y \, \partial x = \int_1^2 \int_x^{4-x} (2x - 2y) \partial y \partial x$$

$$= \int_1^2 \left[2xy - y^2\right]_x^{4-x} \partial x = \int_1^2 \left(2x(4-2x) - (4-x)^2 + x^2\right) \partial x$$

$$= \int_1^2 \left(-4x^2 + 16x - 16\right) \partial x = \left[-\frac{4}{3}x^3 + 8x^2 - 16\right]_1^2$$

$$= -\frac{28}{3} + 24 - 16$$

$$\int_C F \bullet \partial s = -\frac{4}{3}$$

El teorema de Green puede ser aplicado al cálculo de áreas de regiones planas. Consideremos la región plana D en R^2. Sea $\sigma(t) = (x(t), y(t))$, $\sigma(t):[a,b] \subset R \to R^2$, la parametrización de la frontera de D orientada positivamente. Sea el campo vectorial $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, $F(x, y): R^2 \to R^2$, continua e integrable en D. Entonces el área de la región D está definida por:

$$A[D] = \iint_D \partial y \, \partial x$$

Aplicando el teorema de Green al calcular la integral de línea de F sobre σ:

$$\int_\sigma F \bullet \partial s = \int_\sigma P \, \partial x + Q \partial y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \partial y \, \partial x$$

Entonces para el valor de la integral de línea sea numéricamente igual al valor del área de la región D, el campo vectorial F debe cumplir la siguiente condición:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

Por ejemplo tomando el campo $F(x, y) = \left(-\frac{1}{2} y, \frac{1}{2} x\right)$, al aplicar el teorema de Green:

$$\int_\sigma F \bullet \partial s = \int_\sigma -\tfrac{1}{2} y \, \partial x + \tfrac{1}{2} x \partial y = \iint_D \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\right) \partial y \, \partial x = \iint_D \partial y \, \partial x = A[D]$$

Ejemplo 7-9 Calcular el área encerrada por el hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Solución: Como podemos observar en la figura 7-12 el problema nos pide determinar el área de la región plana limitada por una curva cerrada.

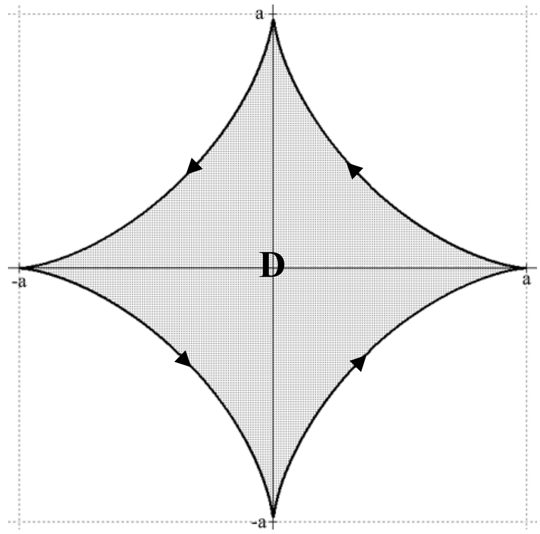


Figura 7-12

La parametrización del hipocicloide orientado positivamente es:

$\sigma(\theta) = (a\cos^3\theta, a\,\mathrm{sen}^3\theta); \quad 0 \le \theta \le 2\pi$

Aplicando el teorema de Green para el cálculo de áreas tenemos:

$$A[D]=\iint_D \partial y\,\partial x=\int_\sigma -\tfrac{1}{2}y\,\partial x+\tfrac{1}{2}x\,\partial y$$

$$=\int_0^{2\pi} -\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{sen}^3\theta\left(-3a\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\theta\,\partial\theta\right)+\tfrac{1}{2}a\cos^3\theta\left(3a\,\mathrm{sen}^2\theta\cos\theta\,\partial\theta\right)$$

$$=\frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(\mathrm{sen}^4\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta\,\mathrm{sen}^2\theta\right)\partial\theta$$

$$=\frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\theta\left(\mathrm{sen}^2+\cos^2\right)\partial\theta$$

$$=\frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\mathrm{sen}2\theta}{2}\right)^2\partial\theta$$

$$=\frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos4\theta}{2}\right)\partial\theta$$

$$=\frac{3a^2}{16}\left[\theta-\frac{\mathrm{sen}4\theta}{4}\right]_0^{2\pi}$$

$$A[D]=\frac{3a^2\pi}{8}$$ ✔

7.7 FORMAS VECTORIALES DEL TEOREMA DE GREEN.

Sea el campo vectorial $F(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$, $F(x,y):R^2\rightarrow R^2$, continua e integrable en *D*. *D* una región plana tipo 3, "∂D" su contorno orientado positivamente entonces de acuerdo al teorema de Green:

$$\int_{\partial D} F\bullet\partial s=\int_{\partial D} P\,\partial x+Q\partial y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\partial x\,\partial y$$

Ahora si calculamos el rotor de *F*:

$$\mathrm{rot}F=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & 0\end{vmatrix}=\left(0,0,\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

Definimos el producto punto:

$$(\mathrm{rot}F)\bullet\mathbf{k}=\left(0,0,\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\bullet(0,0,1)=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$$

Entonces el teorema de Green pude ser expresado de la siguiente manera:

$$\int_{\partial D} F \bullet \partial s = \iint_{D} \left((\operatorname{rot} F) \bullet \mathbf{k} \right) \partial x \, \partial y$$