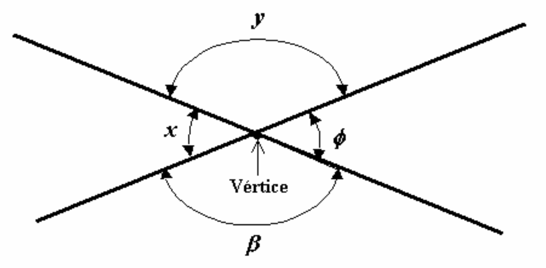
5 GEOMETRIA PLANA

La trigonometría con la Geometría Plana están íntimamente relacionadas. Se requiere el uso de conceptos y procedimientos geométricos para resolver situaciones prácticas, de allí su importancia de estudio.

Definiciones y criterios de trigonometría van a ser útiles en este capítulo.

5.1 ANGULOS OPUESTOS POR EL VÉRTICE

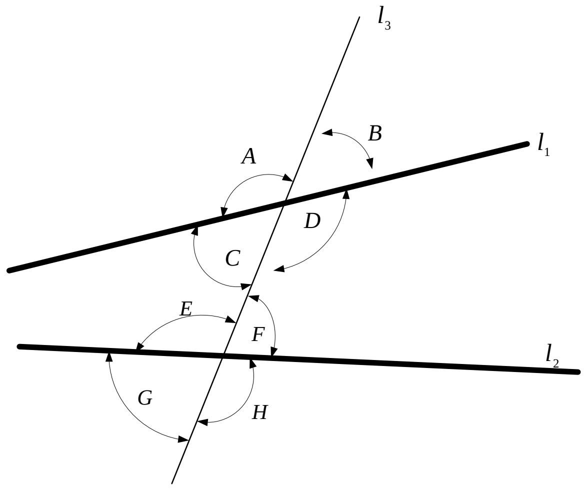
Suponga que dos rectas tienen un mismo punto de intersección



Al punto de intersección se lo denomina ***vértice.*** Los pares de ángulos "x","ϕ" y "y","β" se los denomina "***ángulos opuestos por el vértice***". Observe que los ángulos opuestos por el vértice son de igual medida.

5.2 ANGULOS ALTERNOS INTERNOS, ALTERNOS EXTERNOS, CORRESPONDIENTES.

Suponga que se tienen tres rectas l_1, l_2 y l_3 ubicadas en el plano de la manera indicada en el gráfico:



Los ángulos A, B, G y H se denominan **Externos.**

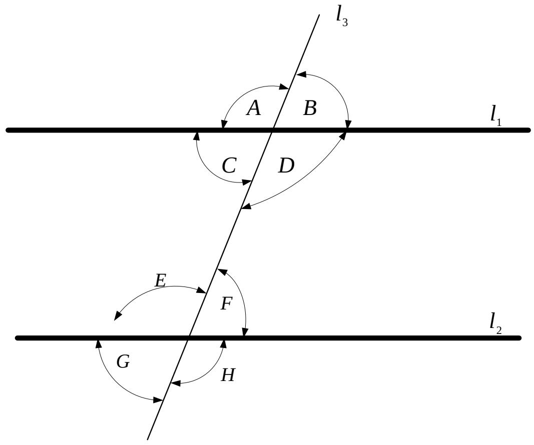
Los ángulos C, D, E y F se denominan **Internos.**

Los pares de ángulos:

- C y F , D y E se denominan **Alternos Internos**.
- A y H , B y G se denominan **Alternos Externos**.

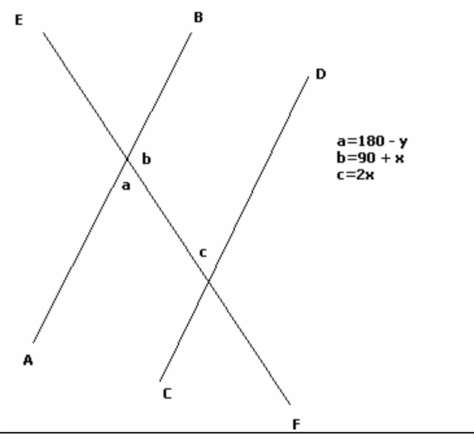
- A y E, B y F, C y G, D y H se denominan **Correspondientes**.

Si l_1, l_2 son paralelas ($l_1 // l_2$) entonces los pares de ángulos alternos internos, alternos externos y correspondientes son de igual medida.



Ejercicio Propuesto 5.1

1. Si las rectas AB y CD son paralelas en el gráfico adjunto, determine la medida en radianes del ángulo 'x' y la medida del ángulo 'y'. Resp. $x = \frac{\pi}{6}$, $y = \frac{2\pi}{3}$.



5.3 FIGURA PLANA

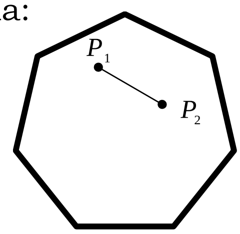
Todo subconjunto no vacío del plano se denomina *FIGURA PLANA*.

5.3.1 Figura plana convexa

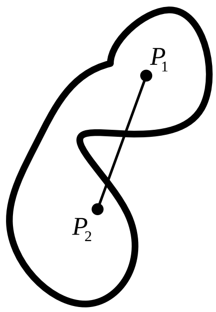
Sea F una figura plana cerrada. F es convexa si y sólo si

$$\forall P_1 \in F, \forall P_2 \in F\left[\overline{P_1P_2} \subseteq F\right]$$

Una figura convexa sería:



Una figura no convexa podría ser



De aquí en adelante trataremos sólo con figuras convexas.

5.3.2 Puntos Colineales

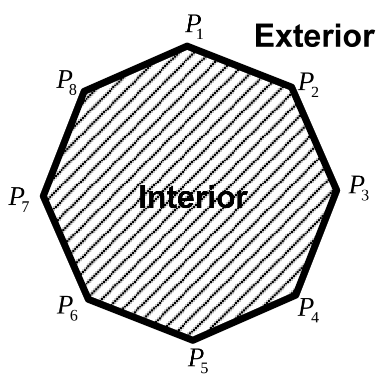
> Sean P_1, P_2 y P_3 tres puntos del plano. P_1, P_2 y P_3 son **colineales** si y sólo si $P_1 \in \overline{P_2P_3}$ o $P_2 \in \overline{P_1P_3}$ o $P_3 \in \overline{P_1P_2}$.

En otros términos, se dice que los puntos son colineales si pertenecen a una misma recta.

Si tenemos puntos no colineales, podemos formar una figura plana cerrada trazando segmentos de rectas uniendo todos los puntos. Esta figura, formada así, se convertirá en un importante objeto de estudio.

5.3.3 Poligonal.

> Sean P_1, $P_2, \ldots,$ P_n, n puntos no colineales . Se denomina POLIGONAL al conjunto de puntos que pertenecen a la unión de los segmentos de rectas $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$ $, \ldots,$ $\overline{P_nP_1}$



La poligonal divide al plano en dos regiones: *la interior a la poligonal y la exterior a la poligonal.*

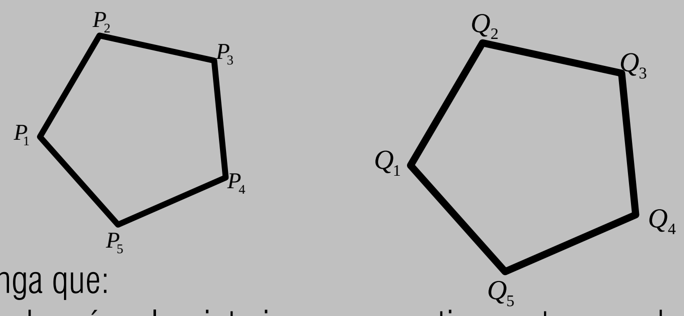
5.3.4 Polígono.

> Se denomina POLÏGONO al conjunto de punto que pertenecen tanto a lo poligonal como a la región interior de la poligonal.

A los puntos P_1, $P_2,\ldots,$ P_n se los denomina **vértices del polígono**. A los segmentos $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$ $,\ldots,\overline{P_nP_1}$ se los denomina **lados del polígono**. A los segmentos de rectas formados entre vértices no consecutivos, se les denomina **diagonales**. A los ángulos $P_1P_2P_3$, $P_2P_3P_4,\ldots,$ $P_{n-1}P_nP_1$ se les denomina **ángulos interiores**.

Si los lados del polígono son de igual medida, se dice que es un **polígono regular;** caso contrario se dice que es un **polígono irregular**.

5.3.4.1 Congruencia y semejanza de polígonos

> Sean los polígonos $P(P_1P_2\cdots P_n)$ y $Q(Q_1Q_2\cdots Q_n)$
>
> 
>
>
> Suponga que:
>
> 1. Los ángulos interiores, respectivamente, son de igual medida. Y;
> 2. $\dfrac{\overline{P_1P_2}}{\overline{Q_1Q_2}}=\dfrac{\overline{P_2P_3}}{\overline{Q_2Q_3}}=\cdots=\dfrac{\overline{P_nP_1}}{\overline{Q_nQ_1}}=k$
>
> Entonces, si $k=1$ se dice que los polígonos son **conguentes**, caso contrario, es decir si $k\neq 1$, se dice que los polígono son **semejantes**.

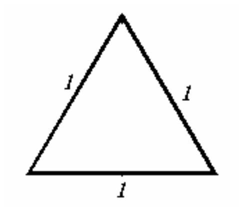
5.4 TRIÁNGULO

El triángulo es un polígono de tres lados.

5.4.1 CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS DE ACUERDO A SUS LADOS

5.4.1.1 Equilátero

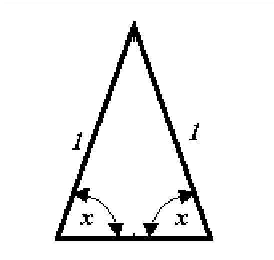
Todos sus lados y ángulos tienen igual medida.



Por tanto sus ángulos interiores miden 60°. ¿POR QUÉ?

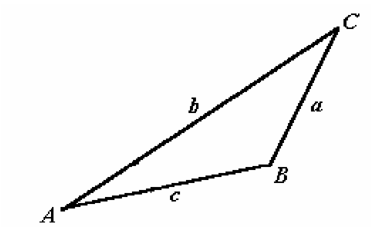
5.4.1.2 Isósceles

Tienen sólo dos lados y sus respectivos ángulos adyacentes de igual medida



5.4.1.3 Escaleno

Tienen sus lados y ángulos de diferentes medidas



El siguiente teorema es de gran utilidad.

5.4.2 TEOREMA

> En todo triángulo la suma de las medidas de sus ángulos interiores es igual a 180°.

¡DEMUÉSTRELO!

5.4.3 TEOREMA

> En triángulos de lados de igual medida o proporcionales se oponen ángulos de igual medida.

¡DEMUÉSTRELO!

5.4.4 CONGRUENCIA Y SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Para determinar si dos triángulos son congruentes o semejantes, bastará con:

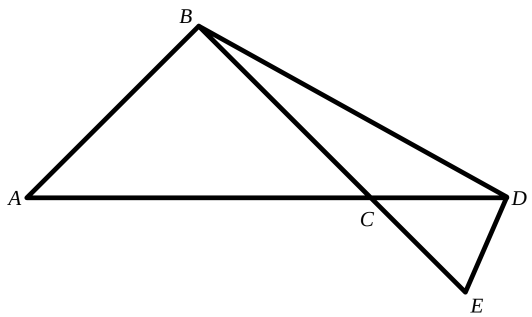
CRITERIO 1: Comprobar que tienen dos ángulos de igual medida (semejantes) y un lado de igual medida (congruentes).

CRITERIO 2: Comprobar que tienen dos lados de medidas proporcionales (semejantes) o igual medida (congruentes).

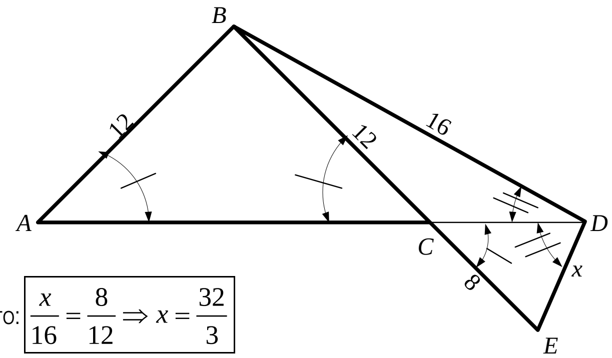
CRITERIO 3: Comprobar que tienen tres lados de medidas proporcionales (semejantes) o tres lados de medidas iguales (congruentes).

Ejemplo 1

Referente al gráfico: $\overline{AB}=\overline{BC}=12$, $\angle BDC=\angle CDE$, $\overline{BD}=16$, $\overline{CE}=8$
Hallar $\overline{DE}$



SOLUCIÓN:
Primero ubicamos los datos en el gráfico. Se observa que el triángulo ABC es isósceles, el triángulo ABD es semejante al triángulo CDE debido a que tienen dos ángulos de igual medida.

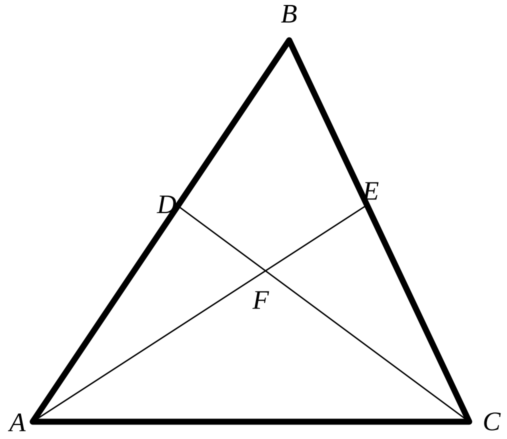


POR TANTO: $\boxed{\dfrac{x}{16}=\dfrac{8}{12}\Rightarrow x=\dfrac{32}{3}}$

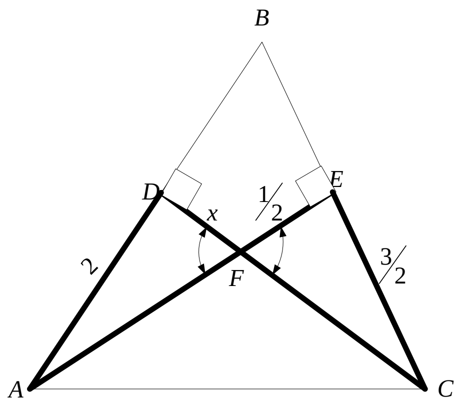
Ejemplo 2

Referente al gráfico: $\overline{AD}=2$, $\overline{EC}=\frac{3}{2}$, $\overline{EF}=\frac{1}{2}$, $\angle BDF=\angle BEA=90^0$

Hallar $\overline{DF}$



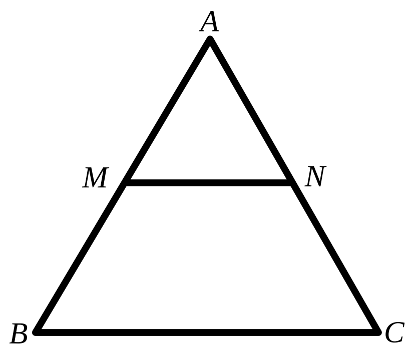
SOLUCIÓN:
Primero ubicamos los datos en el gráfico. Se observa que el triángulo ADF es semejante al triángulo CEF debido a que tienen dos ángulos de igual medida.



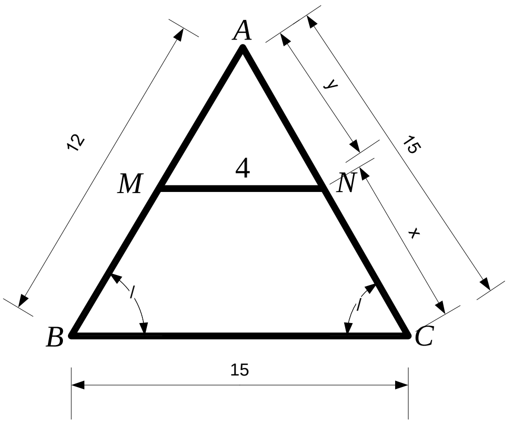
POR TANTO: $\boxed{\frac{x}{2}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} \Rightarrow x=\frac{2}{3}}$

Ejemplo 3

En el triángulo de la figura: $\overline{AB}=12$, $\overline{AC}=15$, $\overline{BC}=15$, $\overline{MN}\,//\,\overline{BC}$, $\overline{MN}=4$. Hallar $\overline{NC}$.



SOLUCIÓN:
Ubicando los datos en la figura, se observa que el triángulo ABC es semejante al triángulo AMN.

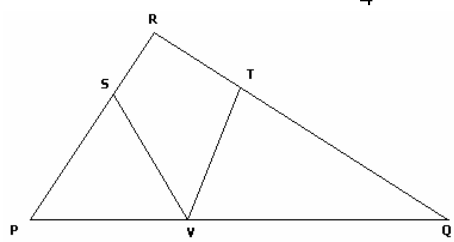


Aplicando semejanza: $\frac{y}{15}=\frac{4}{15} \Rightarrow y=4$ (Aunque ya se podría predecir este valor. ¿Por qué?.

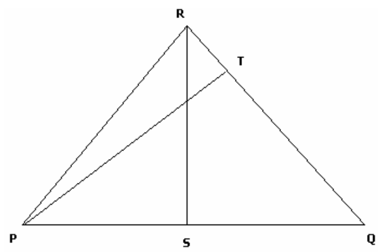
Ahora: $x=\overline{NC}=15-y=15-4=11$

Ejercicios Propuestos 5.2

1. En la figura adjunta, el ángulo PRQ es igual a $\frac{\pi}{2}$, QT = QV, PS = PV. Determine la medida del ángulo SVT. Resp. $\frac{\pi}{4}$

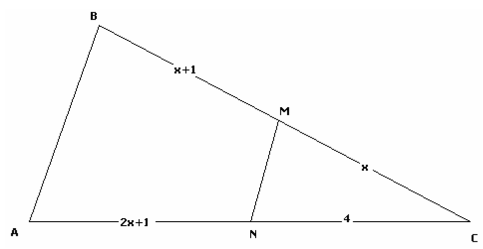


2. En la figura adjunta, RS es la altura correspondiente al lado PQ, PT es la altura correspondiente al lado RQ, PQ = 8, RS = 9 y PT = 6. Determine la longitud de QR. Resp. 12 .

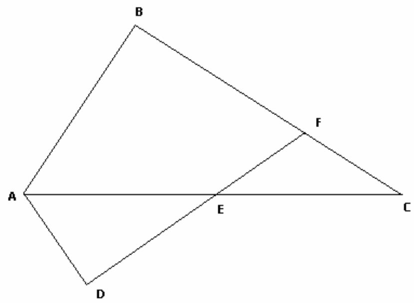


3. Si se tiene el triángulo ABC y el segmento MN es paralelo al segmento AB, entonces la distancia 'x' es igual a:

Resp. $x=\frac{3+\sqrt{41}}{4}$

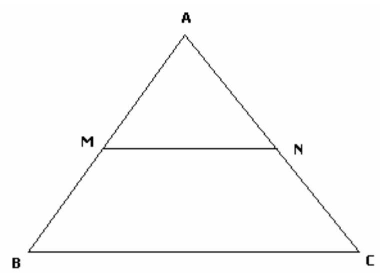


4. Referente al gráfico adjunto, se tienen los siguientes datos:
AB = AD + 10 , EC = 12, AC = 20, EF = FC, $\angle$ BAC = $\angle$ EAD.
Determine la longitud del lado AD. Resp. $\frac{20}{3}$.



5. En el triángulo, MN || BC, AB = 6, BC = 15, MN = 9. Determine $\dfrac{per(\Delta ABC)}{per(\Delta AMN)}$

Resp. $\frac{5}{3}$

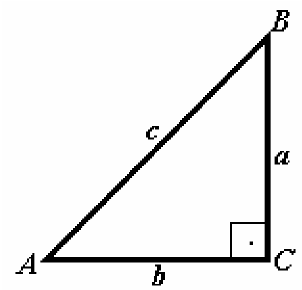


5.4.4 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

La resolución de un triángulo consiste en establecer las medidas de todos sus lados y ángulos. Para lo cual existen procedimientos diferentes dependiendo si el triángulo es rectángulo o si es un triángulo cualquiera.

5.4.4.1 Triángulo rectángulo

Si tenemos un triángulo rectángulo:



Para determinar la medida de uno de sus lados conociendo las medidas de los otros dos lados podemos hacer uso del Teorema de Pitágoras, es decir que $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$ de donde:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$
$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

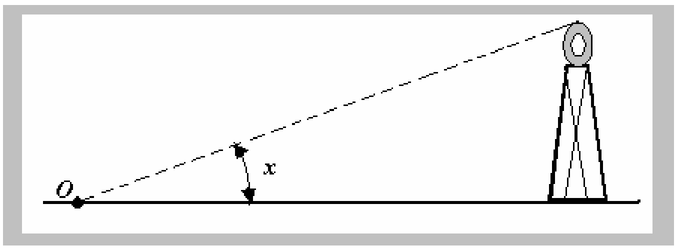
Si conocemos al menos la medida de dos de sus lados podemos hacer uso de las funciones trigonométricas para los ángulos agudos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$:

$$\operatorname{sen} A = \frac{a}{c} \qquad \operatorname{sen} B = \frac{b}{c}$$
$$\cos A = \frac{b}{c} \qquad \cos B = \frac{a}{c}$$
$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} \qquad \operatorname{tg} B = \frac{b}{a}$$

Puede ocurrir también que si conocemos las medidas de los ángulos y la medida de un lado entonces podemos emplear las funciones trigonométricas anteriores para determinar las medidas de los otros lados.

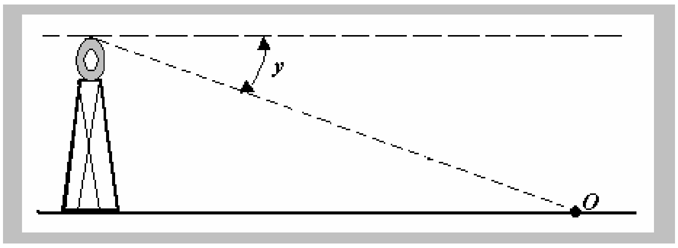
Para problemas de aplicaciones, las siguientes definiciones resultan útiles.

Suponga que desde el suelo observamos hacia la cúspide de una torre



Al ángulo "x" se lo llama "***Angulo de elevación***"

Si cambiamos la óptica, suponga ahora que hacemos la observación desde la cúspide de la torre hacia un objetivo en el suelo.



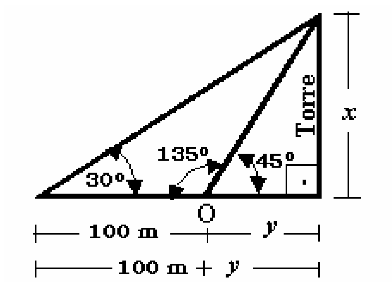
Entonces al ángulo " y " se lo llama "***Angulo de depresión***"

Ejercicio resuelto 1

Desde un punto O, el ángulo de elevación a la cúspide de una torres es de 45°. Alejándose 100m el ángulo de elevación es de 30°. Determinar la altura de la torre.

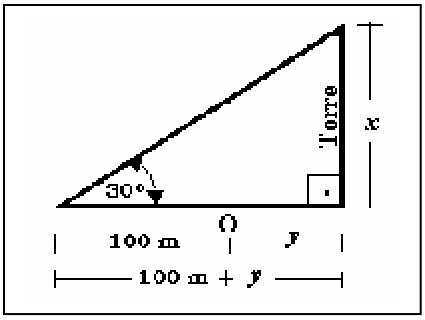
<u>SOLUCIÓN</u>:

Un esquema del planteamiento del problema sería:



La altura " x " de la torre se la determina empleando funciones trigonométricas para los ángulos de los triángulos que se forman:

Para el triángulo:



$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{x}{100+y}$$
$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{100+y}$$

Por otro lado:

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{x}{y}$$
$$1 = \frac{x}{y} \Rightarrow x = y$$

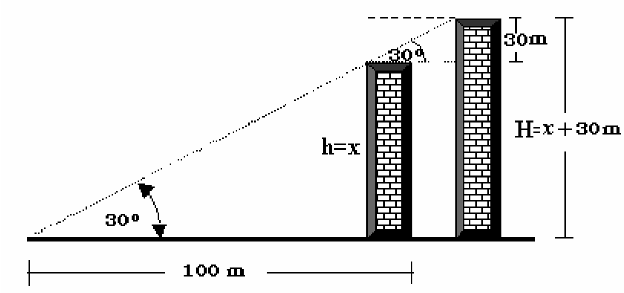
Por lo tanto:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\boldsymbol{x}}{100+\boldsymbol{x}}$$
$$\sqrt{3}(100+\boldsymbol{x}) = 3\boldsymbol{x}$$
$$100\sqrt{3} + \sqrt{3}\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{x}$$
$$3\boldsymbol{x} - \sqrt{3}\boldsymbol{x} = 100\sqrt{3}$$
$$\boldsymbol{x} = \frac{100\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

Ejercicio resuelto 2

Una chimenea tiene 30m. de altura más que otra. Un observador que está a 100m. De distancia de la más baja observa que sus cúspides están en una recta inclinada respecto al horizonte un ángulo de 30°; hállese las alturas de las chimeneas.

SOLUCIÓN:
Un esquema del planteamiento del problema es:



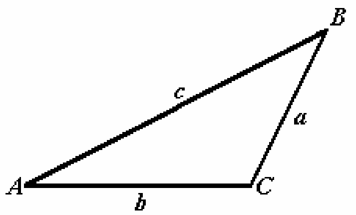
Aplicando funciones trigonométricas a los ángulos del triángulo rectángulo que se forma, tenemos:

$$\operatorname{tg} 30^{\circ} = \frac{x}{100}$$
$$x = 100 \operatorname{tg} 30^{\circ}$$
$$h = x = \frac{100\sqrt{3}}{3}\ m$$

$$H = x + 30$$
$$H = \frac{100\sqrt{3}}{3} + 30$$
$$H = \frac{100\sqrt{3}+90}{3}\ m$$

5.4.4.2 Triángulo en general

Si tenemos un triángulo cualquiera



Dependiendo de la información que dispongamos podemos hacer uso de las siguientes leyes:

Ley del Seno

$$\boxed{\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}}$$

¡DEMUÉSTRELA!

Ley del Coseno

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$$

$$\boxed{a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos A}$$

$$\boxed{b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos B}$$

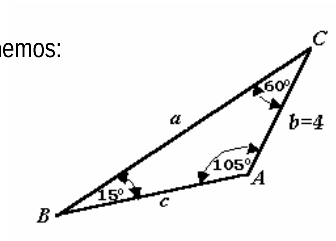
¡DEMUÉSTRELA!

Ejercicio resuelto 1

Sea un triángulo ABC tal que $\measuredangle A = 105^\circ$ $\measuredangle C = 60^\circ$, $b = 4$. Encuentre las medidas de los lados c y a y la del ángulo B

SOLUCIÓN:

Esquematizando la información, tenemos:



La medida del ángulo *B* sería:

$$\begin{aligned}\angle B &= 180° - \angle C - \angle A\\ \angle B &= 180° - 60° - 105°\\ \angle B &= 15°\end{aligned}$$

Obtengamos $\operatorname{sen} 15°$ y $\operatorname{sen} 105°$:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 15^\circ &= \operatorname{sen}(45^\circ - 30^\circ)\\ &= \operatorname{sen} 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \operatorname{sen} 30^\circ\\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\\ \operatorname{sen} 15^\circ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} - 1\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 105^\circ &= \operatorname{sen}(60^\circ + 45^\circ)\\ &= \operatorname{sen} 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \operatorname{sen} 45^\circ\\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\left(\sqrt{3} + 1\right)\end{aligned}$$

Aplicando la ley de los senos determinamos las medidas de los lados "c" y "a":

$$\begin{aligned}\frac{c}{\operatorname{sen} C} &= \frac{b}{\operatorname{sen} B}\\ \frac{c}{\operatorname{sen} 60^\circ} &= \frac{4}{\operatorname{sen} 15^\circ}\\ c &= \frac{4\operatorname{sen} 60^\circ}{\operatorname{sen} 15^\circ}\\ c &= \frac{4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} - 1\right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{a}{\operatorname{sen} A} &= \frac{b}{\operatorname{sen} B}\\ a &= \frac{b\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}\\ a &= \frac{4\operatorname{sen} 105^\circ}{\operatorname{sen} 15}\\ a &= \frac{4\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\left(\sqrt{3} + 1\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\left(\sqrt{3} - 1\right)}\\ a &= \frac{4\left(\sqrt{3} + 1\right)}{\left(\sqrt{3} - 1\right)}\end{aligned}$$

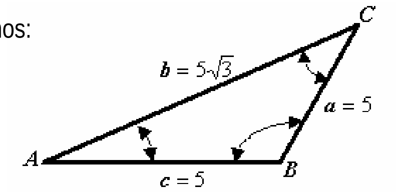
Piense cuál sería el procedimiento para resolver el problema, aplicando la ley de los cosenos.

Ejercicio resuelto 2

Sea un triángulo ABC tal que $a=5, b=5\sqrt{3}, c=5$. Encontrar las medidas de los ángulos internos.

SOLUCIÓN:

Esquemáticamente tenemos:



Aplicando la ley del coseno:

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}\\ \cos A &= \frac{(5)^2+\left(5\sqrt{3}\right)^2-(5)^2}{2(5)\left(5\sqrt{3}\right)}\\ \cos A &= \frac{\left(5\sqrt{3}\right)^2}{2(5)\left(5\sqrt{3}\right)}\\ \cos A &= \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = 30^\circ\end{aligned}$$

La medida de uno de los otros dos ángulos, se la puede determinar aplicando también la ley del coseno o aplicando la ley de los senos.

Aplicando la ley de los senos: $\boxed{\dfrac{\operatorname{sen} C}{c}=\dfrac{\operatorname{sen} A}{a}}$ tenemos:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} C &= \frac{\operatorname{sen} A}{a}c\\ &= \frac{\operatorname{sen} 30^\circ}{5}5\\ \operatorname{sen} C &= \frac{1}{2} \Rightarrow C = 30^\circ\end{aligned}$$

Este último resultado también lo podemos obtener directamente. Observe que el triángulo es isósceles, por tanto sus ángulos adyacentes son iguales.

La medida del tercer ángulo se lo obtiene por diferencia, es decir:

$$\begin{aligned}\angle B &= 180^\circ-30^\circ-30^\circ\\ \angle B &= 120^\circ\end{aligned}$$

Ejercicio resuelto 3

Los ángulos internos de un triángulo cuyos lados miden: $a=\sqrt{2}\,m$; $b=2\,m$; $c=\left(\sqrt{3}-1\right)m$; son:

a) $A=45^\circ$; $B=75^\circ$; $C=60^\circ$

b) $A=60^\circ$; $B=45^\circ$; $C=75^\circ$

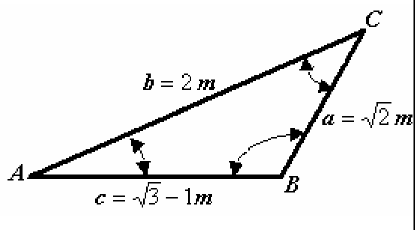
c) $A=15^\circ$; $B=60^\circ$; $C=105^\circ$

d) $A=30^\circ$; $B=135^\circ$; $C=15^\circ$

e) $A=150^\circ$; $B=45^\circ$; $C=30^\circ$

SOLUCIÓN:

Semejante al problema anterior, conocemos las medidas de todos los lados del triángulo.



$$\cos \boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{c}^2 - \boldsymbol{b}^2}{2\boldsymbol{ac}}$$

$$\cos \boldsymbol{B} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}-1\right)^2 - 4}{2\left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}$$

$$\cos \boldsymbol{B} = \frac{2+3-2\sqrt{3}+1-4}{2\left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}$$

$$\cos \boldsymbol{B} = \frac{-2\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)} \Rightarrow \cos \boldsymbol{B} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boldsymbol{B} = 135^\circ$$

Aplicamos ahora la ley del seno para encontrar la medida del ángulo A, aunque también la podemos encontrar con la ley del coseno

$$\frac{\operatorname{sen} \boldsymbol{A}}{\boldsymbol{a}} = \frac{\operatorname{sen} \boldsymbol{B}}{\boldsymbol{b}}$$

$$\operatorname{sen} \boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{a} \operatorname{sen} \boldsymbol{B}}{\boldsymbol{b}}$$

$$\operatorname{sen} \boldsymbol{A} = \frac{\sqrt{2}\operatorname{sen} 135^\circ}{2}$$

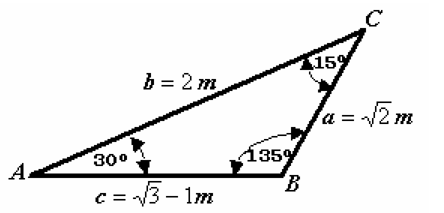
$$\operatorname{sen} \boldsymbol{A} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{4}$$

$$\operatorname{sen} \boldsymbol{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boldsymbol{A} = 30^\circ$$

La medida del ángulo C la encontramos por diferencia de ángulos:

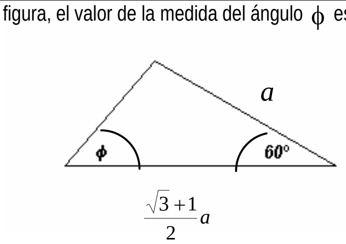
$$\angle \boldsymbol{C} = 180^\circ - 135^\circ - 30^\circ = 15^\circ$$

Finalmente, nos queda:



Ejercicios propuestos 5.3

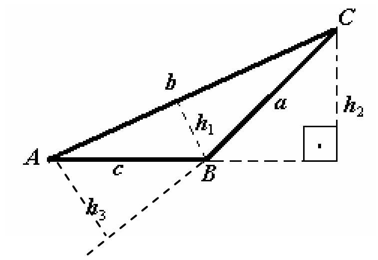
1. En el triángulo de la figura, el valor de la medida del ángulo ϕ es:
   a) 30º
   b) 75º
   c) 45º
   d) 90º
   e) 60º



2. Los lados de un triángulo miden respectivamente: $\boldsymbol{a} = \sqrt{3}+1;\quad \boldsymbol{b} = 2;\quad \boldsymbol{c} = \sqrt{6}$. Entonces los ángulos interiores del triángulo son:
   a) 30º, 50º, 100º
   b) 15º, 45º, 120º
   c) 15º, 75º, 90º
   d) 45º, 60º, 75º
   e) 45º, 30º, 105º
3. En un triángulo ABC los ángulos A y B miden 30° y 135° respectivamente, y el lado AB es de 100 m. Determine la longitud de la perpendicular trazada desde el vértice C al lado AB prolongado. Resp. $50(\sqrt{3}+1)$.

5.4.4 PERÍMETRO Y AREA DE UN TRIÁNGULO.

Sea un triángulo ABC. Cualquiera de los tres lados se definen como ***bases*** del triángulo. Como ***altura*** (h) del triángulo se define a la longitud de la perpendicular trazada desde un vértice hacia una de sus bases o a la prolongación de estas bases:

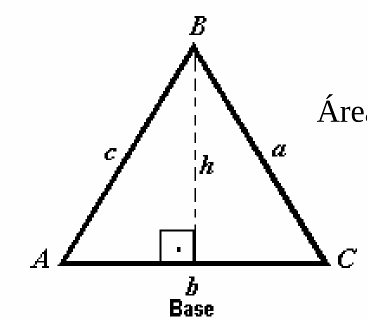


Por lo tanto:

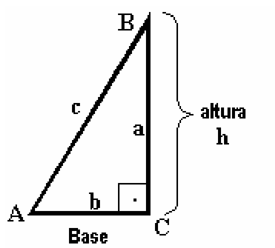
$$\boxed{\textbf{Perímetro} = a + b + c}$$

$$\boxed{\textbf{Area} = \frac{Base \times altura}{2} = \frac{b \times h_1}{2} = \frac{c \times h_2}{2} = \frac{a \times h_3}{2}}$$

Para triángulos particulares, tenemos:



$$\text{Área} = \frac{b \times h}{2}$$



Observe que en los triángulos anteriores se cumple que:

$$\boxed{\operatorname{sen} A = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \operatorname{sen} A}$$

Por tanto: $$\boxed{A = \frac{´b \times h}{2} = \frac{bc \operatorname{sen} A}{2}}$$

Conociendo la medida de uno de sus ángulos interiores y las medidas de los lados que constituyen a este ángulo, el área sería:

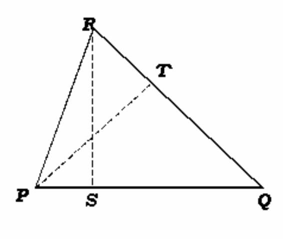
$$\boxed{\text{Área} = \frac{bc \operatorname{sen} A}{2} = \frac{ab \operatorname{sen} C}{2} = \frac{ac \operatorname{sen} B}{2}}$$

Los triángulos son polígonos básicos, porque los demás polígonos pueden ser divididos en triángulos, lo cual permite resolver otras situaciones.

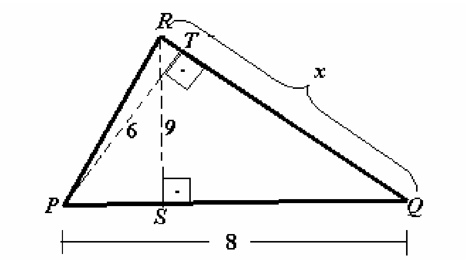
Ejemplo 1

En la figura adjunta $\overline{RS}$ es la altura correspondiente al lado $\overline{PQ}$, $\overline{PT}$ es la altura correspondiente al lado $\overline{RQ}$, si $\overline{PQ}=8$, $\overline{RS}=9$ y $\overline{PT}=6$, entonces la longitud $\overline{QR}$ es:

a) $\frac{16}{3}$
b) $\frac{3}{16}$
c) 12
d) $\frac{27}{4}$
e) $\frac{4}{27}$



SOLUCIÓN:
Ubicando la información en el diagrama dado, tenemos:



El área del triángulo PQR se la puede determinar, en este caso, de dos maneras:

1. Tomando coma base a $\overline{PQ}$ entonces su altura sería $\overline{RS}$, por tanto el área es:

$$\boxed{A=\frac{(8)(9)}{2}}$$

2. Tomando coma base a $\overline{RQ}$ entonces su altura sería $\overline{PT}$, por tanto el área es

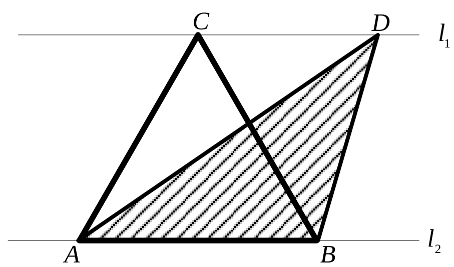
$$\boxed{A=\frac{x(6)}{2}}$$

Finalmente igualando las áreas $\boxed{A=\frac{(8)(9)}{2}=\frac{x(6)}{2}}$ entonces: $\boxed{\begin{array}{l}6x=72\\x=12\end{array}}$

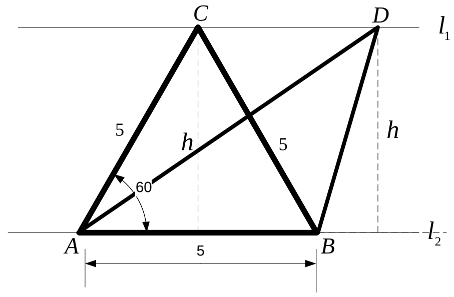
RESPUESTA: Opción "c"

Ejemplo 2

El triángulo ABC es equilátero de lado $l=5$. Si l_1 y l_2 son rectas paralelas. Hallar el valor del área del triángulo ABD.



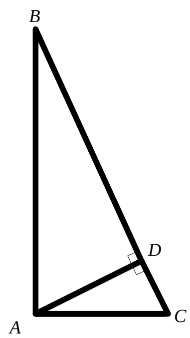
SOLUCIÓN:
Ubicando los datos en el gráfico, se observa que los triángulos ABC y ABD tienes la misma base y la misma altura, por tanto tendrán la misma área, entonces:



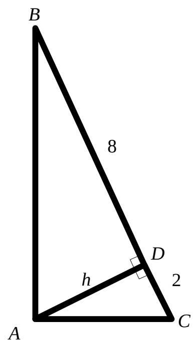
$$Area\ \Delta ABD = Area\ \Delta ABC = \frac{1}{2}(5)(5)sen60^{\circ} = \frac{25\sqrt{3}}{4}u^2$$

Ejemplo 3

Calcular el valor del área del triángulo ABC si $\overline{BD} = 8$ y $\overline{CD} = 2$



SOLUCIÓN:
Ubicando los datos en el gráfico.



Tomamos como base $\overline{BC} = 10$.
Determinamos h. considerando que el triángulo ABD es semejante al triángulo ADC:

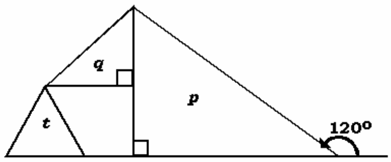
$$\frac{h}{8} = \frac{2}{h} \Rightarrow h^2 = 16 \Rightarrow h = 4$$

Finalmente: $Area\ \Delta ABC = \frac{(10)(4)}{2} = 20u^2$

Ejemplo 4

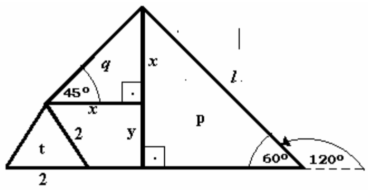
En la figura adjunta, q es un triángulo isósceles de área igual a 6 ; t es un triángulo equilátero de lado de medida igual a 2. Entonces la medida de la hipotenusa del triángulo p es igual a:

a) 6
b) $\sqrt{3}$
c) $3(\sqrt{3}-1)$
d) 3
e) $6\sqrt{3}$



SOLUCIÓN:

Interpretando la información proporcionada, tenemos:



El área del triángulo "q" es: $\boxed{A_q = \frac{(x)(x)}{2} = 6}$ entonces:

$$\frac{x^2}{2} = 6$$
$$x^2 = 12$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{12}$$
$$x = 2\sqrt{3}$$

"$\boxed{y}$" es la altura del triángulo equilátero "t", entonces $\boxed{y = \sqrt{3}}$

Y para el triángulo "p" tenemos:

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{x+y}{l} = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{3}}{l}$$
$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{l}$$
$$l = \frac{3\sqrt{3}}{\operatorname{sen} 60^\circ}$$
$$l = \frac{3\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow l = 6$$

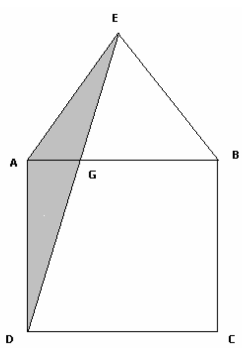
RESPUESTA: Opción "a"

Ejercicios Propuestos 5.4

1. Un triángulo cuya hipotenusa mide 85 cm. es tal que, al aumentar la longitud de uno de sus lados en 11 cm. y al disminuir la longitud del otro en 7 cm., la longitud de la hipotenusa no se altera. Encuentre las medidas de los lados del triángulo.

   Resp. 40 cm y 75 cm.

2. Sobre el lado AB del cuadrado ABCD se construye un triángulo equilátero AEB y se unen los puntos E y D. Si AD = 1, calcular el área del triángulo DAE y la longitud AG .

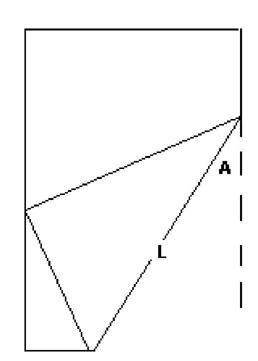


Resp. $\frac{1}{4};2-\sqrt{3}$.

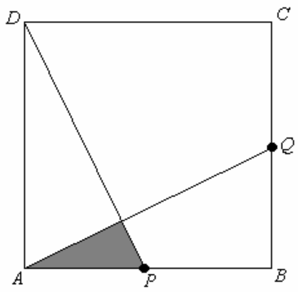
3. Dado el triángulo ΔABC, y los puntos medios D, E, F son los puntos medios de los lados del triángulo. Determine la relación: $\dfrac{Area\Delta DEF}{Area\Delta ABC}$

Resp. $\dfrac{1}{4}$

4. La esquina inferior derecha de una página se dobla hasta alcanzar el lado mayor izquierdo, como se muestra en la figura. Si el ancho de la página es 6 cm. y $A = 30°$, determine la longitud 'L' ' **Resp.** 8 cm.



5. Calcular el área de la región sombreada, si el cuadrado ABCD tiene lados de longitud "a" y los puntos P y Q son puntos medios de los lados del cuadrado.



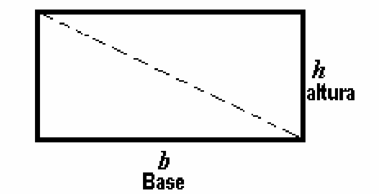
Resp. $A = \dfrac{a^2}{20}$

6. Si P es un triángulo con vértices P_1, P_2 y P_3 y Q un triángulo semejante a P con vértices Q_1, Q_2 y Q_3 tal que $\dfrac{\overline{P_1P_2}}{\overline{Q_1Q_2}} = \dfrac{\overline{P_2P_3}}{\overline{Q_2Q_3}} = \dfrac{\overline{P_3P_1}}{\overline{Q_3Q_1}} = k$, demuestre que $A_P = k^2 A_Q$.

5.5 CUADRILÁTEROS

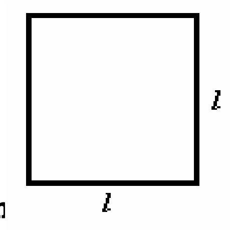
Los cuadriláteros son polígonos de cuatro lados. Entre los más conocidos, tenemos:

Rectángulo



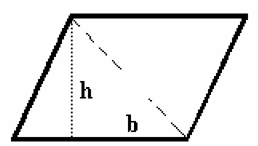
$$\boxed{\text{Área} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{h}}$$

Cuadrado



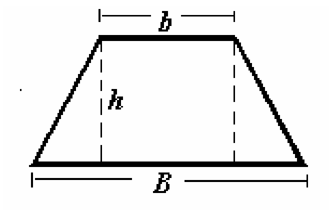
$$\text{Área} = \boldsymbol{l}^2$$

Paralelogram



$$\text{Área} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{h}$$

Trapecio



$$\text{Área} = \frac{(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{h}}{2}$$

Ejercicios Propuestos 5.5

1. Si un triángulo equilátero tiene igual perímetro que un cuadrado, entonces es verdad que:
   a) El área del triángulo es igual que el área del cuadrado.
   b) El lado del cuadrado es más grande que el lado del triángulo.
   c) El área del cuadrado es mayor que el área del triángulo.
   d) La diagonal del cuadrado tiene igual longitud que la altura del triángulo.
   e) El lado del cuadrado es mayor que la altura del triángulo.

2. Encuentre el perímetro y la diagonal de un cuadrado cuya área es la tercera parte del área de un cuadrado de lado igual a 9 cm.

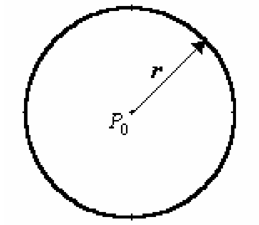
3. Si se aumenta $2\,m.$ al lado de un cuadrado, su área aumenta en $36\,m^2$. El lado del cuadrado inicial es:
   a) $4\,m.$ b) $6\,m.$ c) $8\,m.$ d) $16\,m.$ e) $32\,m.$

5.6. FIGURAS CIRCULARES

5.6.1 CIRCUNFERENCIA.

La circunferencia ya fue definida como lugar geométrico en el capítulo de cónicas, se trata ahora de definirla como una figura plana.

Sea $r \in R^+$ y P_0 un punto de un plano π. La circunferencia se define como el conjunto de puntos P del plano π tales que la distancia de los puntos de P a P_0 es igual a r. Es decir: $C = \{P \in \pi / d(P, P_0) = r\}$



La longitud de la circunferencia está dada por:

$$\text{Perímetro} = \boldsymbol{l} = 2\pi \boldsymbol{r}$$ ¡JUSTIFÍQUELA!

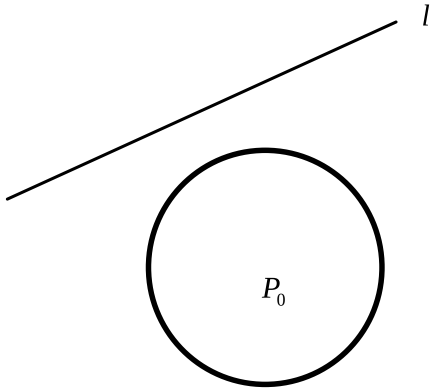
5.6.2 CÍRCULO

El círculo es la unión de los puntos de la circunferencia con los puntos de su interior. Es decir:
$$Circulo = \{P \in \pi / d(P, P_0) \leq r\}$$

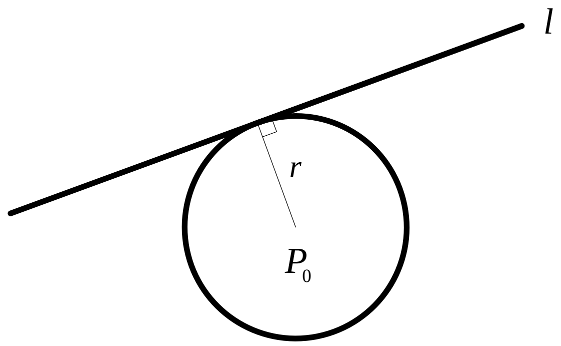
El área del círculo está dada por: $\text{Área} = \pi \boldsymbol{r}^2$ ¡JUSTIFÍQUELA!

5.6.2.1 Posiciones relativas entre una recta l y una circunferencia C

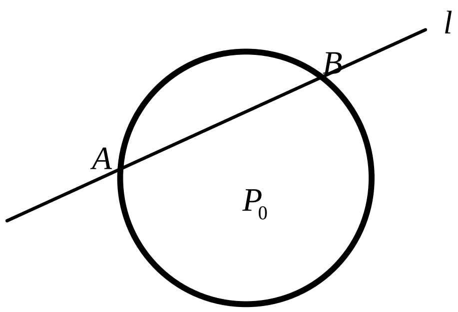
1. l y C **no se intersecan**. En tal caso, no tienen punto en común y a l se la denomina **recta externa**.



2. l y C **se intersecan en un punto.** En tal caso a l se la denomina recta **Tangente**.



3. l y C **se intersecan en dos puntos.** En tal caso, a l se la denomina recta **secante**.

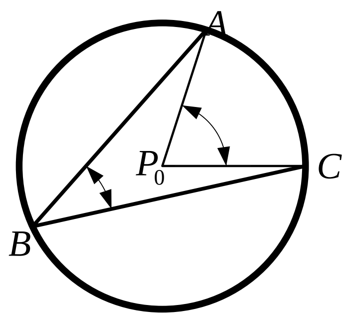


Al segmento de recta desde el punto A al punto B, $\overline{AB}$, se le denomina **CUERDA** . Al segmento de circunferencia del punto A al punto B, $\overset{\frown}{AB}$, se le denomina **ARCO**.

Si la recta secante pasa por el centro, a la cuerda se le denomina **diámetro**.

5.6.2.2 Angulo central y Angulo inscrito.

En la figura, al ángulo AP_0C se le denomina **ángulo central**. Al ángulo ABC se le denomina **ángulo inscrito**

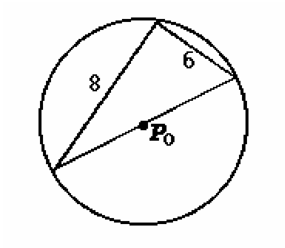


Teorema.

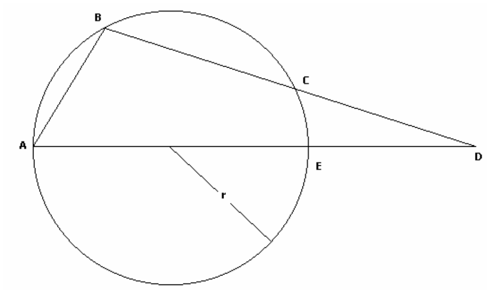
La medida del ángulo central es el doble de la medida del ángulo inscrito.

Ejercicios Propuestos 5.6

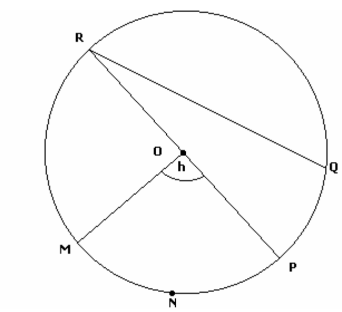
1. La longitud de la circunferencia centrada en P_0 es:
   a) 8π
   b) 9π
   c) 10π
   d) 18π
   e) 11π



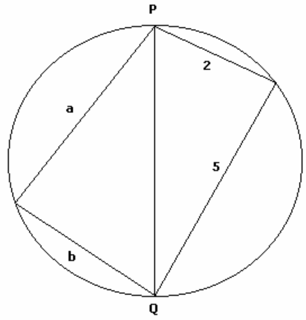
2. En la figura adjunta, la cuerda AB es igual al radio del círculo, y la cuerda BC es igual a $r\sqrt{2}$. Determine la medida del ángulo D. Resp. $\frac{\pi}{12}$.



3. En el gráfico adjunto, los arcos MN, NP, y PQ tienen la misma longitud y O es el centro de la circunferencia. Determine la medida del ángulo PRQ. Resp. $\frac{h}{4}$.



4. En la figura adjunta, se muestran dos triángulos inscritos en una circunferencia, con la medida de sus respectivos lados, si PQ es el diámetro, determine $a^2 + b^2$.
   Resp. 29



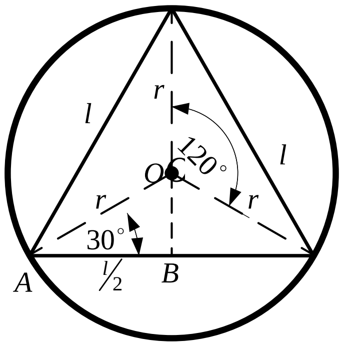
5.6.2.3. Polígonos regulares inscritos y circunscritos a circunferencias

Al inscribir polígonos regulares en circunferencias se obtienen resultados interesantes en relación del lado del polígono con el radio de la circunferencia.

Ejemplo 1

Obtener la relación entre el lado l de un triángulo equilátero inscrito en un círculo de radio r

SOLUCIÓN:



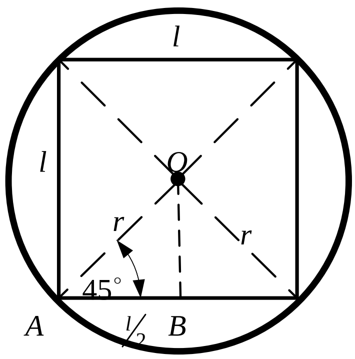
Del triángulo rectángulo OAB, observe la figura, tenemos:

$$Cos30^{\circ} = \frac{l/2}{r} \Rightarrow l = 2rCos30^{\circ} \Rightarrow l = r\sqrt{3}$$

Ejemplo 2

Obtener la relación entre el lado l de un cuadrado inscrito en un círculo de radio r

SOLUCIÓN:



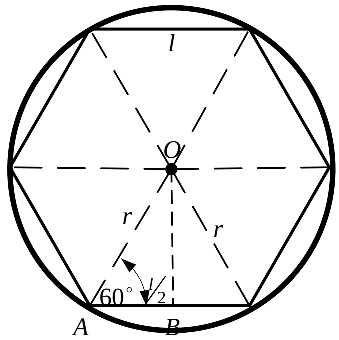
Del triángulo rectángulo OAB, observe la figura, tenemos:

$$Cos45^\circ = \frac{l/2}{r} \Rightarrow l = 2rCos45^\circ \Rightarrow l = r\sqrt{2}$$

Ejemplo 3

Obtener la relación entre el lado l de un hexágono inscrito en un círculo de radio r

SOLUCIÓN:

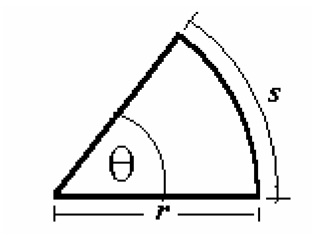


Del triángulo rectángulo OAB, observe la figura, tenemos:

$$Cos60^\circ = \frac{l/2}{r} \Rightarrow l = 2r\cos 60^\circ \Rightarrow l = r$$

5.6.3 SECTOR CIRCULAR

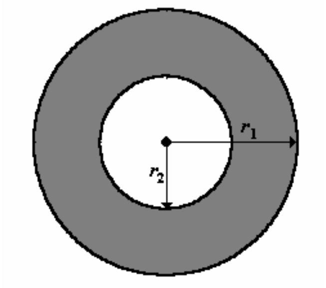
Un sector circular es una porción de un círculo



La medida del arco s está dada por: $\boxed{S = \theta r}$

El área del sector circular está dada por: $\boxed{\text{Área} = \frac{1}{2}\theta\left(r^2\right)}$

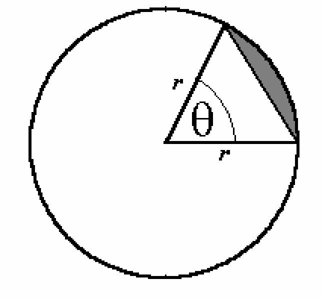
5.6. 4 CORONA CIRCULAR



$$\boxed{A=\pi\left[(r_1)^2-(r_2)^2\right]}$$

Ejercicio resuelto 1

Hallar el área de la región sombreada de la figura:



Área sombreada $=$ A sector circular $-$ A triángulo

$$A_{\angle}=\frac{1}{2}\theta r^2$$

$$A_{\Delta}=\frac{1}{2}r^2\operatorname{sen}\theta$$

$$A=A_{sc}-A_t$$

$$A=\frac{1}{2}r^2(\theta-\operatorname{sen}\theta)$$

La región anterior se la denomina **segmento circular.**

Ejercicio resuelto 2

El triángulo ABC es equilátero, $\overline{OA}=12\ cm.$ Determine el área de la parte sombreada.

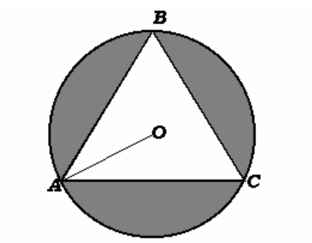
a) $245.32\ cm^2$

b) $265.32\ cm^2$

c) $345.32\ cm^2$

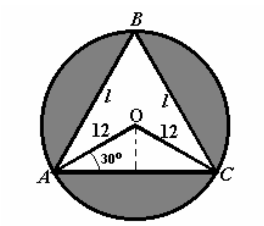
d) $365.32\ cm^2$

e) $325.32\ cm^2$



SOLUCIÓN:

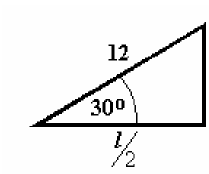
Ubicando la información en la figura dada:



El área de la región sombreada es: $\boxed{A=A_{círculo}-A_{triángulo}}$

El área del círculo es: $\boxed{\begin{array}{l} A_{círculo} = \pi r^2 \\ A_{círculo} = \pi(12)^2 \\ A_{círculo} = 144\pi \end{array}}$

Para hallar el área del triángulo, primero necesitamos hallar la longitud de su lado



$$\boxed{\begin{array}{l} \cos 30^\circ = \dfrac{l/2}{12} \\ 12\cos 30^\circ = \dfrac{l}{2} \\ l = 24\cos 30^\circ \\ l = 24\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ l = 12\sqrt{3} \end{array}}$$

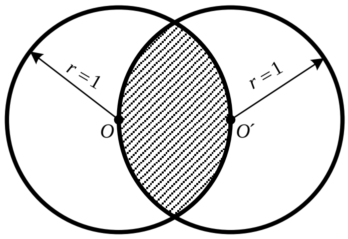
entonces: $\boxed{\begin{array}{l} A_{triángulo} = \dfrac{\left(12\sqrt{3}\right)^2 \operatorname{sen} 60^\circ}{2} \\ A_{triángulo} = \dfrac{144(3)\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2} \\ A_{triángulo} = 108\sqrt{3} \end{array}}$

Por lo tanto: $\boxed{\begin{array}{l} A = 144\pi - 108\sqrt{3} \\ A = 265.32\ cm^2 \end{array}}$

RESPUESTA: opción "b"

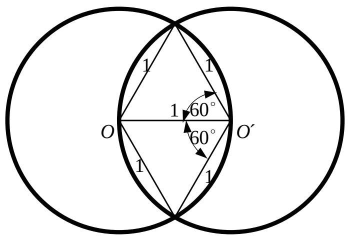
Ejercicio resuelto 3

Si O y O' son los centros de las circunferencias de radio igual a 1. Hallar el área de la región sombreada.

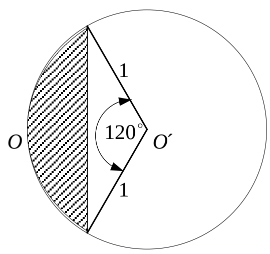


SOLUCIÖN:

Marcando los radios en la región sombreada:



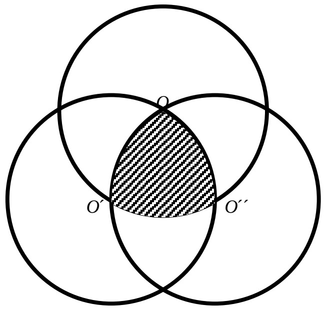
Se observa que el área de la región buscada es el doble del área del segmento circular de radio 1 y ángulo de 120°. Es decir:



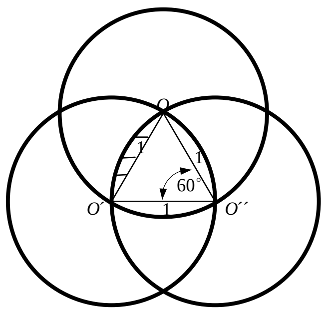
$$A = 2\left(\tfrac{1}{2}r^2\left[\theta - sen\theta\right]\right) = 1^2\left[2\tfrac{\pi}{3} - sen2\tfrac{\pi}{3}\right] = 2\tfrac{\pi}{3} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

Ejercicio resuelto 3

Si O, O' y O'' son los centros de las circunferencias de radio igual a 1. Hallar el área de la región sombreada.



SOLUCIÓN:
Marcando los radios en la región sombreada

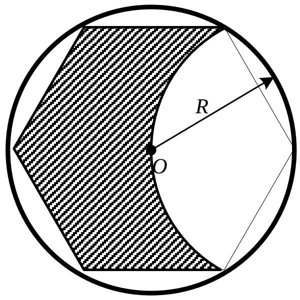


Se observa que el área de la región sombreada buscada, es igual al área del triángulo equilátero $OO'O''$ más tres veces el área del segmento circular de radio 1 y ángulo 60°. Es decir:

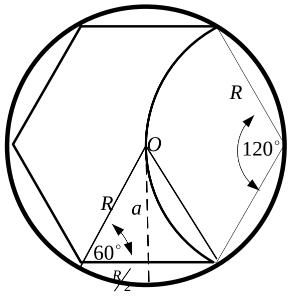
$$A = \tfrac{1}{2}(1)(1)sen60^\circ + 3\left[\tfrac{1}{2}(1)^2(\tfrac{\pi}{3} - sen\,\tfrac{\pi}{3})\right] = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ejercicio resuelto 4

Si O el centros de las circunferencia de radio igual a R. Hallar el área de la región sombreada.



SOLUCIÓN
El área buscada sería el área del hexágono menos el área del sector circular de radio 1 y ángulo de 120°



El área del hexágono sería:

$$A_h = \tfrac{1}{2} nla = \tfrac{1}{2}(6)(R)(R\ sen 60^\circ) = 3R^2\ \tfrac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} R^2$$

El área del sector circular sería:

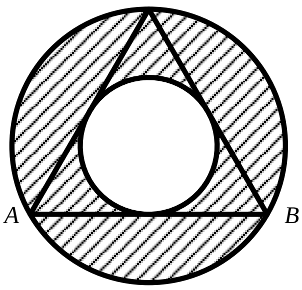
$$A_C = \tfrac{1}{2} R^2 \left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} R^2$$

El área buscada sería:

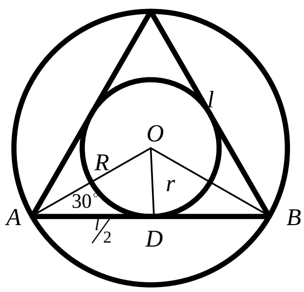
$$A = A_h - A_C = \frac{3\sqrt{3}}{2} R^2 - \frac{\pi}{3} R^2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}\right) R^2$$

Ejercicio resuelto 5

Si el triángulo ABC es equilátero de lado $l = 2$, hallar el área de la región sombreada.



SOLUCIÓN:
La región sombreada es una corona circular, por tanto habrá que determinar los radios de las circunferencias.



Recuerde que $l = \sqrt{3}R$ entonces $R = \dfrac{l}{\sqrt{3}}$

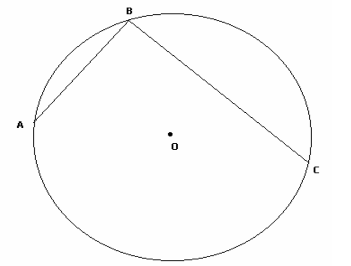
Ahora bien, en el triángulo rectángulo OAD: $tg 30^\circ = \dfrac{r}{l/2} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{2r}{l} \Rightarrow r = \dfrac{l}{2\sqrt{3}}$

Por lo tanto:

$$A=\pi\left(R^2-r^2\right)=\pi\left(\frac{l^2}{3}-\frac{l^2}{12}\right)=\frac{\pi}{4}l^2=\frac{\pi}{4}2^2=\pi$$

Ejercicios Propuestos 5.7

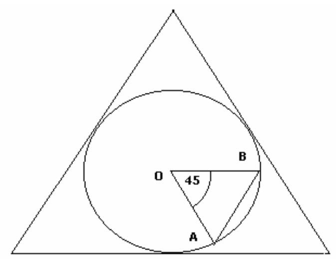
1. Si AB es el lado del hexágono regular y BC es el lado del triángulo equilátero inscrito en el círculo centrado en O, entonces el valor del ángulo B es: Resp. $\frac{\pi}{2}$



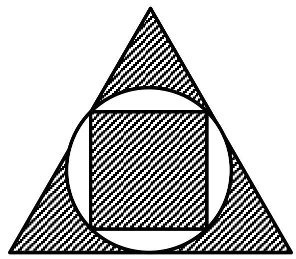
2. En un círculo de radio 'r' se tiene inscrito un rectángulo de tal manera que la base del rectángulo es igual al radio del círculo. Determine la medida de la altura del rectángulo.

   Resp. $r\sqrt{3}$.

3. El área del triángulo equilátero circunscrito a la circunferencia es $4\sqrt{3}$. Calcular el área del triángulo OAB. Resp. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.



4. Si el triangulo equilátero de la figura adjunta tiene un área total cuyo valor es $\sqrt{3}a^2$, calcule el área de la región sombreada.



   Resp. $A=\frac{3\sqrt{3}+2-\pi}{3}a^2$

5. Si se conoce que la longitud del lado de un cuadrado inscrito en una circunferencia es de $7\sqrt{2}$ m., determine el área del cuadrado circunscrito a la circunferencia.

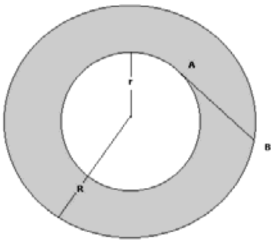
   Resp. $A=196\ m^2$

6. Si el perímetro del triángulo equilátero inscrito en una circunferencia es de 9 cm., determine la longitud del lado del triángulo equilátero circunscrito a la misma circunferencia.

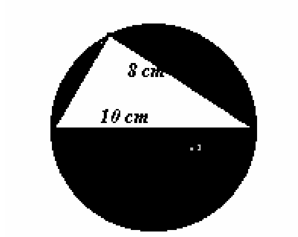
   Resp. $l = 6\ cm$

7. En la gráfica se observan dos circunferencias concéntricas de radio interior ‘r’ y radio exterior ‘R’. Si el segmento AB, que es tangente a la circunferencia interna, tiene una longitud de ‘a’ unidades, determine el área de la corona circular.

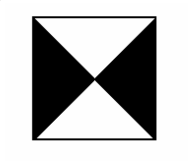
   Resp. πa^2.

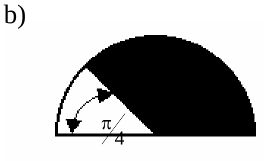


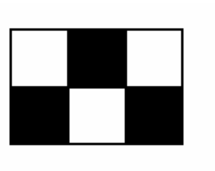
8. El valor del área de la región sombreada de la figura adjunta es:
   a) $(25\pi - 24)\ cm^2$
   b) $(25\pi - 12)\ cm^2$
   c) $(12.5\pi - 24)\ cm^2$
   d) $(25\pi + 24)\ cm^2$
   e) $(2.5\pi - 24)\ cm^2$



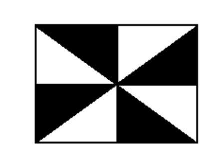
9. El porcentaje de fracción $\frac{2}{3} \times \frac{9}{8}$ está gráficamente representado por cualquiera de las siguientes figuras sombreadas. Identifíquela.

a)


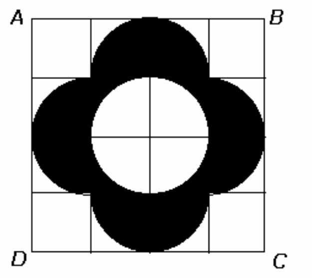
b)


c)


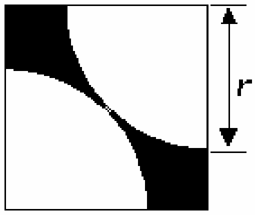
d)


e)


10. Si el área del cuadrado $ABCD$ es $16u^2$ y se divide en 16 cuadrados iguales, el área de la parte rayada es:
   a) $(\pi + 4)\ u^2$
   b) $4\ u^2$
   c) $(4 - \pi)\ u^2$
   d) $(3\pi + 4)\ u^2$
   e) $(\pi - 4)\ u^2$

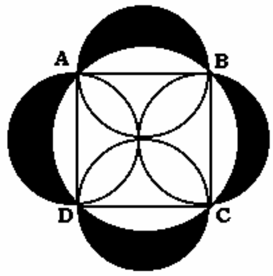


11. Encuentre el área de la región sombreada de la figura en términos del radio r.



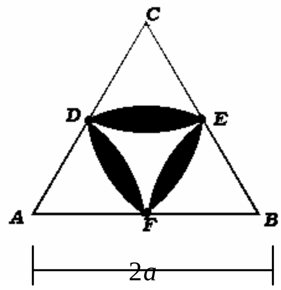
12. Si los lados del cuadrado $ABCD$ miden $4\ cm.$ Entonces el área de la parte sombreada de la figura es:

    a) $16\,cm^2$
    b) $8\pi\ cm^2$
    c) $16\pi\ cm^2$
    d) $2\pi\ cm^2$
    e) $4\pi\ cm^2$



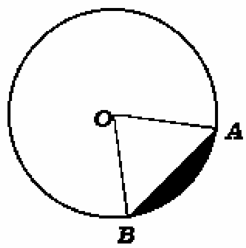
13. En el triángulo equilátero de la figura adjunta se construyen seis arcos de circunferencia ubicando sus centros en los vértices A, B, C o en los puntos medios de los lados D, E, F. Entonces el área de la región sombreada es:

    a) $a^2\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)$
    b) $a^2\left(\pi - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
    c) $a^2\left(3\pi - 3\sqrt{3}\right)$
    d) $a^2\left(\pi - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$
    e) $a^2\left(\pi - \dfrac{3}{2}\right)$



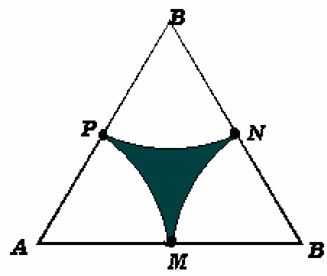
14. Si el diámetro de la circunferencia de la figura adjunta es $10\ cm.$ y la longitud de la cuerda $\overline{AB}$ es $5\sqrt{3}$, entonces el área de la región sombreada es:

    a) $25\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{1}{2}\right)$
    b) $25\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$
    c) $\dfrac{25\pi}{3}$
    d) $100\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$
    e) $100\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{1}{2}\right)$

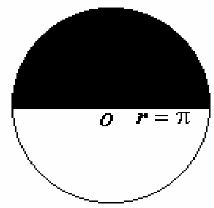


15. En la figura adjunta ABC es un triángulo equilátero y su lado mide $10\ cm.$; P, M y N son los puntos medios de cada lado; MN, PN y PM son arcos de circunferencia cuyos centros son los vértices del triángulo. Entonces el área de la región sombreada es en centímetros cuadrados igual a:

a) $100\sqrt{3}-25\pi$
b) $\left(\frac{1}{2}\right)\left(50\sqrt{3}-25\pi\right)$
c) $2\left(50\sqrt{3}-25\pi\right)$
d) $\left(\frac{1}{2}\right)\left(100\sqrt{3}-25\pi\right)$
e) $\left(\frac{1}{2}\right)\left(50\sqrt{3}+25\pi\right)$

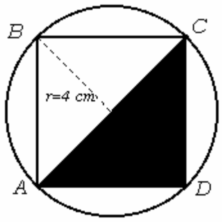


16. El perímetro de la región sombreada es:
a) $(\pi+2)$
b) $(r+2)$
c) (π^2+2)
d) $\pi(\pi+2)$
e) $2(\pi+2)$



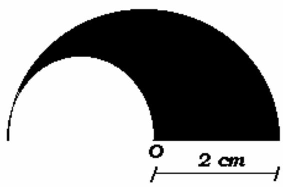
17. En la siguiente figura:

$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{AD}$
$r=4cm$

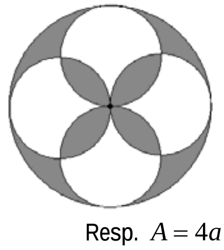


Entonces el área de la región sombreada es:
a) 32 cm2
b) 8 cm2
c) 5 cm2
d) 6 cm2
e) 16 cm2

18. El perímetro de la región sombreada es:
a) 3π cm
b) $(3\pi+1)$ cm
c) 3 cm
d) $(3\pi+2)$ cm
e) 4 cm

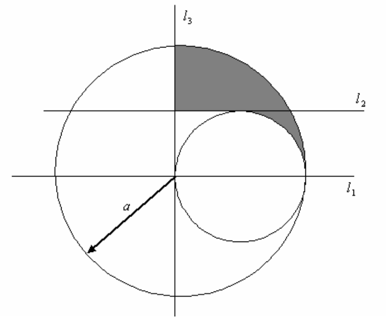


19. Calcular el área de la región sombreada, si el radio de la circunferencia externa es 2a.



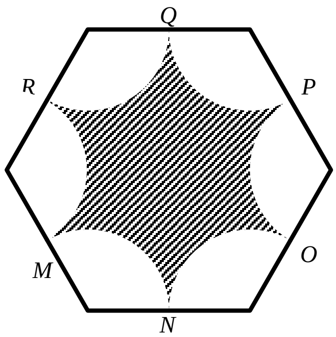
Resp. $A=4a^2(\pi-2)$

20. Determine el área de la región sombreada del gráfico adjunto, conociendo que la recta l_3 es perpendicular a las rectas l_1 y l_2, sobre ellas se grafica una circunferencia de radio a; luego se grafica una segunda circunferencia de tal forma que es tangente a la primera circunferencia y tangente a las rectas l_2 y l_3.



Resp. $A = \left(\frac{3}{16}\pi - \frac{1}{4}\right)a^2$

21. La figura muestra un hexágono regular cuyo lado mide 5 cm. Si cada vértice se toma como centro para construir arcos de circunferencia desde los puntos medios de cada lado: M, N, O, P, Q y R, ¿ cuál es el área de la superficie sombreada.



Resp. $A = \frac{75\sqrt{3}}{2} - \frac{25}{2}\pi$

22. Si se tiene un polígono regular de n lados, donde la longitud de uno de sus lados es 2. Demuestre que la medida de la apotema es $\operatorname{tg}\left(\frac{n-2}{2n}\right)\pi$

23. Demuestre que el radio de la circunferencia que puede circunscribirse en un polígono regular de "n" lados, donde la longitud de uno de sus lados es 2, está dado por $\sec\left(\frac{n-2}{2n}\right)\pi$

24. Si P es un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia de radio r, demuestre que el área de P es $\frac{1}{2}nr^2 sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

25. Sea A, B, C un triángulo cualquiera inscrito en una circunferencia de radio r. Demuestre que el área del triángulo es $A = \frac{abc}{4r}$.