

# Escuela Superior Politécnica del Litoral

Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas

Aproximación numérica de un problema de control óptimo para el  
proceso de fermentación de cerveza en una industria ecuatoriana

## PROYECTO INTEGRADOR

Previo la obtención del Título de:

**Matemático**

Presentado por:

Luis Adrian Fiallos Montero

Juan Andrés Tutasi Guerrero

GUAYAQUIL-ECUADOR

Año: 2022

# DEDICATORIA

A mi mamá Yesenia, abuelos Luis y Crucita y hermano Jordy.

A Don Bigotes, que dejó este mundo al finalizar esta tesis.

*Luis Fiallos*

A Roxana, Rodolfo, Ana, Ronald y Kevin.

*Juan Tutasi*

# AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mis tutores Wilfredo Angulo y Dany De Cecchis, así como la profesora Luz Marchan, por su guía y ayuda en la elaboración de esta tesis.

Agradezco a mis profesores por brindarnos sus conocimientos a lo largo de toda la carrera

Mis agradecimientos a mi familia por darme todo el soporte físico y emocional para seguir adelante con mis estudios

*Luis Fiallos*

# AGRADECIMIENTOS

Mi más sincero agradecimiento a los profesores Angulo, De Cecchis y Marchan por su ayuda en la elaboración de este proyecto. Un agradecimiento a los profesores que nos brindaron talleres y cursos para ciertos aspectos de esta tesis. Un agradecimiento a mis compañeros por su apoyo durante toda la carrera. Por último, un agradecimiento a la ESPOL por la educación pública que me ofreció a pesar de que al momento de escribir esta tesis ha estado atravesando una de sus peores crisis.

*Juan Tutasi*

# DECLARACIÓN EXPRESA

“Los derechos de titularidad y explotación, nos corresponde conforme al reglamento de propiedad intelectual de la institución; Luis Fiallos y Juan Tutasi y damos nuestro consentimiento para que la ESPOL realice la comunicación pública de la obra por cualquier medio con el fin de promover la consulta, difusión y uso público de la producción intelectual”

---

Luis Adrián Fiallos Montero

---

Juan Andrés Tutasi Guerrero

# EVALUADORES

---

**Luz Marchan, Ph.D.**

PROFESORA DE LA MATERIA

---

**Wilfredo Angulo, Ph.D.**

TUTOR

---

**Dany De Cecchis, Ph.D.**

COTUTOR

# RESUMEN

La fermentación es uno de los principales procesos dentro de la industria cervecera y es necesario llevar un control sobre ciertas variables, para optimizar las variables involucradas en el proceso. Esto se conoce como un problema de control óptimo. Para ello, es necesario implementar un método de optimización a fin de obtener mejores resultados en la fermentación para la fabricación de la cerveza. Se propone aproximar la solución de un problema de control óptimo para la temperatura, en el proceso de fermentación de cerveza de una industria ecuatoriana, mediante un método numérico apropiado. En este trabajo se usó un modelo de fermentación y se implementó el método del gradiente en Python, para aproximar la solución del problema. Los experimentos numéricos muestran que se produjo un incremento en la producción de etanol, que es la principal componente de la cerveza y se mantuvo en un margen adecuado aquellos compuestos indeseados. Finalmente, el trabajo propuesto puede servir a los productores de cerveza, como una herramienta para optimizar los procesos industriales, sin necesidad de incurrir en gastos innecesarios de operación.

**Palabras Clave:** Fermentación, Optimización, control óptimo, método del gradiente.

# ABSTRACT

*Fermentation is one of the main processes within the brewing industry and it is necessary to control certain variables to optimize the process. This is known as an optimal control problem. Thus, it is necessary to implement an optimization method to obtain better results when brewing. We propose to approximate the solution of an optimal control problem for the temperature in the beer fermentation process of an Ecuadorian industry, using an appropriate numerical method. For this work, a fermentation model is used and the gradient method is implemented in Python to approximate the solution of the problem. Numerical experiments show the increment in the production of ethanol, which is the main component of beer, and the off-flavors are kept within proper values. Finally, this work can serve beer producers as a tool to optimize industrial processes without needing to incur unnecessary operating costs.*

*Keywords: Fermentation, Optimization, optimal control, gradient method*

# ÍNDICE GENERAL

## Índice

RESUMEN	I
ABSTRACT	II
ÍNDICE GENERAL	III
ÍNDICE DE FIGURAS	V
ÍNDICE DE TABLAS	VI
CAPÍTULO 1	1
1. Introducción	1
2. Planteamiento del problema	1
3. Justificación del problema	2
4. Objetivos	2
4.1. Objetivo general . . . . .	2
4.2. Objetivos específicos . . . . .	3
5. Marco teórico	3
5.1. Historia de la cerveza en Ecuador . . . . .	4
5.2. Ingredientes de la cerveza . . . . .	5
5.3. Proceso de fermentación . . . . .	7
6. Modelo matemático de fermentación en la literatura	10
7. Problema de control óptimo	13
8. Principio del máximo de Pontryagin	13
8.1. Aplicación del modelo . . . . .	14

<b>9. Método del gradiente de primer orden</b>	<b>15</b>
<b>CAPÍTULO 2</b>	<b>16</b>
<b>1. Metodología</b>	<b>16</b>
1.1. Análisis de modelos en optimización dinámica . . . . .	16
1.2. Análisis de modelo de fermentación de cerveza . . . . .	16
1.3. Revisión del método numérico . . . . .	19
<b>CAPÍTULO 3</b>	<b>20</b>
<b>1. Implementación de los algoritmos de optimización</b>	<b>20</b>
<b>2. Resultados numéricos del algoritmo</b>	<b>21</b>
<b>CAPÍTULO 4</b>	<b>27</b>
<b>1. Conclusiones y recomendaciones</b>	<b>27</b>
1.1. Conclusiones . . . . .	27
1.2. Recomendaciones . . . . .	28
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>29</b>

# ÍNDICE DE FIGURAS

## Índice de figuras

2.1. Perfiles inicial y final de temperatura obtenidos en la implementación del método del gradiente para el funcional 1.1 . . . . .	22
2.2. Perfiles inicial y final de etanol obtenidos en la implementación del método del gradiente para el funcional 1.1 . . . . .	22
2.3. Perfiles inicial y final de diacetilo obtenidos en la implementación del método del gradiente para el funcional 1.1 . . . . .	23
2.4. Perfiles inicial y final de acetato de etilo obtenidos en la implementación del método del gradiente para el funcional 1.1 . . . . .	23
2.5. Perfiles inicial y final de temperatura obtenidos en la implementación del método del gradiente para el funcional 1.2 . . . . .	24
2.6. Perfiles inicial y final de etanol obtenidos en la implementación del método del gradiente para el funcional 1.2 . . . . .	25
2.7. Perfiles inicial y final de diacetilo obtenidos en la implementación del método del gradiente para el funcional 1.2 . . . . .	25
2.8. Perfiles inicial y final de acetato de etilo obtenidos en la implementación del método del gradiente para el funcional 1.2 . . . . .	26

# ÍNDICE DE TABLAS

## Índice de tablas

6.1. Nomenclatura usada en el modelo de de Andrés-Toro, Girón-Sierra, Lopez-Orozco, Fernandez-Conde, Peinado y García-Ochoa (1998) . . . . .	11
1.1. Benchmark de Prueba . . . . .	20
2.2. Benchmark Funcional 1.1 . . . . .	24
2.3. Benchmark Funcional 1.2 . . . . .	26

# CAPÍTULO 1

## 1. Introducción

En este trabajo se resuelve un problema de control óptimo aplicado a un modelo matemático que simula el proceso de fermentación. El problema de control óptimo, que es un problema de optimización, se resuelve utilizando un método numérico apropiado. En este capítulo, primero se plantea el problema que surge en el proceso fermentación y su importancia histórica en el Ecuador. Se describe el modelo matemático que se propone aproximar, la teoría de optimización dinámica y se presentan los métodos que se usaron para la resolución del problema.

## 2. Planteamiento del problema

En la actualidad, la industria cervecera del Ecuador constituye uno de los principales mercados de consumo interno de bebidas dentro del país. En esta industria uno de los procesos involucrados en la producción es el de fermentación de la cerveza. Por lo que gran parte de los productores dedican esfuerzos en su control y manejo para ofrecer un producto bajo un estándar de calidad que sea beneficioso para los consumidores.

El proceso de fermentación de la cerveza posee características dinámicas, por lo que mantener un control sobre las variables involucradas se vuelve una necesidad para los productores. Como expone Navarrete (2007), dentro del Ecuador existen dos puntos de vista respecto a los productores de cerveza del país. Por un lado, los productores industriales producen lotes de cerveza en enormes cantidades; por lo que la pérdida de un lote debido a un manejo inapropiado del proceso involucra numerosas pérdidas económicas. Por otro lado, para los productores artesanales su mayor reto es mantener una producción consistente entre el sabor y la cantidad entre lotes de producción, por lo que estandarizar el proceso de fermentación es un aspecto importante para ellos.

A raíz de estas dificultades se genera la necesidad de establecer métodos numéricos que permitan establecer un control óptimo sobre estos procesos. De ahí que, surgen modelos de control óptimo, como el presentado por de Andrés-Toro, Girón-Sierra, Lopez-Orozco, Fernandez-Conde, Peinado y García-Ochoa (1998), los cuales buscan optimizar el proce-

so, manipulando ciertas variables y detectar fallas o desviaciones dentro del mismo. No obstante, este tipo de modelos involucra a menudo dinámicas no lineales que son complicadas de manejar de forma analítica. Por esta razón, se han propuestos múltiples métodos numéricos para la aproximación de la solución de estos modelos. En Banga, Balsa-Canto, Moles y Alonso (2005), se realiza un estudio de la robustez y eficiencia de algunos métodos propuestos, analizando sus ventajas y desventajas a la hora de resolver un problema.

En este proyecto, se pretende solucionar un problema de optimización dinámica que surge del control óptimo de la temperatura en el proceso de fermentación de la cerveza, mediante un método numérico apropiado. A través del control óptimo, es posible obtener procesos estandarizados y reducir la posibilidad de perder producción por fallas de control de calidad.

### **3. Justificación del problema**

Históricamente, la cerveza dentro del Ecuador forma parte importante de los aspectos socioculturales de la región, al ser este uno de los principales productos de consumo, tanto en reuniones sociales como fiestas tradicionales (Navarrete Décimavilla, 2016). El proceso de elaboración de la cerveza involucra múltiples procesos. Sin embargo, uno de los principales procesos que determinan la calidad y sabor es la fermentación de las levaduras. Dicho proceso puede ser acelerado manipulando la temperatura del bioproceso. No obstante, esto involucra el riesgo de contaminar la bebida con productos indeseados como el diacetilo o el acetato de etilo (Carrillo-Ureta, Roberts y Becerra, 2003).

Los resultados de este trabajo consistirán en proponer una herramienta que permita optimizar la temperatura en el proceso de fermentación de cerveza, teniendo en cuenta la concentración de productos deseados y no deseados, mediante un problema de control óptimo, restringido a un modelo matemático de la dinámica del proceso.

## **4. Objetivos**

### **4.1. Objetivo general**

Aproximar la solución de un problema de control óptimo para la temperatura en el proceso de fermentación de cerveza de una industria ecuatoriana mediante un método

numérico apropiado.

## 4.2. Objetivos específicos

1. Establecer el modelo matemático de control óptimo de la temperatura en el proceso de fermentación de cerveza mediante una revisión del estado del arte.
2. Implementar un método numérico robusto para resolver el problema de control óptimo de la temperatura en el proceso de fermentación de cerveza mediante un código en Python.
3. Evaluar la solución aproximada del problema de control óptimo de la temperatura mediante la simulación del proceso de fermentación de cerveza de una industria ecuatoriana.

## 5. Marco teórico

En la fermentación se usan microorganismos, como la levadura, para transformar materia orgánica como extractos de frutas o cereales. La levadura es un conjunto diverso de hongos que se reproducen mediante la maduración. La manera tradicional de fermentar la cerveza es añadir levadura y esperar un cierto intervalo de tiempo, dejando que consuma sustrato (azúcares) y produzca etanol. Sin embargo, la fermentación puede acelerarse con un aumento de temperatura, lo cual puede incurrir en riesgos de contaminación por bacterias y la aparición de subproductos indeseables tales como diacetilo o acetato de etilo. El sabor de la cerveza depende significativamente de la cepa de levadura y la temperatura a la que se fermenta. Por lo que, el control de temperatura es esencial para la producción de cerveza (Carrillo-Ureta, Roberts, y Becera, 2003).

La producción industrial convencional de cerveza se basa en una fermentación discontinua en un sistema cerrado (llamado también fermentación batch). Se aplica un nivel de temperatura a lo largo del tiempo de fermentación para obtener el etanol requerido con las propiedades deseadas. Se ha determinado experimentalmente que todo el proceso de fermentación de biomasa se puede dividir en dos fases consecutivas: una fase de latencia y una fase de fermentación y crecimiento. En la fase de latencia, las células muertas se van asentando en el fondo y las demás células latentes se van activando. Cuando

aproximadamente el 80 % de las células latentes se han transformado en células activas, se da la fase de fermentación y crecimiento (Andrés-Toro, Girón-Sierra, Lopez-Orozco, Fernandez-Conde, Peinado y García-Ochoa, 1998).

La mayoría de los procesos de la vida real no pueden ser representados exactamente por un modelo determinista debido a su naturaleza dinámica, la falta de información y otras incertidumbres asociadas con los datos disponibles del proceso en estudio. En la práctica, los sistemas suelen ser no lineales y, por lo tanto, pueden presentar formas de comportamiento que no se desprenden del estudio de las versiones linealizadas del modelo. Por este motivo, no se espera que el modelo sea una reconstrucción exacta del proceso, más bien está destinado a que al ingresar ciertos datos empíricos de condiciones iniciales, el resultado sea el esperado (Carrillo-Ureta et al., 2003).

Se han desarrollado diferentes modelos para la fermentación de cerveza. El modelo matemático elegido en este trabajo, como parte de la simulación y optimización es el modelo cinético propuesto por Andrés-Toro, Girón-Sierra, Lopez-Orozco, Fernandez-Conde, Peinado y García-Ochoa(1998), debido a que se han logrado buenos resultado con muchos estudios experimentales a escala de laboratorio

## **5.1. Historia de la cerveza en Ecuador**

La cerveza se la puede catalogar como una bebida de antaño, lo que dificulta concretar la fecha de origen de esta bebida. Algunas personas la vinculan con el pan, alimento principal de las antiguas civilizaciones mesopotámica (SECA, 2016).

Por lo contrario, el norte de Europa se destaca por ser una región históricamente relacionada con la cerveza, debido a la abundancia de lúpulo y cebada que son elementos esenciales para el proceso de fermentación y fabricación de la cerveza. La investigación realizada por la Sociedad Ecuatoriana de Cerveceros Artesanales (2016) concluyó que la cerveza se la cataloga como la bebida mas antigua de la historia:

1. Se considera que surgió en Mesopotamia y Sumeria en el año 10.000 a.C..
2. Se descubrió en 1981 una tablilla hecha de piedra donde se describe un tipo de cerveza elaborada en Babilonia en el año 6.000 a.C.
3. En civilizaciones precolombinas se elaboraba esta bebida a partir del uso de trigo y tubérculos, también en la antigua Britania, dicha bebida era elaborada de malta

de trigo hasta que el imperio romano incorporo la cebada.

Esta última se convirtió en la materia prima principal en la fabricación de la cerveza, además, se tiene conocimiento que el cultivo de este cereal se data desde 3.000 a.C. Según la Sociedad Ecuatoriana de Cerveceros Artesanales(2016), como la cebada se cultiva mejor en climas fríos en comparación con la uva, los países nórdicos priorizaron la producción de cerveza frente al vino, para de esta forma, ser los principales productores.

En 1566, Fray Jodoco Rique, fundó la primera cervecería en el Ecuador, denominada “San Francisco” en el convento del mismo nombre ubicado en la ciudad de Quito, marcando un precedente en la región. El Padre Verdesoto, director del Museo Francisco Fray Pedro Social, sostiene “El religioso llegó desde Flandes, actual Bélgica, y brindó en este lugar su amor y su pasión”, al visitar las viejas instalaciones de la Iglesia. Posteriormente, se creó una pequeña industria dado que el sacerdocio estaba formado por una mayoría de españoles que consumían vino, mientras él era oriundo de una región que resaltaba la cerveza.

En 1887, se fundó en manos de ecuatorianos la Cervecería Nacional, pero en 1889 se instala en Colombia una empresa cervecera que se convierte en dueña de la ecuatoriana durante 1921 y 1922, denominada Bavaria (Chapi Acosta, 2017). De acuerdo con Avilés(2016) a finales de 1921 se conforma la Compañía de Cerveza Nacional, y al transcurso de los siguientes dos años se hace con la totalidad de las acciones de Ecuador Breweries Company. En los siguiente años, hubo un crecimiento sostenible de la Compañía de Cervezas Nacionales, acompañado de unas fuertes inversiones, una ampliación de las instalaciones y nueva maquinaria.

## **5.2. Ingredientes de la cerveza**

Para el proceso de preparación de la cerveza se emplean diferentes tipos de ingredientes. Entre los cuales se destaca: agua; la cebada malteada, como una fuente de almidón que a través del proceso de fermentación se convierte en alcohol; la levadura de cerveza, utilizada para la fermentación; y el lúpulo que cumple una función de saborizante. Además, se puede incorporar maíz, arroz o azúcar como sustitutos de la cebada malteada, ya que son fuentes secundarias de almidón de menor costo.

El 90 % de la cerveza está compuesta por agua. Durante años, el compuesto mineral del agua contribuía en mayor proporción en el factor de sabor de la cerveza. Por lo tanto,

era una característica específica de la zona de la tierra de donde provenía (Warnasooriya, 2011).

Actualmente, este ingrediente se puede modificar químicamente para elaborar un estilo de cerveza en concreto, a pesar de que las fuentes de agua con altos niveles de pureza siguen siendo preferenciales. La cebada proviene de la familia de los cereales básicos y es particularmente empleado en la elaboración de cerveza. Existen tres tipos de cebada. Cada uno se diferencia por el número de semillas que poseen en la parte superior del tallo, ya que las semillas crecen a lo largo del tallo central y pueden surgir en dos, cuatro y seis filas.

En Europa, la cebada de dos hileras es la preferencial para los consumidores, dado que posee una malta de mejor calidad, y una relación de almidón-cáscara que es mayor en comparación a la cebada de cuatro o seis hileras. En EE.UU. se decantan por la cebada de seis hileras, debido a que su proceso de cultivo es de menor costo y a que contiene mayores niveles de concentración de enzimas para transformar el almidón del grano en azúcar y otros productos fermentables (Warnasooriya, 2011).

Por otra parte, para utilizar la cebada en el proceso de elaboración de la cerveza antes debe maltearse, para lo cual se requiere llevar a cabo un proceso de conversión natural. El primer paso es la germinación de la cebada. En este proceso, se remoja la cebada en agua por varios días, para posteriormente escurrirla y mantenerla a unos 150 grados centígrados durante cinco días. Como resultado, se obtendrá el rompimiento de la cáscara y el brote de la cebada, denominando este punto como la malta verde. Como es característico en todas las semillas, la cebada posee nutrientes que permiten sostener la semilla en el proceso de crecimiento, hasta que pueda elaborar sus propios nutrientes a través de la fotosíntesis.

En el proceso de germinación, la planta expulsa enzimas que posteriormente se convierten en azúcares que alimentaran a la planta en su proceso de crecimiento. El punto central del proceso de malteado se basa en interrumpir la germinación de la cebada en la fase donde las enzimas productoras de azúcar se proliferan, mientras que la mayor parte del componente de almidón no se ha procesado. Eventualmente, dichas enzimas elaborarán azúcares que servirán para nutrir a la levadura con la finalidad de producir el alcohol en la cerveza. Una vez liberadas las enzimas, se inicia el secado de la malta verde a partir de un aumento gradual de la temperatura.

El proceso de secado será fundamental para determinar la intensidad del sabor y color de la malta, dado que estará supeditado al nivel de la temperatura. Como último paso se lleva a cabo la eliminación de las pequeñas raíces que se desarrollan en la germinación y de esta manera la cebada malteada está preparada para iniciar el proceso de elaboración. Una gran parte de las cervecerías adquieren cebadas que han pasado por el proceso de malteado bajo una serie de especificaciones de sus demandantes (Rabin y Forget, 2014).

El lúpulo, terminológicamente conocido como *humulus lupulus*, es una enredadera en flor que se emplea como conservante y por sus aceites esenciales que incorporan el sabor, aroma y un equilibrio de dulzura en la malta; son conocidos como lúpulos amargos y lúpulo aromáticos, respectivamente. Por lo general, antes de su uso se seca y se extrae el sabor amargo del lúpulo durante el hervor. Los lúpulos aromáticos se encargarán de aportar el aroma mediante sus aceites esenciales. El perfil de sabor y aroma distintivo estará determinado por la variedad de lúpulo. El lúpulo se caracteriza por ser un ingrediente nuevo en el proceso de producción de la cerveza, ya que se ha utilizado con regularidad durante los últimos dos siglos.

Las levaduras se definen como hongos unicelulares y tienen un papel destacado en el proceso de fabricación de la cerveza. Gran parte de las levaduras que se utilizan en la cerveza pertenecen al género *Saccharomyces*. La función principal de las levaduras son transformar los azúcares del mosto en alcohol. El sabor que brinda la levadura se denomina “sabor limpio”.

El sabor de la cerveza también se ve afectado por los tres subproductos metabólicos que genera la levadura que son: fenoles (sabor medicinal o sabor picante o similar al clavo), ésteres (sabor afrutado) y diacetilos (sabor a caramelo o amaderado) (Boulton, y Quain, 2008). La presencia de estos sabores se determinará por el tipo de cerveza que se produzca.

### **5.3. Proceso de fermentación**

En la elaboración de la cerveza ocurre un proceso de fermentación, en el cual la levadura transforma los azúcares provenientes del líquido de la cebada (mosto) en etanol y dióxido de carbono. Adicionalmente, los fabricantes cerveceros utilizan compuestos de sabor para maximizar éste en las cervezas y darle uno específico. En el proceso de fermentación se pueden definir dos fases:

Fase de latencia: La primera fase y de mayor riesgo considerando que es cuando el mosto puede contaminarse debido a las bacterias que pueden alterar su finalidad, por ello lo mejor es hacer que esta fase sea lo más corta posible y que no supere las 24 horas. Al final de esta etapa se formará una espuma que protegerá al mosto.

Fase de fermentación: La segunda fase de fermentación y crecimiento dura unos cuantos días, la levadura empieza a fermentar el mosto y comienza a expulsar el dióxido de carbono. Se produce un acondicionamiento debido a que la levadura empieza a eliminar las sustancias que pueden dañar a la cerveza.

La fase de latencia es el período que ocurre entre el lanzamiento de levadura al mosto y el inicio de la fermentación. En su llegada al mosto, la levadura necesita cierto tiempo para aclimatarse en su nuevo ambiente y pasar del proceso de adaptabilidad al de acción metabólica. Durante la etapa de latencia, la levadura activa sus mecanismos metabólicos, mediante el cual absorbe los azúcares necesarios para la extracción nutrientes. Esta etapa puede durar de 3 a 15 horas, dependiendo de diversos factores fisiológicos del mosto como su tipo y densidad relativa, así como de la temperatura del ambiente e incluso depende de los factores que conciernen a la levadura como su salud o cepa. También, durante esta etapa las células de la levadura se encargan de absorber todo el oxígeno disponible, el cual es necesario para que la levadura realice su acción y produzca importantes factores como los esteroides, que son necesarios en la porosidad de la capa protectora de la levadura.

La temperatura a un nivel alto conlleva a una etapa de fermentación más corta. Sin embargo, los productores cerveceros usualmente trabajan en temperaturas bajas, debido a que las temperaturas altas desarrollan sustancias como el alfa acetolactato, que es un iniciador de diacetilo el cual es peligroso al ser inhalado (Rabin, y Forget, 2014). La concentración inicial de las levaduras puede influir en la duración y efectividad de la fase de latencia. Una mayor concentración de las levaduras puede hacer que la fase de latencia disminuya, pero ya que cada célula produce la misma cantidad de células nuevas, el resultado al final de la fermentación puede ser mayor número de células viejas, lo que puede llevar a sabores no tan agradables de la cerveza y poca viabilidad en el uso de la levadura.

Es importante, además, que la etapa de latencia no se extienda demasiado, aunque la mayoría de los mostos permanecen estables durante por lo menos 24 hora, es mejor tener una fermentación activa dentro de las 15 horas. Esto, debido a que el mosto fresco

es un ambiente recurrente para bacterias y levaduras silvestres, por lo que es sustancial que empiece la fermentación rápido con la levadura en la forma deseada, antes de que otro organismo pueda hacer de ella su hábitat.

La fase de fermentación y crecimiento dura de uno a cuatro días. Ocurre de manera exponencial porque la levadura comienza a consumir los azúcares a medida que se sale de la fase de latencia, siguiendo un patrón determinado, primero usa glucosa, luego fructosa y al final sacarosa. La concentración de glucosa en el mosto es aproximadamente el 14 % de los azúcares totales. También, dentro de la fase de crecimiento exponencial se produce dióxido de carbono (CO<sub>2</sub>), el cual crea una cubierta superficial de espuma mediante la salida de aire. Durante esta fase el número de células aumenta estrepitosamente y se crea etanol y otros compuestos aromatizantes.

Las divisiones de aire burbujan chispeantes durante esta etapa y el aroma que se desprende en la mayoría de las fermentaciones de levadura neutra es de aceitunas. El azúcar central de la malta es la maltosa, de allí su nombre. Esta es una componente de sabor importante dentro del proceso, ya que le da el sabor característico a la cerveza y constituye el 59 % de los azúcares del mosto. Existen genes de la levadura que se activan en respuesta a la maltosa, lo que da paso a la fermentación en la levadura de cerveza.

Un azúcar difícil de procesar para la levadura es la maltotriosa. No obstante, existen ciertas levaduras que la procesan mejor que otras. Algunas levaduras en específico no procesan la maltotriosa, esto debido a que cuanto más floculante la levadura, es decir, cuanto mayor sea la combinación de partículas sólidas, menos se llega a la fermentación, por lo que la capacidad de fermentar le da a cada cepa de levadura un rango característico. En el auge del proceso se dice que la cerveza está en “kraeusen alto” y esto sucede cuando la cabeza de espuma, en la parte superior de la fermentación, se vuelve de color amarillento marrón. Los colores de la espuma se producen principalmente de componentes apresurados de malta y los colores marrones en específico se forman debido a resinas de lúpulo oxidadas.

Luego del crecimiento exponencial, comienza un crecimiento estacionario de tres a diez días. La levadura crece lentamente hasta que el proceso de crecimiento se detiene. Se ha generado la mayoría de los compuestos de sabor y aroma, incluidos los alcoholes y compuestos de azufre. En este punto, la cerveza se conoce como verde porque no tiene

el equilibrio óptimo de sabores. También, la fase donde la cerveza madura, se le conoce como acondicionamiento (Lewis y Young, 2012).

La levadura reintegra el diacetilo que se generó durante la fermentación y el sulfuro de hidrógeno abandona la parte superior del fermentador en forma de gas, el krausen cae y la levadura empieza a asentarse para flocular. Es esencial percatarse del grado de atenuación en esta parte (medir la densidad relativa) para comprobar que la levadura ha llegado a la fermentación. Algunas cepas de levadura empiezan a flocular antes de cumplir todas las etapas y necesitan ser “despertadas” en solución.

Las cervecerías profesionales mantienen el contenido del fermentador en frío partiendo progresivamente de 35° a 40°, lo que ejerce presión sobre la levadura llevándola a flocular. La mayoría de los cerveceros caseros no tienen las condiciones adecuadas para realizar este proceso, por lo que deben esperar a que el fermentador se adecúe, pero si la cerveza se va a embotellar se puede permitir que el proceso se complete en las botellas.

## **6. Modelo matemático de fermentación en la literatura**

El modelo matemático surge como una herramienta para entender el fenómeno o caso de estudio, del proceso de fermentación de la cerveza. Para este propósito, en de Andrés-Toro, Girón-Sierra, Lopez-Orozco, Fernandez-Conde, Peinado y García-Ochoa(1998), se propone un modelo cinético para la fabricación de la cerveza. En este modelo se consideran cinco componentes principales: biomasa, azúcar, etanol, diacetilo y acetato de etilo. de Andrés-Toro, Girón-Sierra, Lopez-Orozco, Fernandez-Conde, Peinado y García-Ochoa(1998) escogen este modelo con respecto a otros modelos publicados con anterioridad, debido a que separa la biomasa en tres componentes: células en latencia, activas y muertas; y además, se consideran las células activas como el único factor en el proceso de fermentación. La tabla 1 describe la nomenclatura usada para este modelo matemático.

Parámetro	Description	Unit
$\mu_a$	Tasa de producción de etanol	$\text{h}^{-1}$
$\mu_D$	Tasa de sedimentación de levadura específica	$\text{g/l}$
$\mu_{eas}$	Tasa de coeficiente de acetato de etilo	$\text{g/l}$
$\mu_{lag}$	Tasa específica de formación latente	$\text{h}^{-1}$
$\mu_s$	Tasa de consumo de sustrato	$\text{h}^{-1}$
$\mu_x$	Tasa de crecimiento de levadura específica	$\text{h}^{-1}$
$acet$	Concentración de acetato de etilo	$\text{ppm}$
$diac$	Concentración de diacetilo	$\text{ppm}$
$e$	Concentración de etanol	$\text{g/l}$
$f$	Factor inhibidor de fermentación	$\text{g/l}$
$k_{dc}$	Tasa de aparición de diacetilo	
$k_{dm}$	Tasa de reducción de diacetilo	
$k_m$	Parámetro de inhibición del crecimiento de levadura	$\text{g/l}$
$k_s$	Parámetro de inhibición de azúcar	$\text{g/l}$
$s$	Concentración de azúcar	$\text{g/l}$
$s_0$	Concentración inicial de azúcar	$\text{g/l}$
$t$	Tiempo	$\text{h}$
$T$	Temperatura	$^{\circ}\text{C}$
$x_{active}$	Biomasa activa suspendida	$\text{g/l}$
$x_{dead}$	Biomasa muerta en suspensión	$\text{g/l}$
$x_{lag}$	Biomasa latente en suspensión	$\text{g/l}$

Tabla 6.1: Nomenclatura usada en el modelo de de Andrés-Toro, Girón-Sierra, Lopez-Orozco, Fernandez-Conde, Peinado y García-Ochoa (1998)

A continuación, la enunciación del modelo correspondiente a las fases de latencia y

fermentación es:

$$\begin{aligned}\frac{dx_{\text{lag}}}{dt} &= -\mu_{\text{lag}} \cdot x_{\text{lag}} , \\ \frac{dx_{\text{active}}}{dt} &= \mu_x \cdot x_{\text{active}} - k_m \cdot x_{\text{active}} + \mu_{\text{lag}} \cdot x_{\text{lag}} , \\ \frac{dx_{\text{dead}}}{dt} &= k_m \cdot x_{\text{active}} - \mu_D \cdot x_{\text{dead}} , \\ \frac{ds}{dt} &= -\mu_s \cdot x_{\text{active}} , \\ \frac{de}{dt} &= \mu_a \cdot f \cdot x_{\text{active}} .\end{aligned}$$

Para describir la evolución de los subproductos que tienen un impacto importante (el acetato de etilo contribuye con un olor y sabor afrutado, y el diacetilo hace que la cerveza sea pesada y dulce aromatizado), se establecen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{d(\text{acet})}{dt} &= \mu_{\text{eas}} \cdot \mu_s \cdot x_{\text{active}} , \\ \frac{d(\text{diac})}{dt} &= k_{dc} \cdot s \cdot x_{\text{active}} - k_{dm} \cdot \text{diac} \cdot e.\end{aligned}$$

Las ecuaciones paramétricas restantes se calculan como:

$$\begin{aligned}x_{\text{total}} &= x_{\text{active}} + x_{\text{lag}} + x_{\text{dead}} , \\ \mu_x &= \frac{\mu_{x0} \cdot s}{0.5 \cdot s_0 + e} , \\ \mu_D &= \frac{0.5 \cdot s_0 \cdot \mu_{D0}}{0.5 \cdot s_0 + e} , \\ \mu_s &= \frac{\mu_{s0} \cdot s}{k_s + s} , \\ \mu_a &= \frac{\mu_{a0} \cdot s}{k_s + s} , \\ f &= 1 - \frac{e}{0.5 \cdot s_0} .\end{aligned}$$

Dado que el proceso depende de la temperatura, el valor de todos los parámetros del modelo se calcula mediante ecuaciones exponenciales del tipo Arrhenius ( $\mu = A \cdot \exp(\frac{B}{RT})$ ), donde  $A$  y  $B$  son constantes,  $R$  es la constante de gases y  $T$  es la temperatura.

Estas formulaciones, que fueron tomadas de Carrillo-Ureta (2003), dan un modelo bastante bueno del proceso de fermentación, en el sentido de que se ha probado ya experimentalmente y se adecúa bastante a la realidad. Este es uno de los muchos modelos que describen la fermentación de la cerveza que se pueden encontrar en artículos científicos.

## 7. Problema de control óptimo

Para optimizar un modelo como el descrito en la sección 6, es necesario resolver el siguiente problema de control óptimo

$$\min_{u(t)} J = \Phi(\mathbf{x}(t_f)) + \int_0^{t_f} F(u, t) dt, \quad (7.1)$$

$$\text{s.t. } \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t)); \quad \forall t \in (0, t_f],$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

$$u(t) \in U(t); \quad \forall t \in [0, t_f],$$

en donde  $F(u, t)$  es una función que depende de las variables de control en el tiempo,  $\mathbf{x}$  es el vector de variables de estados; así como  $\mathbf{x}_0$  es el vector de valores iniciales correspondientes a  $\mathbf{x}(0)$ ;  $u$  es la variable de control;  $\Phi(\mathbf{x}(t_f))$  es una función que depende de las variables de estado en el tiempo final y  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$  es una función vectorial con las componentes que corresponden a las ecuaciones de la dinámica del proceso.

## 8. Principio del máximo de Pontryagin

El funcional dado en el problema de control óptimo (7.1) es de tipo Bolza.

El Hamiltoniano asociado a dicho funcional se construye como:

$$H(\mathbf{x}(t), u(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) = F(\mathbf{x}(t), u(t), t) + \boldsymbol{\lambda}(t) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t)),$$

en donde  $\boldsymbol{\lambda}(t)$  es un vector fila de  $\mathbb{R}^n$  denominado vector de variables adjuntas o vector de coestados, y  $\mathbf{f}$  es el vector lado derecho del sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO's) correspondiente a la dinámica del sistema.

El siguiente teorema constituye el resultado fundamental que establece las condiciones necesarias de optimalidad del problema de optimización.

**Teorema (Principio del máximo de Pontryagin):** Sea  $u^*(t)$  la trayectoria óptima de control, continua a trozos, y  $\mathbf{x}^*$  la trayectoria de estado óptima asociada, definidas en el intervalo  $[0, t_f]$ . Entonces existe una función vectorial  $t \mapsto \boldsymbol{\lambda}^*(t)$  continua que posee derivadas primeras continuas a trozos, tal que para cada  $t \in [0, t_f]$  verifica:

1. Para cada  $i = 1, \dots, n$

$$\frac{d\lambda_i^*}{dt}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*, u^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t)),$$

o de manera vectorial

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}^*}{dt}(t) = -\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{H}(\mathbf{x}^*(t), u^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t)).$$

2.

$$H(\mathbf{x}^*(t), u^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t)) \geq H(\mathbf{x}^*, u(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t)); \quad \forall u(t) \in U(t).$$

Esto equivale a calcular

$$\min_{u(t) \in U(t)} H(\mathbf{x}^*(t), u(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t)).$$

Esto es una condición de primer orden que implica encontrar  $u$  tal que

$$\frac{\partial H}{\partial u} = H_u = 0.$$

3. Para cada  $i = 1, \dots, n$

$$\frac{dx_i^*}{dt}(t) = f_i(\mathbf{x}^*(t), u(t)),$$

o de manera vectorial

$$\frac{d\mathbf{x}^*}{dt}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t), u(t)),$$

con  $\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0$ .

## 8.1. Aplicación del modelo

Aplicando el principio del máximo de Pontryagin al problema de optimización se tiene que:

- La verificación de la primera condición proporciona el siguiente sistema de EDO's para determinar el vector de co-estados:

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}^*}{dt}(t) = -[\boldsymbol{\lambda}^*(t)]^T \overline{\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f}}(\mathbf{x}^*(t), u(t)); \quad \forall t \in [0, t_f],$$

donde  $\overline{\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f}}(\mathbf{x}^*(t), u(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz Jacobina de la función vectorial  $\mathbf{f}$ .

- La verificación de la segunda condición proporciona  $u^*(t)$  de manera implícita mediante la siguiente ecuación:

$$H_{u^*} = \frac{dF(u, t)}{du} + \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u^*}(\mathbf{x}^*(t), u^*(t)) \right]^T \cdot \boldsymbol{\lambda}^*(t) = 0,$$

de donde también se deduce la condición

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u^*}(\mathbf{x}^*(t), u^*(t)) \right]^T \cdot \boldsymbol{\lambda}^*(t) < 0.$$

- La verificación de la tercera condición consiste simplemente en verificar la dinámica del sistema partiendo de la condición inicial dada:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}^*}{dt}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, u(t)); \quad \forall t \in (0, t_f], \\ \mathbf{x}^*(0) &= \mathbf{x}_0.\end{aligned}$$

## 9. Método del gradiente de primer orden

Este método consiste en aproximar la trayectoria óptima de control  $u^*(t)$ , aplicando la corrección iterativa

$$\Delta u^*(t) = -\varepsilon H_{u^*},$$

donde  $\varepsilon$  es una constante arbitraria proporcionada para regular la convergencia (estabilidad) y  $H_{u^*}$  viene dado por el lado izquierdo de la ecuación (2.16). Para la selección de la variable  $\varepsilon$  se tomó en consideración los valores empleados en Carrillo-Ureta, Roberts, y Becera (2003, September), por lo que se tomó como un rango apropiado valores entre 0 y 1, los cuales fueron ajustados tras realizar múltiples ejecuciones del método para determinar un valor final adecuado. Dado que  $H$  depende de las variables de co-estado,  $u^*(t)$  debe generarse mediante un proceso iterativo. El algoritmo es el siguiente:

---

Algoritmo 1: Método del gradiente de primer orden

---

Resultado: Una aproximación numérica de  $u^*(t)$

---

Data:  $t_f$  y  $\varepsilon$

Paso 0: Inicialización: Setear el contador de iteraciones  $k = 1$  y asumir un iterado inicial  $[u^*(t)]_0$  en el intervalo  $[0, t_f]$

Paso 1: Calcular  $x^*(t)$  y  $J^*$  a partir del Problema de valor inicial (PVI) y de la fórmula para el funcional dado, respectivamente.

Paso 2: Calcular el valor de co-estados resolviendo el problema de valor inicial hacia atrás.

Paso 3: Calcular  $H_{u^*}$ .

Paso 4: Determinar la aproximación numérica de  $u^*(t)$  mediante la fórmula iterativa

$$[u^*(t)]_{k+1} = [u^*(t)]_k - \varepsilon H_{u^*}$$

Tomar  $k = k + 1$  y repetir desde el Paso 1 hasta que la convergencia se alcance.

---

# CAPÍTULO 2

## 1. Metodología

En el presente capítulo se presenta la metodología empleada para lograr cada uno de los objetivos específicos planteados en este trabajo. En primer lugar se expone la forma en cómo se analizó el problema matemático y los modelos en la optimización dinámica. Posteriormente se presenta el estudio del modelo idóneo para la fermentación de cerveza. Finalmente, se describe la metodología para obtener las simulaciones numéricas mediante la implementación de un código en Python.

Esta investigación tiene un enfoque cuantitativo y es del tipo de diseño descriptivo y no experimental, debido a que se utilizó un modelo matemático que se basa en las leyes químicas que ocurren durante la fermentación.

### 1.1. Análisis de modelos en optimización dinámica

Para el análisis de los modelos en optimización dinámica, se hizo la revisión del estado del arte acerca de los estudios realizados en el área de optimización dinámica y elección del modelo en concreto que se tomó para el desarrollo de la propuesta. En Emilio(2001), se describe una amplia teoría moderna acerca de la optimización dinámica, donde se profundizan los teoremas importantes que son los pilares para el desarrollo de la teoría. Uno de los teoremas fundamentales es el principio del máximo de Pontryagin que es esencial para la resolución de problemas de optimización dinámica.

### 1.2. Análisis de modelo de fermentación de cerveza

Para el análisis del modelo de fermentación de cerveza, se hizo la revisión del modelo detallado de la fermentación en Angulo, De Cecchis, Salas, González y Massay (2021), específicamente se revisó las variables de estado y control involucradas para su implementación en código. Este modelo está formado por las siguientes ecuaciones diferenciales:

- Levadura latente

$$\frac{dX_{\text{lat}}}{dt} = -\mu_L * X_{\text{lat}} .$$

- Levadura activa para un  $t < t_{lat}$

$$\frac{dX_{act}}{dt} = \mu_L * X_{lat}.$$

- Levadura activa para un  $t \geq t_{lat}$

$$\frac{dX_{act}}{dt} = \mu_x * X_{act} - \mu_{DT} * X_{act} + \mu_L * X_{lat}.$$

- Levadura muerta para un  $t < t_{lat}$

$$\frac{dX_{muerta}}{dt} = -\mu_{SD} * X_{muerta}.$$

- Levadura muerta para un  $t \geq t_{lat}$

$$\frac{dX_{muerta}}{dt} = -\mu_{SD} * X_{muerta} + \mu_{DT} * X_{act}.$$

- Levadura suspendida para un  $t < t_{lat}$

$$\frac{dX_{susp}}{dt} = \mu_{SD} * X_{muerta}.$$

- Levadura suspendida para un  $t \geq t_{lat}$

$$\frac{dX_{susp}}{dt} = \mu_x * X_{act} - \mu_{SD} * X_{muerta}.$$

- Evolución del sustrato:

$$\frac{dC_s}{dt} = -\mu_S * X_{act}.$$

- Producción de etanol:

$$\frac{dC_E}{dt} = f * \mu_e * X_{act}.$$

Producción de compuestos no deseados:

- Acetato de etilo:

$$\frac{dC_{EA}}{dt} = Y_{EA} * \mu_x * X_{act}.$$

- Diacetilo:

$$\frac{dC_{Dy}}{dt} = \mu_{DY} * C_s * X_{act} - \mu_{AB} * C_{DY} * C_{EA}.$$

Donde las variables de estado son:

- $\mathbf{X}_{\text{lat}}$  → Concentración de levadura latente,
- $\mathbf{X}_{\text{act}}$  → Concentración de levadura activa,
- $\mathbf{X}_{\text{muerta}}$  → Concentración de levadura muerta,
- $\mathbf{X}_{\text{susp}}$  → Concentración de levadura suspendida o total,
- $\mathbf{C}_s$  → Concentración de sustrato,
- $\mathbf{C}_e$  → Concentración de etanol,
- $\mathbf{C}_{DY}$  → Concentración de diacetilo,
- $\mathbf{C}_{EA}$  → Concentración de acetato de etilo.

Donde los parámetros son:

- Velocidad específica de crecimiento celular

$$\mu_x = \frac{\mu_{xo} * Cs}{0.5 * Cso + Ce}.$$

- Velocidad específica de asentamiento celular

$$\mu_{SD} = \frac{\mu_{SDo} * 0.5 * Cso}{0.5 * Cso + Ce}.$$

- Velocidad de consumo de azúcar

$$\mu_S = \frac{\mu_{So} * Cs}{ks + Cs}.$$

- Factor de inhibición

$$f = 1 - \frac{Ce}{0.5 * Cso}.$$

- Tasa específica de crecimiento de etanol

$$\mu_e = \frac{\mu_{eo} * Cs}{ke * Cs}.$$

Y donde las constantes son:

- Velocidad específica de activación celular →  $\mu_L$ .
- Velocidad específica de muerte celular →  $\mu_{DT}$ .
- Velocidad máxima de consumo de azúcar →  $\mu_{So}$ .
- Constante de afinidad del azúcar →  $ks$ .
- Velocidad máxima de producción de etanol →  $\mu_{eo}$ .
- Constante de afinidad del etanol →  $ke$ .

- Velocidad de producción de diacetilo  $\rightarrow \mu_{DY}$ .
- Velocidad de consumo de diacetilo  $\rightarrow \mu_{AB}$ .
- Tiempo de latencia  $\rightarrow t_{\text{lat}}$ .

Finalmente, la optimización del modelo se realizó considerando dos tipos de funcionales, el primer tipo se tomará como

$$J_1 = -10C_E(tf), \quad (1.1)$$

con las siguientes restricciones:

$$C_{EA}(tf) \leq 0.31,$$

$$C_{DY}(tf) \leq 0.31.$$

Y el segundo tipo de funcional es

$$J_2 = -10C_E(tf) + \int_0^{tf} \max(0, u(t) - 15) dt, \quad (1.2)$$

con las siguientes restricciones:

$$C_{EA}(tf) \leq 0.31$$

$$C_{DY}(tf) \leq 0.31$$

### 1.3. Revisión del método numérico

Con respecto al método numérico, se revisó el estado del arte de la teoría de métodos numéricos, luego se implementó un código para la obtención de resultados del problema. En Banga (2005), se presentan diversos métodos de optimización dinámica, entre los que, se escogió el método del gradiente de primer orden, el cual es un método determinístico y directo. Para la aplicación de este método se toman perfiles iniciales, que son las soluciones aproximadas que mediante cada iteración se van mejorando y acercando más a la solución final.

# CAPÍTULO 3

En el presente capítulo se presentan los resultados obtenidos en este proyecto. En primer lugar se muestra el repositorio donde se puede acceder al algoritmo implementado. Posteriormente se da una descripción de los gráficos que se obtuvieron y su interpretación.

## 1. Implementación de los algoritmos de optimización

En la implementación del algoritmo de optimización, se puso a prueba el método del gradiente empleando el Ejemplo 4.12 de Emilio Cerda (2001), el cual tiene una solución existente y se formula de la siguiente manera:

$$\text{mín } J = \int_0^1 \frac{1}{2} u^2 dt + 3x_1(1) + x_2(1),$$

$$\text{sujeto a } \dot{x}_1 = u,$$

$$\dot{x}_2 = x_1,$$

$$\text{con : } x_1(0) = 1, x_2(0) = 0,$$

cuyas solución analítica es:

$$u = t - 4, \text{ con } x_1(0) = 1,$$

$$x_1(t) = \frac{t^2}{2} - 4t + 1, \text{ para } 0 \leq t \leq 1,$$

$$x_2(t) = \frac{t^3}{6} - 2t^2 + t, \text{ para } 0 \leq t \leq 1.$$

Mediante esto, se comparó la precisión del método calculando el error relativo en las variables de control y de estados, presentes en el ejercicio. Se generó un benchmark cuyos resultados se presentan en la tabla:

	Valor
Norma Vector Hu	9.85267588807028e - 09
Norma Vector Error (Control)	2.479610447946448e - 08
Error Relativo Maximo (Control)	2.901494267071314e - 09
Error Relativo Minimo (Control)	1.934329437366008e - 09
Norma Vector Error (Variable $x_1$ )	4.392939859456945e - 07
Norma Vector Error (Variable $x_2$ )	1.846366139179809e - 06

Tabla 1.1: Benchmark de Prueba

Para la optimización computacional del modelo presentado en la sección anterior se utilizó como base el algoritmo del método del gradiente de Carrillo-Ureta, Roberts y Becera (2003). El código se realizó utilizando el lenguaje Python y se creó un repositorio en Github donde se guardó la información y su descripción, el enlace es <https://github.com/lfiallos99/Fermentacion-Control-Optimo.git>

## 2. Resultados numéricos del algoritmo

En esta sección se muestran los resultados de las simulaciones numéricas obtenidas usando el método del gradiente para el problema de optimización de la fermentación. A partir de la implementación del método determinístico y los funcionales 1.1 y 1.2, se obtuvo un perfil optimizado de temperatura con respecto al perfil inicial de la industria ecuatoriana .

Para el funcional 1.1, la Figura 2.1 se observa el perfil inicial de temperatura y se puede comparar con el perfil final que se obtiene en la optimización. Para tener un buen control óptimo de la fermentación, se ha de iniciar el proceso desde  $10^{\circ}\text{C}$  e ir elevándolo hacia unos  $11^{\circ}\text{C}$  durante las primeras 10 horas. A partir de ahí, mantener una temperatura estable entre  $11^{\circ}\text{C}$  y  $11.5^{\circ}\text{C}$  por lo menos unas 50 horas. Posteriormente, se debe elevar la temperatura casi linealmente por 80 horas hasta llegar a una temperatura final de  $16^{\circ}\text{C}$ . Se puede ver que la industria sigue un patrón de temperatura parecido al óptimo, sin embargo, está sujeto a pequeñas mejoras.

Con respecto a los productos, se observa que el etanol tuvo un incremento en la concentración final a lo largo del proceso como se observa en la Figura 2.2. Por otro lado, los compuestos indeseados se mantuvieron en un margen adecuado. Por ejemplo, el diacetilo (Figura 2.3) disminuyó su concentración y el acetato de etilo (Figura 2.4), aunque incrementó su concentración, se mantiene bajo la cota establecida en el funcional 1.1.

En síntesis, con la optimización del funcional 1.1, se obtiene un perfil que sugiere aumentar ligeramente la temperatura a lo largo del tiempo. Con este perfil habría un aumento en la producción de etanol, que es el principal ingrediente en la producción de cerveza. Además, se reduciría ligeramente el diacetilo que suele dar un mal sabor a esta bebida.

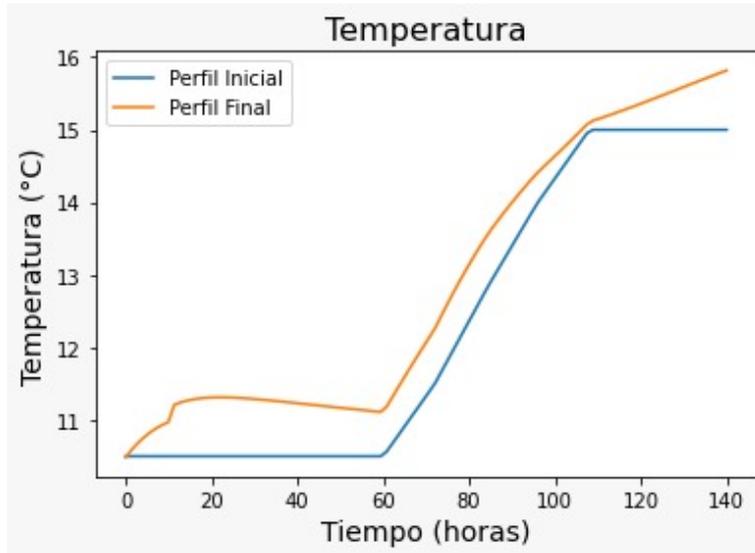


Figura 2.1: Perfiles inicial y final de temperatura obtenidos en la implementación del método del gradiente para el funcional 1.1

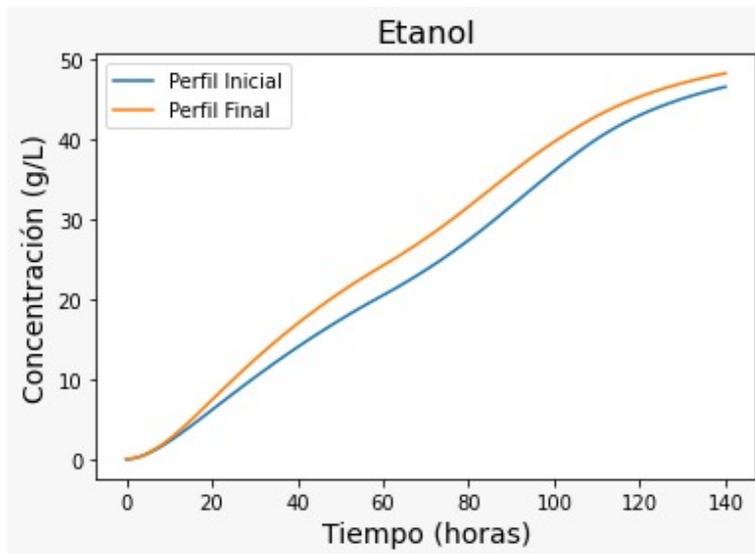


Figura 2.2: Perfiles inicial y final de etanol obtenidos en la implementación del método del gradiente para el funcional 1.1

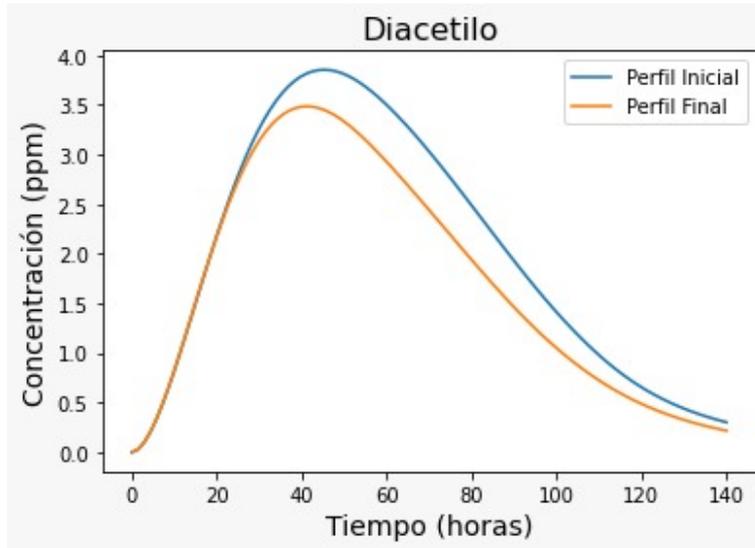


Figura 2.3: Perfiles inicial y final de diacetilo obtenidos en la implementación del método del gradiente para el funcional 1.1

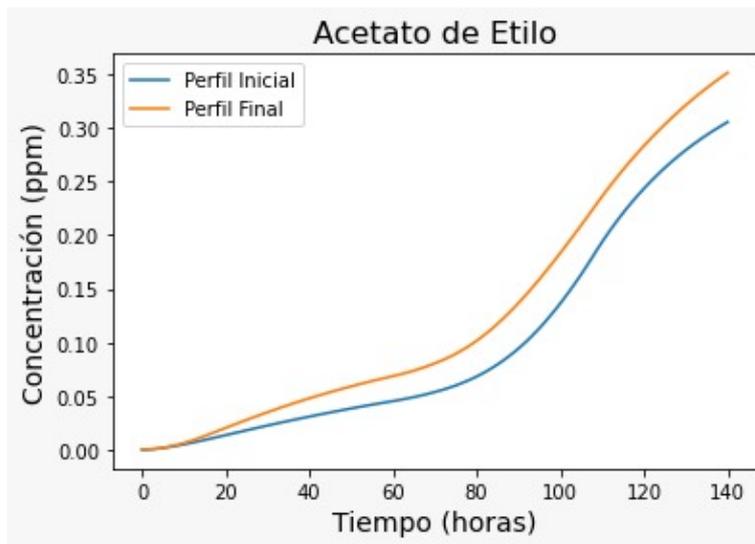


Figura 2.4: Perfiles inicial y final de acetato de etilo obtenidos en la implementación del método del gradiente para el funcional 1.1

Descripción	Valor Inicial	Valor Final
Valor del Funcional Inicial	-465.4456681148415	-482.36978076601815
Concentración de Etanol (g/L)	46.54456681148415	48.236978076601815
Concentración de Diacetilo (ppm)	0.3018891050643581	0.2167966242093593
Concentración de Acetato (ppm)	0.3054295306887878	0.35139969529930265

Tabla 2.2: Benchmark Funcional 1.1

Para el funcional 1.2, en la Figura 2.5, se puede observar el perfil optimizado de temperatura con respecto al perfil inicial. Similarmente al funcional 1.1, ambos perfiles de temperatura son parecidos, solo que, para el perfil final, las primera sesenta horas, comienza con 1°C mayor.

Con respecto a los productos, se observa que el etanol apenas incrementó su concentración Figura 2.6. Asimismo, en la Figura 2.7 y Figura 2.8 se observa que las concentraciones de diacetilo y acetato de etilo casi no cambiaron respecto a las curvas iniciales.

En síntesis, con la optimización del funcional 1.2, se obtiene un perfil de temperatura muy similar al perfil inicial. Este perfil apenas conllevaría a cambios en la concentración del etanol o diacetil. Por lo que sería más beneficioso la optimización del funcional 1.1.

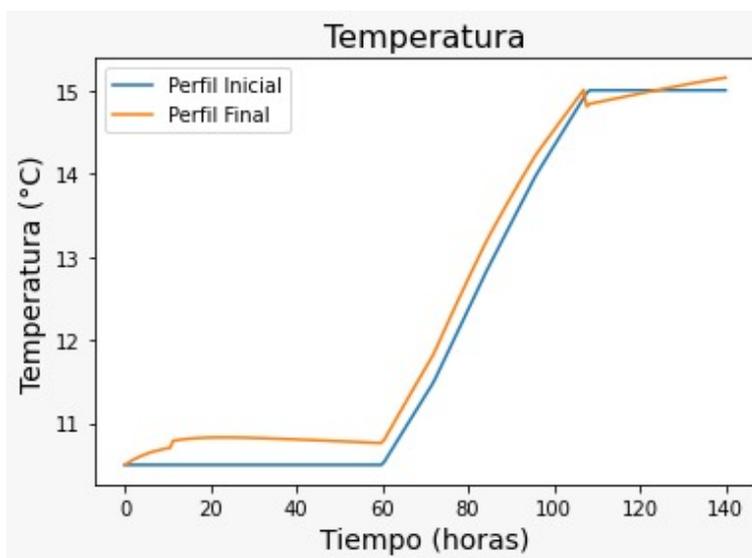


Figura 2.5: Perfiles inicial y final de temperatura obtenidos en la implementación del método del gradiente para el funcional 1.2

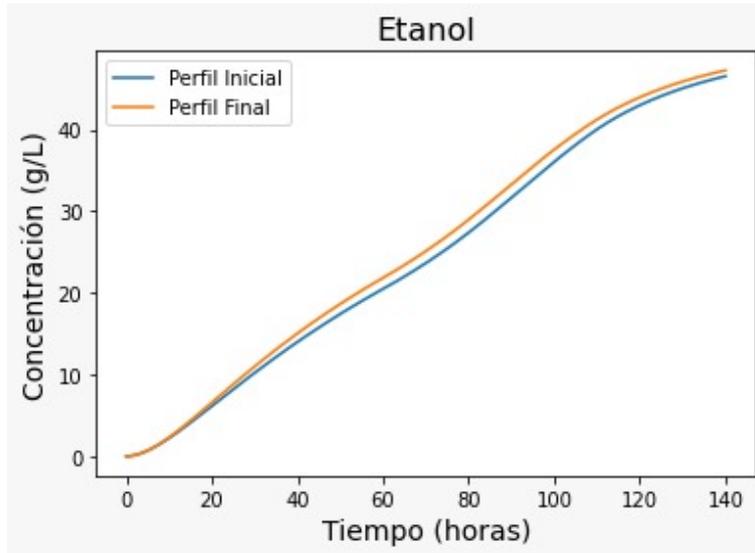


Figura 2.6: Perfiles inicial y final de etanol obtenidos en la implementación del método del gradiente para el funcional 1.2

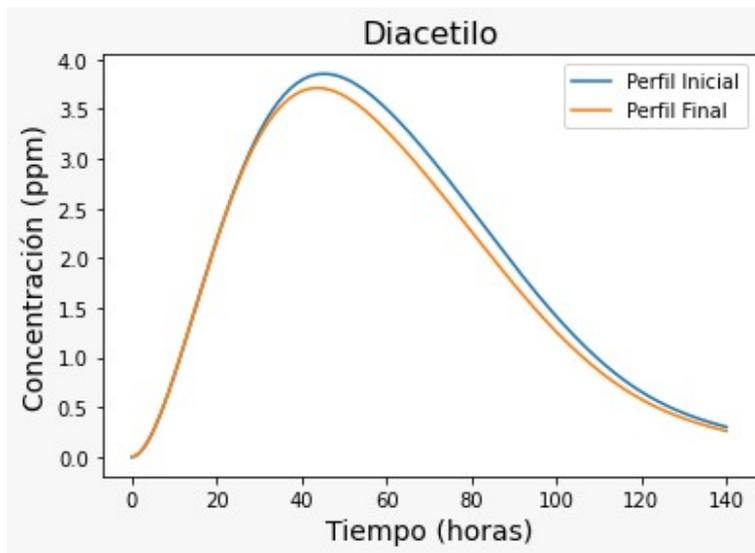


Figura 2.7: Perfiles inicial y final de diacetilo obtenidos en la implementación del método del gradiente para el funcional 1.2

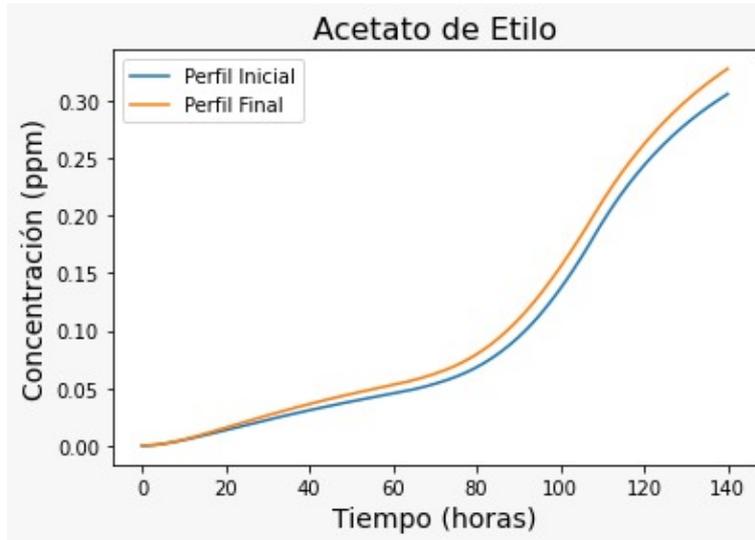


Figura 2.8: Perfiles inicial y final de acetato de etilo obtenidos en la implementación del método del gradiente para el funcional 1.2

Descripción	Valor Inicial	Valor Final
Valor del Funcional Inicial	-465.4456681148415	-472.61344618247165
Concentración de Etanol (g/L)	46.54456681148415	47.261344618247165
Concentración de Diacetilo (ppm)	0.3018891050643581	0.2615903920596503
Concentración de Acetato (ppm)	0.3054295306887878	0.3273807968081616

Tabla 2.3: Benchmark Funcional 1.2

# CAPÍTULO 4

## 1. Conclusiones y recomendaciones

En esta sección se presentan las conclusiones y recomendaciones obtenidas de los resultados de este trabajo, donde se utilizó el método del gradiente para la optimización de un modelo matemático de fermentación de cerveza.

### 1.1. Conclusiones

Las mejoras en el proceso de fermentación son algo deseable para la industria cervecera, puesto que conlleva a una mejora o cambio en los resultados de las reacciones que se producen durante este proceso. Aunque la fermentación de cerveza aparente ser un proceso sencillo, en realidad están involucrados muchos factores y reacciones. En este proyecto se utilizó el modelo de Angulo, De Cecchis, Salas, González y Massay (2021), el cual se ha comprobado que da buenos resultados para predecir la evolución del proceso de fermentación.

A través de la implementación del método de gradiente, empleando diferentes funcionales, se aproximó la solución de un problema de control óptimo estableciendo una temperatura óptima para que el proceso de fermentación vaya acorde a los estándares de la industria ecuatoriana. Se observó que los perfiles de temperatura no variaban demasiado respecto al perfil de la industria, sin embargo, se pueden realizar pequeñas mejoras.

Tras la revisión de las ventajas y desventajas de los diferentes métodos para la resolución de problemas de control óptimo, se seleccionó el modelo así como los funcionales y métodos numéricos adecuados para la implementación efectiva en código. El método numérico seleccionado fue el método del gradiente, debido a su facilidad de implementar y de poderse aplicar bajo cualquier funcional.

Mediante la implementación de un caso de la industria ecuatoriana, se comprobó que el método del gradiente permite optimizar los valores de diferentes variables mediante la manipulación de una variable de control. En este trabajo, la variable de control fue la temperatura y se optimizaron las concentraciones de los productos al final del proceso de fermentación, como el etanol, además de mantener al margen los compuestos no deseados en el proceso de fermentación como el diacetilo y acetato de etilo.

## 1.2. Recomendaciones

A lo largo de la literatura se observó que un método híbrido llevó a mejores resultados. Por tanto se podría complementar el método del gradiente, que es determinístico, con un método estocástico como los presentados en Banga, Balsa-Canto, Moles y Alonso (2005). En este proyecto se trabajó con un modelo que describe el proceso de fermentación de la cerveza. Sin embargo, es posible conseguir algún otro modelo mejor, en el sentido de que describa con mayor detalle cada etapa del proceso. Por esto, la elección de otro modelo, aplicando el método del gradiente para su optimización, podría mejorar los resultados.

# BIBLIOGRAFÍA

## Referencias

- [1] Angulo, W., De Cecchis, D., Salas, S. D., Gozález, Y., & Massay, C. (2021). Modelling and Temperature Uncertainty Analysis of a Fermentation Bioreactor at an Industrial Brewery. In *Computer Aided Chemical Engineering* (Vol. 50, pp. 1351-1356). Elsevier.
- [2] Navarrete Décimavilla, E. F. (2017). *DESARROLLO DEL CLUSTER DE LA INDUSTRIA CERVECERA EN ECUADOR: CASO DE ESTUDIO* (Doctoral dissertation, UNIVERSIDAD DE GUAYAQUIL).
- [3] de Andrés-Toro, B., Girón-Sierra, J. M., Lopez-Orozco, J. A., Fernandez-Conde, C., Peinado, J. M., & García-Ochoa, F. (1998). A kinetic model for beer production under industrial operational conditions. *Mathematics and Computers in Simulation*, 48(1), 65-74.
- [4] Banga, J. R., Balsa-Canto, E., Moles, C. G., & Alonso, A. A. (2005). Dynamic optimization of bioprocesses: Efficient and robust numerical strategies. *Journal of Biotechnology*, 117(4), 407-419.
- [5] Emilio, C. T. (2001). *Optimización Dinámica*. editorial, Prentice Hall.
- [6] Carrillo-Ureta, G. E., Roberts, P. D., & Becera, V. M. (2003, September). Optimal control of a fermentation process. In *2003 European Control Conference (ECC)* (pp. 1947-1952). IEEE.
- [7] Warnasooriya, W. M. D. R. (2011). *Modeling and simulation of the beer fermentation process and temperature control* (Doctoral dissertation).
- [8] Sociedad Ecuatoriana de Cerveceros Artesanales, SECA. (2016). *Historia de la Cerveza: Seca Ecuador*. Recuperado de <http://secaecuador.es.tl/HISTORIA-DE-LA-CERVEZA.htm>
- [9] European Food Information Council EUFIC. (2002). *La cerveza: Una larga historia*. Recuperado de <http://www.eufic.org/article/es/artid/cerveza/>

- [10] Avilés, E. (2016). Enciclopedia del Ecuador: Cervecería. Quito, Ecuador. Recuperado de <http://www.encyclopediadelecuador.com/temasOpt.php?Ind=2663Let=>
- [11] Chapi Acosta, Á. G. (2017). *ÁREA ADMINISTRATIVA* (Doctoral dissertation, UNIVERSIDAD TÉCNICA PARTICULAR DE LOJA).
- [12] Rabin, D., Forget, C. (2014). *Dictionary of beer and brewing*. Routledge.
- [13] Lewis, M. J., Young, T. W. (2012). *Brewing*. Springer Science Business Media.
- [14] Boulton, C., Quain, D. (2008). *Brewing yeast and fermentation*. John Wiley Sons.