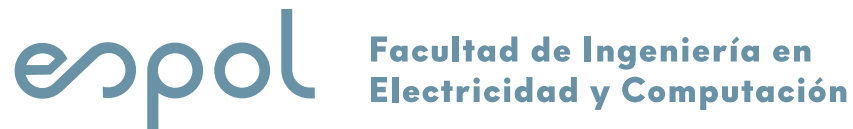




ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL

Facultad de Ingeniería en Electricidad y Computación



**“ESTIMACIÓN DEL ESTADO DE CARGA DE BATERÍA LITHIUM-ION
APLICANDO TÉCNICAS DE ESTIMACIÓN NO LINEAL”**

TRABAJO DE TITULACIÓN

Previo a la obtención del Título de:

MAGÍSTER EN AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL INDUSTRIAL

Presentado por:

Pedro Antonio Lara Rivadeneira

Guayaquil – Ecuador

2019

AGRADECIMIENTO

Agradezco a mi familia por su apoyo incondicional en todo momento. Agradezco al profesor Douglas Plaza por su valiosa ayuda durante la fase final de este proyecto. Agradezco al cuerpo docente de la ESPOL y al profesor César Martín por su guía y enseñanzas en cada fase de este proyecto. Agradezco a mis compañeros de aula por volver más participativo y ameno el estudio de cada tema y por su demostración permanente de compañerismo

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a mis padres Antonio y Carmen por su amor incondicional en todo proyecto realizado, a mis tías y tíos en especial mi tío Amadeo por enseñarnos aún hoy con su ejemplo de vida a ser siempre luchadores, a mis hermanos Teodorita y Lenin por su apoyo permanente en cada reto, a mis hijos Danny e Ian por ser fuente inspiradora de amor y fortaleza en todo momento. A mi tío Amadeo que lucha contra una enfermedad.

TRIBUNAL DE SUSTENTACIÓN

PhD. César Martín

DECANO (S) FIEC

PhD. Douglas Plaza Guingla

DIRECTOR

MSc. David Vaca

VOCAL PRINCIPAL

DECLARACIÓN EXPRESA

La responsabilidad y la autoría del contenido de este Trabajo de Titulación me corresponde exclusivamente; y doy mi consentimiento para que la ESPOL realice la comunicación pública de la obra por cualquier medio con el fin de promover la consulta, difusión y uso público de la producción intelectual.

(Reglamento de Graduación de la ESPOL)

Pedro Antonio Lara Rivadeneira

RESUMEN

El presente trabajo consiste en la implementación de dos filtros no lineales como son el filtro extendido de Kalman y el filtro de Kalman de ensamble de partículas. EL objetivo del trabajo es el de evaluar el desempeño de ambos filtros en el problema de estimación no lineal del estado de carga de una batería de Lithium-ion.

En el primer capítulo del presente trabajo se expone el problema a resolver, su justificación y todos los objetivos que se persiguen en el presente trabajo.

En el segundo capítulo se presenta el fundamento teórico en el cual se encuentran basados tanto el filtro EKF como el filtro EnKF. Se desarrollan cada una de las ecuaciones de los filtros bajo un esquema propabilístico fundamentándose en el filtro teórico de Bayes.

El tercer capítulo presenta el modelado y la simulación llevada a cabo del sistema dinámico que representa la carga y descarga de la batería en función de la corriente eléctrica de carga.

En el capítulo cuarto se presentan los resultados gráficos y numéricos del desempeño de ambos filtros en el problema de estimación del estado de carga de la batería. Los resultados muestran un desempeño apropiado de ambos

filtros en la reconstrucción de los estados verdaderos el sistema. Sin embargo, tanto gráficamente como numericamente, es el filtro EnKF el que muestra un mejor desempeño.

ÍNDICE GENERAL

Agradecimiento	II
Dedicatoria	IV
Tribunal de Graduación	VI
Declaración Expresa	VII
Resumen	VIII
Índice General	X
Tribunal de Graduación	XII
Índice de figuras	XII
Índice de tablas	XIV
Introducción	XV
1 Antecedentes	1
1.1 Descripción del problema	1
1.2 Justificación	2
1.3 Objetivos	2
1.4 Metodología	2
1.4.1 El Filtro de Kalman Extendido (EKF).	3

1.4.2	El filtro de Kalman de Ensamble de partículas (EnKF). . .	3
2	Metodologías	4
2.1	El Filtro de Kalman	8
2.1.1	Introducción	8
2.1.2	Fundamento probabilístico del filtro de Kalman lineal . . .	10
2.2	El Filtro de Kalman Extendido	14
2.2.1	Introducción	14
2.2.2	Fundamentos probabilísticos del filtro extendido de Kalman	15
2.3	El filtro de Kalman de Ensamble de partículas	21
2.3.1	Fundamento probabilístico del EnKF	21
3	Modelamiento y Simulación	29
3.1	Modelaje del sistema de baterías de Lithium-ion	29
3.2	Sistema de Baterías Lithium-ion representado en espacio de es- tados	32
3.3	Discretización del modelo del sistema de baterías Lithium-ion . .	33
3.4	Simulación de la batería Lithium-ion en MATLAB script	34
3.4.1	Generación de las mediciones empleadas en el estudio .	37
4	Análisis Comparativo del desempeño de los filtros EKF y EnKF	43
4.1	Implementación del Filtro Extendido de Kalman	43
4.2	Implementación del filtro de Kalman de ensamble de partículas .	48
4.3	Análisis Comparativo	51
	Conclusiones y Recomendaciones	56
	Bibliografía	58

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 3.1	Circuito equivalente del sistema de baterías Lithium-ion .	30
Figura 3.2	Gráfica de la variable de entrada Corriente de Carga . .	35
Figura 3.3	Gráfica del estado Voltaje 1	36
Figura 3.4	Gráfica del estado Voltaje 2	37
Figura 3.5	Gráfica de la variable estado de carga	37
Figura 3.6	Gráfica del estado Voltaje en circuito abierto	38
Figura 3.7	Gráfica del estado Voltaje de la batería	38
Figura 3.8	Gráfica del estado perturbado Voltaje 1	40
Figura 3.9	Gráfica del estado pertrubado Voltaje 2	40
Figura 3.10	Gráfica de la variable perturbada de estado de carga . .	41
Figura 3.11	Gráfica del estado perturbado Voltaje en circuito abierto	41
Figura 3.12	Gráfica de la salida perturbada de Voltaje de la batería .	42
Figura 4.1	Gráfica del estado estimado Voltaje 1	45
Figura 4.2	Gráfica del estado estimado Voltaje 2	46
Figura 4.3	Gráfica de la variable estimada estado de carga	46
Figura 4.4	Gráfica del estado estimado Voltaje en circuito abierto .	47
Figura 4.5	Gráfica del estado estimado Voltaje de la batería	47
Figura 4.6	Gráfica del estado estimado por el filtro EnKF del Voltaje 1	50
Figura 4.7	Gráfica del estado estimado por el filtro EnKF del Voltaje 2	51
Figura 4.8	Gráfica de la variable estimada por el filtro EnKF del es- tado de carga	51

Figura 4.9	Gráfica del estado estimado por el filtro EnKF del Voltaje en circuito abierto	52
Figura 4.10	Gráfica del estado estimado por el filtro EnKF del Voltaje de la batería	52
Figura 4.11	Gráfica de la estimación EKF y EnKF del Voltaje 1	53
Figura 4.12	Gráfica de la estimación EKF y EnKF del Voltaje 2	53
Figura 4.13	Gráfica de la estimación EKF y EnKF del estado de carga	54
Figura 4.14	Gráfica de la estimación EKF y EnKF del Voltaje en circuito abierto	54
Figura 4.15	Gráfica de la estimación EKF y EnKF del Voltaje de la batería	55

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 3.1	Valores de los parámetros del modelo de la batería.	29
Tabla 3.2	Valores de los parámetros de la relación no lineal entre E_0 y SoC	31
Tabla 3.3	Ruidos de perturbación de las variables del modelo.	39
Tabla 4.1	Variables del modelo.	55

INTRODUCCIÓN

Actualmente los vehículos eléctricos se utilizan con mayor penetración en el contexto global como una alternativa a los vehículos con motores de combustión. En este sentido, sistemas basados en bancos de baterías, sistema con un costo elevado, son el centro de profundas investigaciones. Las baterías de Lithium-ion juegan un rol importante hoy en día por su eficiencia, tamaño y costo. A pesar de todos los últimos desarrollos tecnológicos en lo que respecta a sistemas eficientes de almacenamiento de energía, existen riesgos debidos al costo, volumen y seguridad de las baterías fabricadas con Lithium-ion.

El desempeño de las baterías puede verse afectado por factores como: temperatura de operación y vida útil del sistema. El estado de carga de la batería (SoC, de sus siglas en inglés) es reconocido como un parámetro vital de la batería. La estimación precisa del parámetro SoC posee un gran potencial para extender la vida útil, aumentar el desempeño de la batería y mejorar las condiciones de confiabilidad y seguridad en la operación del sistema eléctrico del vehículo. Sin embargo no es posible estimar directamente el parámetro SoC directamente por tanto se convierte en un problema de estimación no lineal.

En el presente trabajo se presenta el desempeño de dos filtros como metodologías de estimación no lineal del parámetro SoC. Parámetro que es incluido dentro del vector de estados en el proceso de modelamiento del sistema de

carga y descarga de la batería. Un análisis comparativo llevado a cabo en este trabajo permite discutir acerca de las características de cada uno de los filtros.

Capítulo 1

1. Antecedentes

1.1. Descripción del problema

Con mayor frecuencia empezamos a ser testigos del cambio del parque automotor donde actualmente predominan las ventas de los vehículos del tipo eléctricos (EV). Esto debido a sus características como cero emisiones de CO₂, menor desgaste mecánico entre las más importantes [4]. Sin embargo un componente principal del EV es un banco de baterías de peso considerable, precio elevado y de cuyo funcionamiento depende el correcto flujo de energía eléctrica a todo el vehículo. Por lo tanto, un sistema de supervisión y de estimación del estado de carga (SoC) del banco de baterías es de vital importancia para evitar daños en el banco de baterías.

1.2. Justificación

Es de conocimiento que no es posible estimar directamente la variable SoC de la batería debido a la característica no lineal presente en el funcionamiento de la batería. Este problema de estimación demanda de la aplicación de técnicas de estimación apropiadas [18]. En el presente trabajo se aplicarán técnicas no lineales de estimación como son el Extended Kalman Filter (EKF) y el Ensemble Kalman Filter (EnKF).

1.3. Objetivos

Analizar el desempeño de técnicas de estimación no lineal en la estimación del estado de carga de la batería de un vehículo eléctrico.

- Implementar un modelo matemático del sistema de baterías de un EV.
- Implementar el filtro extendido de Kalman.
- Implementar el filtro de Kalman de ensamble.
- Realizar un análisis comparativo del desempeño de los filtros EKF y ENKF mediante simulación.

1.4. Metodología

En el presente trabajo se emplearán dos técnicas no lineales una de ellas Gaussiana y la otra No-Gaussiana en la estimación de estados.

1.4.1. El Filtro de Kalman Extendido (EKF).

Este filtro emplea las mismas ecuaciones del filtro de Kalman lineal que se implementan en los dos pasos del filtro: predicción y corrección. La diferencia radica en la linealización aproximada del sistema no lineal para obtener las matrices necesarias para determinar la ganancia de Kalman.

1.4.2. El filtro de Kalman de Ensamble de partículas (EnKF).

Es un método no lineal no-Gaussiana aproximado en cual la estimación del mejor valor esperado de los estados es obtenida mediante la implementación del filtro de Bayes utilizando métodos secuenciales de Monte Carlo.

Capítulo 2

2. Metodologías

Estimación Recursiva Bayesiana define un marco referencial probabilístico el cual permite resolver de manera recursiva el problema de la estimación de estados. Se emplean las funciones de probabilidad condicionales involucradas en la estimación.// Inferencia de Estados también es conocida como Estimación de Estados [16]. La estimación de estados consiste en la estimación del valor del estado de forma instantánea considerando las mediciones obtenidas hasta el instante actual.

En el contexto de inferencia bayesiana, la inferencia de $\mathbf{x}_{1:t}$ dado $\mathbf{y}_{1:t}$ depende de la probabilidad a-posteriori de acuerdo a:

$$p(\mathbf{x}_{1:t}|\mathbf{y}_{1:t}) = \frac{p(\mathbf{y}_{1:t}|\mathbf{x}_{1:t})p(\mathbf{x}_{1:t})}{p(\mathbf{y}_{1:t})} \quad (2.1)$$

donde,

$$p(\mathbf{y}_{1:t}) = \int p(\mathbf{y}_{1:t}|\mathbf{x}_{1:t})p(\mathbf{x}_{1:t})d\mathbf{x}_{1:t} \quad (2.2)$$

La expresión recursiva de la ecuación (2.1) es la siguiente:

$$p(\mathbf{x}_{1:t}|\mathbf{y}_{1:t}) = p(\mathbf{x}_{1:t-1}|\mathbf{y}_{1:t-1}) \frac{p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1})p(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t)}{p(\mathbf{y}_t|\mathbf{y}_{1:t-1})} \quad (2.3)$$

donde,

$$p(\mathbf{y}_t|\mathbf{y}_{1:t-1}) = \int p(\mathbf{x}_{1:t-1}|\mathbf{y}_{1:t-1})p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1})p(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t)d\mathbf{x}_{t-1:t} \quad (2.4)$$

El problema de resolver la ecuación (2.3) es referido en la literatura como el problema de filtrado óptimo. La distribución de probabilidad a-posteriori $p(\mathbf{x}_{1:t}|\mathbf{y}_{1:t})$ es también conocida como la distribución suavizada. La ecuación (2.3) puede ser descompuesta en dos partes o pasos: La fase de actualización con respecto al tiempo de los estados del sistema (predicción) y la fase de actualización basa en las mediciones (corrección).

La actualización de los estados corresponde a la estimación de la distribución de probabilidad de los primeros t estados dado únicamente las $t - 1$ mediciones.

$$p(\mathbf{x}_{1:t}|\mathbf{y}_{1:t-1}) = p(\mathbf{x}_{1:t-1}|\mathbf{y}_{1:t-1})p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}) \quad (2.5)$$

La actualización de los estados dadas las mediciones está relacionada con la corrección de distribución de probabilidad de predicción basada en la información de las mediciones actuales.

$$p(\mathbf{x}_{1:t}|\mathbf{y}_{1:t}) = \frac{p(\mathbf{x}_{1:t}|\mathbf{y}_{1:t-1})p(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t)}{\int p(\mathbf{x}_{1:t}|\mathbf{y}_{1:t-1})p(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t)d\mathbf{x}_{1:t}} \quad (2.6)$$

Generalmente las distribuciones de probabilidad de suavizado y de predicción son también de interés. En el suavizado, el objetivo es estimar la distribución de algunos estados condicionados en el conocimiento de mediciones. Formalmente, suavizado es la estimación de $p(\mathbf{x}_{l:k}|\mathbf{y}_{0:t})$ cuando $l \leq k \leq t$ y esta distribución es obtenida por medio del principio de suavizado, de acuerdo al

siguiente procedimiento:

$$p(\mathbf{x}_{l:k}|\mathbf{y}_{1:t}) = \int p(\mathbf{x}_{1:t}|\mathbf{y}_{1:t})d\mathbf{x}_{1:l-1}d\mathbf{x}_{k+1:t} \quad (2.7)$$

En el problema de predicción, la distribución probabilística de algún grupo de estados futuros es estimada condicionalmente al conocimiento de las observaciones hasta el tiempo actual. La predicción puede ser vista como la estimación de $p(\mathbf{x}_{l:k}|\mathbf{y}_{1:t})$ cuando $t \leq k$ y $l \leq k$ y $l = 1$, la distribución de probabilidad es calculada de la siguiente manera:

$$p(\mathbf{x}_{1:k}|\mathbf{y}_{1:t}) = p(\mathbf{x}_{1:t}|\mathbf{y}_{1:t}) \prod_{j=t+1}^k p_j(\mathbf{x}_j|\mathbf{x}_{j-1}) \quad (2.8)$$

La distribución a-posteriori de interés en el presente trabajo es la distribución marginal la cual es conocida como la distribución de filtrado. Esta distribución se la obtiene mediante la integración $\mathbf{x}_{1:t-1}$ de 2.5 y considerando la propiedad Marcoviana. El resultado de esta integración es el famoso filtro de Bayes el cual es presentado en el algoritmo 1.

Algorithm 1 Bayes' filter

For $t = 1$ to the number of time steps

1. Forecast step:

$$\overbrace{p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t-1})}^{\text{predictive}} = \int \overbrace{p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1})}^{\text{transition}} p(\mathbf{x}_{t-1}|\mathbf{y}_{1:t-1})d\mathbf{x}_{t-1}$$

2. Analysis step:

$$\overbrace{p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t})}^{\text{filtering}} = \frac{\overbrace{p(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t)}^{\text{likelihood}} p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t-1})}{\int p(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t)p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t-1})d\mathbf{x}_t}$$

El algoritmo 1 presenta un conjunto de distribuciones de probabilidad condicionales (pdfs) las cuales definen la solución conceptual del problema de estima-

ción. En el paso de actualización basado en modelo, la distribución de predicción es obtenida por medio de una combinación de nuestro mejor conocimiento del estado del sistema. Esto se lo logra a través del modelo (probabilidad de transición) y el conocimiento del estado del estado un instante de tiempo antes del sistema. Conocimiento plasmado en la distribución a-posteriori en un delta $t - 1$. Luego, la pdf de filtrado es actualizada basada en la información de las nuevas mediciones de las salidas al tiempo t . Esto ocurre durante el paso de corrección. La distribución predictiva actualizada es mencionada como la probabilidad pdf de filtrado y es la pdf a-posteriori de interés en el presente trabajo.

Los métodos de estimación recursiva Bayesiana son implementaciones numéricas del filtro teórico de Bayes. Estos métodos puede ser clasificados dentro de dos grupos: métodos óptimos y métodos subóptimos o aproximados. Los filtros óptimos son aquellos que resuelven el filtro teórico siguiendo un mecanismo analítico. Dentro los filtros óptimos, el filtro más representativo es el filtro de Kalman [13]. La solución óptima existe en los casos que los sistemas de estudio sean del tipo lineal y comportamiento de la incertidumbre Gaussiana donde tanto la pdf predictiva como la pdf de filtrado son representadas mediante distribuciones Gaussianas para cada instante de tiempo. En estos casos, el únicamente contar con los valores medios del vector de estados y la matriz de covarianzas entre los estados ya podemos representar completamente las distribuciones de probabilidad de nuestro interés.

Cuando un sistema deja de ser lineal y su comportamiento es no lineal entonces tenemos que aplicar al problema de estimación las técnicas aproximadas para poder implementar el filtro de Bayes en estos casos. Vale la pena resaltar que problemas de estimación no lineal generalmente no presentan soluciones analíticas. Uno de los métodos aproximados no lineal empleado en el campo

de la ingeniería es el filtro de Kalman extendido [16, ch. 13] el cual aproxima el filtro de Bayes mediante una linealización local del sistema no lineal real. Para sistemas con una cantidad considerable en el número de estados, en los cuales la demanda o carga computacional es grande, existen métodos de estimación en los cuales no es necesario evaluar complejas matrices que representan a la derivada parcial del sistema. Estas técnicas han permitido llevar adelante estimaciones de estados en sistemas complejos, técnicas como el Unscented Kalman Filter [10] entre otros [9, 14].

Otro conjunto de algoritmos de estimación no lineal emplea la aproximación de las integrales involucradas en el filtro de Bayes. Ejemplos de este tipo de filtros corresponden al Ensemble Kalman Filter (EnKF) [6] y al filtro de partículas [7]. En el EnKF, la matriz de covarianzas es aproximada por la covarianza de un conjunto de muestras que son el resultado de realizaciones aleatorias del modelo matemático del sistema. Mientras que el filtro de partículas emplea técnicas secuenciales de Monte Carlo.

2.1. El Filtro de Kalman

2.1.1. Introducción

En el presente trabajo, filtro de Kalman original para procesos Gaussianos se lo obtiene mediante un desarrollo probabilístico a partir de la teoría recursiva Bayesiana. Este marco de trabajo hace visible o expone de mejor manera al lector el fundamento probabilístico de este filtro ampliamente utilizado y muchas veces poco entendido. En términos técnicos, el sistema que se considera para el desarrollo del filtro de Kalman lineal es un sistema estocástico lineal donde lo estocástico del sistema está dado por la representación de la incertidumbre del

modelo y de las mediciones a través de distribuciones de probabilidad Gaussianas. Adicionalmente, las incertidumbres son representadas matemáticamente por ruido blanco. Entonces estos ruidos tienen como valor de su media cero y no están correlacionados en ningún instante de tiempo t , siendo t el índice de tiempo discreto.

El modelo en espacio de estados es presentado a continuación:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{F}_{t,t-1}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{B}_{t-1}\mathbf{u}_{t-1} + \mathbf{w}_t \quad (2.9)$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H}_t\mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t \quad (2.10)$$

donde los ruidos del proceso y de las mediciones corresponden a ruidos Gaussianos:

$$\mathbf{w}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{w}_t : \mathbf{0}, \mathbf{Q}_t) \quad (2.11)$$

$$\mathbf{v}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{v}_t : \mathbf{0}, \mathbf{R}_t) \quad (2.12)$$

donde la notación $\mathcal{N}(\mathbf{x}_t : \mu, \Sigma)$ es utilizado para representar distribuciones Gaussianas con \mathbf{x} el vector aleatorio con media μ y matriz de covarianza Σ . Las propiedades estadísticas de los vectores aleatorios son las siguientes:

$$E[\mathbf{w}_t] = \mathbf{0} \quad , \quad E[\mathbf{v}_t] = \mathbf{0}, \quad (2.13)$$

$$E[\mathbf{w}_t\mathbf{w}_{t+k}^T] = \mathbf{0} \quad , \quad E[\mathbf{w}_t\mathbf{w}_t^T] = \mathbf{Q}_t, \quad (2.14)$$

$$E[\mathbf{v}_t\mathbf{v}_{t+k}^T] = \mathbf{0} \quad , \quad E[\mathbf{v}_t\mathbf{v}_t^T] = \mathbf{R}_t, \quad (2.15)$$

$$E[\mathbf{w}_t\mathbf{v}_{t+k}^T] = \mathbf{0} \quad , \quad E[\mathbf{w}_t\mathbf{v}_t^T] = \mathbf{0} \quad (2.16)$$

donde \mathbf{Q} y \mathbf{R} son matrices de covarianzas positivas para el proceso y ruidos

de instrumentación, respectivamente y k es un entero positivo.

2.1.2. Fundamento probabilístico del filtro de Kalman lineal

El algoritmo recursivo se lo obtiene a partir de la información disponible en los pasos de tiempo previos. La siguiente expresión es válida considerando las propiedades Gaussianas del sistema estocástico bajo estudio.

$$p(\mathbf{x}_{t-1} | \mathbf{y}_{1:t-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_{t-1} : \mathbf{x}_{t-1}^a, \mathbf{P}_{t-1}^a) \quad (2.17)$$

donde \mathbf{x}_{t-1} corresponde al vector de estados verdadero, \mathbf{x}_{t-1}^a y \mathbf{P}_{t-1}^a son el vector de estados y la matriz de covarianza, obtenidas ambos del paso de análisis en el paso de tiempo $t - 1$. Aunque la fase de análisis no se la ha definido formalmente aún, hasta este momento consideramos que \mathbf{x}_{t-1}^a and \mathbf{P}_{t-1}^a son conocidos.

Fase de Pronóstico

Guardando concordancia con el filtro de Bayes presentado en el algoritmo 1, el primer paso en la obtención del filtro óptimo de Kalman es el cálculo de la pdf a priori en el paso de tiempo t :

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t-1}) = \int p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}) p(\mathbf{x}_{t-1} | \mathbf{y}_{1:t-1}) d\mathbf{x}_{t-1} \quad (2.18)$$

En la ecuación 2.18, la pdf a priori está determinada por la pdf de transición y la pdf de filtrado (aposteriori). En otras palabras, la pdf a priori es calculada basada en toda la información disponible y conocida de antemano. Esto es, la información obtenida del modelo y la predicción estimada un paso de tiempo hacia atrás, es decir a $t - 1$. La pdf de filtrado en el paso de tiempo $t - 1$ fue

presentada en la ecuación 2.17 y la probabilidad de transición se calcula de $t - 1$ de la siguiente manera:

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_t : \mathbf{F}_{t,t-1} \bar{\mathbf{x}}_{t-1}, \mathbf{Q}_t) \quad (2.19)$$

donde $\bar{\mathbf{x}}_{t-1}$ es el valor esperado del estado $E[\mathbf{x}_{t-1}]$. El termino correspondiente a las entradas en la ecuación $E[\mathbf{x}_{t-1}]$ no es considerada en el desarrollo del filtro. Adicionalmente, la ausencia de este término no afecta a la formulación razón por la cual es removida y no se la considera en los siguientes capítulos. Se puede mostrar que la pdf predictiva (ecuación 2.18) está distribuida de acuerdo a una función de probabilidad Gaussiana. Lo que se acaba de mencionar es demostrable cuando las distribuciones Gaussianas presentadas en las ecuaciones 2.17 y 2.19 son sustituidas por la función exponencial que caracteriza a la campana de Gauss. También es necesario una manipulación algebraica matricial. Las propiedades estadísticas de las probabilidades son mostradas a continuación:

$$\mathbf{x}_t^f = \mathbf{F}_{t,t-1} \mathbf{x}_{t-1}^a, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{P}_t^f = \mathbf{F}_{t,t-1} \mathbf{P}_{t-1}^a \mathbf{F}_{t,t-1}^T + \mathbf{Q}_t \quad (2.21)$$

con \mathbf{x}_t^f el vector de estados de pronóstico y \mathbf{P}_t^f la covarianza del error de pronóstico. matriz $\mathbf{P}_t^f = E[\mathbf{x}_t^f - \bar{\mathbf{x}}_t][\mathbf{x}_t^f - \bar{\mathbf{x}}_t]^T$.

Fase de Análisis

En la fase de análisis, la pdf a priori es actualizada con la última medición la cual es obtenida en el paso de tiempo t . En plena concordancia con el algoritmo 1, las distribuciones actualizadas y a priori están determinadas por la

ecuación 2.22.

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t}) = \frac{p(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t) p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t-1})}{\int p(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t) p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t-1}) d\mathbf{x}_t} \quad (2.22)$$

La distribución a priori es actualizada basada en la información de la probabilidad de coincidencia. En nuestro caso la probabilidad de coincidencia es Gaussiana, tal que:

$$p(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t) = \mathcal{N}(\mathbf{y}_t : \mathbf{H}_t \bar{\mathbf{x}}_t, \mathbf{R}_t) \quad (2.23)$$

Substituyendo la ecuación 2.23 en 2.22, la siguiente expresión es obtenido de:

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t}) = \frac{\mathcal{N}(\mathbf{y}_t : \mathbf{H}_t \bar{\mathbf{x}}_t, \mathbf{R}_t) \mathcal{N}(\mathbf{x}_t : \mathbf{x}_t^f, \mathbf{P}_t^f)}{\int \mathcal{N}(\mathbf{y}_t : \mathbf{H}_t \bar{\mathbf{x}}_t, \mathbf{R}_t) \mathcal{N}(\mathbf{x}_t : \mathbf{x}_t^f, \mathbf{P}_t^f) d\mathbf{x}_t} \quad (2.24)$$

Puede ser mostrado que la integración del denominador en la ecuación 2.24 es distribuido acorde a una distribución Gaussiano, tal que:

$$\int \mathcal{N}(\mathbf{y}_t : \mathbf{H}_t \bar{\mathbf{x}}_t, \mathbf{R}_t) \mathcal{N}(\mathbf{x}_t : \mathbf{x}_t^f, \mathbf{P}_t^f) d\mathbf{x}_t = \mathcal{N}(\mathbf{y}_t; \mathbf{H}_t \mathbf{x}_t^f, \mathbf{H}_t \mathbf{P}_t^f \mathbf{H}_t^T + \mathbf{R}_t) \quad (2.25)$$

Aquí, luego de algunas operaciones algebraicas, ecuación 2.24 pueden ser reducido a:

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_t : \mathbf{x}_t^a, \mathbf{P}_t^a) \quad (2.26)$$

donde

$$\mathbf{x}_t^a = \mathbf{x}_t^f + \mathbf{K}_t (\mathbf{y}_t - \mathbf{H}_t \mathbf{x}_t^f), \quad (2.27)$$

$$\mathbf{P}_t^a = \mathbf{P}_t^f - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t \mathbf{P}_t^f, \quad (2.28)$$

con

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_t^f \mathbf{H}_t^T [\mathbf{H}_t \mathbf{P}_t^f \mathbf{H}_t^T + \mathbf{R}_t]^{-1} \quad (2.29)$$

Resumen del filtro de Kalman lineal

Los pasos recursivos del filtro de Kalman para sistemas lineales/Gaussianos están resumidos como sigue.

Algorithm 2 Discrete Kalman Filter

For $t = 1$ to the number of time steps

1. Forecast step:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t^f &= \mathbf{F}_{t,t-1} \mathbf{x}_{t-1}^a \\ \mathbf{P}_t^f &= \mathbf{F}_{t,t-1} \mathbf{P}_{t-1}^a \mathbf{F}_{t,t-1}^T + \mathbf{Q}_t \end{aligned}$$

2. Analysis step:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_t &= \mathbf{P}_t^f \mathbf{H}_t^T [\mathbf{H}_t \mathbf{P}_t^f \mathbf{H}_t^T + \mathbf{R}_t]^{-1} \\ \mathbf{x}_t^a &= \mathbf{x}_t^f + \mathbf{K}_t (\mathbf{y}_t - \mathbf{H}_t \mathbf{x}_t^f) \\ \mathbf{P}_t^a &= \mathbf{P}_t^f - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t \mathbf{P}_t^f \end{aligned}$$

El algoritmo 2 es la solución óptima a la estimación de estados para los procesos Gaussianos del tipo descritos en ecuaciones (2.9 - 2.16). La solución analítica del filtro de Bayes es posible debido a que las distribuciones involucradas pueden ser tratadas analíticamente mediante el uso de sus medias y covarianzas. El vector de estados actualizado \mathbf{x}_t^a está dado mediante la suma del paso de pronóstico \mathbf{x}_t^f y los residuos ponderados $(\mathbf{y}_t - \mathbf{H}_t \mathbf{x}_t^f)$. Los residuos están ponderados de acuerdo a la ganancia de Kalman \mathbf{K}_t . Para poder realizar el cálculo de la ganancia de Kalman es necesario que las matrices de la covarianza del error ($\mathbf{P}_t^a, \mathbf{P}_t^f$) sean simétricas y positivas. Sin embargo, en sistemas con un número de estados grande, estas propiedades pueden no ser preservadas debido a la precisión computacional finita. Por tanto, el desempeño del filtro puede ser robustecido mediante la adopción del Square Root Kalman filter [16, ch. 6]. Método que utiliza las matrices cuadradas de las matrices de

covarianza del error y el filtro de Kalman con memoria [16, ch. 7] el cual utiliza el principio de inflación de la matriz de covarianza.

2.2. El Filtro de Kalman Extendido

2.2.1. Introducción

La observación y la estimación a posteriori de los estados en sistemas de nuestra naturaleza es una tarea compleja ya que muchos o todos los fenómenos físicos que nos rodean son de naturaleza no lineal. Sin embargo, si consideramos no linealidades suaves, entonces es posible aplicar métodos de la teoría de estimación lineal. Para poder aplicar métodos lineales deberemos primero aproximar linealmente al sistema no lineal, para lo cual deberemos definir puntos de operación del sistema en estudio. En algunos casos, la trayectoria nominal que seguirán los estados es conocida de antemano. Para este tipo de sistemas, el problema de estimación comúnmente puede ser abordado mediante una linealización efectiva alrededor de la trayectoria nominal y las ganancias de Kalman pueden ser precalculadas en aras de reducir la demanda computacional. Por otro lado, cuando la trayectoria nominal es desconocida entonces esta puede ser redefinida en cada paso de tiempo como el mejor valor estimado de la trayectoria actual. La mayor desventaja será entonces la mayor demanda computacional de realizar la linealización en cada paso de tiempo. Estas técnicas son referidas como el Filtro Extendido de Kalman (EKF).

El siguiente sistema no lineal es considerado en el desarrollo del EKF em-

pleando RBE:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{f}_{t,t-1}(\mathbf{x}_{t-1}) + \mathbf{w}_t \quad (2.30)$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t) + \mathbf{v}_t \quad (2.31)$$

Las distribuciones y estadísticas de los ruidos tanto del proceso como de las mediciones son presentadas como sigue:

$$\mathbf{w}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{w}_t : \mathbf{0}, \mathbf{Q}_t) \quad (2.32)$$

$$\mathbf{v}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{v}_t : \mathbf{0}, \mathbf{R}_t) \quad (2.33)$$

$$E[\mathbf{w}_t] = \mathbf{0} \quad , \quad E[\mathbf{v}_t] = \mathbf{0}, \quad (2.34)$$

$$E[\mathbf{w}_t \mathbf{w}_{t+k}^T] = \mathbf{0} \quad , \quad E[\mathbf{w}_t \mathbf{w}_t^T] = \mathbf{Q}_t, \quad (2.35)$$

$$E[\mathbf{v}_t \mathbf{v}_{t+k}^T] = \mathbf{0} \quad , \quad E[\mathbf{v}_t \mathbf{v}_t^T] = \mathbf{R}_t, \quad (2.36)$$

$$E[\mathbf{w}_t \mathbf{v}_{t+k}^T] = \mathbf{0} \quad , \quad E[\mathbf{w}_t \mathbf{v}_t^T] = \mathbf{0} \quad (2.37)$$

los ruidos considerados son de tipo ruido blanco, con media cero y sin correlación $\forall t$ con $k \geq 0$.

2.2.2. Fundamentos probabilísticos del filtro extendido de Kalman

Considerando que el sistema no lineal en estudio ha sido linealizado antes de la fase de análisis, la pdf a posteriori en el paso de tiempo $t - 1$ puede ser aproximada mediante una distribución Gaussiana:

$$p(\mathbf{x}_{t-1} | \mathbf{y}_{1:t-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_{t-1} : \mathbf{x}_{t-1}^a, \mathbf{P}_{t-1}^a) \quad (2.38)$$

La principal diferencia entre la ecuación 2.17 y la ecuación 2.38 es el mismo

estado. En la ecuación 2.17, \mathbf{x}_t representa todas las posibles trayectorias de los estados, mientras que en la ecuación 2.38, el vector de estados representa solo la trayectoria particular en la cual el sistema es linealizado. Adicionalmente, la pdf a posteriori es aproximada como si fuese una distribución Gaussiana. El proceso de linealización es abordado en la siguiente sección.

Fase de Pronóstico

La fase de pronóstico está dada por el cálculo de la pdf predictiva:

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t-1}) = \int p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}) p(\mathbf{x}_{t-1} | \mathbf{y}_{1:t-1}) d\mathbf{x}_{t-1} \quad (2.39)$$

La pdf a posteriori en el paso de tiempo $t - 1$ está dada por la ecuación 2.38. La pdf de transición del lado de la ecuación 2.39 puede ser obtenida de la ecuación 2.30 y con la consideración de que esta pdf es Gaussiana:

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_t : E[\mathbf{f}_{t,t-1}(\mathbf{x}_{t-1})], \mathbf{Q}_t), \quad (2.40)$$

por tanto, la pdf predictiva está definida como:

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t-1}) = \int \mathcal{N}(\mathbf{x}_{t-1} : \mathbf{x}_{t-1}^a, \mathbf{P}_{t-1}^a) \mathcal{N}(\mathbf{x}_t : E[\mathbf{f}_{t,t-1}(\mathbf{x}_{t-1})], \mathbf{Q}_t) d\mathbf{x}_{t-1} \quad (2.41)$$

La integral en la ecuación 2.41 es compleja de resolver debido a la presencia de la función no lineal $\mathbf{f}_{t,t-1}(\cdot)$. La formulación del problema es modificada para que se pueda obtener una solución analítica como por ejemplo el desarrollo de las ecuaciones del filtro de Kalman lineal (ecuaciones 2.20 y 2.21). La metodología adoptada en el desarrollo del filtro entendido de Kalman es la linealización a partir de expansiones de series de Taylor. Adicionalmente, la trayectoria del vector de estados debe ser definida alrededor de la cual es linealizada. Hasta

el momento, el mejor valor esperado del vector de estados está dado por \mathbf{x}_{t-1}^a . Expansiones en Series de Taylor de $\mathbf{f}_{t,t-1}(\mathbf{x}_{t-1})$ en los alrededores de $\mathbf{x}_{t-1}^a = E[\mathbf{x}_{t-1}|\mathbf{y}_{1:t-1}]$ es considerado en la linealización del sistema. Únicamente los dos primeros términos de la expansión son considerados:

$$\mathbf{f}_{t,t-1}(\mathbf{x}_{t-1}) \simeq \mathbf{f}_{t,t-1}(\mathbf{x}_{t-1}^a) + \mathbf{F}_{t,t-1}[\mathbf{x}_{t-1} - \mathbf{x}_{t-1}^a] \quad (2.42)$$

donde

$$\mathbf{F}_{t,t-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{m_x}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{m_x}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_{m_x}}{\partial x_{m_x}} \end{bmatrix} | (\mathbf{x}_{t-1}^a) \quad (2.43)$$

es una matriz de Jacobianos con dimensión $(m_x \times m_x)$. El lado derecho de la ecuación 2.42 es desarrollado de la siguiente manera:

$$\mathbf{F}_{t,t-1}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{f}_{t,t-1}(\mathbf{x}_{t-1}^a) + \mathbf{F}_{t,t-1}\mathbf{x}_{t-1}^a \quad (2.44)$$

donde el primer término es lineal con respecto a \mathbf{x}_{t-1} y los siguientes dos términos corresponden a valores conocidos. La substitución de la ecuación 2.42 en 2.41,

$$p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t-1}) = \int \mathcal{N}(\mathbf{x}_{t-1} : \mathbf{x}_{t-1}^a, \mathbf{P}_{t-1}^a) \cdots \mathcal{N}(\mathbf{x}_{t-1} : \mathbf{f}_{t,t-1}(\mathbf{x}_{t-1}^a) + \mathbf{F}_{t,t-1}[\mathbf{x}_{t-1} - \mathbf{x}_{t-1}^a], \mathbf{Q}_t) d\mathbf{x}_{t-1} \quad (2.45)$$

permite resolver la integral de manera analítica. Como resultado de la operación, la pdf a priori puede ser obtenida en forma Gausiana como:

$$p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_t : \mathbf{x}_t^f, \mathbf{P}_t^f) \quad (2.46)$$

Aunque la pdf a priori está representada por una distribución Gaussiana, es importante resaltar el hecho de que esta representación es únicamente una aproximación local alrededor de una trayectoria nominal, por tanto, es solo una aproximación de la pdf verdadera, la cual no se la conoce de forma explícita. El vector de estado resultado de la fase de pronóstico \mathbf{x}_t^f y su matriz de covarianza del error \mathbf{P}_t^f son mayormente similares que en el caso del filtro de Kalman lineal y están dadas por:

$$\mathbf{x}_t^f = \mathbf{f}_{t,t-1}(\mathbf{x}_{t-1}^a) \quad (2.47)$$

$$\mathbf{P}_t^f = \mathbf{F}_{t,t-1}\mathbf{P}_{t-1}^a\mathbf{F}_{t,t-1}^T + \mathbf{Q}_t \quad (2.48)$$

El vector de estados luego de la fase de pronóstico se lo obtiene de la propagación de este vector a través del modelo no lineal y para el cálculo de la matriz de covarianza entonces la matriz Jacobiana $\mathbf{F}_{t,t-1}$ es utilizada.

Fase de Análisis

La fase de análisis consiste en la actualización de la pdf a priori mediante:

$$p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t}) = \frac{p(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t)p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t-1})}{\int p(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t)p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t-1})d\mathbf{x}_t} \quad (2.49)$$

Para el filtro de Kalman extendido, la pdf a priori es aproximada mediante una distribución Gaussiana la cual es caracterizada por la media 2.47 y la covarianza 2.48. La distribución de coincidencia es obtenida de la ecuación 2.31 asumiendo que esta distribución es también Gaussiana.

$$p(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t) = \mathcal{N}(\mathbf{y}_t : E[\mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t)], \mathbf{R}_t) \quad (2.50)$$

Mediante la sustitución de la ecuación 2.46 y la ecuación 2.50 en 2.49, la pdf

de filtrado estaría dada por:

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t}) = \frac{\mathcal{N}(\mathbf{y}_t : E[\mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t)], \mathbf{R}_t) \mathcal{N}(\mathbf{x}_t : \mathbf{x}_t^f, \mathbf{P}_t^f)}{\int \mathcal{N}(\mathbf{y}_t : E[\mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t)], \mathbf{R}_t) \mathcal{N}(\mathbf{x}_t : \mathbf{x}_t^f, \mathbf{P}_t^f) d\mathbf{x}_t} \quad (2.51)$$

donde el primer escollo en el cálculo de la pdf de filtrado es el de resolver la integral en el denominador de la expresión. En el afán de encontrar una solución analítica, el sistema de las mediciones es linealizado alrededor de la trayectoria de los estados. Hasta este punto, \mathbf{x}_t^f representa el mejor valor estimado. Por tanto el sistema de mediciones no lineal es linealizado empleando expansiones en series de Taylor en los alrededores de \mathbf{x}_t^f . La función no lineal se la expande de la siguiente manera:

$$\mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t) \simeq \mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t^f) + \mathbf{H}_t[\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t^f] \quad (2.52)$$

donde \mathbf{H}_t es una matriz ($m_y \times m_x$) Jacobiana determinada por:

$$\mathbf{H}_t = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_{m_x}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_{m_y}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_{m_y}}{\partial x_{m_x}} \end{bmatrix} |(\mathbf{x}_t^f) \quad (2.53)$$

Mediante la sustitución de la ecuación 2.52 en 2.51, la expresión para la pdf a posteriori es la siguiente:

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t}) = \frac{\mathcal{N}(\mathbf{y}_t : \mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t^f) + \mathbf{H}_t[\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t^f], \mathbf{R}_t) \mathcal{N}(\mathbf{x}_t : \mathbf{x}_t^f, \mathbf{P}_t^f)}{\int \mathcal{N}(\mathbf{y}_t : \mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t^f) + \mathbf{H}_t[\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t^f], \mathbf{R}_t) \mathcal{N}(\mathbf{x}_t : \mathbf{x}_t^f, \mathbf{P}_t^f) d\mathbf{x}_t} \quad (2.54)$$

Ahora, la solución de la integral es manejable y la expresión resultante para la pdf a posteriori en términos de una distribución es:

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_t^a, \mathbf{P}_t^a); \quad (2.55)$$

con

$$\mathbf{x}_t^a = \mathbf{x}_t^f + \mathbf{K}_t(\mathbf{y}_t - \mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t^f)), \quad (2.56)$$

$$\mathbf{P}_t^a = \mathbf{P}_t^f - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t \mathbf{P}_t^f, \quad (2.57)$$

y

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_t^f \mathbf{H}_t^T [\mathbf{H}_t \mathbf{P}_t^f \mathbf{H}_t^T + \mathbf{R}_t]^{-1} \quad (2.58)$$

Resumen del Filtro Extendido de Kalman

El filtro extendido de Kalman es presentado en el algoritmo 3.

Algorithm 3 Extended Kalman Filter

For $t = 1$ to the number of time steps

1. Forecast step:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t^f &= \mathbf{f}_{t,t-1}(\mathbf{x}_{t-1}^a) \\ \mathbf{P}_t^f &= \mathbf{F}_{t,t-1} \mathbf{P}_{t-1}^a \mathbf{F}_{t,t-1}^T + \mathbf{Q}_t \end{aligned}$$

2. Analysis step:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_t &= \mathbf{P}_t^f \mathbf{H}_t^T [\mathbf{H}_t \mathbf{P}_t^f \mathbf{H}_t^T + \mathbf{R}_t]^{-1} \\ \mathbf{x}_t^a &= \mathbf{x}_t^f + \mathbf{K}_t(\mathbf{y}_t - \mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t^f)) \\ \mathbf{P}_t^a &= \mathbf{P}_t^f - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t \mathbf{P}_t^f \end{aligned}$$

En el algoritmo 3, las distribuciones de probabilidad involucradas son parametrizadas mediante los primeros dos momentos de las funciones de densidad: media y covarianza. Aunque esta caracterización puede no ser suficiente para sistemas específicos, el filtro extendido de Kalman ha mostrado un desempeño apropiado en un amplio rango de aplicaciones.

Una alternativa al filtro de Kalman extendido es del filtro de Kalman de segundo orden [16, ch. 13]. En esta filtro, durante la linealización se consideran los términos de segundo orden de las series de Taylor, términos que dan lugar a la aparición de las matrices Hessianas. Aunque la precisión del valor estimado

mejora, en cambio el poder computacional demandante hace que esta técnica no sea ampliamente utilizada.

En las últimas dos décadas, técnicas de aproximación local al problema no lineal han sido propuestas [10, 14]. Estos métodos de filtrado son basados en alguna variante de aproximación de las funciones no lineales [14, 15, 9, 5] o son basados en la transformación unscented [10, 9, 11, 12, 17].

2.3. El filtro de Kalman de Ensemble de partículas

El Ensemble Kalman Filter fue originalmente desarrollado por [6] como un método de Asimilación de Datos. Inicialmente fue desarrollado enfocado en la aplicación a problemas de estimación de variables climatológicas y geociencias. Campos donde los modelos de estos sistemas son altamente no lineales, multidimensionales con un comportamiento muchas veces caótico. El nombre del filtro es adoptado de los fundamentos teóricos empleados en la predicción del clima: pronósticos por conjunto de muestras y el filtro de Kalman.

2.3.1. Fundamento probabilístico del EnKF

En esta sección las ecuaciones del EnKF son presentadas. Consideremos el siguiente escenario:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{f}_{t,t-1}(\mathbf{x}_{t-1}) + \mathbf{w}_t \quad (2.59)$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t) + \mathbf{v}_t \quad (2.60)$$

donde las distribuciones y parametros estadísticos de los ruidos del proceso y de las mediciones son:

$$\mathbf{w}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{w}_t : \mathbf{0}, \mathbf{Q}_t) \quad (2.61)$$

$$\mathbf{v}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{v}_t : \mathbf{0}, \mathbf{R}_t) \quad (2.62)$$

$$E[\mathbf{w}_t] = \mathbf{0} \quad , \quad E[\mathbf{v}_t] = \mathbf{0}, \quad (2.63)$$

$$E[\mathbf{w}_t \mathbf{w}_{t+k}^T] = \mathbf{0} \quad , \quad E[\mathbf{w}_t \mathbf{w}_t^T] = \mathbf{Q}_t, \quad (2.64)$$

$$E[\mathbf{v}_t \mathbf{v}_{t+k}^T] = \mathbf{0} \quad , \quad E[\mathbf{v}_t \mathbf{v}_t^T] = \mathbf{R}_t, \quad (2.65)$$

$$E[\mathbf{w}_t \mathbf{v}_{t+k}^T] = \mathbf{0} \quad , \quad E[\mathbf{w}_t \mathbf{v}_t^T] = \mathbf{0} \quad (2.66)$$

con ruidos del tipo blanco, distribuidos de acuerdo a probabilidades Gaussianas con media cero y no correlacionadas $\forall t$ con $k \geq 0$. Las asunciones de ruidos no siempre son realistas en la práctica. Sin embargo, estas asunciones reducen considerablemente la complejidad en la obtención de las ecuaciones del EnKF.

Fase de Pronóstico

El EnKF es un filtro recursivo en el cual el paso de pronóstico en el paso de tiempo t se lleva adelante basado en la información obtenida previamente en la fase de análisis en el instante de tiempo $t - 1$. La metodología del EnKF se fundamenta en la representación de las pdfs tanto predictiva como de filtrado mediante un conjunto muestral, estas representaciones son conocidas como el conjunto de muestras de pronóstico y el conjunto de muestras de análisis.

Consideremos la representación muestral de la pdf a posteriori en el paso de tiempo $t - 1$:

$$p(\mathbf{x}_{t-1} | \mathbf{y}_{1:t-1}) \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{x}_{t-1} - \mathbf{x}_{t-1,i}^a) \quad (2.67)$$

con $\mathbf{X}_{t-1}^a = \{\mathbf{x}_{t-1,i}^a : i = 1, \dots, N\}$ el conjunto muestral de análisis y consideran-

do que la pdf de transición tiene una distribución Gaussiana.

$$p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_t : E[\mathbf{f}_{t,t-1}(\mathbf{x}_{t-1})], \mathbf{Q}_t), \quad (2.68)$$

entonces, la pdf predictiva es aproximada de la siguiente manera:

$$p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t-1}) \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{N}(\mathbf{x}_t : E[\mathbf{f}_{t,t-1}(\mathbf{x}_{t-1,i}^a)], \mathbf{Q}_t) \quad (2.69)$$

el cual es una suma de un conjunto de pdfs Gaussianas. El conjunto muestral es obtenido a través de la propagación del conjunto muestral de análisis a través del modelo no lineal:

$$\mathbf{x}_{t,i}^f = \mathbf{f}_{t,t-1}(\mathbf{x}_{t-1,i}^a), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.70)$$

por tanto, es posible calcular la media y la varianza de la pdf predictiva en la ecuación 2.69 por la media y la covarianza muestral:

$$\mathbf{x}_t^f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_{t,i}^f \quad (2.71)$$

$$\mathbf{P}_t^f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mathbf{x}_{t,i}^f - \mathbf{x}_t^f)(\mathbf{x}_{t,i}^f - \mathbf{x}_t^f)^T \quad (2.72)$$

Un importante hecho con respecto a la representación muestral de la pdf predictiva es la posibilidad de explorar un rango amplio del espacio de estados en contraposición a una exploración local como en el caso del filtro extendido de Kalman. Otra ventaja es la disminución de la carga computacional al momento de evaluar numéricamente Jacobianos en sistemas multidimensionales complejos.

Fase de Análisis

En la fase de análisis, la pdf a priori es actualizada en concordancia con la pdf a posteriori

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t}) = \frac{p(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t) p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t-1})}{\int p(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t) p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t-1}) d\mathbf{x}_t} \quad (2.73)$$

Utilizando ecuaciones 2.60 y 2.62, la pdf de coincidencia puede ser representada como una distribución Gaussiana de la siguiente manera:

$$p(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t) = \mathcal{N}(\mathbf{y}_t : E[\mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t)], \mathbf{R}_t) \quad (2.74)$$

De las ecuaciones 2.71 y 2.72, la distribución a priori es una pdf Gaussiana la cual resulta de la suma de N pdfs Gaussianas (ecuación 2.69):

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_t : \mathbf{x}_t^f, \mathbf{P}_t^f) \quad (2.75)$$

Entonces, la pdf a posteriori está dada por:

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t}) = \frac{\mathcal{N}(\mathbf{y}_t : E[\mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t)], \mathbf{R}_t) \mathcal{N}(\mathbf{x}_t : \mathbf{x}_t^f, \mathbf{P}_t^f)}{\int \mathcal{N}(\mathbf{y}_t : E[\mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t)], \mathbf{R}_t) \mathcal{N}(\mathbf{x}_t : \mathbf{x}_t^f, \mathbf{P}_t^f) d\mathbf{x}_t} \quad (2.76)$$

En la ecuación 2.76, la presencia de la función no lineal $\mathbf{h}(\cdot)$ puede ser causa para que la expresión no se pueda resolver de forma analítica. En el desarrollo del filtro de Kalman extendido, la linealización de la ecuación de observaciones fue adoptado y por tanto la pdf a posteriori pudo ser aproximada por una distribución Gaussiana. Básicamente, la linealización consiste en el cálculo de la matriz Jacobiana \mathbf{H}_t (ecuación 2.53), matriz evaluada sobre el mejor valor esperado de la trayectoria de los estados, en este caso el mejor valor estimado corresponde a \mathbf{x}_t^f . Siguiendo el mismo desarrollo, la pdf a posteriori se muestra como:

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_t^a, \mathbf{P}_t^a); \quad (2.77)$$

con

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_t^f \mathbf{H}_t^T [\mathbf{H}_t \mathbf{P}_t^f \mathbf{H}_t^T + \mathbf{R}_t]^{-1} \quad (2.78)$$

$$\mathbf{x}_t^a = \mathbf{x}_t^f + \mathbf{K}_t (\mathbf{y}_t - \mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t^f)), \quad (2.79)$$

$$\mathbf{P}_t^a = \mathbf{P}_t^f - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t \mathbf{P}_t^f, \quad (2.80)$$

La metodología hasta ahora desarrollada es completamente válida para sistemas con no linealidades relativamente bajas. Sin embargo, a diferencia del desarrollo del filtro extendido, un conjunto muestral \mathbf{X}_t^a debe ser generado alrededor del conjunto muestral de pronóstico (ecuación 2.70). Una opción posible para generar el conjunto muestral de análisis puede ser el de lanzar muestras a partir de la pdf A posteriori (ecuación 2.77):

$$\mathbf{x}_{t,i}^a \sim \mathcal{N}(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t} : \mathbf{x}_t^a, \mathbf{P}_t^a); \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.81)$$

Una desventaja de este procedimiento podría ser la incorrecta representación del conjunto muestral de análisis debido a la inserción de errores en la obtención de las muestras cuando se generan los valores aleatorios. Otra opción la cual es ampliamente utilizada es la aproximación de la pdf mediante métodos de Monte Carlo. A continuación, detallaremos brevemente en que consiste esta metodología. Introducimos la media muestral del sistema de observaciones:

$$\mathbf{y}_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{h}_t(\mathbf{x}_{t,i}^f), \quad (2.82)$$

la covarianza cruzada entre los conjuntos muestrales tanto de pronóstico como

del modelo de las observaciones:

$$\mathbf{P}_t^{xy} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\mathbf{x}_{t,i}^f - \mathbf{x}_t^f)(\mathbf{h}_t(\mathbf{x}_{t,i}^f) - \mathbf{y}_t)^T, \quad (2.83)$$

y la covarianza muestral del conjunto muestral del modelo de las observaciones.

$$\mathbf{P}_t^{yy} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\mathbf{h}_t(\mathbf{x}_{t,i}^f) - \mathbf{y}_t)(\mathbf{h}_t(\mathbf{x}_{t,i}^f) - \mathbf{y}_t)^T, \quad (2.84)$$

Las expresiones 2.83 y 2.84 permiten una completa obtención de la ganancia de Kalman sin tener que involucrar matrices Jacobianas.

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_t^{xy} (\mathbf{P}_t^{yy} + \mathbf{R}_t)^{-1} \quad (2.85)$$

$$\mathbf{P}_t^a = \mathbf{P}_t^f - \mathbf{K}_t (\mathbf{P}_t^{xy})^T \quad (2.86)$$

Una formulación detallada del desarrollo del EnKF es presentada en [8]. Como se puede observar en la ecuación 2.85, el cálculo de la ganancia de Kalman no depende en el cálculo de la matrices Jacobianas. Por tanto, esta es una característica importante del EnKF a la hora de ser implementado. En la práctica ya no es necesario evaluar las covarianzas \mathbf{P}_t^f y \mathbf{P}_t^a en las ecuaciones 2.72 and 2.86. Aún más, al depender únicamente de la ganancia de Kalman de la media y covarianza muestrales entonces es posible considerar diferentes tipos de ruido haciendo más realista la representación de las incertidumbres del modelo, de las entradas, etc.

El método presentado en [3] es considerado en la generación del conjunto muestral de análisis. El método consiste en la generación de pseudo observaciones subrogadas $\mathbf{Y}_t^s = \mathbf{y}_{t,i}^s; i = 1, \dots, N$ donde $\mathbf{y}_{t,i}$ son muestras aleatorias generadas a partir de la distribución Gaussiana con media \mathbf{y}_t y covarianza \mathbf{R}_t ,

de la siguiente manera:

$$\mathbf{y}_{t,i}^s \sim \mathcal{N}(\mathbf{y}_t : \mathbf{y}_t, \mathbf{R}_t); \quad (2.87)$$

El conjunto muestral de análisis es obtenido a partir del reemplazo de las observaciones por un set de observaciones subrogadas en la ecuación 2.79:

$$\mathbf{x}_{t,i}^a = \mathbf{x}_t^f + \mathbf{K}_t(\mathbf{y}_{t,i}^s - \mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t^f)), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.88)$$

La ecuación 2.88 indica que todos los miembros del conjunto muestral correspondiente a un estado particular son actualizados por la misma ganancia de Kalman pero con un término de innovación diferente. Para que posibles errores en el muestreo puedan ser considerados en la generación de las observaciones subrogadas, entonces la matriz de covarianza de las observaciones es reemplazada por la covarianza muestral.

$$\mathbf{R}_t^s = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\mathbf{y}_{t,i}^s - \mathbf{y}_t)(\mathbf{y}_{t,i}^s - \mathbf{y}_t)^T, \quad (2.89)$$

y empleada en el cálculo de la ganancia de Kalman.

Resumen del EnKF

El algoritmo del EnKF es presentado a continuación:

El filtro EnKF es referido en la literatura como un filtro de naturaleza estocástica ya que en la implementación de este filtro se emplean observaciones subrogadas. Una alternativa a esta implementación es la variante Ensemble Square Root Kalman filter [1, 2, 19] en la cual el conjunto muestral es generado basado en el análisis de la media muestral y la matriz de raíces cuadradas de la covarianza del error.

Algorithm 4 Ensemble Kalman Filter

For $t = 1$ to the number of time steps

1. Forecast step:

$$\mathbf{x}_{t,i}^f = \mathbf{f}_{t,t-1}(\mathbf{x}_{t-1,i}^a), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$\mathbf{x}_t^f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_{t,i}^f$$

$$\mathbf{y}_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{h}_t(\mathbf{x}_{t,i}^f),$$

$$\mathbf{P}_t^{xy} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\mathbf{x}_{t,i}^f - \mathbf{x}_t^f)(\mathbf{h}_t(\mathbf{x}_{t,i}^f) - \mathbf{y}_t)^T,$$

$$\mathbf{P}_t^{yy} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\mathbf{h}_t(\mathbf{x}_{t,i}^f) - \mathbf{y}_t)(\mathbf{h}_t(\mathbf{x}_{t,i}^f) - \mathbf{y}_t)^T,$$

2. Analysis step:

$$\mathbf{y}_{t,i}^s \sim \mathcal{N}(\mathbf{y}_t : \mathbf{y}_t, \mathbf{R}_t);$$

$$\mathbf{R}_t^s = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\mathbf{y}_{t,i}^s - \mathbf{y}_t)(\mathbf{y}_{t,i}^s - \mathbf{y}_t)^T,$$

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_t^{xy} (\mathbf{P}_t^{yy} + \mathbf{R}_t)^{-1}$$

$$\mathbf{x}_{t,i}^a = \mathbf{x}_t^f + \mathbf{K}_t(\mathbf{y}_{t,i}^s - \mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t^f)), \quad i = 1, \dots, N.$$

Capítulo 3

3. Modelamiento y Simulación

3.1. Modelaje del sistema de baterías de Lithium-ion

El modelo de batería utilizado en este documento se presenta en la 3.1 y ha sido adoptado de [4]. Sus parámetros son estimados utilizando mediciones e implementando el método de los Mínimos Cuadrados. Los valores de los parámetros se dan en la tabla 3.1.

Tabla 3.1: Valores de los parámetros del modelo de la batería.

Parámetros	Valores
R_0	$1,3 \times 10^{-3}\Omega$
R_1	$4,2 \times 10^{-3}\Omega$
R_2	$2,4 \times 10^{-3}\Omega$
C_1	$17111F$
C_2	$440,57F$

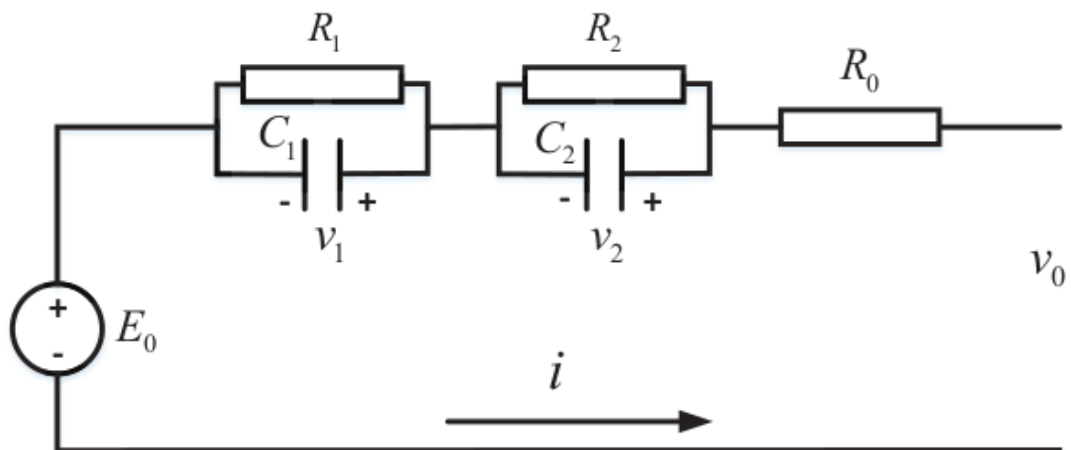


Figura 3.1: Circuito equivalente del sistema de baterías Lithium-ion

El estado de carga de la batería (SOC de sus siglas en inglés), es una de las variable de estado en el modelo presentado en el presente estudio. Formalmente la variable SOC está definida como la relación de la capacidad disponible de la batería con respecto al total de su capacidad. Esto lo expresamos en la siguiente ecuación:

$$s(t) = s(t_0) - \eta \int_{t_0}^t i(t) dt \quad (3.1)$$

con $\eta = 1/(3600C)$, donde C es la capacidad de la batería y su dimensión es Ah . El cálculo preciso directamente de la variable SoC no es posible por algunas razones. El ruido presente en las mediciones de la corriente se acumularían en las estimaciones de SOC y, por lo tanto, proporciona estimaciones inexactas. También, otro problema es calcular los valores iniciales de SoC [4]. Como se observa, el modelo de batería es adoptado de [4] y se muestra en la figura 3.1. Consiste en una fuente de voltaje E_0 , llamado voltaje de circuito abierto interno de la batería, mientras que otros parámetros forman el circuito, como R_0, R_1, C_1, R_2 y C_2 tienden a modelar la dinámica de

Tabla 3.2: Valores de los parámetros de la relación no lineal entre E_0 y SoC .

Parámetros	Valores
a_1	8,4073
a_2	-19,892
a_3	11,497
a_4	4,161
a_5	-4,5533
a_6	0,34365
a_7	0,64685
a_8	3,5016

la batería. Voltaje en los terminales de la batería se define como v_0 . El parámetro SoC está en relación no lineal con el voltaje en circuito abierto y esta relación puede ser modelada por una función polinómica, que se adopta de [4]:

$$E_0 = a_1 SoC^7 + a_2 SoC^6 + a_3 SoC^5 + a_4 SoC^4 + a_5 SoC^3 + a_6 SoC^2 + a_7 SoC + a_8 \quad (3.2)$$

donde los coeficientes son obtenidos luego de emplear técnicas de ajuste de datos. los valores de los coeficientes descritos en [4] son presentados en la siguiente tabla.

Del circuito presentado en la figura 3.1 es posible obtener las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico del circuito y las presentamos a continuación:

$$\frac{dv_1}{dt} = -\frac{v_1}{R_1 C_1} + \frac{i}{C_1} \quad (3.3)$$

$$\frac{dv_2}{dt} = -\frac{v_2}{R_2 C_2} + \frac{i}{C_2} \quad (3.4)$$

$$v_0 = E_0 + v_1 + v_2 + iR_0 \quad (3.5)$$

donde:

- v_1 es la caída de voltaje en el capacitor C_1 .
- v_2 es la caída de voltaje en el capacitor C_2 .
- E_0 voltaje interno de la batería en circuito abierto.
- SoC estado de carga de la batería.
- v_0 voltaje de la batería con carga.

3.2. Sistema de Baterías Lithium-ion representado en espacio de estados

La ecuación general que describe el comportamiento dinámico de los estados es la siguiente:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu \quad (3.6)$$

La ecuación general que relaciona a los estados con las salidas del sistema es la siguiente:

$$\mathbf{y} = C\mathbf{x} + Du \quad (3.7)$$

En nuestro sistema, el vector de estados está dado por:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ Soc \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

la entrada al sistema es la corriente eléctrica de consumo $i(t)$ entonces $u(t) = i(t)$. La ecuación de estados está dado por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1/R_1C_1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/R_2C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1/C_1 \\ 1/C_2 \\ -\eta \end{bmatrix} u \quad (3.9)$$

la salida del sistema corresponde al voltaje a plena carga de la batería $y(t) = v_0(t)$. La ecuación de salida está dada por:

$$\mathbf{y} = h(\mathbf{x}, u) \quad (3.10)$$

donde $h(\cdot)$ es una función no lineal que relaciona la salida del sistema con los estados y con la entrada al sistema.

3.3. Discretización del modelo del sistema de baterías Lithium-ion

En esta sección procederemos a discretizar el modelo presentado en la sección anterior. Discretizar es el proceso de transformar el modelo en tiempo continuo a tiempo discreto para ello emplearemos la letra k como el índice de tiempo discreto (paso de tiempo). Empleando el método de Euler obtenemos el modelo en tiempo discreto. Modelo que lo presentamos a continuación:

$$\begin{aligned}
x_{1_{k+1}} &= x_{1_k} + \frac{\Delta T}{R_1 C_1} x_{1_{k-1}} + \frac{\Delta T}{C_1} u_k \\
x_{2_{k+1}} &= x_{2_k} + \frac{\Delta T}{R_2 C_2} x_{2_{k-1}} + \frac{\Delta T}{C_2} u_k \\
x_{3_{k+1}} &= x_{3_k} - \eta \Delta T u_k
\end{aligned} \tag{3.11}$$

donde ΔT es el paso de tiempo el cual debe ser suficientemente pequeño como para que el error de simulación sea bajo. La discretización permite implementar el modelo en un software de programación y así poder simular el comportamiento del CSTR. En nuestro caso emplearemos el software MATLAB. La ecuación discreta de salida está dada por:

$$\begin{aligned}
E_{0_k} &= a_1 x_{1_k}^7 + a_2 x_{1_k}^6 + a_3 x_{1_k}^5 + a_4 x_{1_k}^4 + a_5 x_{1_k}^3 + a_6 x_{1_k}^2 + a_7 x_{1_k} + a_8 \\
y_k &= E_{0_k} + x_{1_k} + x_{2_k} + u_k R_0
\end{aligned}$$

3.4. Simulación de la batería Lithium-ion en MATLAB script

En esta sección se presenta la simulación del modelo discreto de la batería (ecuación 3.11) en el software MATLAB script. A continuación, presentamos el código en MATLAB tanto para la implementación de la ecuación de estados como para la implementación de la ecuación de salida.

```

% truth value
for t=2:Nsteps
    im=i(t);
    v1s(t)=(-(1/(R1*C1))*DeltaT+1)*v1s(t-1)+(DeltaT/C1)*im;
    v2s(t)=(-(1/(R2*C2))*DeltaT+1)*v2s(t-1)+(DeltaT/C2)*im;
    ss(t)=ss(t-1)-n*DeltaT*im;
    es0(t)=a1*ss(t)^7+a2*ss(t)^6+a3*ss(t)^5+a4*ss(t)^4+...
           a5*ss(t)^3+a6*ss(t)^2+a7*ss(t)+a8;
    v0truth(t)=v1s(t)+v2s(t)+es0(t)+im*R0;
end

```

Para evaluar la simulación del modelo procedemos a diseñar el comportamiento dinámico de la entrada a nuestro sistema, en nuestro caso la corriente de carga. La figura 3.2 muestra la señal de corriente carga.

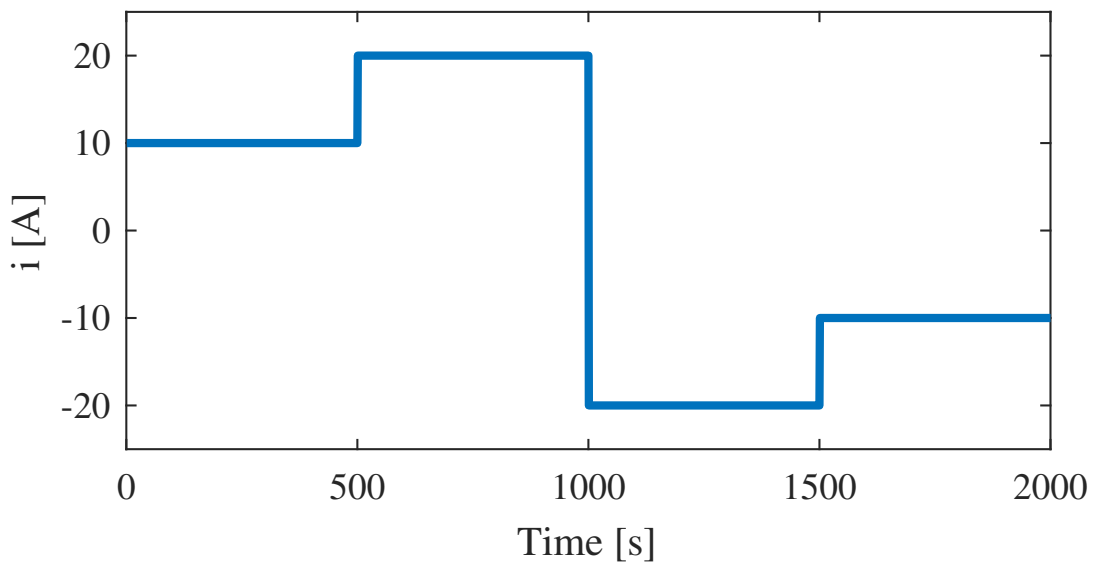


Figura 3.2: Gráfica de la variable de entrada Corriente de Carga

a partir de la figura 3.2 podemos observar varios perfiles de corriente de carga, al inicio apreciamos una corriente constante de carga para tener luego un cambio repentino de corriente positiva que se mantie-

ne por un periodo de tiempo para luego pasar a tener corrientes de descarga en dos niveles.

El comportamiento de los estados del sistema se observa en las figuras. La figura 3.3 muestra el comportamiento dinámico de la variable de estado V_1 .

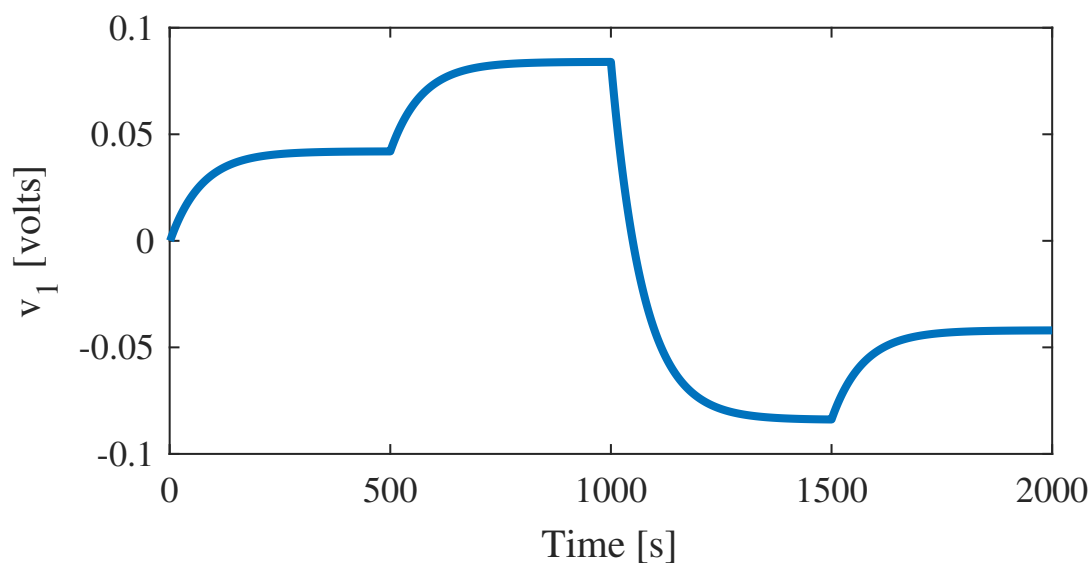


Figura 3.3: Gráfica del estado Voltaje 1

La figura 3.4 muestra el comportamiento de la variable de estado V_2 .

La figura 3.5 muestra el comportamiento de la variable de estado de carga de la batería SoC .

La figura 3.6 muestra el comportamiento de la variable Voltaje en circuito abierto SoC .

La figura 3.7 muestra el comportamiento de la variable de estado Voltaje de la batería SoC .

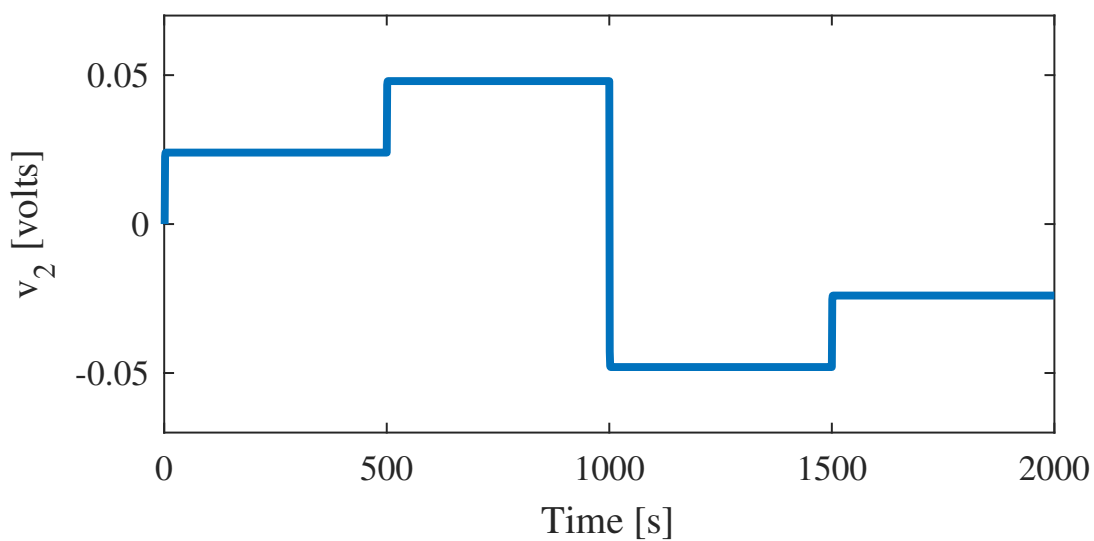


Figura 3.4: Gráfica del estado Voltaje 2

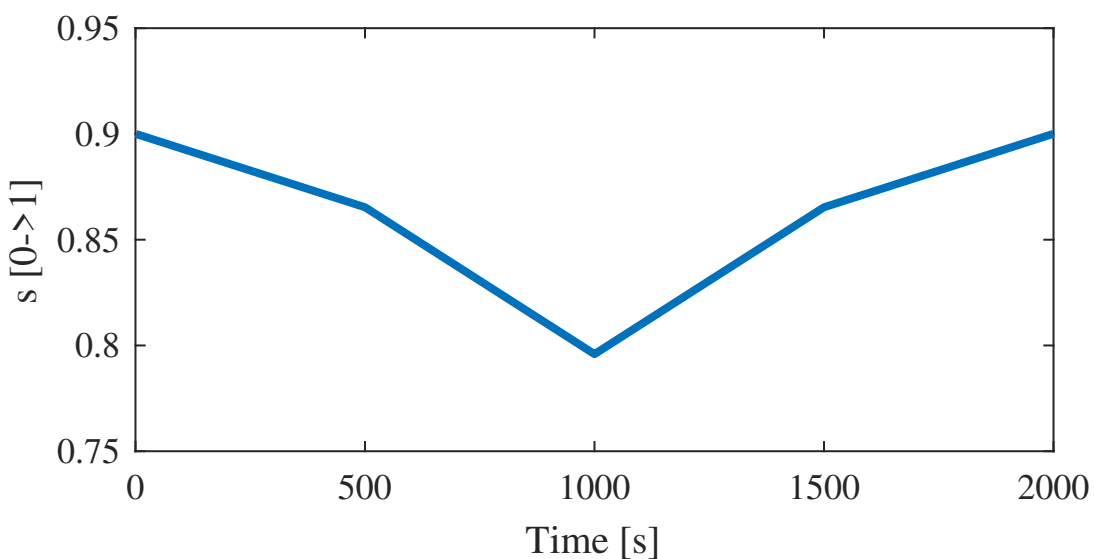


Figura 3.5: Gráfica de la variable estado de carga

3.4.1. Generación de las mediciones empleadas en el estudio

Los datos que emplearemos en la evaluación de los filtros son datos sintéticos generados a partir de un experimento. El experimento consiste en perturbar tantas entradas, estados, parámetros, salidas

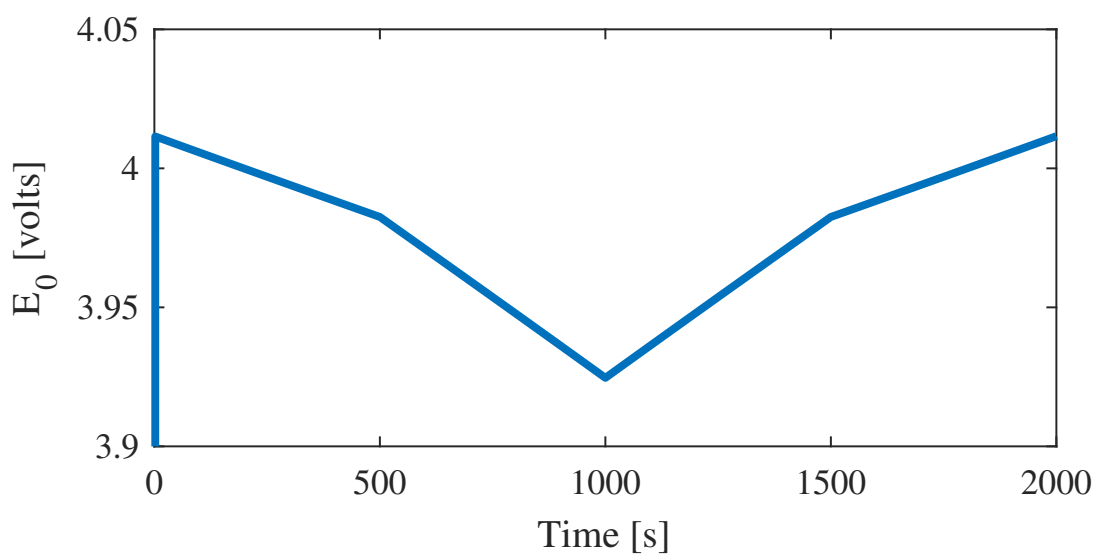


Figura 3.6: Gráfica del estado Voltaje en circuito abierto

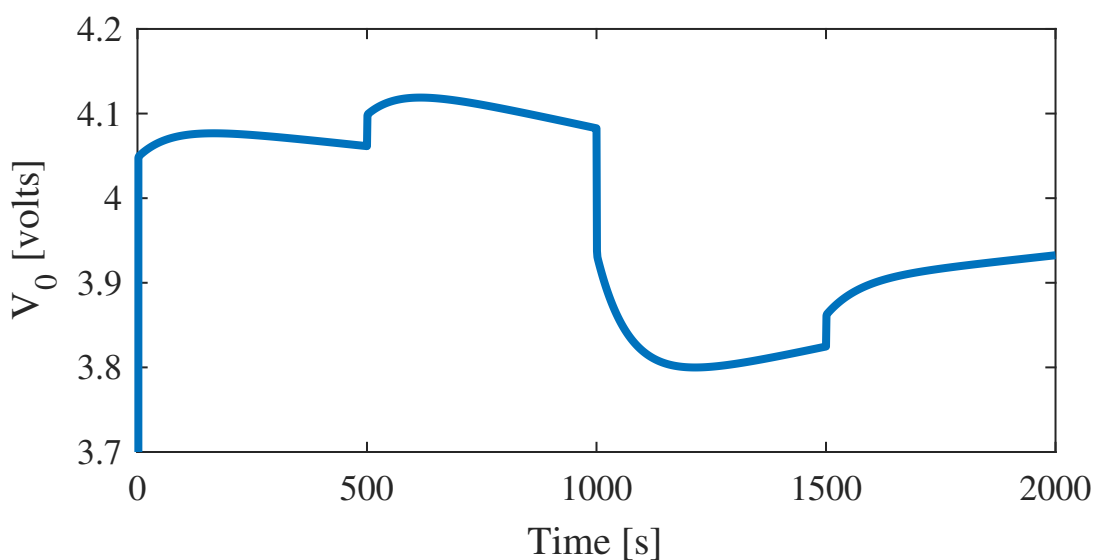


Figura 3.7: Gráfica del estado Voltaje de la batería

con ruido blanco, el cual está caracterizado por tener media cero y una varianza correspondiente a un porcentaje del valor nominal de las variables. La tabla 3.3 presenta las varianzas de los ruidos empleados en la generación de las mediciones.

El código en Matlab indicando la perturbación respectiva es presen-

Tabla 3.3: Ruidos de perturbación de las variables del modelo.

Elementos del proceso	porcentaje de ruido
Entrada	1,0 %
Estados	0,5 %
Salidas	0,1 %

tada a continuación:

```

%measurements generation
for t=2:Nsteps
    im=i(t)+nsimin*i(t)*randn;
    v1(t)=(-(1/(R1*C1))*DeltaT+1)*v1(t-1)+(DeltaT/C1)*im;
    v1(t)=v1(t)+nsimstate*v1(t)*randn;
    v2(t)=(-(1/(R2*C2))*DeltaT+1)*v2(t-1)+(DeltaT/C2)*im;
    v2(t)=v2(t)+nsimstate*v2(t)*randn;
    s(t)=s(t-1)-n*DeltaT*im;
    s(t)=s(t)+nsimstate*s(t)*randn;
    e0(t)=a1*s(t)^7+a2*s(t)^6+a3*s(t)^5+a4*s(t)^4+...
        a5*s(t)^3+a6*s(t)^2+a7*s(t)+a8;
    v0(t)=v1(t)+v2(t)+e0(t)+im*R0;
    v0(t)=v0(t)+nsimout*v0(t)*randn;
end

```

El comportamiento de los estados perturbados es presentado en el siguiente conjunto de gráficos. La figura 3.8 muestra la perturbación del estado Voltaje 1.

La figura 3.9 muestra la perturbación de la variable de estado V_2 .

La figura 3.10 muestra la perturbación de la variable de estado de carga de la batería SoC .

La figura 3.11 muestra la perturbación de la variable Voltaje en circuito abierto SoC .

La figura 3.12 muestra las mediciones respectivas de la variable de

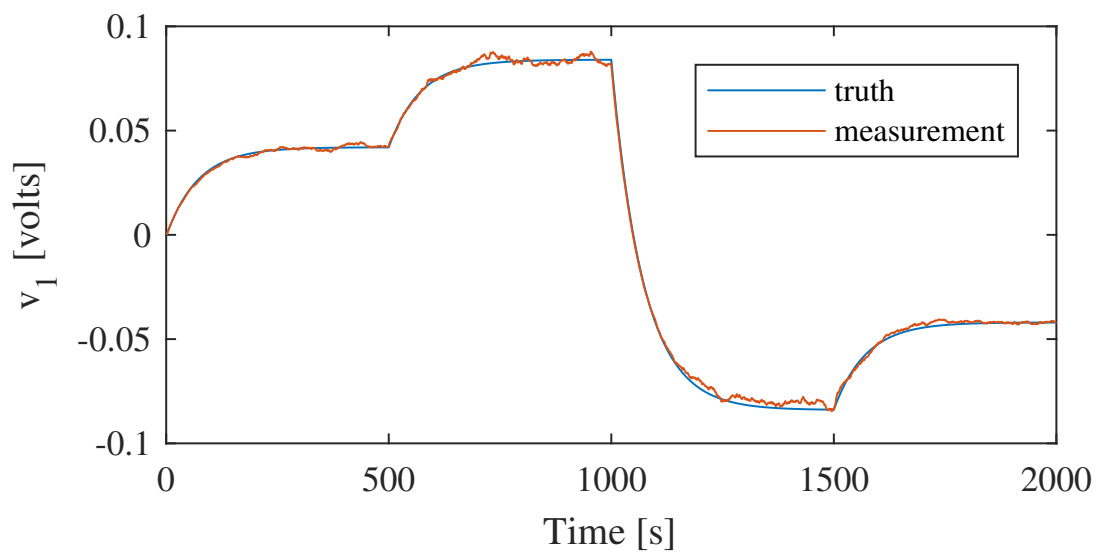


Figura 3.8: Gráfica del estado perturbado Voltaje 1

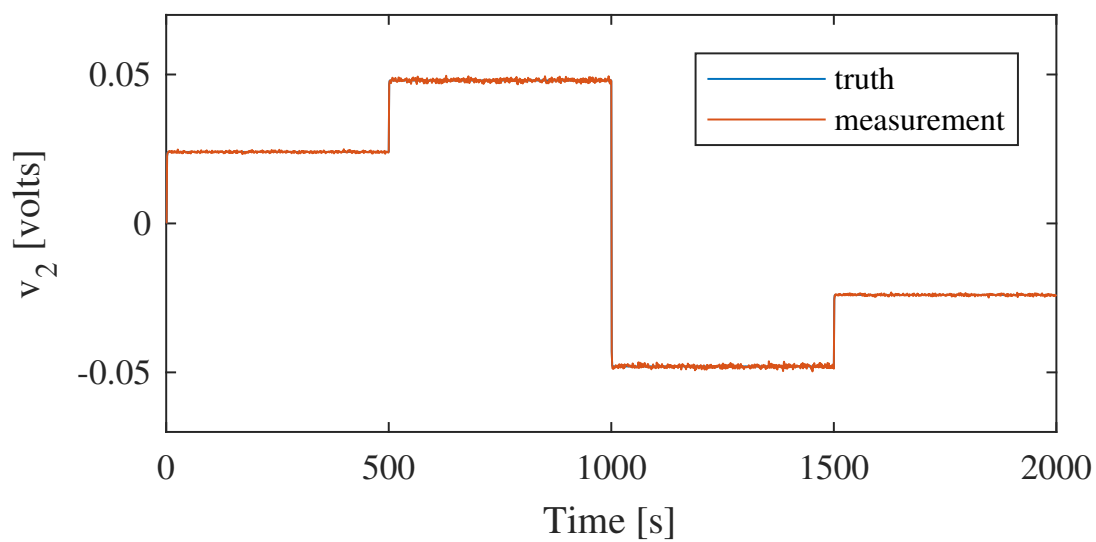


Figura 3.9: Gráfica del estado perturbado Voltaje 2

estado Voltaje de la batería *SoC*.

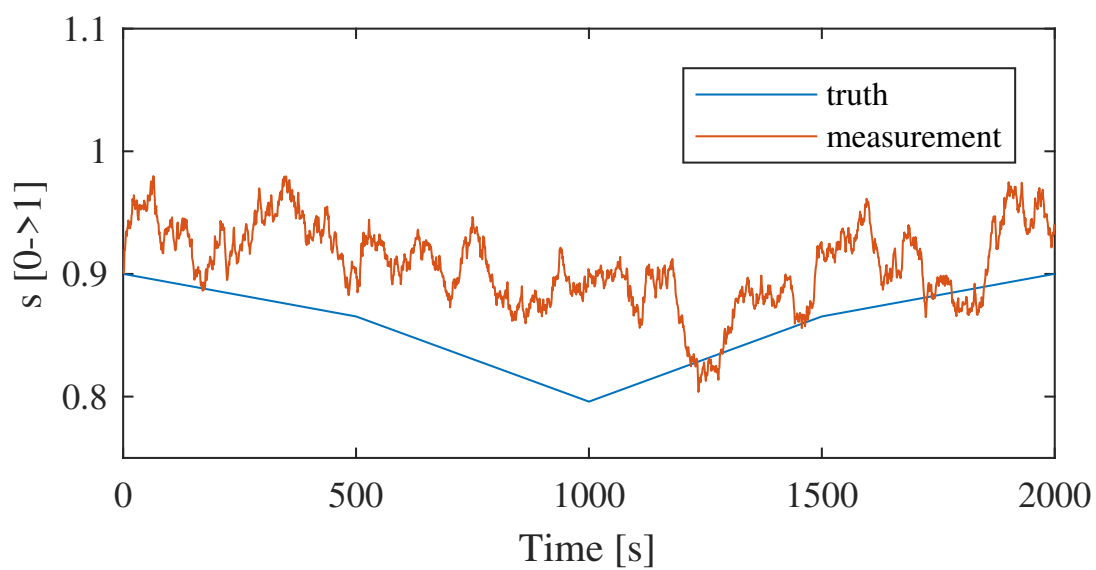


Figura 3.10: Gráfica de la variable perturbada de estado de carga

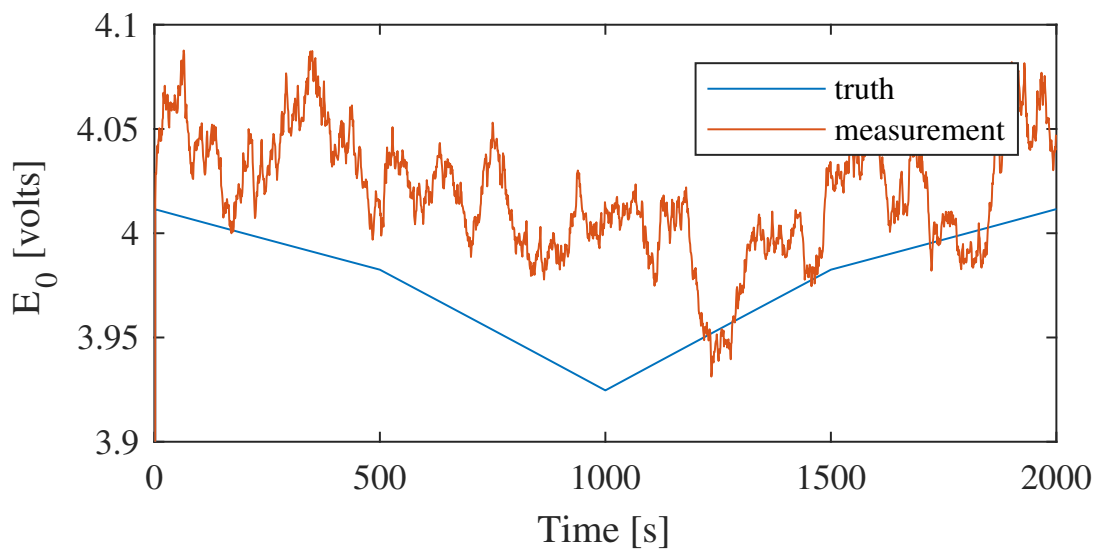


Figura 3.11: Gráfica del estado perturbado Voltaje en circuito abierto

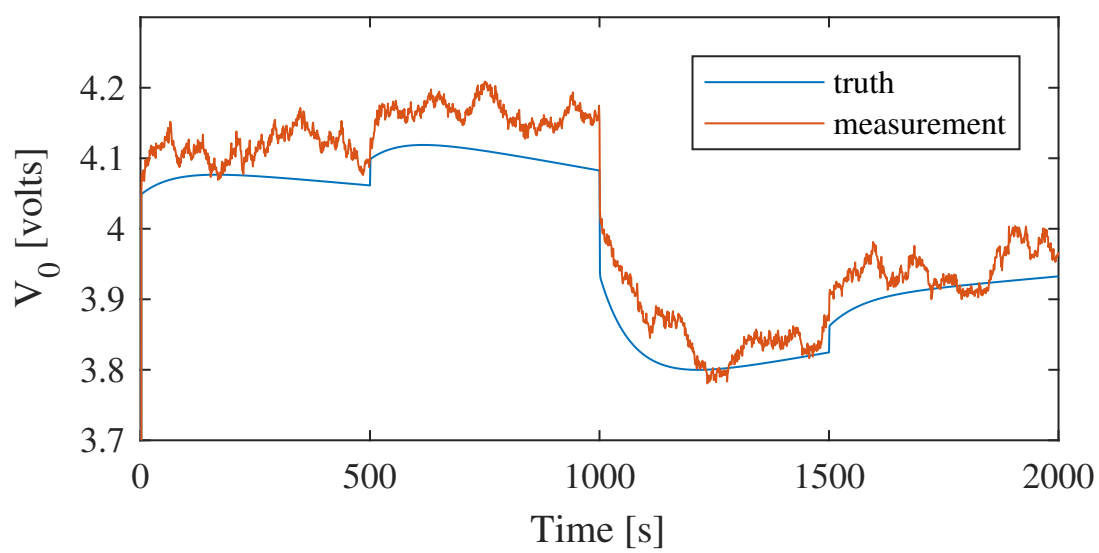


Figura 3.12: Gráfica de la salida perturbada de Voltaje de la batería

Capítulo 4

4. Analisis Comparativo del desempeño de los filtros EKF y EnKF

Los filtros motivos de estudio en el presente trabajo son: EL Filtro Extendido de Kalman (EKF, de sus siglas en ingles) y el Filtro de Kalman de Ensamble (EnKF). La comparación consiste en determinar gráficamente y cualitativamente el grado de precisión al momento de reconstruir los valores verdaderos de los estados del sistema y de las salidas del sistema.

4.1. Implementación del Filtro Extendido de Kalman

El problema de estimación del estado de carga de la batería es un problema no lineal, donde podemos separar el problema ya que la ecuación de estados del modelo ?? es una ecuación lineal y por lo

tanto las matrices A y B son matrices estáticas porque sus valores no cambian a lo largo de la simulación. Por otro lado, las matrices C y D las cuales relacionan los estados y entradas con las salidas son matrices dinámicas lo que significa que cambian en cada instante de tiempo ΔT . La definición de las matrices empleadas en el filtro de Kalman es presentada a continuación:

```
%static matrix definitions
A=[(-(1/(R1*C1))*DeltaT+1) 0 0;
    0 (-(1/(R2*C2))*DeltaT+1) 0;
    0 0 1];
B=[DeltaT/C1;
    DeltaT/C2;
    -n*DeltaT];
%identity matrix for error covariance update
Id=[1 0 0;
    0 1 0;
    0 0 1];
%process noise matrix Q
Q=[1 0 0;
    0 1 0;
    0 0 1];
R=0.01;
Pk=Q;
```

La implementación del filtro extendido de Kalman involucra dos fases, la fase de pronóstico y la fase de análisis. En el siguiente código presentamos el desarrollo del filtro de Kalman no lineal.

```
for t=2:Nsteps
    im = i(t);
    %—prediction step—
    %obtain apriori states
```

```

x(:, t)=A*x(:, t-1)+B*im;
Pk=A*Pk*A'+Q;
%—update state——
Ck=[1 1 (7*a1*x(3, t)^6+6*a2*x(3, t)^5+5*a3*x(3, t)^4+...
      4*a4*x(3, t)^3+3*a5*x(3, t)^2+2*a6*x(3, t)+a7)];
Kalman=Pk*Ck'/(Ck*Pk*Ck'+R);
em0(t)=a1*x(3, t)^7+a2*x(3, t)^6+a3*x(3, t)^5+a4*x(3, t)^4+...
      a5*x(3, t)^3+a6*x(3, t)^2+a7*x(3, t)+a8;
vm0(t)=x(1, t)+x(2, t)+em0(t)+im*R0;
x=x+Kalman*(v0(t)-vm0(t));
Pk=(Id-Kalman*Ck)*Pk;
end

```

A continuación, se presentan los resultados gráficos de la aplicación del filtro de Kalman en la estimación de los estados verdaderos y la salida del sistema. La figura 4.1 muestra la estimación de la variable de estado V_1 .

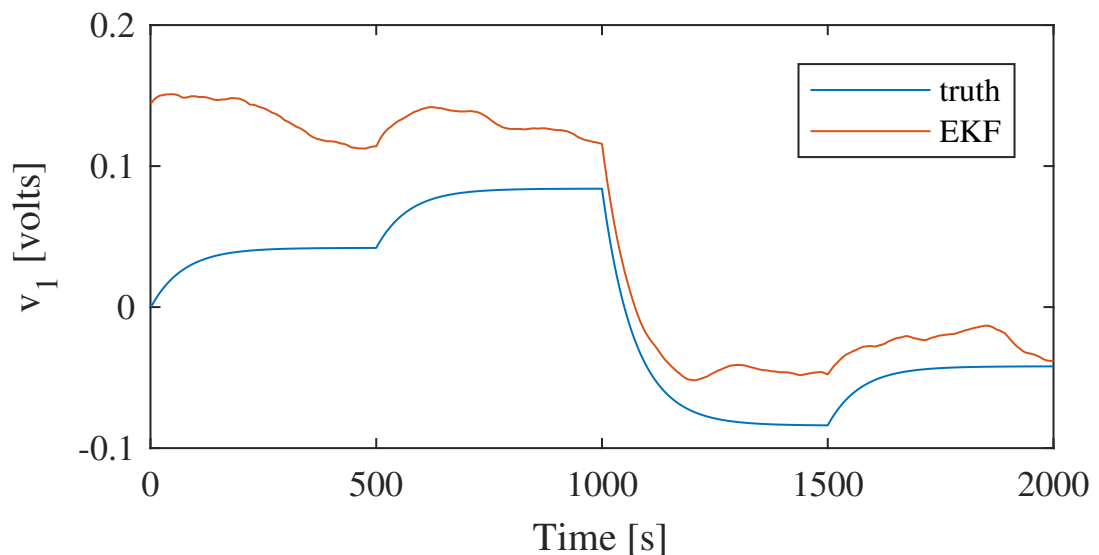


Figura 4.1: Gráfica del estado estimado Voltaje 1

La figura 4.2 muestra el comportamiento de la variable de estado V_2 .

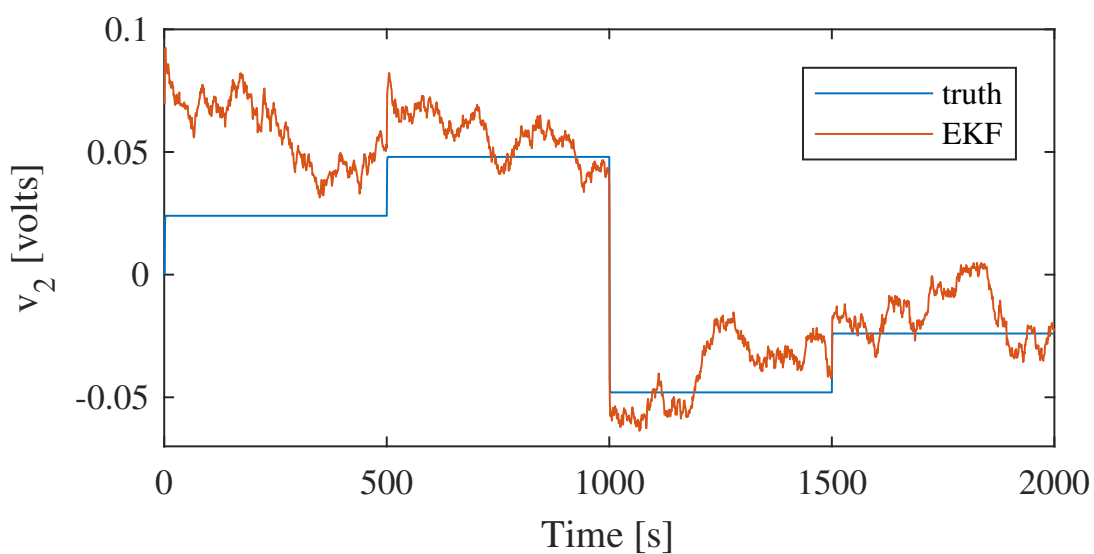


Figura 4.2: Gráfica del estado estimado Voltaje 2

La figura 4.3 muestra el comportamiento de la variable de estado de carga de la batería SoC .

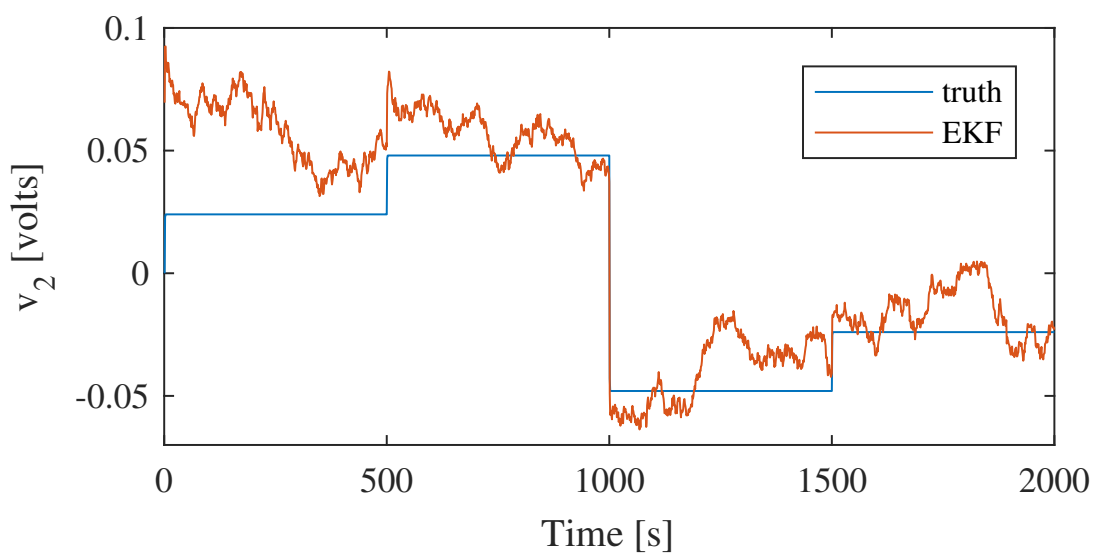


Figura 4.3: Gráfica de la variable estimada estado de carga

La figura 4.4 muestra el comportamiento de la variable Voltaje en circuito abierto SoC .

La figura 4.5 muestra el comportamiento de la variable de estado

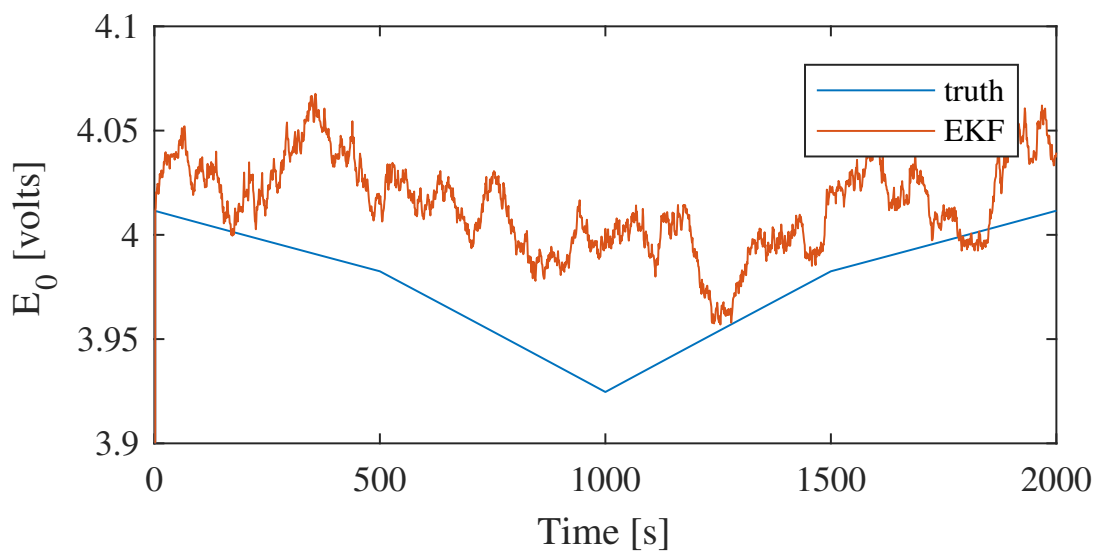


Figura 4.4: Gráfica del estado estimado Voltaje en circuito abierto

Voltaje de la batería *SoC*.

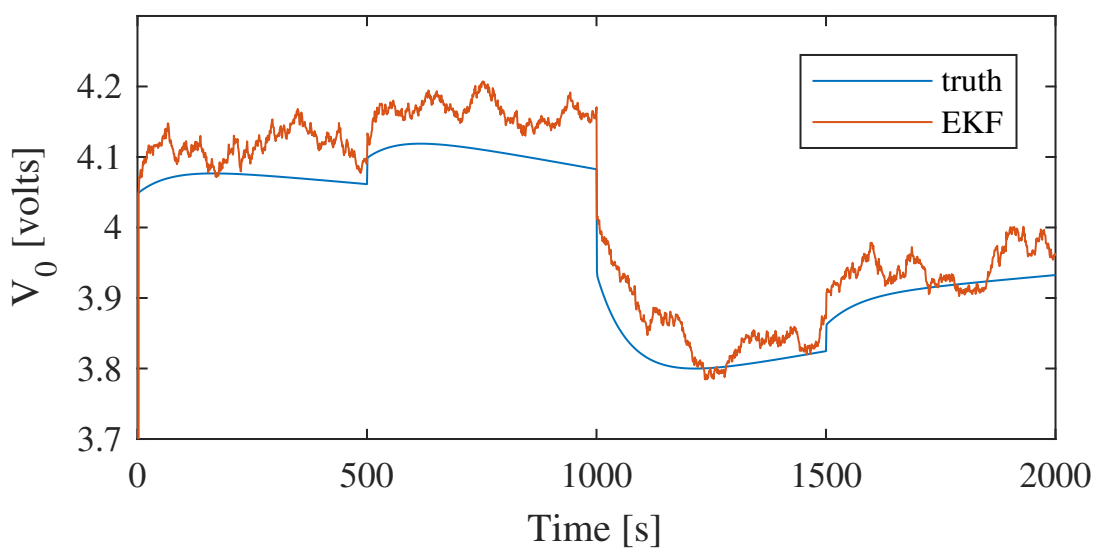


Figura 4.5: Gráfica del estado estimado Voltaje de la batería

4.2. Implementación del filtro de Kalman de ensamble de partículas

El filtro de Kalman de ensamble es un filtro particularmente diferente al EKF, básicamente el filtro de Kalman de ensamble es un filtro que trabaja con muestras, dichas muestras son obtenidas a través de la perturbación de los estados, entradas, parámetros, salidas. En el código siguiente podemos apreciar la generación de las muestras luego de correr el modelo.

```

for t=2:Nsteps
    im=i(t);
    for ii=1:Nensem
        % Define parameters values
        a1=8.4073 + nparam*8.4073*randn;
        a2=-19.892 + nparam*-19.892*randn;
        a3=11.497+ nparam*11.497*randn;
        a4=4.161+ nparam*4.161*randn;
        a5=-4.5533+ nparam*-4.5533*randn;
        a6=0.34365+ nparam*0.34365*randn;
        a7=0.64685+ nparam*0.64685*randn;
        a8=3.5017+ nparam*3.5017*randn;
        R0=0.0013+ nparam*0.0013*randn;
        R1=0.0042+ nparam*0.0042*randn;
        R2=0.0024+ nparam*0.0024*randn;
        C1=17111+ nparam*17111*randn;
        C2=440.54+ nparam*440.54*randn;
        n=1/(3600*40)+ nparam*1/(3600*40)*randn;
        % States equation
        xens1(t, ii) = ((-DeltaT/(R1*C1))+1)*xens1(t-1, ii) + ...
            (DeltaT/C1)*im;
    
```



```

xens1(t, ii) = xens1(t, ii) + nstates*xens1(t, ii)*randn;
xens2(t, ii) = ((-DeltaT/(R2*C2))+1)*xens2(t-1, ii) + ...
    (DeltaT/C2)*im;
xens2(t, ii) = xens2(t, ii) + nstates*xens2(t, ii)*randn;
xens3(t, ii) = xens3(t-1, ii) - (n*DeltaT)*im;
xens3(t, ii) = xens3(t, ii) + nstates*xens3(t, ii)*randn;
%output equation
ens0(t, ii) = a1*xens3(t, ii)^7+a2*xens3(t, ii)^6+a3*xens3(t, ii)^5+...
    a4*xens3(t, ii)^4+a5*xens3(t, ii)^3+a6*xens3(t, ii)^2+...
    a7*xens3(t, ii)+a8;
yens1(t, ii) = xens1(t, ii)+xens2(t, ii)+ens0(t, ii)+im*R0;
yens1(t, ii) = yens1(t, ii)+nmeas*yens1(t, ii)*randn;
end

```

Las ecuaciones de Kalman en la fase de análisis son ecuaciones que aproximan la solución real, es por esto que se emplean métodos de Monte Carlo en la aproximación. En el siguiente código se aprecia la implementación del filtro no lineal.

```

xens = [xens1(t, :); xens2(t, :); xens3(t, :)];
yens = yens1(t, :);
tempPP = mean(xens, 2);
tempP = tempPP*ones(1, Nensem);
tempP = tempP - xens; %ensemble state error
tempPPy = mean(yens);
tempPy = yens - tempPPy; %observation error
P_ini = (1/(Nensem-1))*(tempP*tempP');
%P_ini = [varS1_obs 0; 0 varS2_obs];
Pxy_ini = (1/(Nensem-1))*(tempP*tempPy');
Pyy_ini = (1/(Nensem-1))*(tempPy*tempPy');
Y_vec = v0 + nsubrogate.*randn(Nsteps, 1).*v0;
K_gain = Pxy_ini/(Pyy_ini + Rens);
xens = xens + K_gain*(mean(yens) - Y_vec(t));

```

```

XENS(:, t) = mean(xens, 2);
YENS(t) = mean(yens);
ENS0(t) = mean(ens0(t, :));
end

```

A continuación, se presentan los resultados gráficos de la aplicación del filtro de Kalman en la estimación de los estados verdaderos y la salida del sistema. La figura 4.6 muestra la estimación de la variable de estado V_1 .

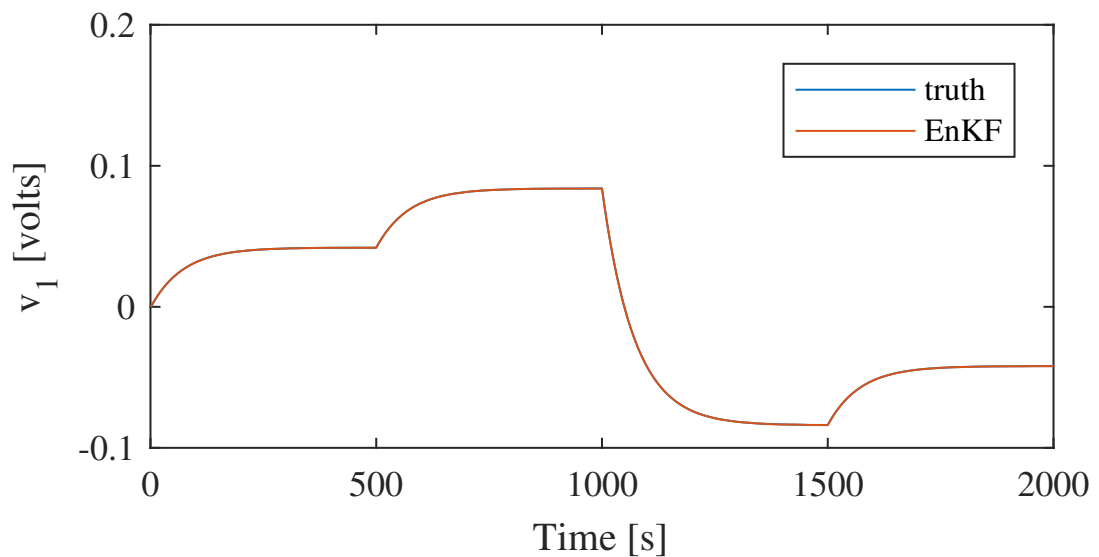


Figura 4.6: Gráfica del estado estimado por el filtro EnKF del Voltaje 1

La figura 4.7 muestra el comportamiento de la variable de estado V_2 .

La figura 4.8 muestra el comportamiento de la variable de estado de carga de la batería SoC .

La figura 4.9 muestra el comportamiento de la variable Voltaje en circuito abierto SoC .

La figura 4.10 muestra el comportamiento de la variable de estado Voltaje de la batería SoC .

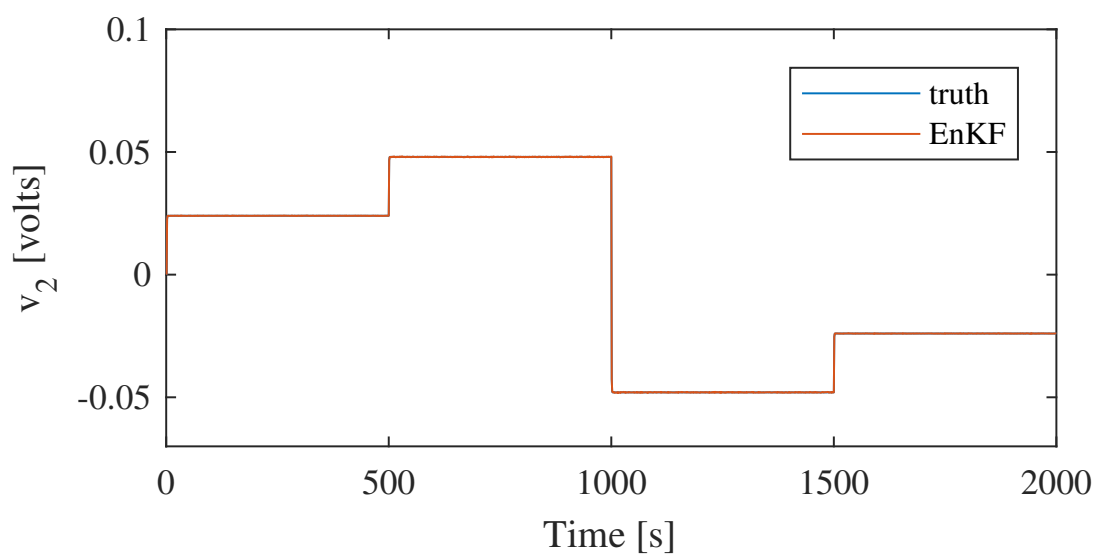


Figura 4.7: Gráfica del estado estimado por el filtro EnKF del Voltaje 2

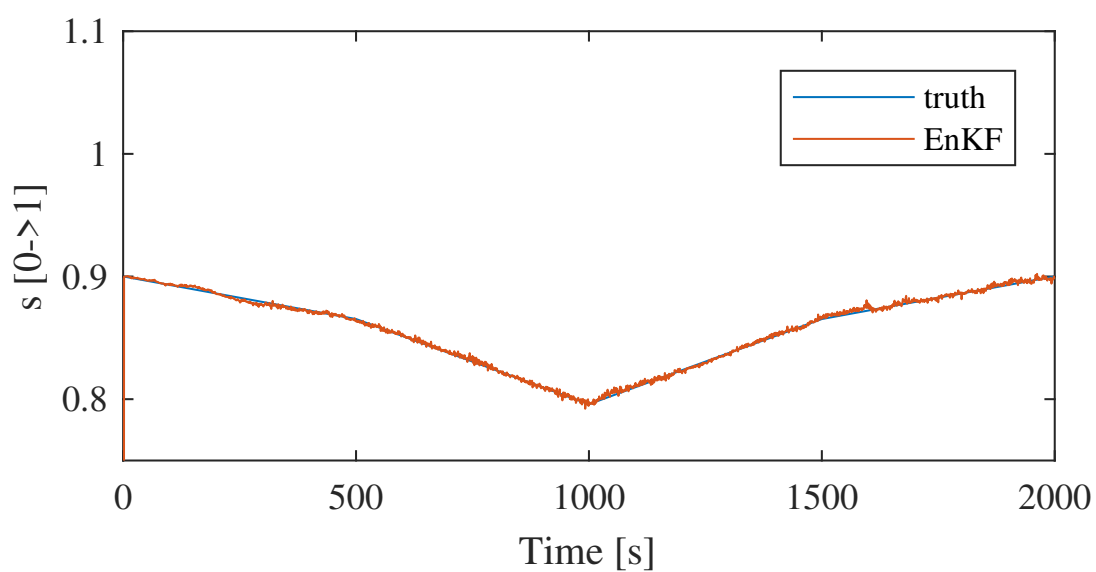


Figura 4.8: Gráfica de la variable estimada por el filtro EnKF del estado de carga

4.3. Análisis Comparativo

De los resultados mostrados en las secciones anteriores se aprecia gráficamente que ambos filtros convergen y tienden a estimar los valores verdaderos. En esta sección realizamos una comparación vi-

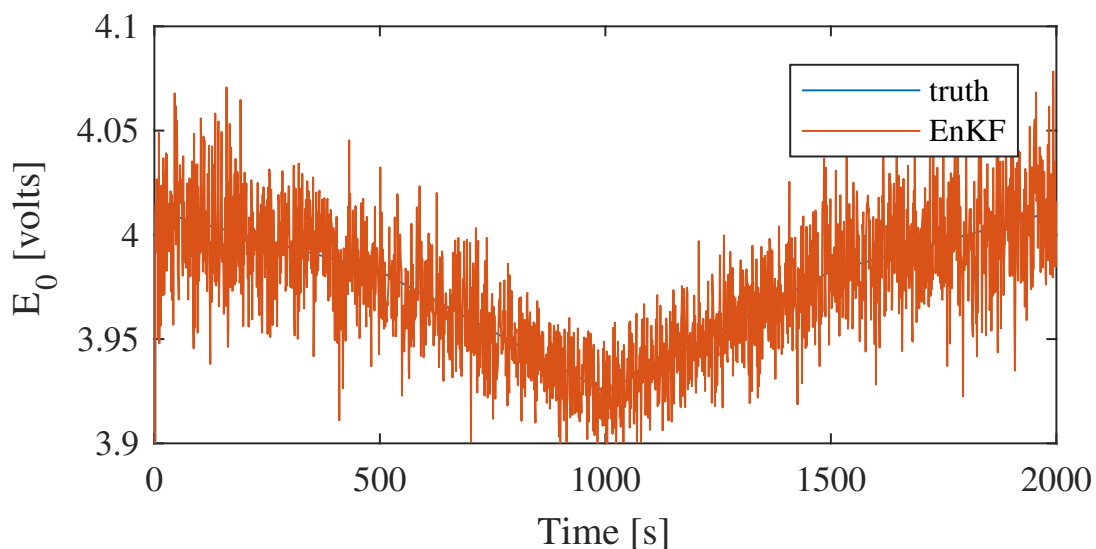


Figura 4.9: Gráfica del estado estimado por el filtro EnKF del Voltaje en circuito abierto

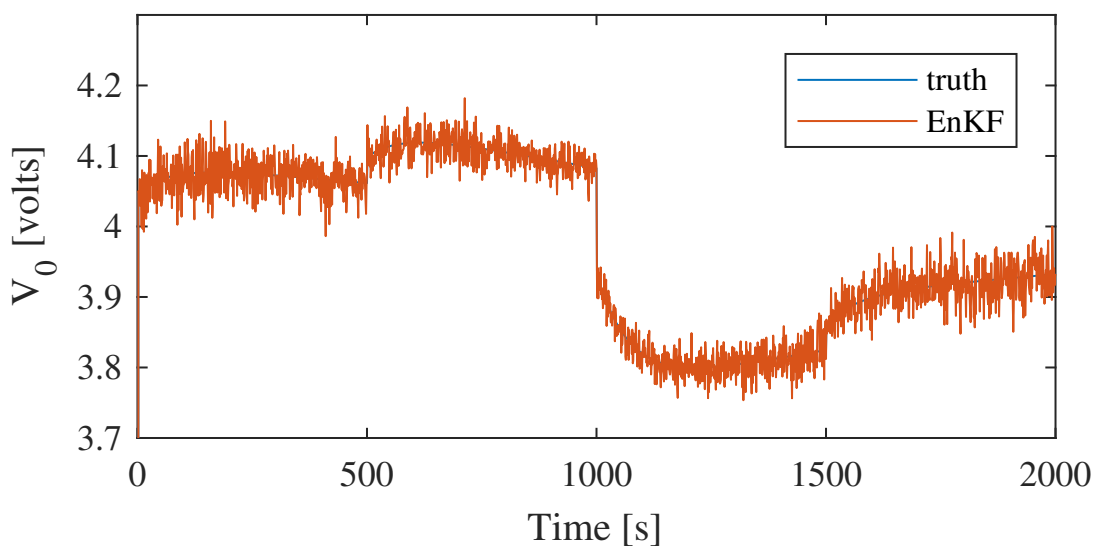


Figura 4.10: Gráfica del estado estimado por el filtro EnKF del Voltaje de la batería

sual y a través de una métrica como es el valor del Root Mean Square Error para determinar el desempeño de los filtros chequeando este error.

La figura 4.11 muestra la comparación gráfica de la estimación de la variable de estado V_1 .

La figura 4.12 muestra la comparación gráfica de la estimación de la

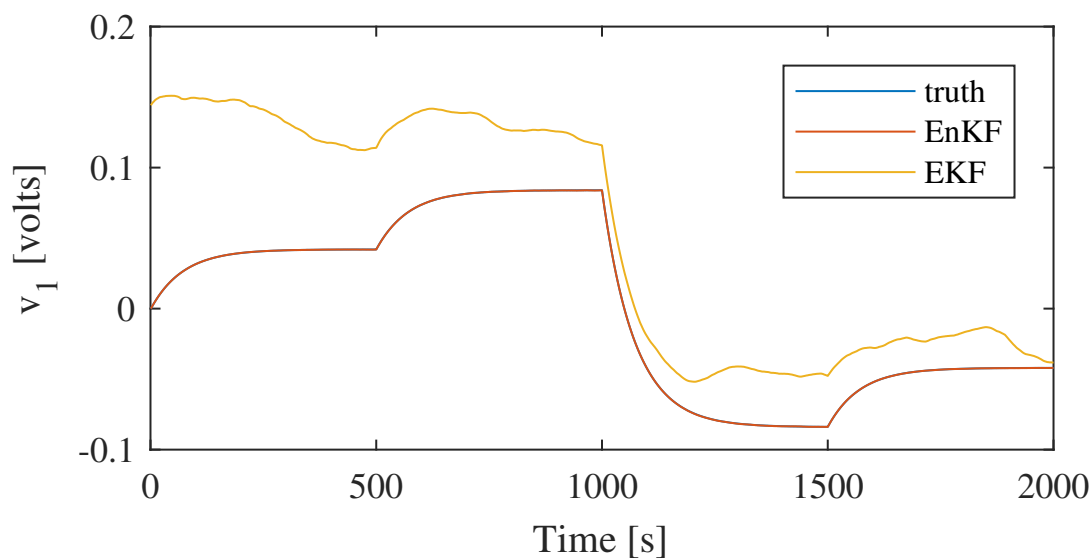


Figura 4.11: Gráfica de la estimación EKF y EnKF del Voltaje 1

variable de estado V_2 .

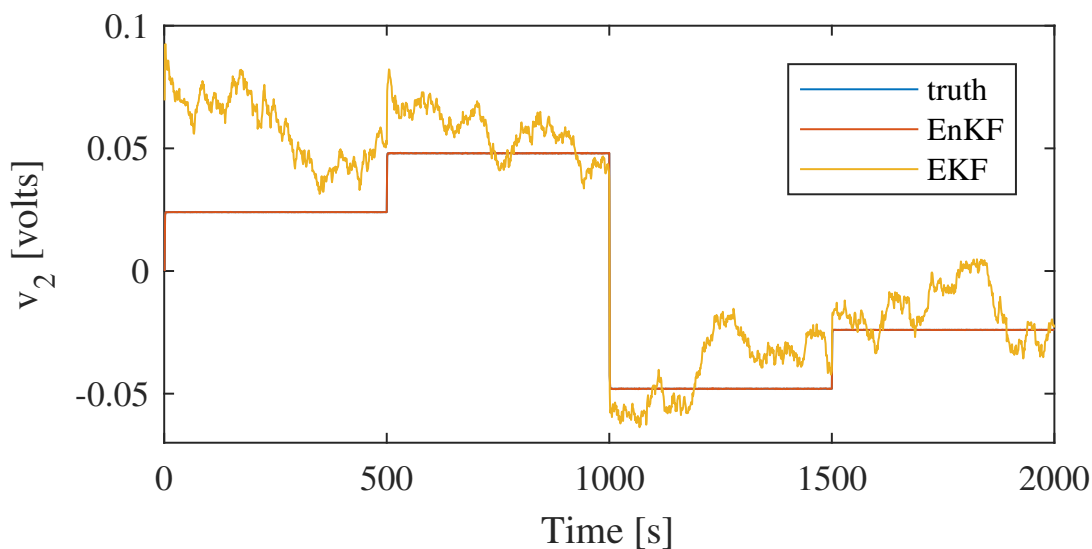


Figura 4.12: Gráfica de la estimación EKF y EnKF del Voltaje 2

La figura 4.13 muestra la comparación gráfica de la estimación de la variable de estado de carga de la batería SoC .

La figura 4.14 muestra la comparación gráfica de la estimación de la variable Voltaje en circuito abierto SoC .

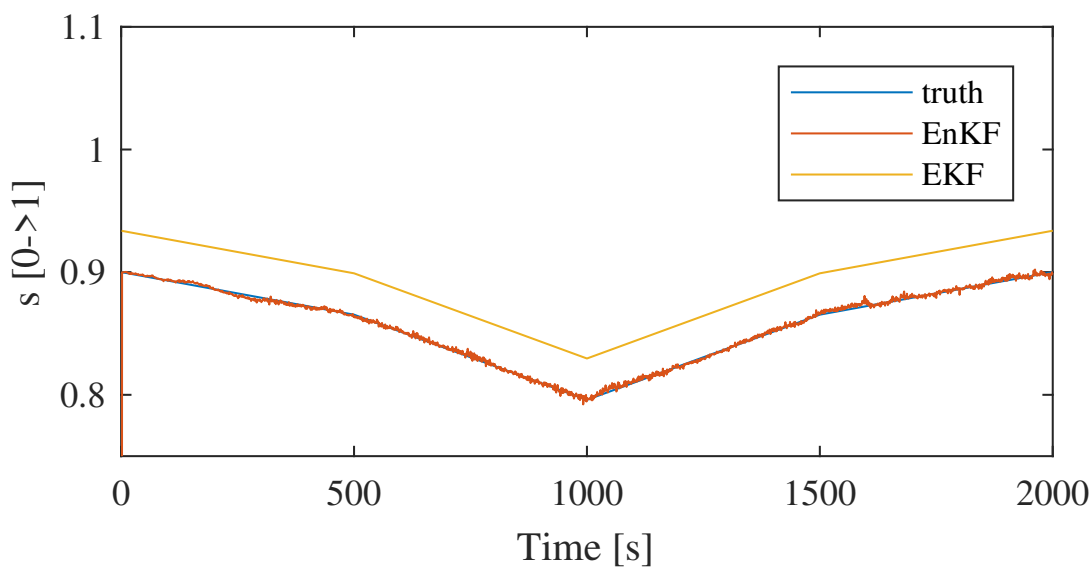


Figura 4.13: Gráfica de la estimación EKF y EnKF del estado de carga

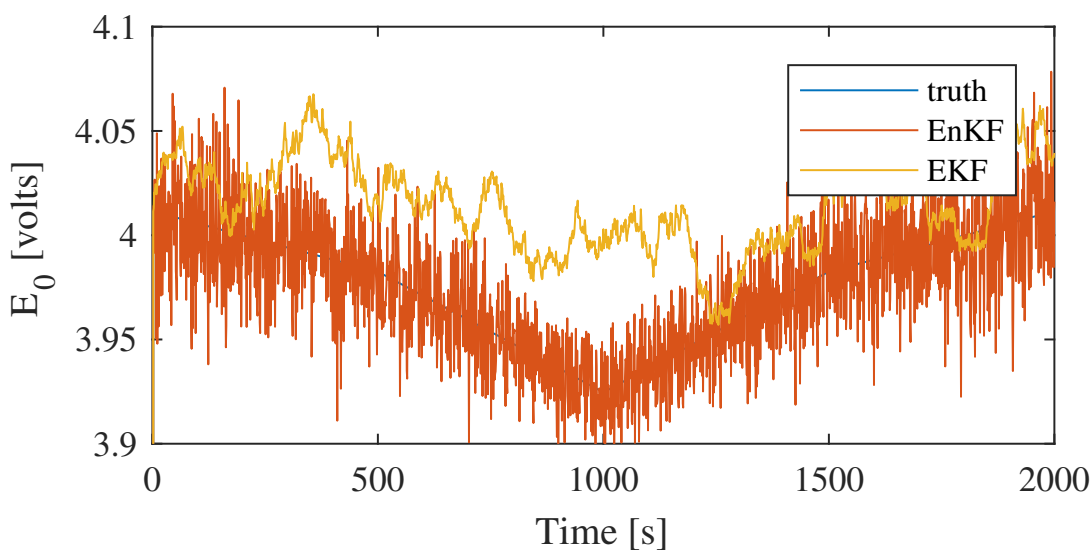


Figura 4.14: Gráfica de la estimación EKF y EnKF del Voltaje en circuito abierto

La figura 4.15 muestra el comportamiento de la variable de estado Voltaje de la batería SoC .

Como podemos apreciar gráficamente el desempeño del filtro EnKF es mucho mejor con respecto al desempeño del filtro EKF, el error de estimación a través del indicador RMSE es presentado en la tabla

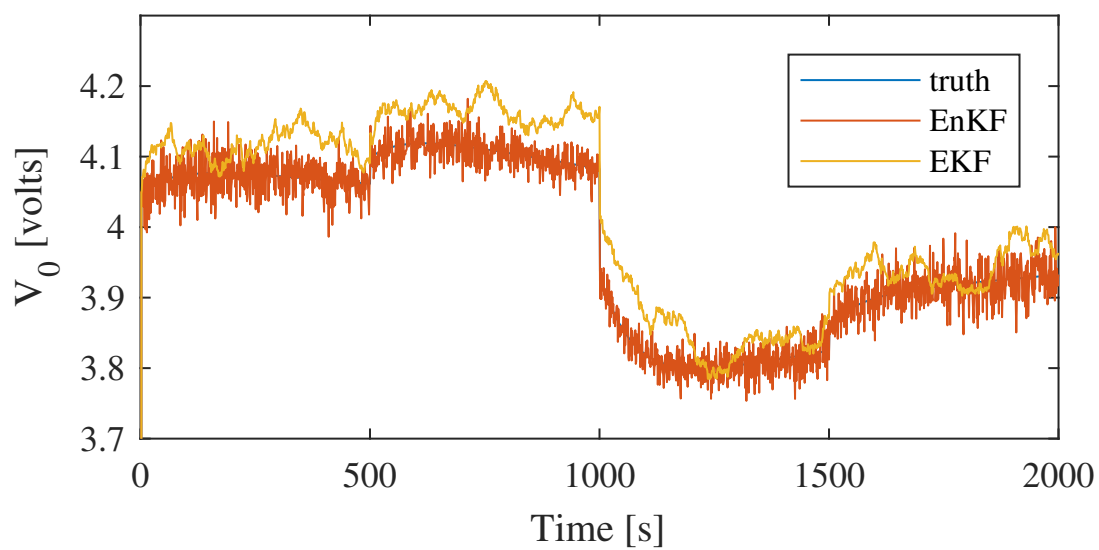


Figura 4.15: Gráfica de la estimación EKF y EnKF del Voltaje de la batería

Tabla 4.1: Variables del modelo.

Estado	RMSE EKF	RMSE EnKF
V_1	$9,8 \times 10^{-2}$	$6,1 \times 10^{-2}$
V_2	$4,7 \times 10^{-2}$	$3,7 \times 10^{-2}$
E_0	4,0	3,9
SoC	$5,6 \times 10^{-2}$	$3,2 \times 10^{-2}$
V_0	3,9	$2,2 \times 10^{-2}$

4.1.

Conclusiones

CONCLUSIONES

- 1) Se discretizó e implementó el modelo de una batería de Lithium-ion donde el modelo está centrado en la descripción de la relación no lineal que existe entre el voltaje en los terminales en circuito abierto y el estado de carga de la batería. Los resultados muestran un comportamiento apropiado del modelo discreto empleado, el cual está basado en el método de Euler. Luego, se generaron mediciones como resultado de un experimento sintético.
- 2) En el presente trabajo se encontraron las matrices Jacobianas necesarias para poder implementar el filtro extendido de Kalman. Se implementó el filtro extendido de Kalman en tiempo discreto y los resultados muestran que la estimación es apropiada sin embargo contiene un error significativo.
- 3) Una de las ventajas de emplear filtros aproximados como el filtro de Kalman de ensamble de partículas es la aproximación de las matrices que se necesitan para el cálculo de la ganancia de Kalman. Una desventaja del filtro EnKF es la dependencia de un número determinado de muestras/partículas para obtener aproximaciones apropiadas. En el presente trabajo el filtro EnKF mues-

tra un mejor desempeño en comparación del desempeño del filtro EKF.

- 4) La conclusión más importante del presente trabajo es reportar a la comunidad científica el eficiencia del filtro EnKF y su precisión con respecto al desempeño del filtro EnKF.
- 5) Es importante tomar en consideración la mayor carga computacional del filtro EnKF debido a su dependencia de la generación de muestras aleatorias. En el presente trabajo, la aproximación al valor óptimo es muy buena y la demandada computacional es marginal con respecto a la mejor precisión. Lo último es validado tanto de manera gráfica como a través del análisis del error de estimación.

Bibliografía

- [1] JL Anderson. An ensemble adjustment Kalman filter for data assimilation. *MONTHLY WEATHER REVIEW*, 129(12):2884–2903, 2001.
- [2] C. H. Bishop, BJ Etherton, and SJ Majumdar. Adaptive sampling with the ensemble transform Kalman filter. Part I: Theoretical aspects. *MONTHLY WEATHER REVIEW*, 129(3):420–436, 2001.
- [3] Gerrit Burgers, P. J. van Leeuwen, and G. Evensen. On the Analysis Scheme in the Ensemble Kalman Filter. *Mon. Weather Rev.*, 126:1719–1724, 1998.
- [4] Z. Chen, Y. Fu, and C. C. Mi. State of charge estimation of lithium-ion batteries in electric drive vehicles using extended kalman filtering. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 62(3):1020–1030, March 2013.
- [5] J.L. Crassidis. Sigma-point kalman filtering for integrated gps and inertial navigation. *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, 42(2):750–756, april 2006.
- [6] Geir Evensen. Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics. *J. Geophys. Res*, 99(C5):10143–10162, 1994.

- [7] N.J. Gordon, D.J. Salmond, and A.F.M. Smith. Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation. *Radar and Signal Processing, IEE Proceedings F*, 140(2):107–113, 1993.
- [8] PL Houtekamer and HL Mitchell. A sequential ensemble Kalman filter for atmospheric data assimilation. *Mon. Weather Rev.*, 129(1):123–137, 2001.
- [9] K. Ito and K. Xiong. Gaussian filters for nonlinear filtering problems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 45(5):910–927, may 2000.
- [10] S. Julier, J. Uhlmann, and H.F. Durrant-Whyte. A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 45(3):477–482, mar 2000.
- [11] S.J. Julier. The scaled unscented transformation. In *American Control Conference, 2002. Proceedings of the 2002*, volume 6, pages 4555–4559 vol.6, 2002.
- [12] S.J. Julier and J.K. Uhlmann. Unscented filtering and nonlinear estimation. *Proceedings of the IEEE*, 92(3):401–422, mar 2004.
- [13] Rudolph Emil Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *J. Basic Eng-T ASME*, 82(Series D):35–45, 1960.
- [14] Magnus Norgaard, Niels K. Poulsen, and Ole Ravn. New developments in state estimation for nonlinear systems. *Automatica*, 36(11):1627–1638, 2000.
- [15] Tor Steinar Schei. A finite-difference method for linearization in nonlinear estimation algorithms. *Automatica*, 33(11):2053–2058, nov 1997.

- [16] Dan Simon. *Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches*. Wiley-Interscience, 1st edition, jun 2006.
- [17] Miroslav Šimandl, Jakub Královec, and Torsten Söderström. Advanced point-mass method for nonlinear state estimation. *Automatica*, 42(7):1133–1145, July 2006.
- [18] Y. Wang, H. Fang, L. Zhou, and T. Wada. Revisiting the state-of-charge estimation for lithium-ion batteries: A methodical investigation of the extended kalman filter approach. *IEEE Control Systems Magazine*, 37(4):73–96, Aug 2017.
- [19] JS Whitaker and TM Hamill. Ensemble data assimilation without perturbed observations. *MONTHLY WEATHER REVIEW*, 130(7):1913–1924, JUL 2002.