ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL

"MODELADO, SIMULACIÓN Y CONTROL DE UN SISTEMA DINÁMICO MEDIANTE EL USO DE COMPONENETES ANÁLOGOS"

Autor

- Roberth Tinoco

Director

- Ing. Eduardo Orces

Contenidos

1. Introducción
2. Modelado y Respuesta a L.A. del Sistema
3. Método del LGR para el análisis del Sistema de Control.
4. Método de Ubicación de Polos para el análisis del Sistema de Control.
5. LQR en el Diseño Final del Sistema de Control.
6. Conclusiones y Recomendaciones.

Introducción

- Problema interesante desde el punto de vista de control.
- Ilustra muchas de las dificultades asociadas con problemas de control del mundo real.
- Control mediante el empleo de componentes simples análogos

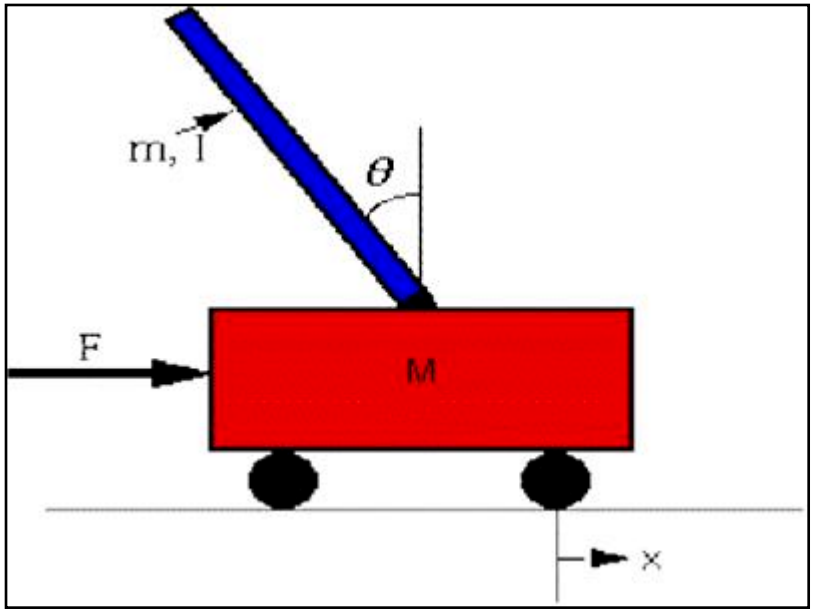
Introducción

- Aplicaciones análogas:

  - Robótica.
  - Posicionamiento satelital con respecto a la tierra.
  - Plataforma para el lanzamiento de cohetes
  - Estabilidad de Grúas y edificios, etc.

Introducción

- **Definición:** Consiste en un péndulo que gira libremente por uno de sus extremos mediante una articulación situada sobre un carro que se mueve sobre una guía rectilínea bajo la acción de una Fuerza de Control.



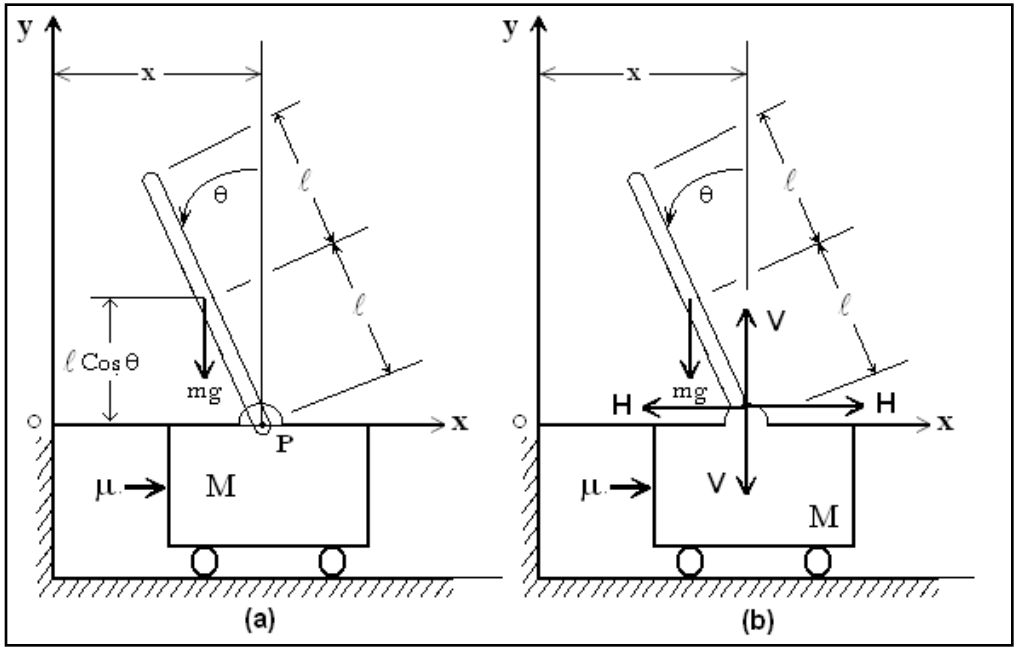
Objetivo

- Construir el prototipo utilizando un bajo presupuesto
  - Diseñar estructuralmente el sistema
  - Elegir sensores y actuador.
  - Uso de componentes análogos
- Controlar el sistema
  - Simular distintos controladores lineales usando MATLAB y SIMULINK
  - Implementar controlador mediante LQR

Contenidos

- 1. Introducción
- 2. Modelado y Respuesta a L.A. del Sistema
- 3. Método del LGR para el análisis del Sistema de Control.
- 4. Método de Ubicación de Polos para el análisis del Sistema de Control.
- 5.LQR en el Diseño Final del Sistema de Control.
- 6. Conclusiones y Recomendaciones.

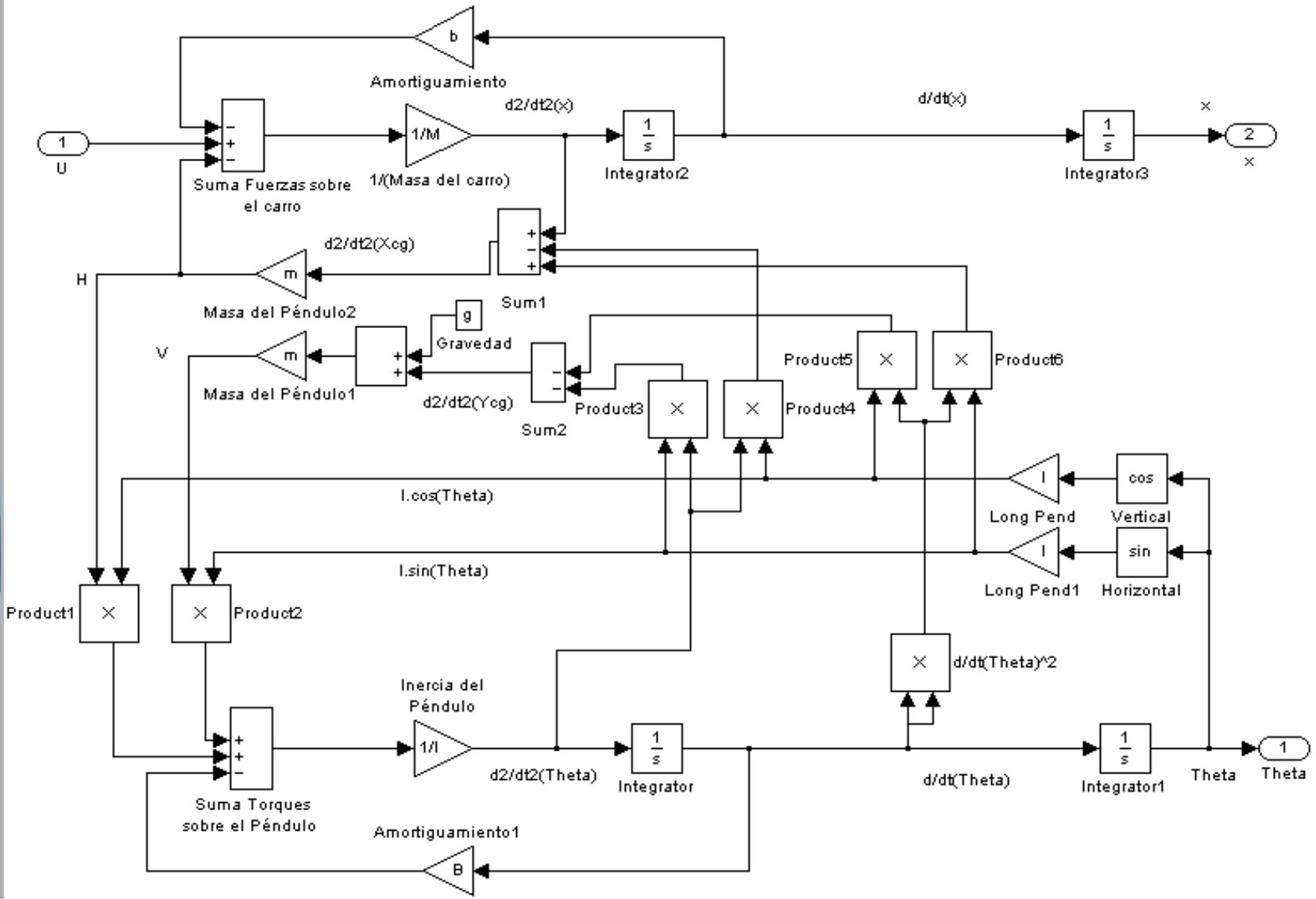
Modelado Dinámico del Sistema



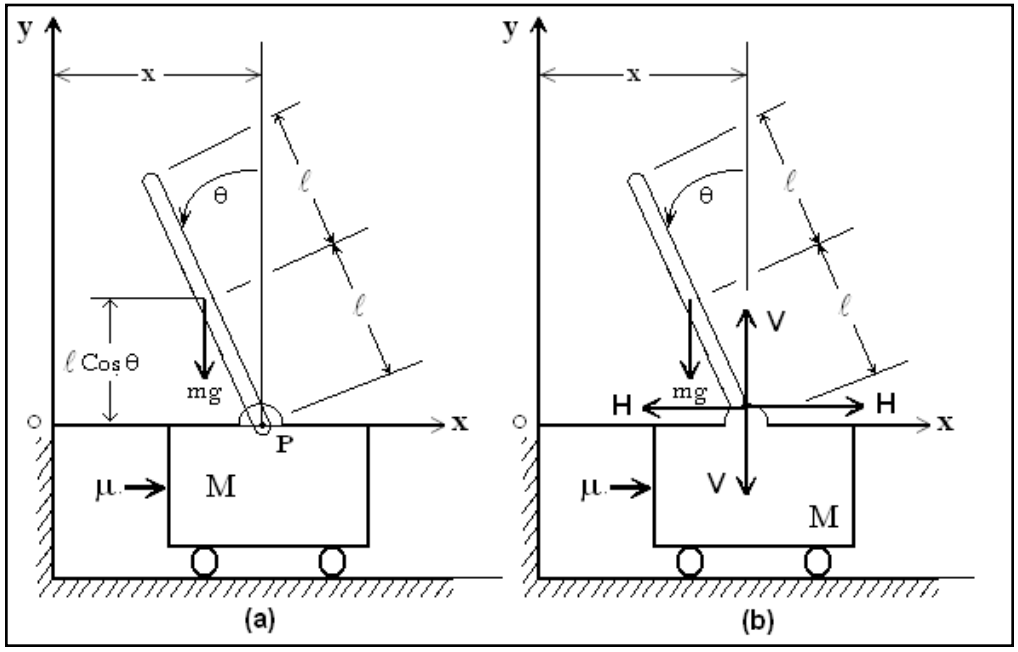
$$\begin{bmatrix} M+m & -m\ell \\ I+m\ell^2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -mg\ell \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\mu$$

Modelado Dinámico del Sistema

Modelado en SIMULINK



Modelado Dinámico del Sistema



$$\frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{\frac{m\ell}{q}s}{s^3 + \left[\frac{B(M+m)+b(+m\ell^2}{q}\right]s^2 + \left[\frac{Bb-(M+m)mg\ell}{q}\right]s - \frac{bmg\ell}{q}}$$

Donde: $q = [(M+m)(+m\ell^2) - (m\ell)^2]$.

Modelado Dinámico del Sistema

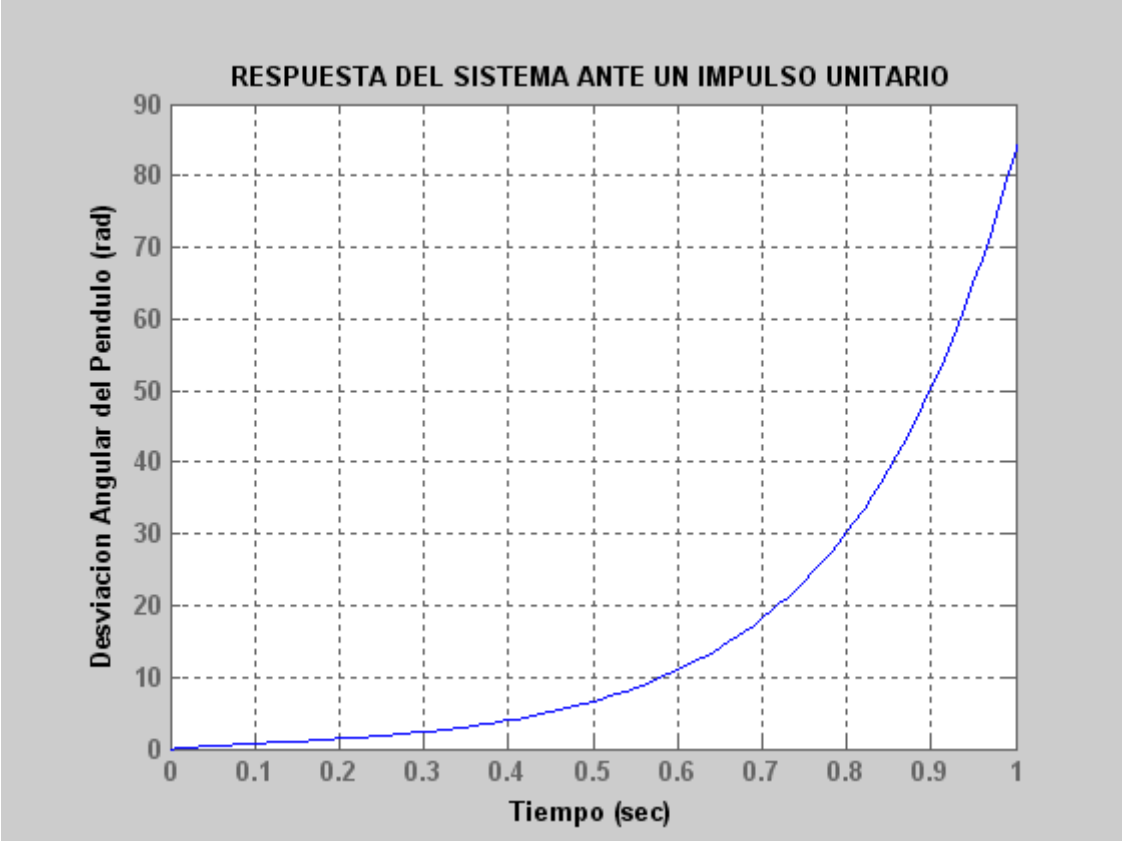
Determinación de los Parámetros Físicos:

$$\omega_n^2 = \frac{3g}{\ell}\left(\frac{M+m}{4M+m}\right)$$

Parámetro	Descripción	Valor
M	Masa del Carro	0.425 Kg.
m	Masa del Péndulo	0.270 Kg.
l	Longitud del Péndulo	0.33 m.
b	Constante de amortiguamiento debido al Carro	0.1 N/m/s.
B	Constante de amortiguamiento debida al Péndulo	0.05 N.m/rad/s.

Modelado Dinámico del Sistema

Sistema a Lazo Abierto:



$$\frac{9.229\ s}{s^3 + 7.402\ s^2 - 61.83\ s - 9.045}$$

Modelado Dinámico del Sistema

Modelado en el Espacio de Estados:

$$\chi_1 = \theta$$
$$\chi_2 = \dot{\theta}$$
$$\chi_3 = X$$
$$\chi_4 = \dot{X}$$

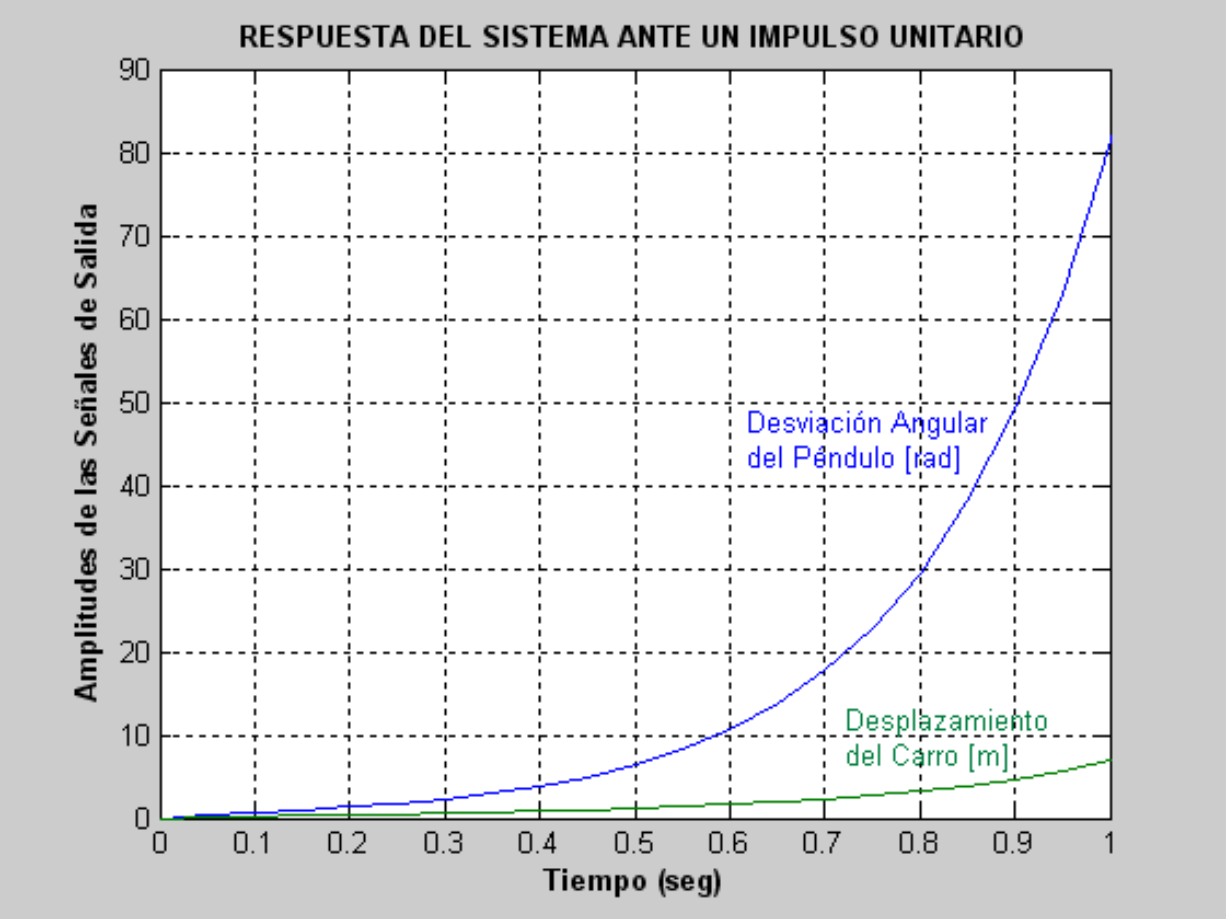
$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\chi}_1 \\ \dot{\chi}_2 \\ \dot{\chi}_3 \\ \dot{\chi}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(M+m)mg\ell}{q} & -\frac{B(M+m)}{q} & 0 & -\frac{m\ell b}{q} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{(m\ell)^2 g}{q} & -\frac{Bm\ell}{q} & 0 & -\frac{b(I+m\ell^2)}{q} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{m\ell}{q} \\ 0 \\ \frac{I+m\ell^2}{q} \end{bmatrix} \mu$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \mu$$

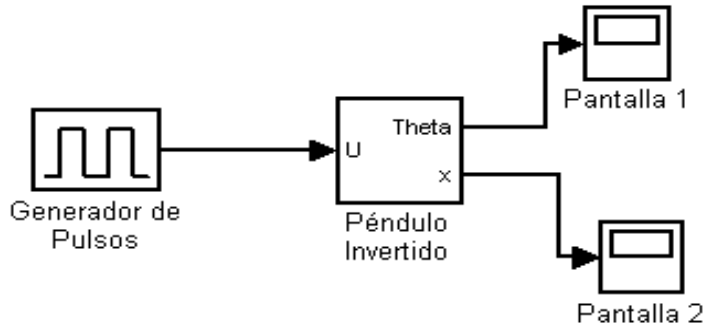
Modelado Dinámico del Sistema

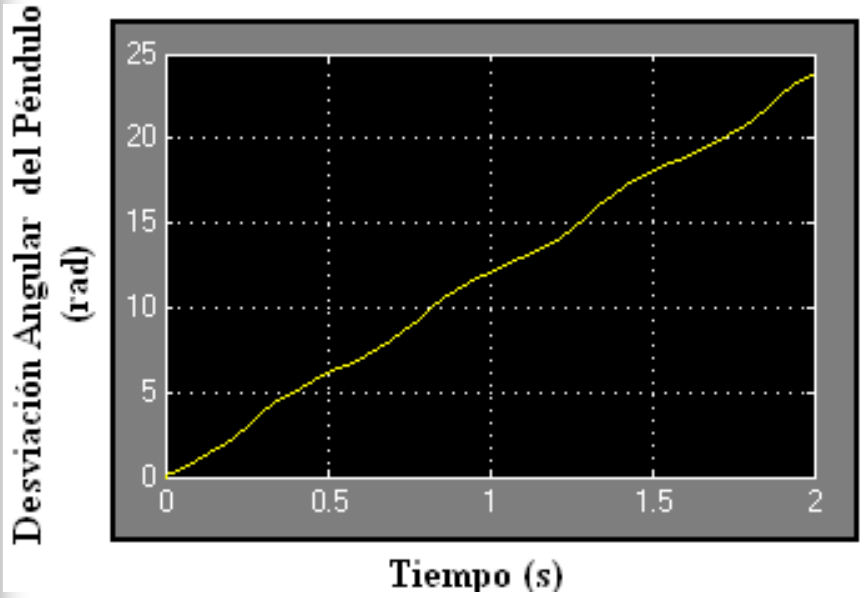
Sistema a Lazo Abierto:

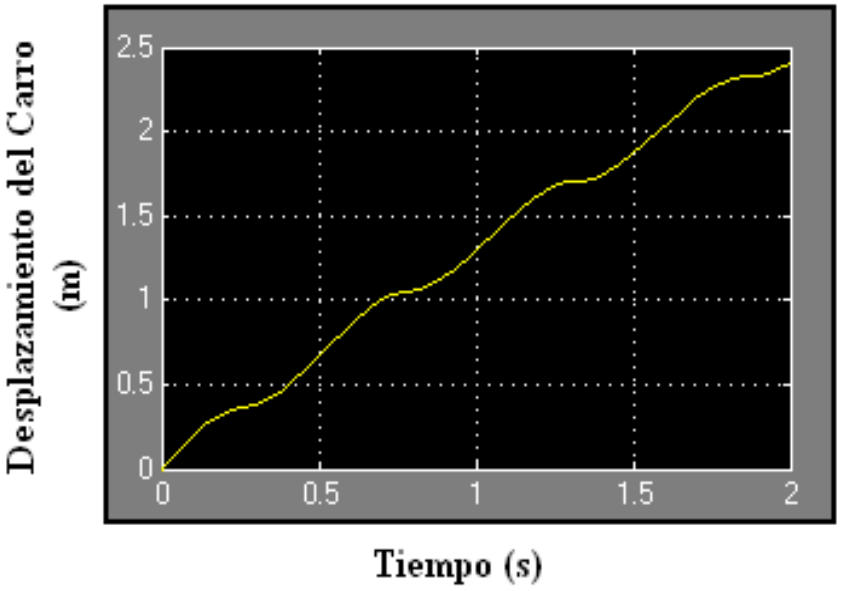


Modelado Dinámico del Sistema

Modelado en SIMULINK

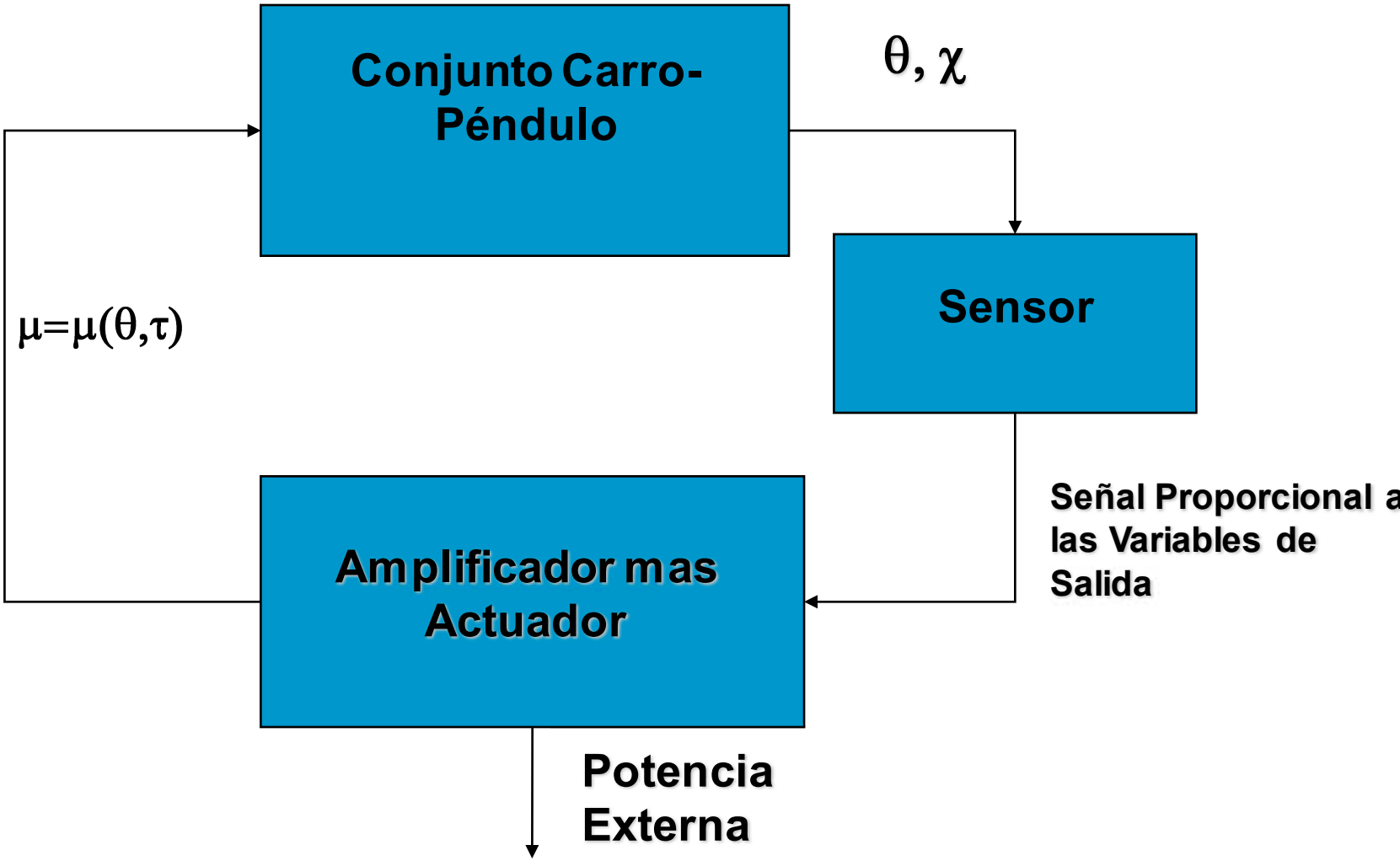






Modelado Dinámico del Sistema

Estrategia de Control



Contenidos

- 1. Introducción
- 2. Modelado y Respuesta a L.A. del Sistema.
- 3. Método del LGR para el análisis del Sistema de Control.
- 4. Método de Ubicación de Polos para el análisis del Sistema de Control.
- 5. LQR en el Diseño Final del Sistema de Control.
- 6. Conclusiones y Recomendaciones.

Controlador Método del LGR

Diagrama de Bloques:

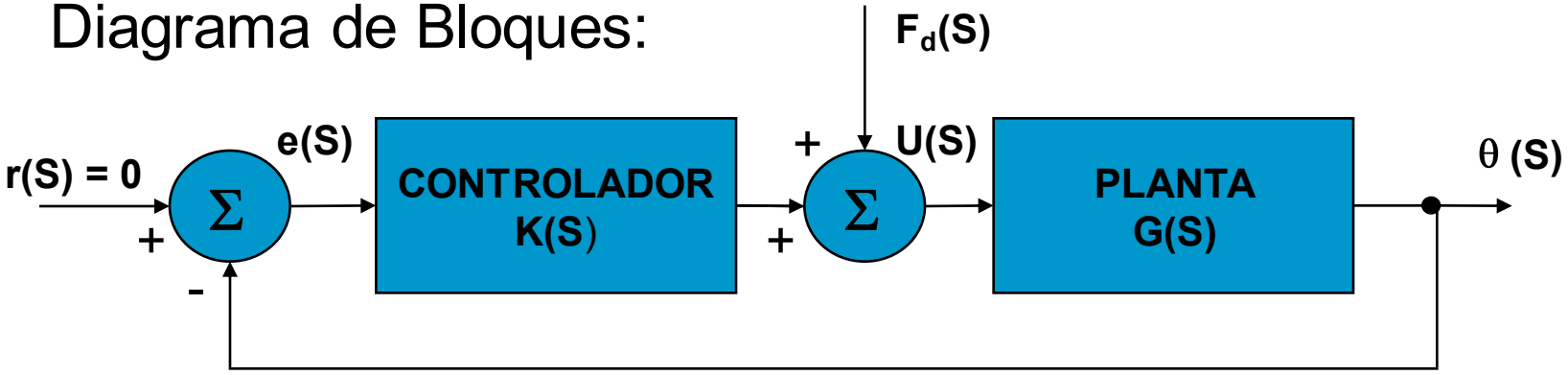
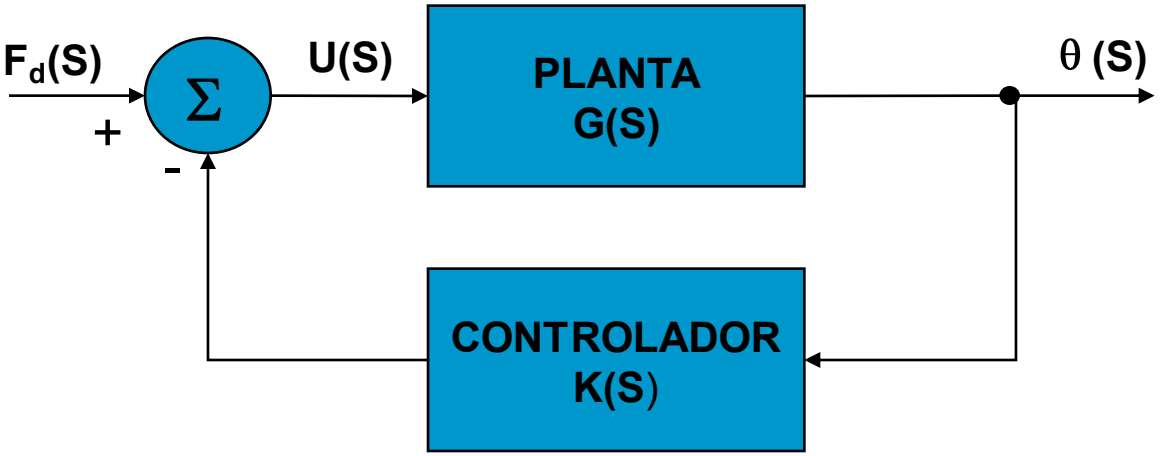


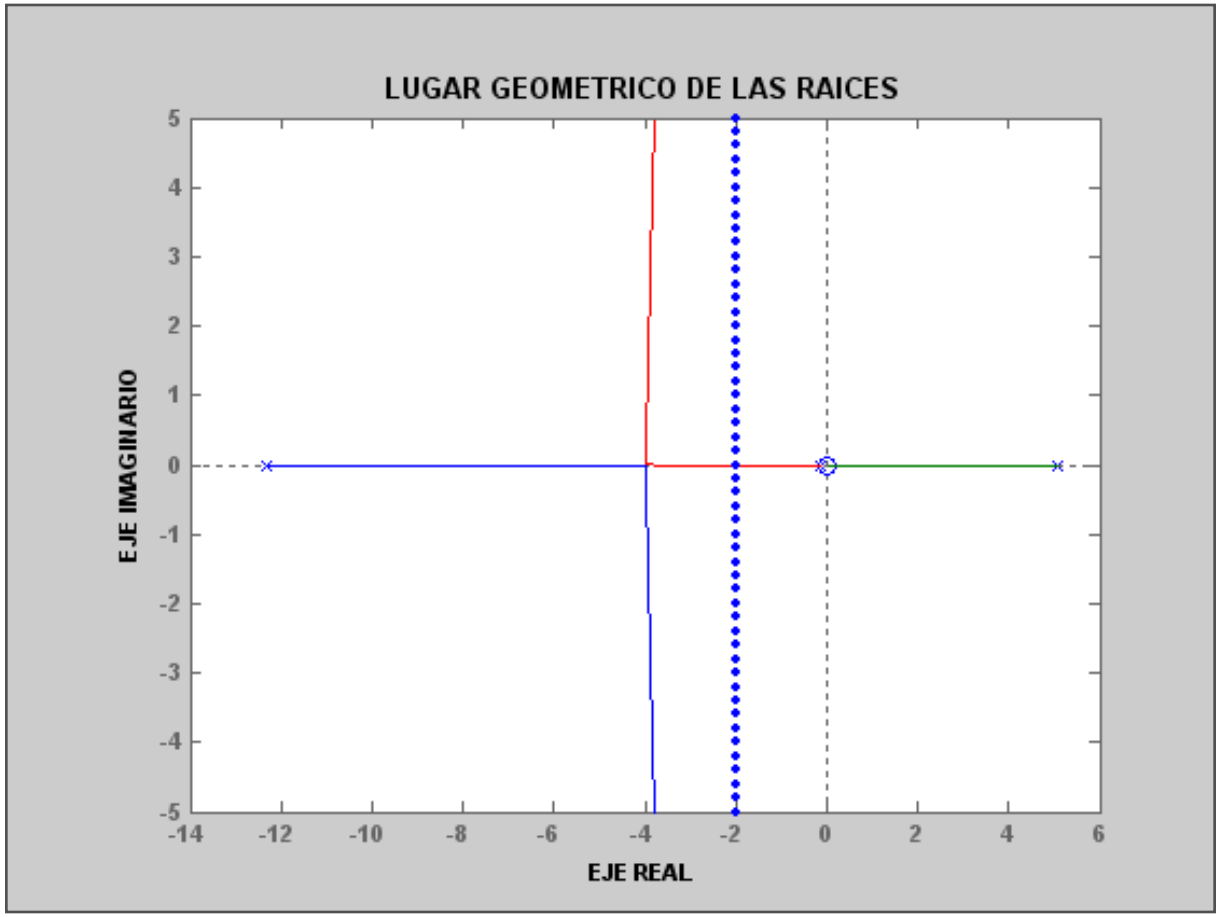
Diagrama de Bloques Simplificado:



$$\theta(s) = \frac{G(s)}{1 + K(s)G(s)} F_d(s)$$

Controlador Método del LGR

Trazo del LGR:



Cero =
0
Polos =
-12.2973
5.0828
-0.1418

Controlador Método del LGR

Especificaciones de Desempeño:

Tiempo de asentamiento:

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{\sigma} \quad (\text{criterio del } 2\%) \Rightarrow$$

$$\sigma = \frac{4}{t_s} = \frac{4}{2} = 2$$

Sobrepaso Máximo:

$$0.05 = e^{-\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}\,\pi} \Rightarrow \qquad \zeta \approx 0.7$$

Polos Dominantes:

$$-2 \pm 2i$$

Controlador Método del LGR

Ley de Control PID:

Compensador PD:

Sistema no compensado hasta el polo dominante compensado deseado es -173.12º.

$$G_{PD}(s) = (s + 100)$$

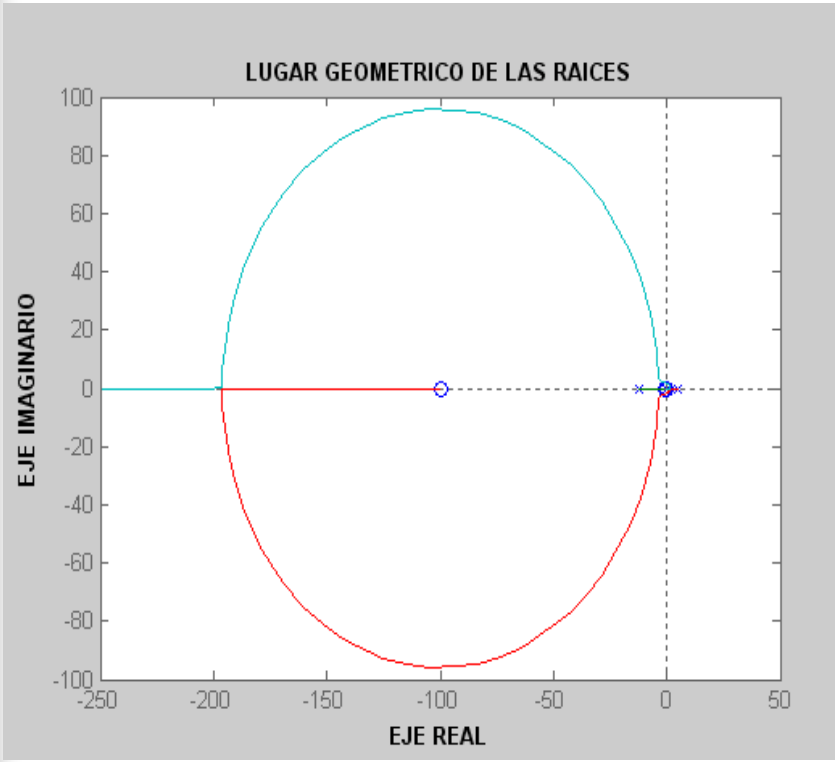
Compensador PI:

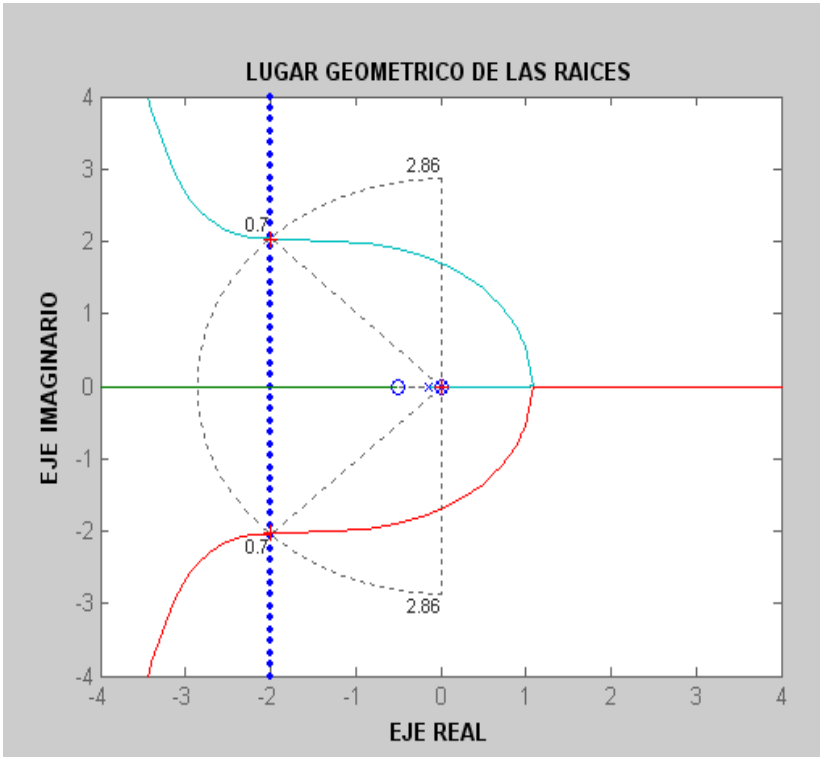
Cualquier compensador integral ideal cero funcionará, mientras el cero se coloque cerca del origen

$$G_{PI}(s) = \frac{s + 0.5}{s}$$

Controlador Método del LGR

Ley de Control PID:

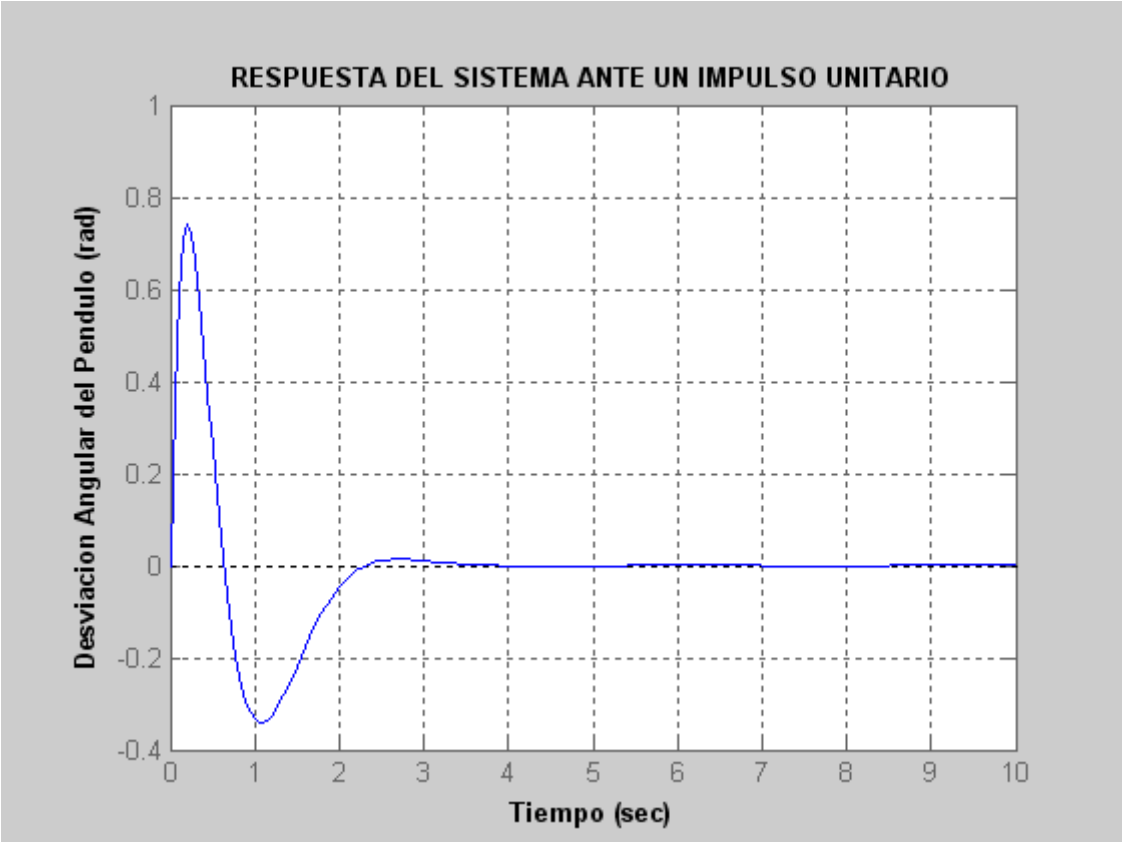




k = 0.0951
ceros = 0 , 0
polos = 0 , -4.2118, -2.0024 +/- 2.0244i

Controlador Método del LGR

Ley de Control PID:



Controlador Método del LGR

Ley de Control PID:

RESPUESTA A LAZO CERRADO	SOBRESALTO	TIEMPO DE ESTABLECIMIENTO	ERROR EN ESTADO ESTABLE
Kp	Incrementa	No altera	Disminuye
Ki	Incrementa	Incrementa	Incrementa
Kd	Disminuye	Disminuye	No altera

Controlador Método del LGR

Ley de Control PID:

$$\frac{9.046\ s^2}{s^4 + 188.3\ s^3 + 843.1\ s^2 + 443.4\ s}$$

Kp= 100; Kd= 20; Ki=50

Controlador Método del LGR

Análisis de la Variable no Controlada

Diagrama de Bloques:

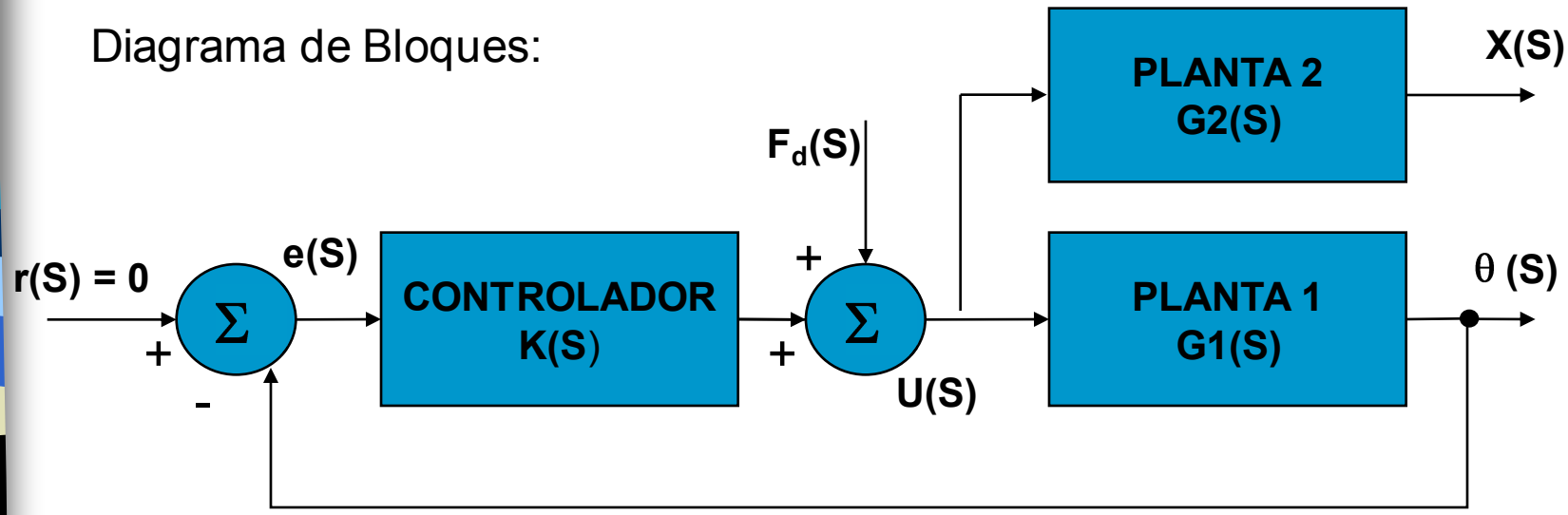
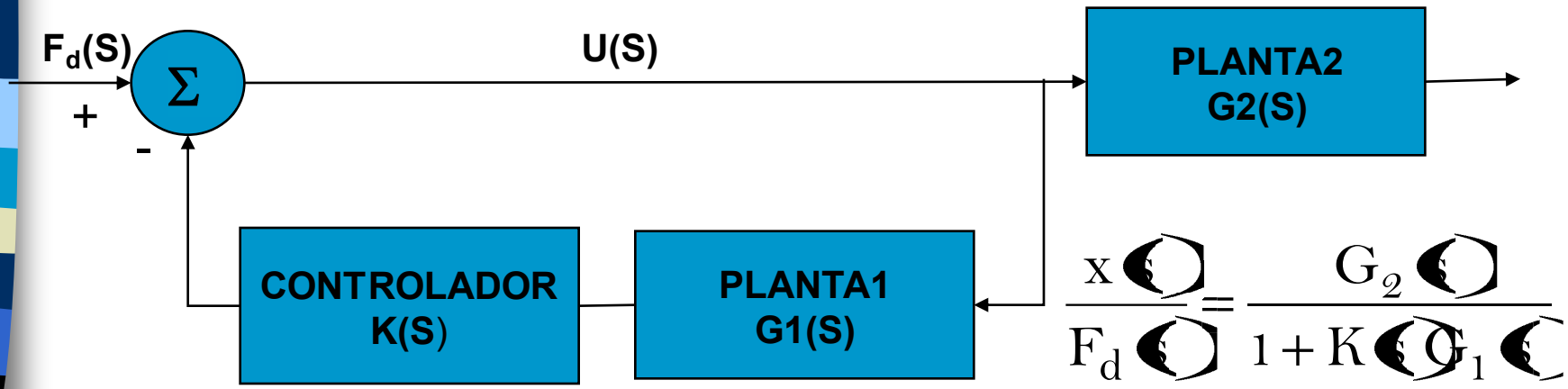
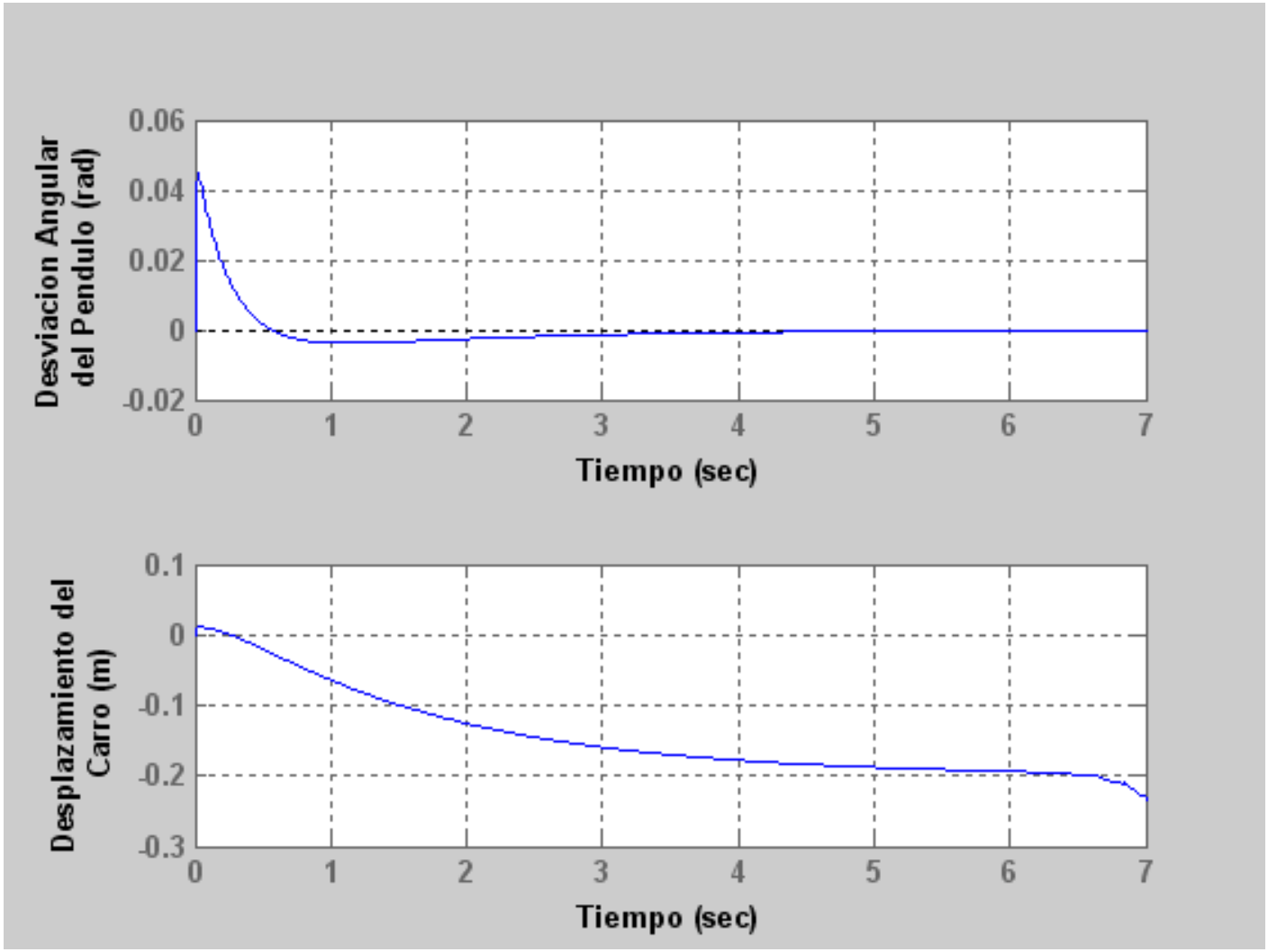


Diagrama de Bloques Simplificado:



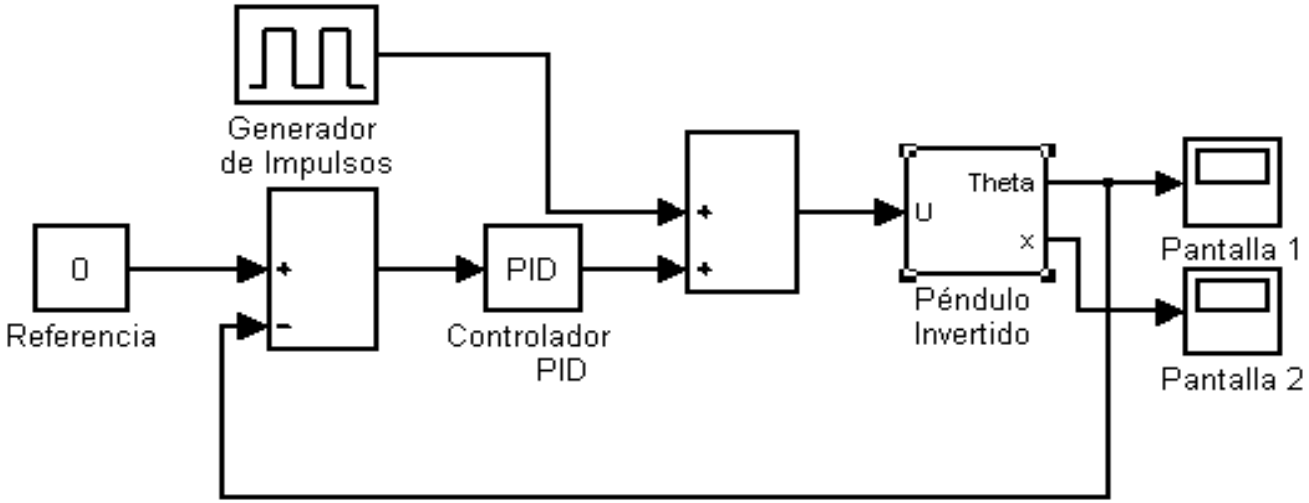
Controlador Método del LGR

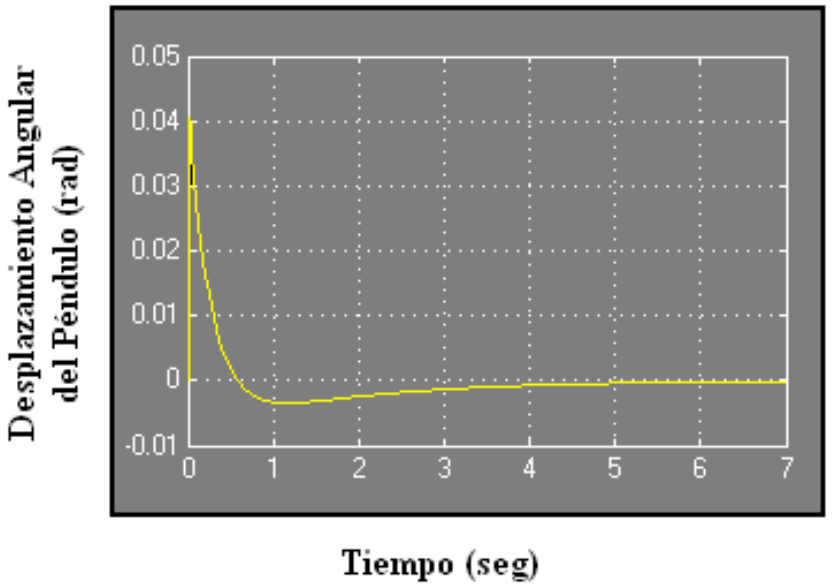
Análisis de la Variable no Controlada

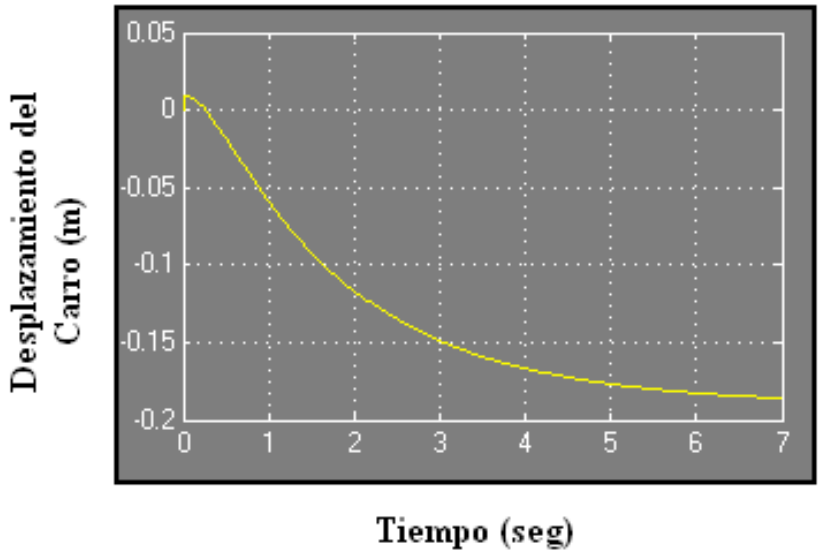


Controlador Método del LGR

Análisis de la Variable no Controlada en SIMULINK







Contenidos

- 1. Introducción
- 2. Modelado y Respuesta a L.A. del Sistema.
- 3. Método del LGR para el análisis del Sistema de Control.
- 4. Método de Ubicación de Polos para el análisis del Sistema de Control.
- 5. LQR en el Diseño Final del Sistema de Control.
- 6. Conclusiones y Recomendaciones.

Controlador por Ubicación de Polos

Controlabilidad y Observabilidad:

$$\dot{x} = Ax + B\mu$$
$$y = Cx + D\mu$$

Controlabilidad: Un sistema es controlable en el tiempo to, si se puede llevar de cualquier estado inicial X(to) a cualquier otro estado, mediante un vector de control sin restricciones, en un intervalo de tiempo finito.

Condición de Controlabilidad:

Matriz de Controlabilidad no singular

$$\begin{bmatrix} B & \vdots & AB & \vdots & \cdots & \vdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

Controlador por Ubicación de Polos

Controlabilidad y Observabilidad:

$$\dot{x} = Ax + B\mu$$
$$y = Cx + D\mu$$

Observabilidad: Un sistema es observable en el tiempo to si, con el sistema en el estado X(to), es posible determinar este estado a partir de la observación de la salida durante un intervalo de tiempo finito.

Condición de Observabilidad:

Matriz de Observabilidad no singular

$$\left[C^* \;\vdots\; A^*C^* \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; (A^*)^{n-1}C^* \right]$$

Controlador por Ubicación de Polos

Diseño por Ubicación de Polos:

$$\dot{x} = Ax + B\mu$$

$$y = Cx + D\mu$$

$$\mu = -Kx \qquad \dot{x} = (A - BK)x \qquad x(t) = e^{(A-BK)t}x(0)$$

Los valores característicos de la matriz A-BK se denominan **Polos Reguladores**

Fórmula de Ackermann:

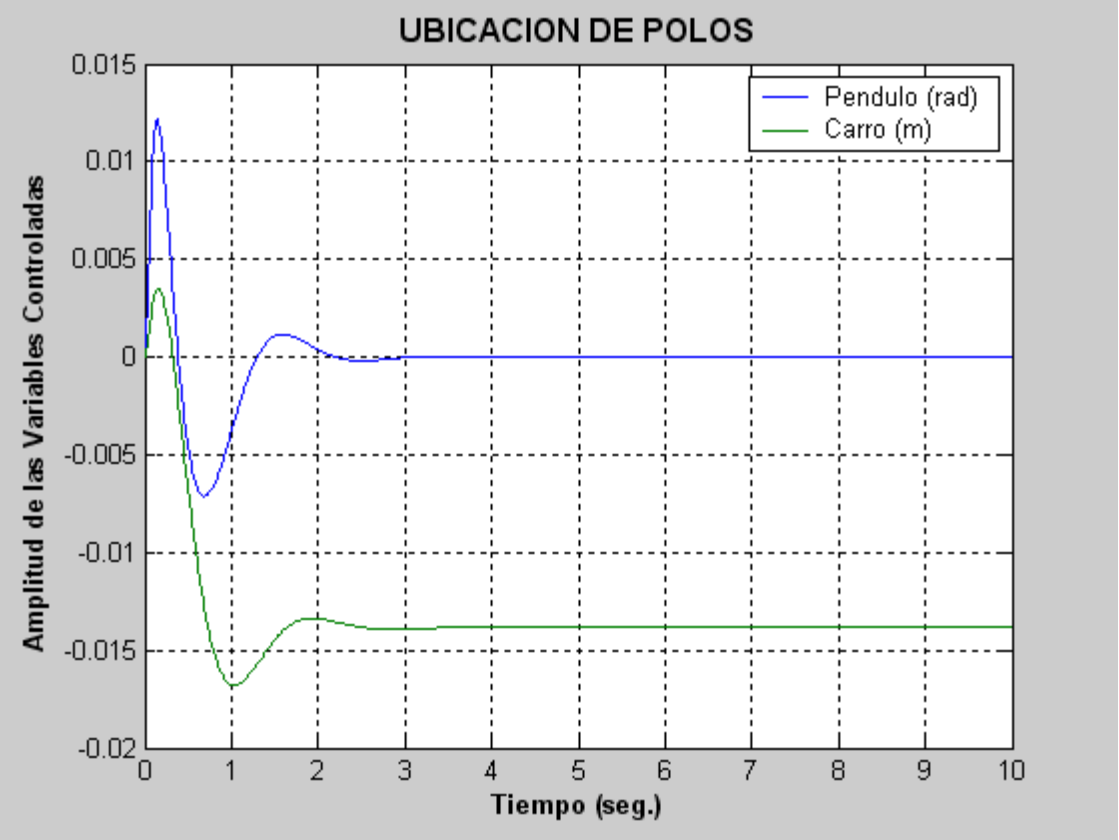
$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & \vdots & AB & \vdots & \dots & \vdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}^{-1} \phi(A)$$

Donde

$$\phi(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n I$$

Controlador por Ubicación de Polos

Matriz de Realimentación de Estados:



Polos:
-2+2*sqrt(3)*i,
-2-2*sqrt(3)*i,
-20,
-20

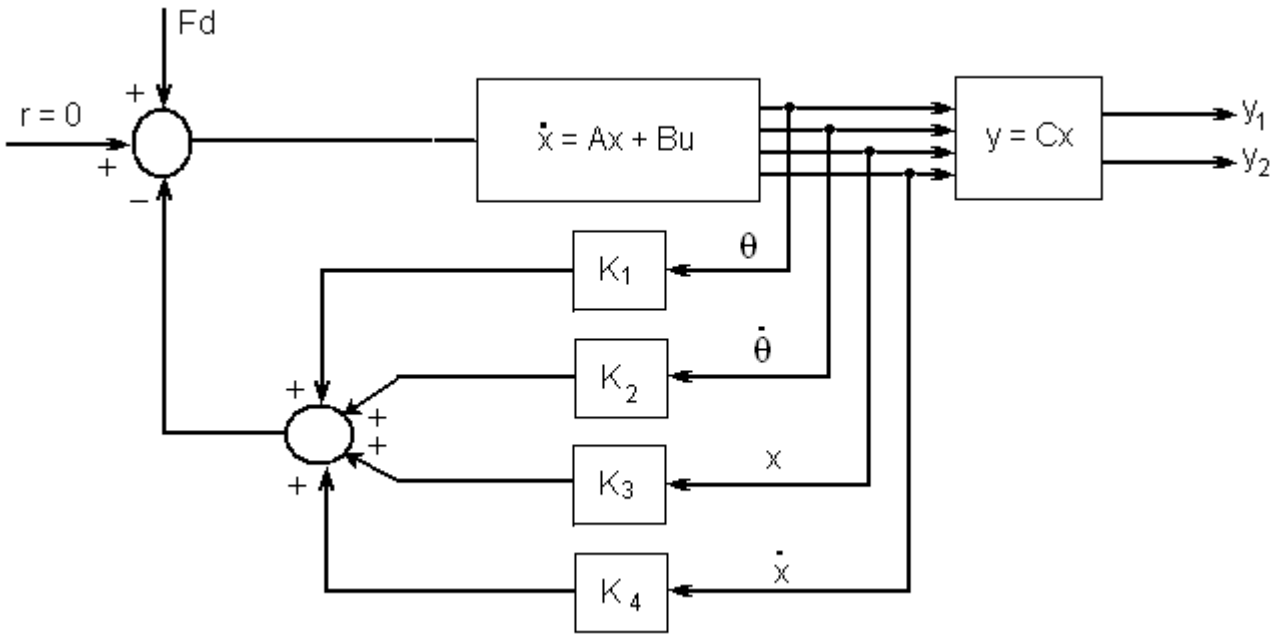
K =
[135.31 12.64 -72.20 -38.85]

$$\mu = -Kx \Rightarrow$$

$$\mu = -135.3 \cdot \theta - 12.6 \cdot \dot{\theta} + 72.2 \cdot x + 38.8 \cdot \dot{x}$$

Controlador por Ubicación de Polos

Matriz de Realimentación de Estados:



Controlador por Ubicación de Polos

Observadores de Estados de Orden Completo:

$$\dot{x} = Ax + B\mu$$
$$y = Cx$$

El estado x se aproximará mediante el estado $\hat{x}$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B\mu + L(y - C\hat{x})$$
$$\dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax - A\hat{x} - L(Cx - C\hat{x})$$
$$\dot{x} - \dot{\hat{x}} = (A - LC)(x - \hat{x})$$

Definiendo el error x - $\hat{x}$

$$\dot{e} = (A - LC)e(0)$$

Controlador por Ubicación de Polos

Observadores de Estados de Orden Mínimo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \cdots \\ \dot{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{aa} & \vdots & A_{ab} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{ba} & \vdots & A_{bb} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_a \\ \cdots \\ x_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_a \\ \cdots \\ B_b \end{bmatrix} \mu \qquad y = \begin{bmatrix} \vdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_a \\ \cdots \\ x_b \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_a = A_{aa}x_a + A_{ab}x_b + B_a\mu$$ Ecuación de salida

$$\dot{x}_b = A_{ba}x_a + A_{bb}x_b + B_b\mu$$ Ecuación de Estado

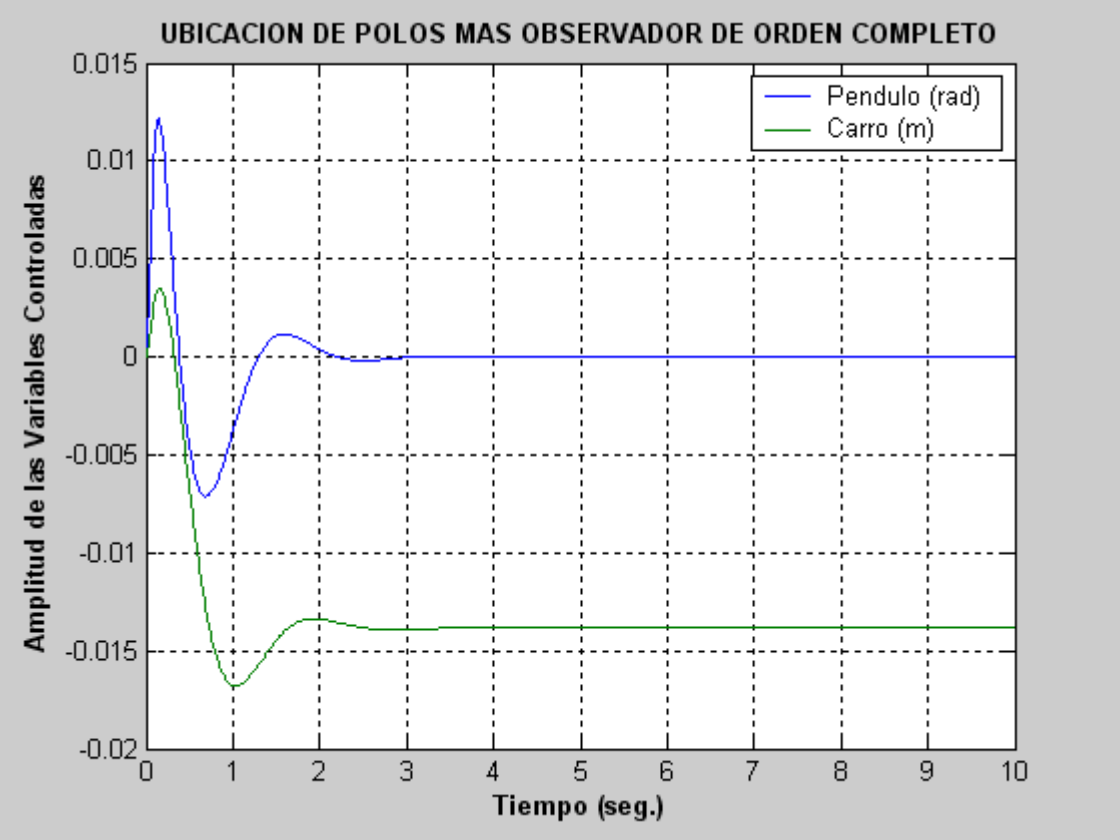
Ecuación del Observador de orden mínimo:

$$\dot{\tilde{\eta}} = (A_{bb} - LA_{ab})\tilde{\eta} + (A_{bb} - LA_{ab})L + A_{ba} - LA_{aa})y + (B_b - LB_a)\mu$$

$$\tilde{\eta} = \tilde{x}_b - Ly$$

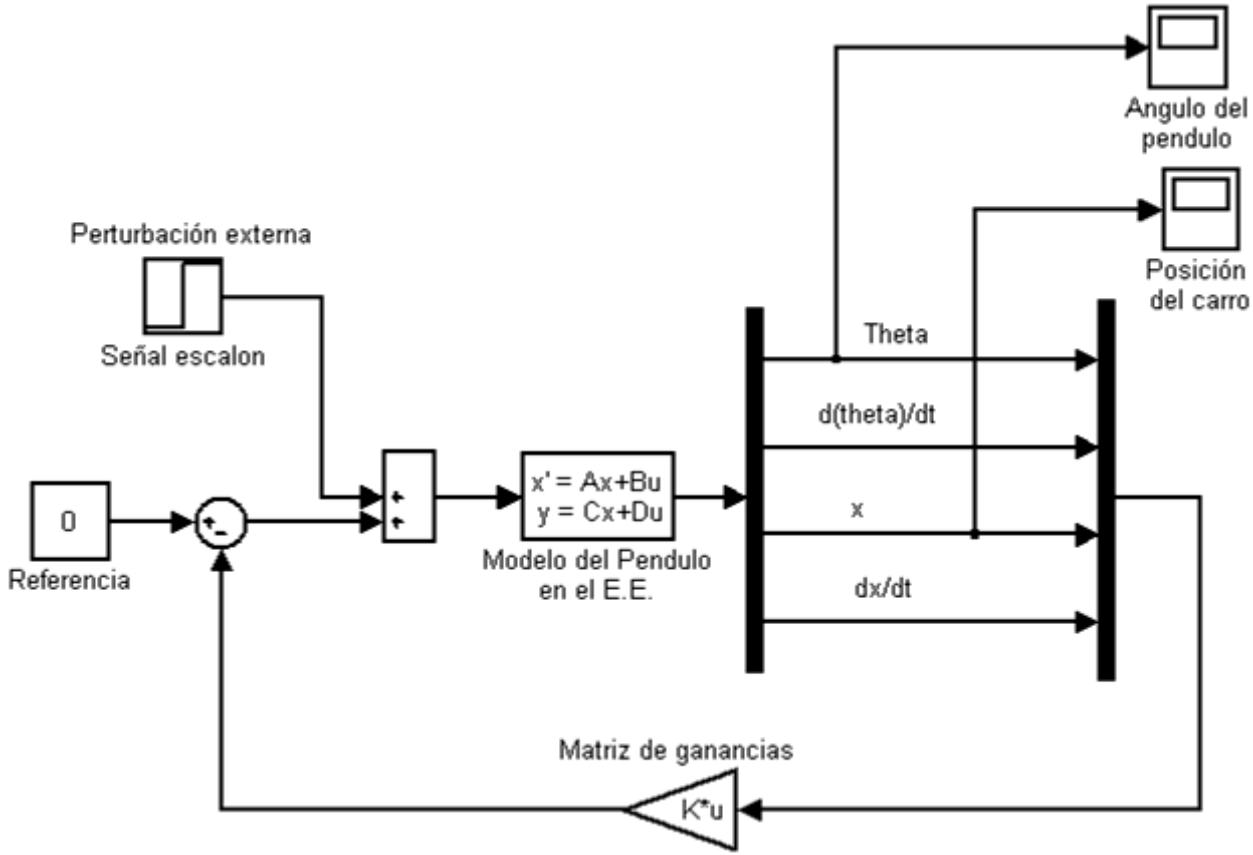
Controlador por Ubicación de Polos

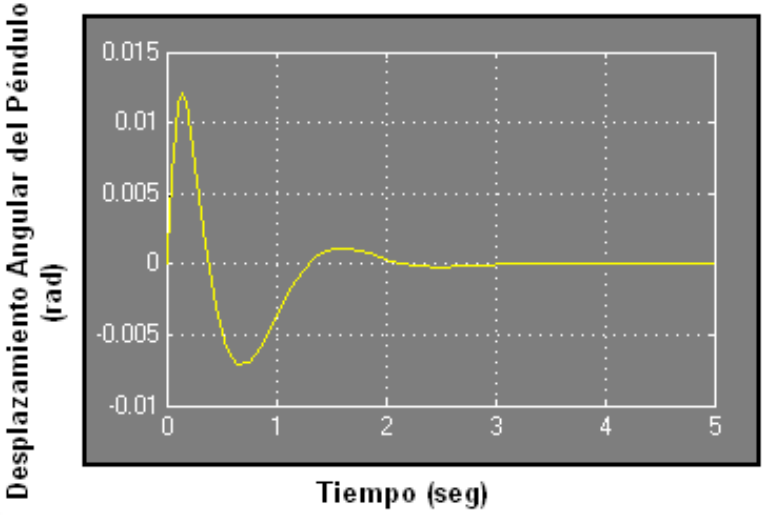
Observadores de Estados de Orden Mínimo:

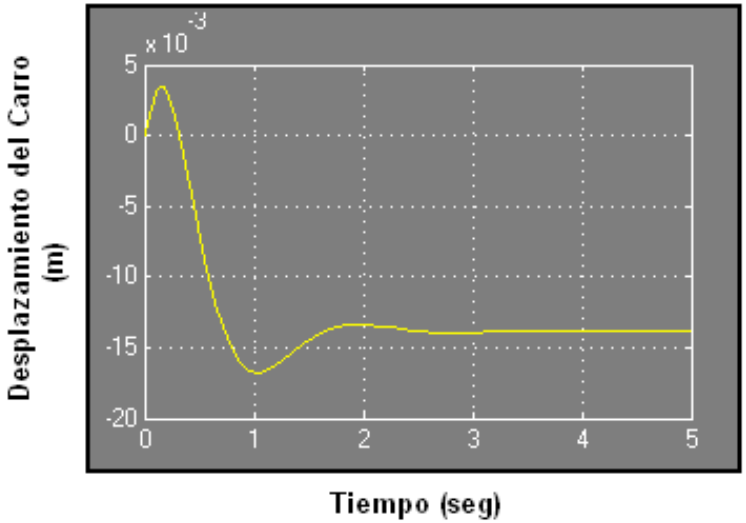


L =

15.0940	-1.2452
78.9617	-16.6433
-1.7567	23.9477
-18.3909	145.4249


Angulo del pendulo
Perturbación externa
Posición del carro
Señal escalon
Theta
d(theta)/dt
x' = Ax+Bu
y = Cx+Du
0
x
Referencia
Modelo del Pendulo en el E.E.
dx/dt
Matriz de ganancias
K*u


Desplazamiento Angular del Péndulo (rad)
0.015
0.01
0.005
0
-0.005
-0.01
0
1
2
3
4
5
Tiempo (seg)


Desplazamiento del Carro (m)
x 10^-3
5
0
-5
-10
-15
-20
0
1
2
3
4
5
Tiempo (seg)

Contenidos

- 1. Introducción
- 2. Modelado y Respuesta a L.A. del Sistema.
- 3. Método del LGR para el análisis del Sistema de Control.
- 4. Método de Ubicación de Polos para el análisis del Sistema de Control.
- 5. LQR en el Diseño Final del Sistema de Control.
- 6. Conclusiones y Recomendaciones.

Implementación Final LQR

Selección del Actuador:

Características de los distintos tipos de actuadores			
	Neumático	**Hidráulico**	**Eléctrico**
Energia	Aire a presion (5-10 bar)	Aceite mineral (50-100 bar)	Corriente eléctrica
Opciones	Cilindros Motor de paletas Motor de pistón	Cilindros Motor de paletas Motor de pistones axiales	Corriente continua Corriente alterna
Ventajas	Baratos Rápidos Sencillos Robustos	Rápidos Alta relación potencia-peso Autolubricantes Alta capacidad de carga Estabilidad frente a cargas estáticas	Precisos Fiables Fácil control Sencilla instalación Silenciosos
Desventajas	Dificultad de control continuo Instalación especial (compresor, filtros) Ruidoso	Difícil mantenimiento Instalación especial(filtros, eliminación aire) Frecuentes fugas Caros	Potencia limitada

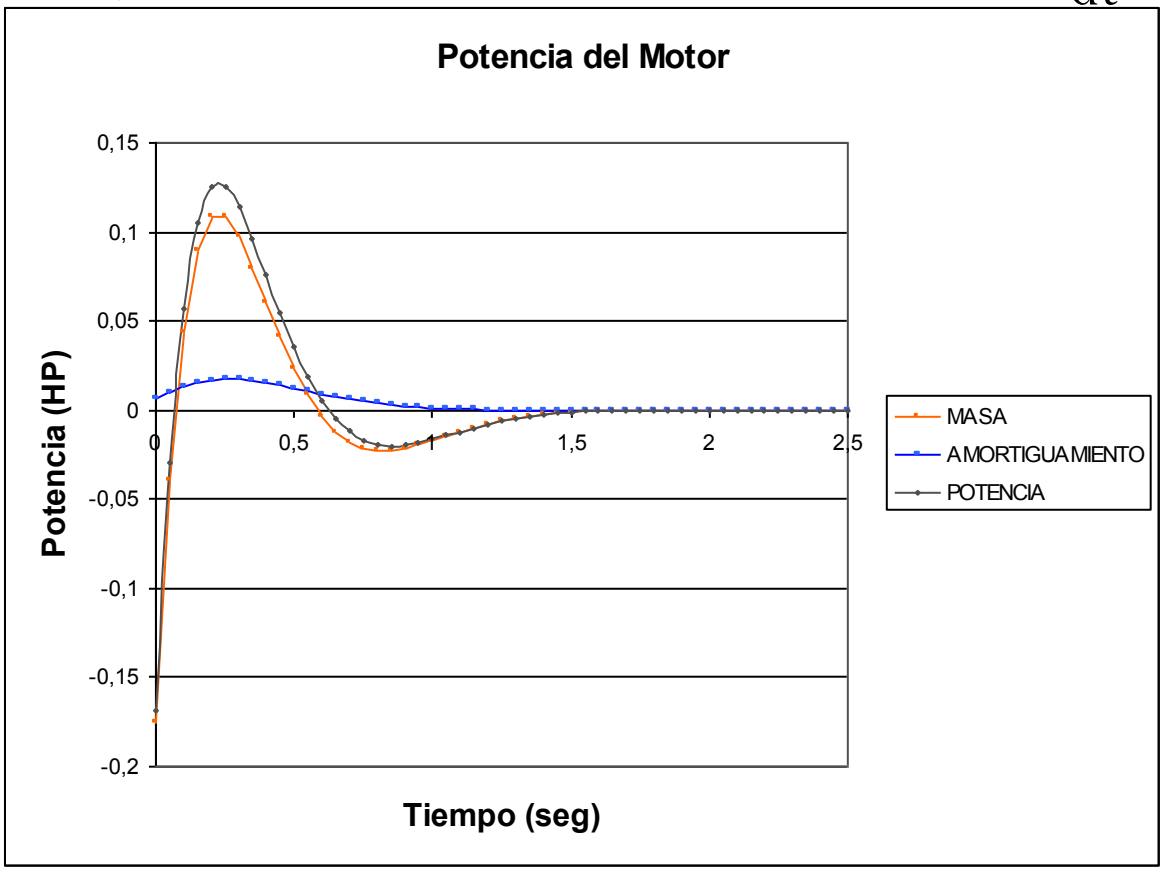
Implementación Final LQR

Selección del Actuador:

$$x(t) = \frac{X_o}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot e^{-\zeta\omega t} Sen\left(\omega\sqrt{1-\zeta^2} \cdot t + \varphi\right) \qquad F(t) = b\frac{dx}{dt} = (M+m)\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\varphi = \cos^{-1}(\zeta)$$

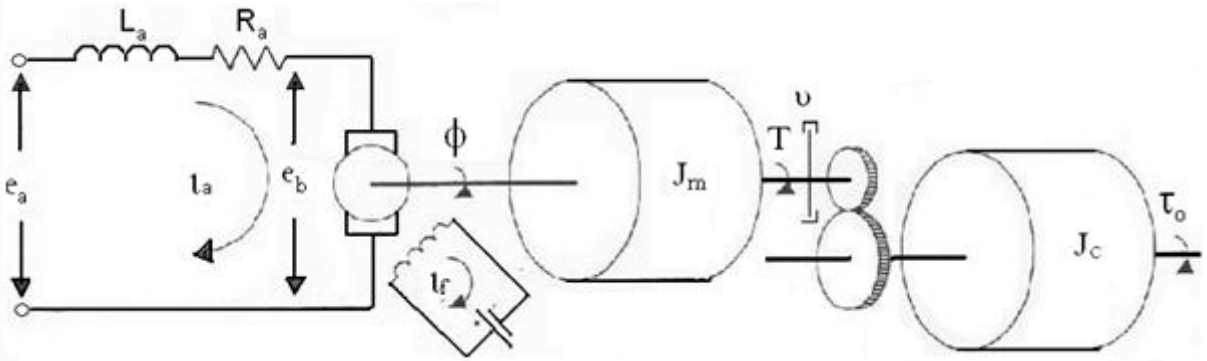
$$Pot(t) = F(t) \times v(t)$$



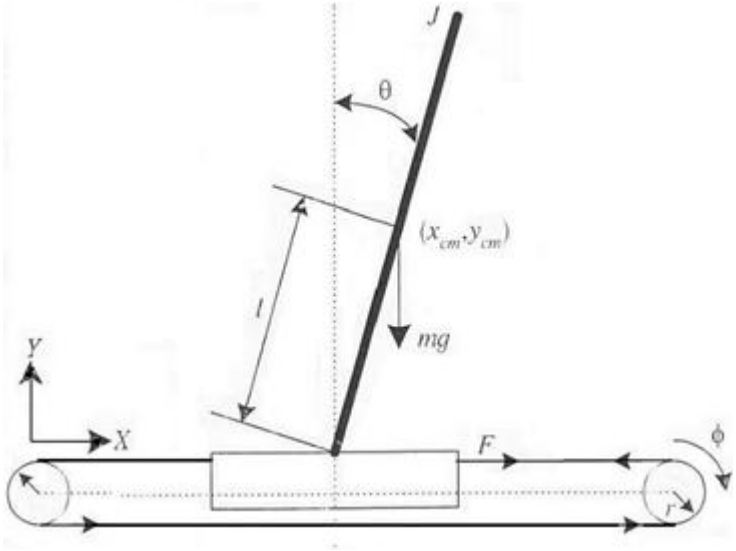
Potencia Promedio	0.00836 HP [6.23 watts]
Potencia Máxima	0,12573 HP [93.8 watts]

Implementación Final LQR

Modelo dinámico del Motor DC:



$$\left(J_m + \frac{J_c}{n^2}\right)\frac{d^2\phi}{dt^2} = \left(\frac{e_a - K_b\frac{d\phi}{dt}}{R_a}\right)K_1$$



$$F = -\frac{J_m}{2.r}\ddot{\phi} + \frac{K_1}{2.r}\left(\frac{e_a - K_2\dot{\phi}}{R_a}\right) = -\frac{J_0}{2.r^2}\ddot{x} - \frac{K_1K_2}{2.R_a r^2}\dot{x} + \frac{K_1}{2.R_a r}e_a$$

Implementación Final LQR

Conexión dinámica Péndulo - Motor DC:

$$\ddot{x} + \frac{\left(I + m\ell^2\right)\left(b + \frac{K_1 K_2}{2R_a r^2}\right)}{q}\dot{x} - \frac{(m\ell)^2 g}{q}\theta + \frac{Bm\ell}{q}\dot{\theta} = \frac{K_1\left(I + m\ell^2\right)}{2R_a r q}e$$

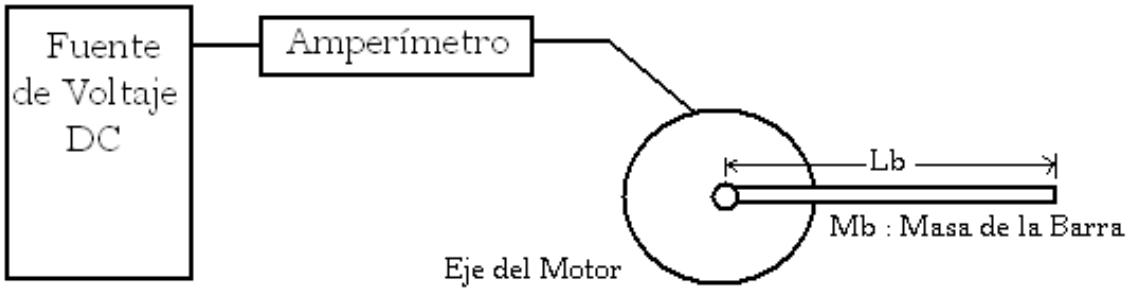
$$\ddot{\theta} + \frac{B\left(M + m + \frac{J_o}{2r^2}\right)}{q}\dot{\theta} - \frac{m\ell\left(M + m + \frac{J_o}{2r^2}\right)}{q}g\theta + \frac{\left(b + \frac{K_1 K_2}{2R_a r^2}\right)m\ell}{q}\dot{x} = \frac{m\ell K_1}{2R_a r q}e$$

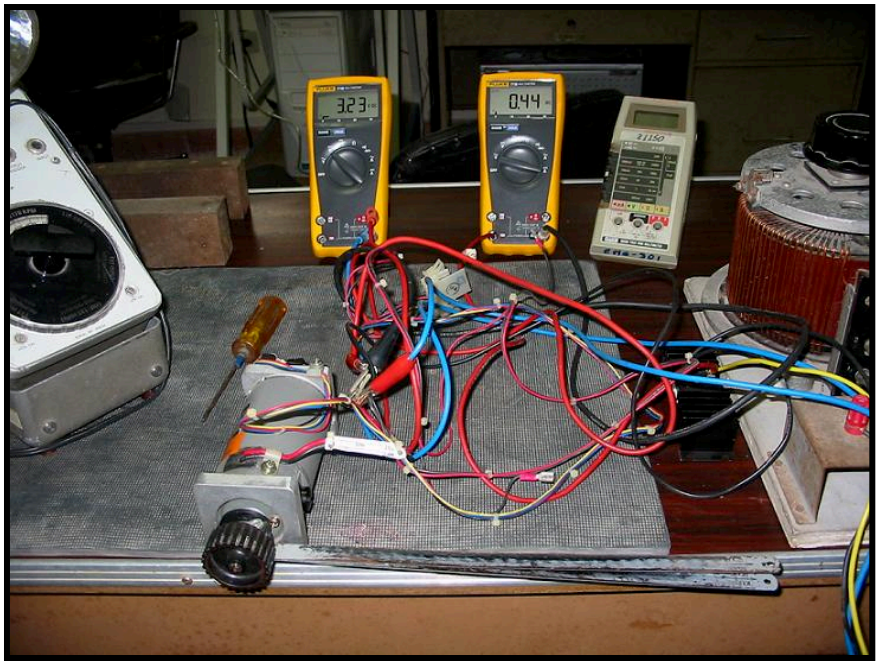
Donde:

$$q = \left[\left(M + m + \frac{J_o}{2r^2}\right)\left(I + m\ell^2\right) - (m\ell)^2\right]$$

Implementación Final LQR

Determinación de los Parámetros del Motor:





$$K_1 = \frac{T}{i_a} = \frac{1/2 M_b g L_b}{i_a}$$

Implementación Final LQR

Determinación de los Parámetros del Motor:

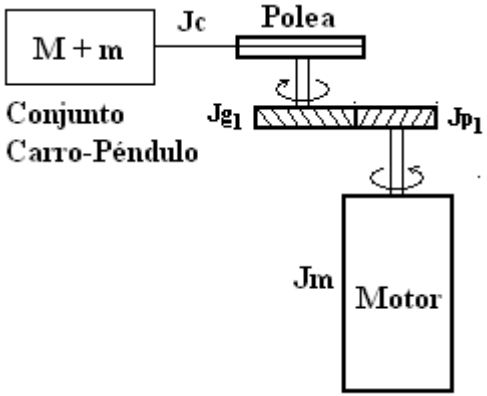
e [voltios]	i_a [A]	T [N.m]	$K_1=T/i_a$ [N.m/A]	$\overline{K}_1$
1,812	0,22	0,05978	0,27173	O,27173
3,230	0,44	0,11856	0,27173	

e [voltios]	i_a [A]	ω [rpm]	$K_2=e/\omega$ [V/rad/s]	$\overline{K}_2$
6,3	0,18	370	0,16262	O,15584
12,0	0,19	700	0,16367	
15,4	0,44	1080	0,14057	

e [voltios]	i_a [A]	ω [rpm]	$R_a=(e-K_2)/i_a$ [Ω]	$\overline{R}_a$
8,04	0,40	400	3,78	3,69
8,15	0,45	400	3,60	

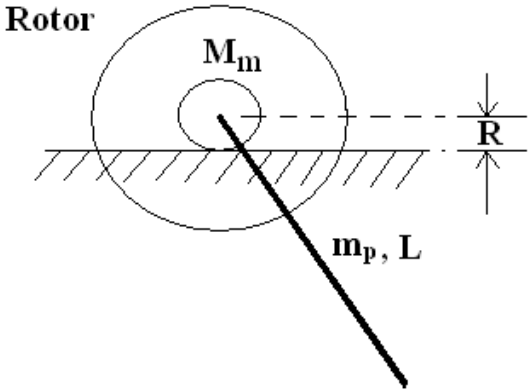
Implementación Final LQR

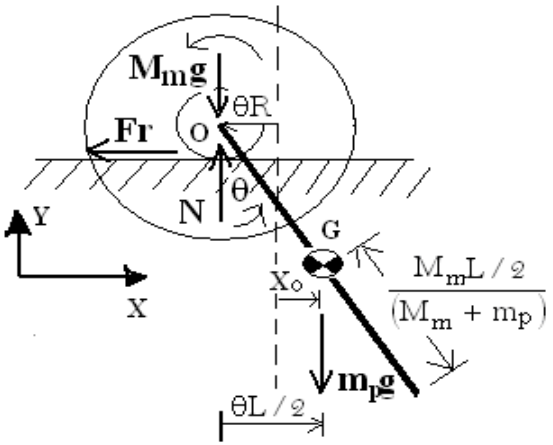
Caja Reductora:



$$n_{opt} = \sqrt{\frac{J_m}{J_c}}$$

Inercia del Motor DC:



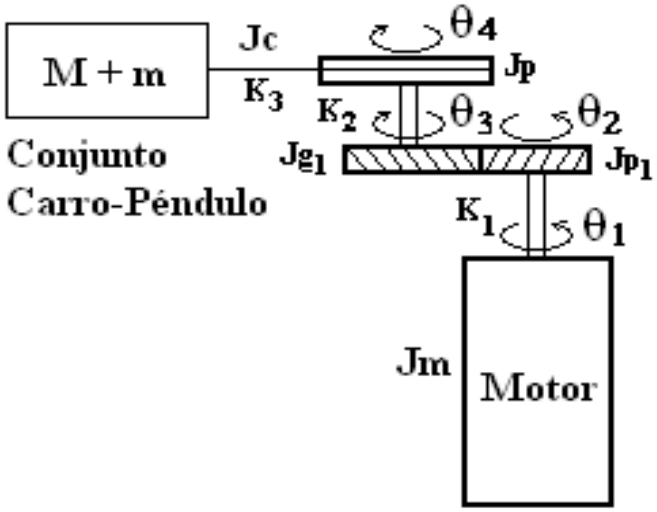


$$J_m = \frac{\tau_o^2 m_p g L/2}{4\pi^2} - m_p L^2/3 - R^2\left(M_m + m_p\right) + m_p RL$$

Implementación Final LQR

Razón de Reducción Óptima:

Inercia de Carga:



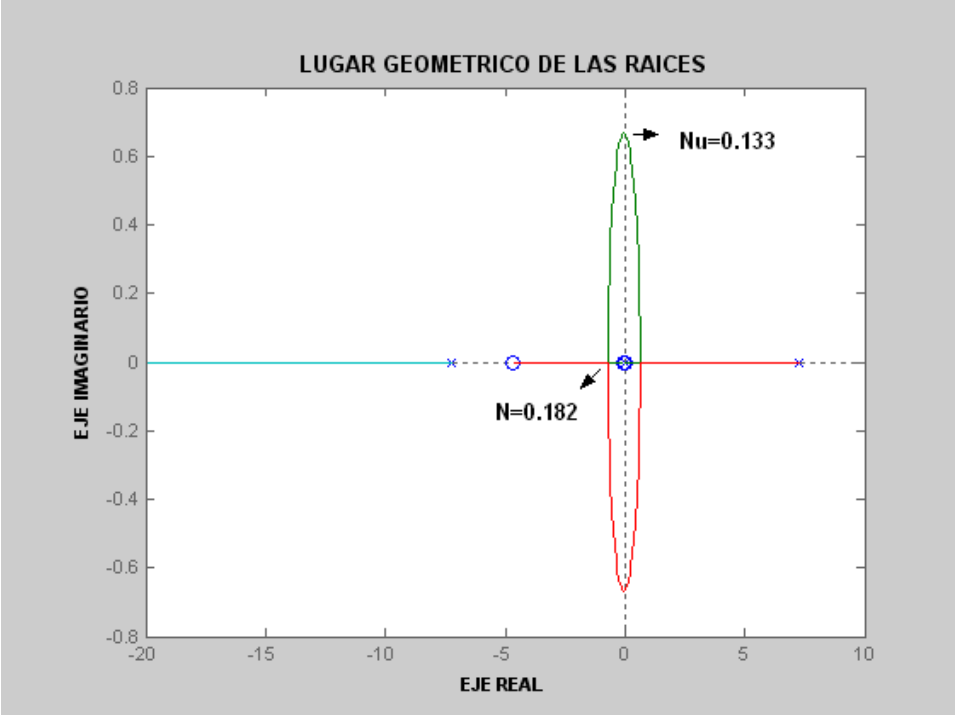
$$J_c = (M + m) \cdot r_p^2$$

$$n_{opt} = \sqrt{\frac{J_m}{J_c}} = 1.34$$

Implementación Final LQR

Razón de Reducción Óptima:

$$\frac{\theta(s)}{E(s)} = \frac{\frac{m\ell N K_1}{2R_a r q} S^2}{S^4 + \left[\frac{\left(+ m\ell^2 \left(\frac{NK_1K_2}{2R_a r^2}\right)\right.}{q}\right] \cdot S^3 - \left[mg\ell \frac{\left(M + m + \frac{J_o}{2r^2}\right)}{q}\right] \cdot S^2 - \frac{mg\ell N K_1 K_2}{2R_a r^2 q} \cdot S}$$



Implementación Final LQR

Parámetros Físicos del Sistema:

PARÁMETRO	DESCRIPCIÓN	VALOR
M	Masa del Carro	0,435 Kg.
m	Masa del Péndulo	0,270 Kg.
ℓ	Longitud media del Péndulo	0,165 m.
b	Coeficiente de Fricción Viscosa del Carro	0,1 N.s/m
B	Coeficiente de Fricción Viscosa del Péndulo	0,05 N.m/rad/s
K_1	Constante del Par Motriz	0,27173 N.m/A
K_2	Constante de la Fuerza Contra electromotriz	0,15584 V/rad/s
R_a	Resistencia de Armadura del Motor	3,69 Ω
K_θ	Ganancia del Potenciómetro del Péndulo	1,637 V/rad
K_x	Ganancia del Potenciómetro del Carro	4,244 V/m
d	Diámetro de la Polea	0,075 m
n	Reducción de la caja Reductora	1.5, 3, 7 , 10

Implementación Final LQR

Regulador Cuadrático Lineal :

control óptimo implica una equidad entre el desempeño y el costo de control y busca minimizar el valor del índice de desempeño J.

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} (x'Qx + \mu'R\mu)\,dt$$

El problema de minimizar J con respecto a la entrada de control u(t), es conocido como el problema **Regulador Cuadrático Lineal (LQR)**

Teorema del Regulador Óptimo

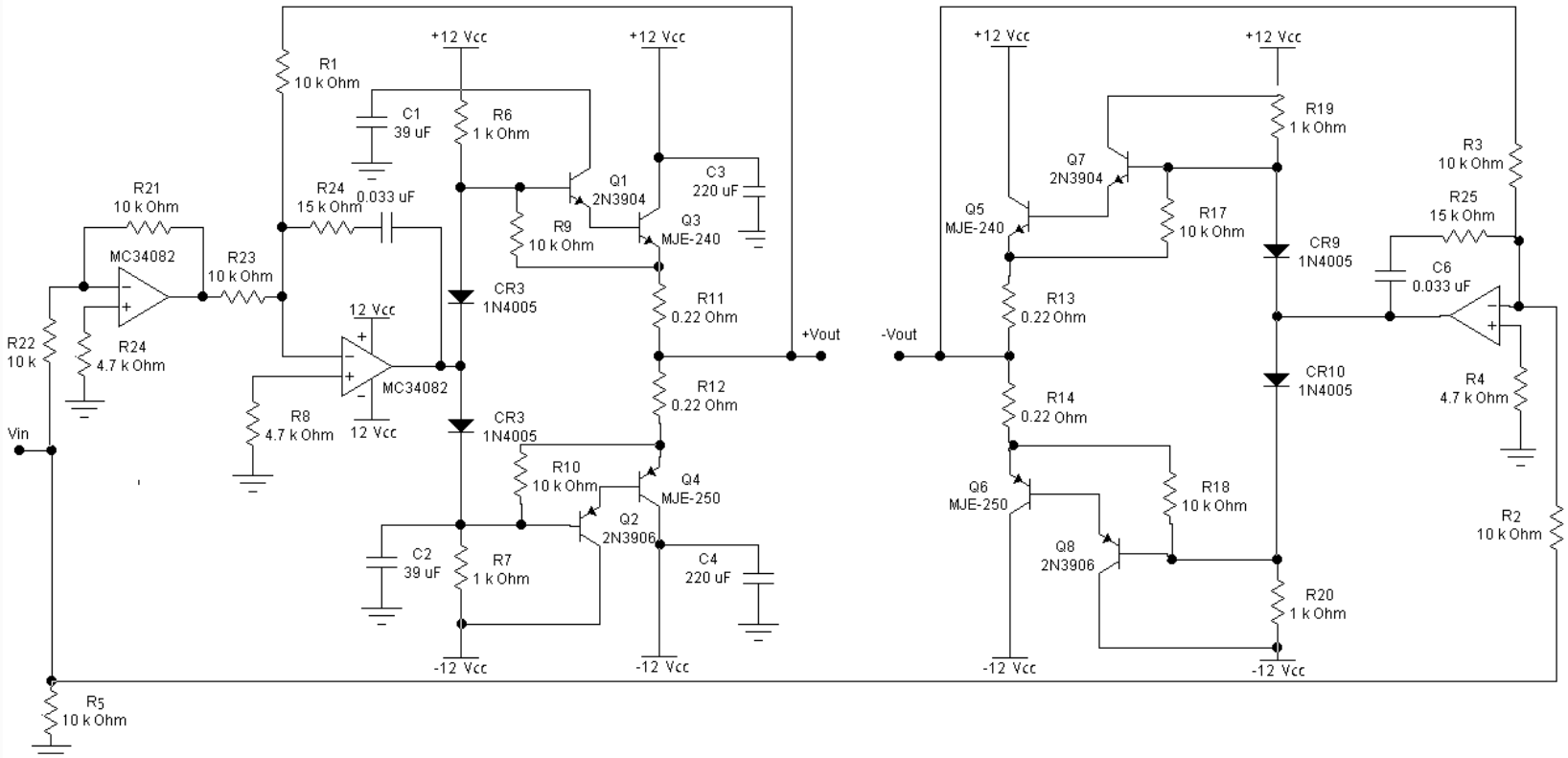
$$\mu_{opt} = -Kx \qquad K = R^{-1}B'P$$

Ecuación de Riccati $$PA + A'P + Q - PBR^{-1}B'P = 0$$

Implementación Final LQR

Regulador Cuadrático Lineal :

Driver del Motor DC



Implementación Final LQR

Regulador Cuadrático Lineal :

Matriz de Ganancias de Realimentación de Estados:

K = [87.7593 -31.6228 8.1430 -31.3855];

Matriz de Ganancias del Observador:

L =

7.8260	-0.5693
-0.5693	0.1786

Aplicando la igualdad de la ley de control y del estimador:

$$\mu = -169.41(\theta) + 41.91(x) + 8.14(\eta_1) + 31.39(\eta_2)$$

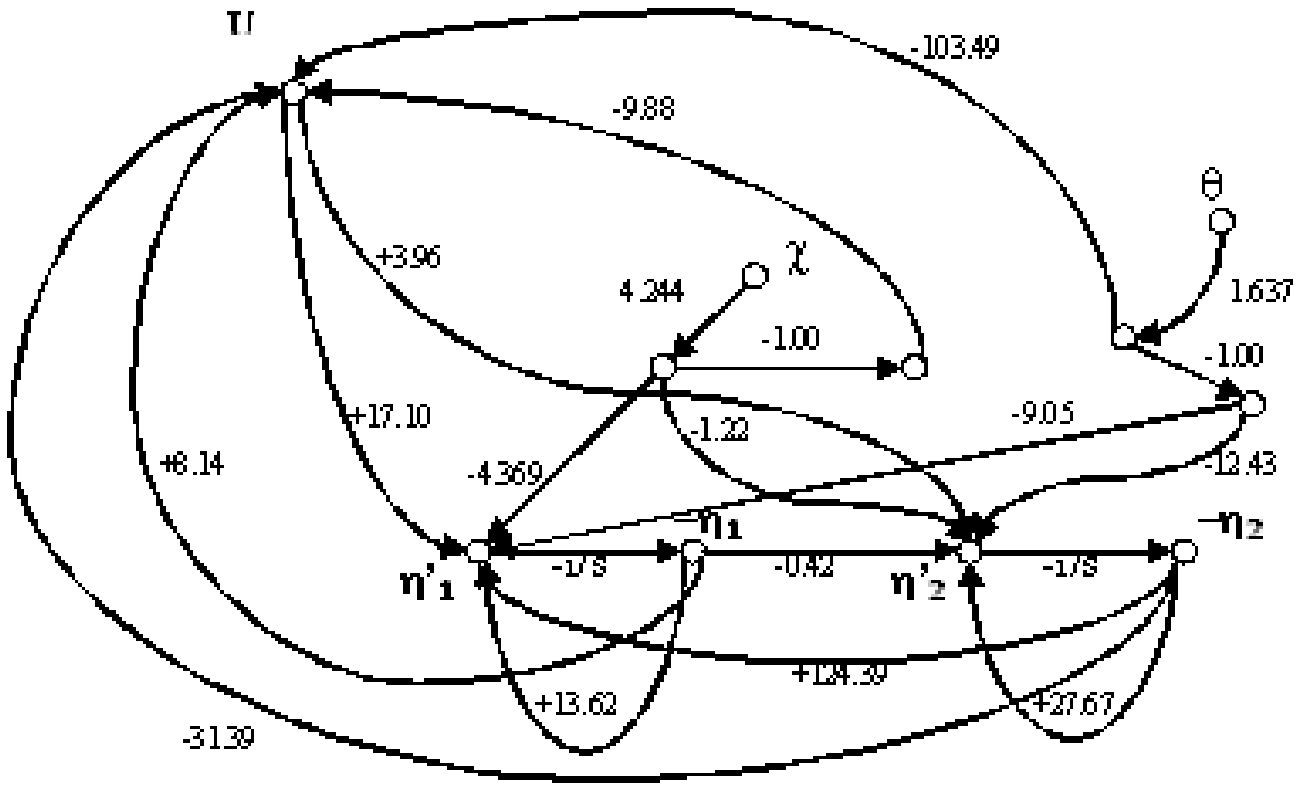
$$\dot{\eta}_1 = -13.62 \cdot \eta_1 - 124.39 \cdot \eta_2 + 14.82 \cdot \theta - 14.46 \cdot x + 17.10 \cdot \mu$$

$$\dot{\eta}_2 = 0.42 \cdot \eta_1 - 27.67 \cdot \eta_2 + 20.35 \cdot \theta - 5.18 \cdot x + 3.96 \cdot \mu$$

Implementación Final LQR

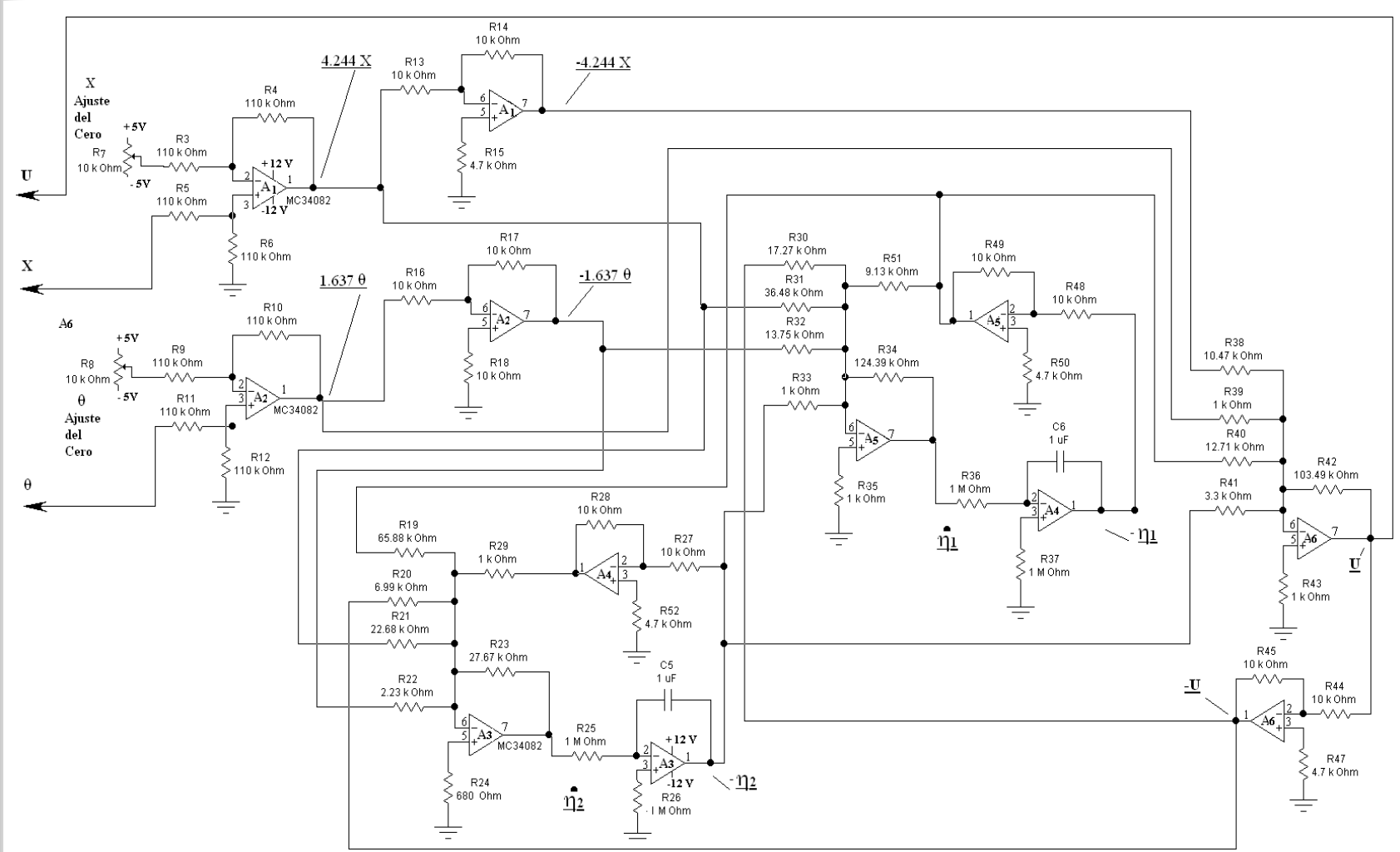
Regulador Cuadrático Lineal :

Diagrama de Flujo de Señales del Compensador:



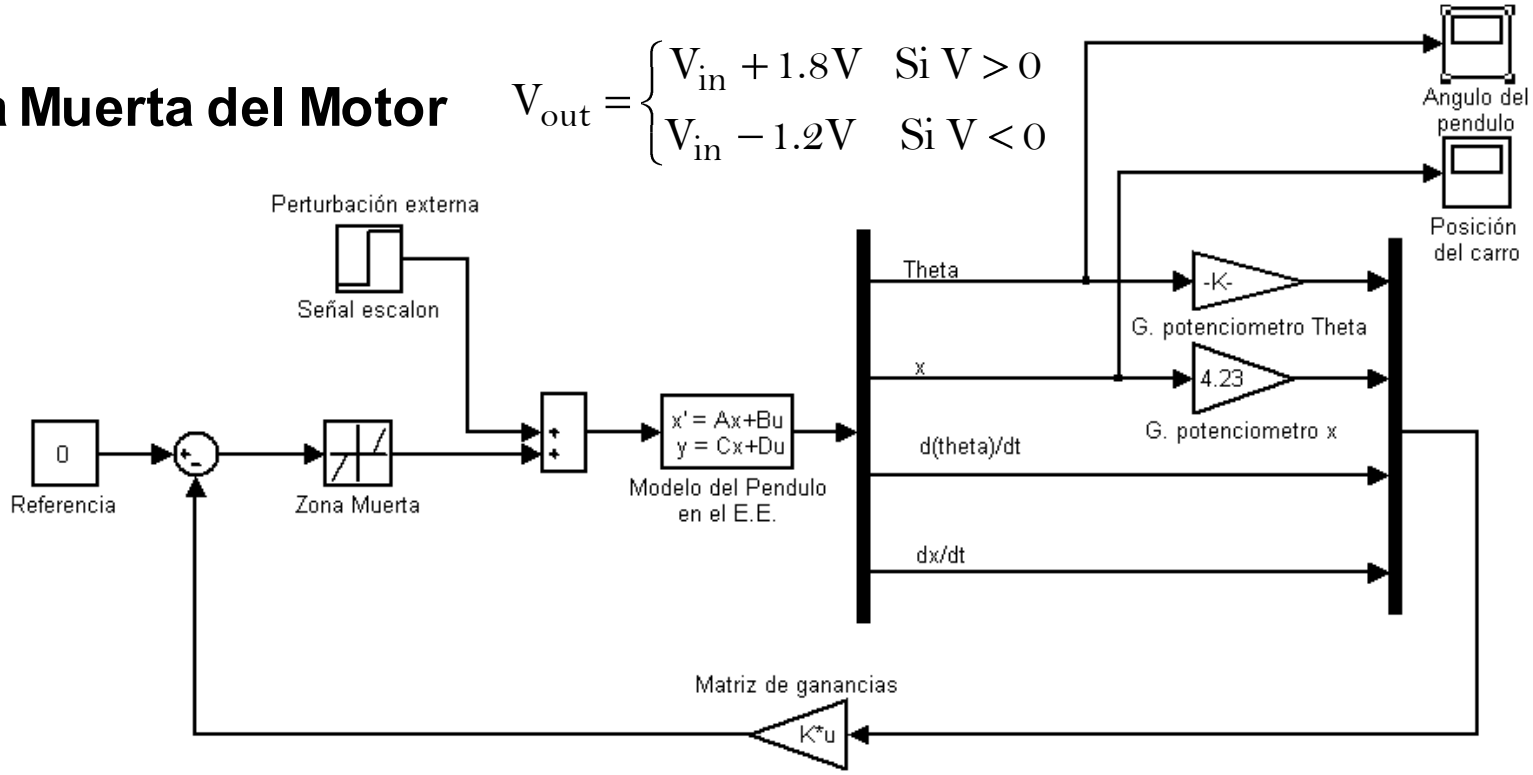
Implementación Final LQR

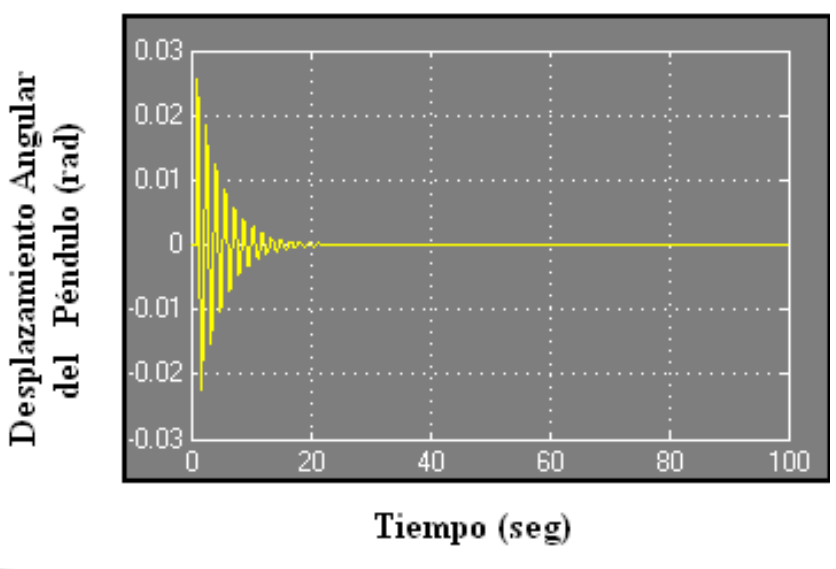
Compensador Electrónico

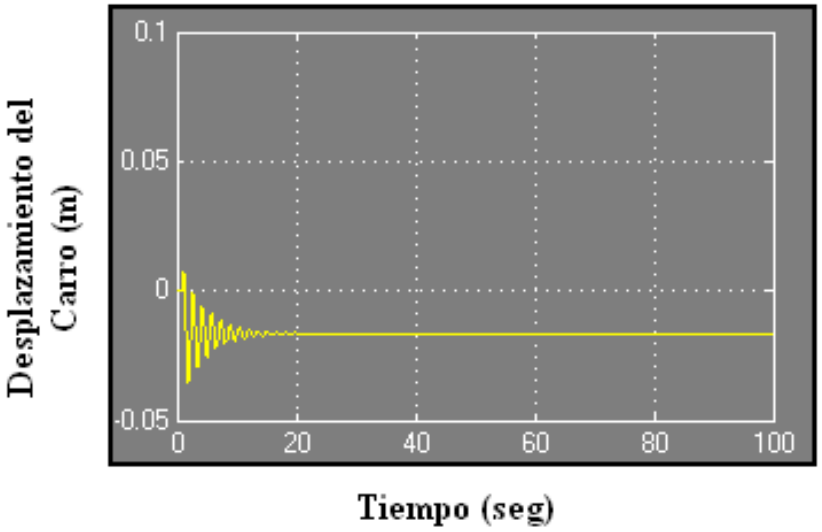


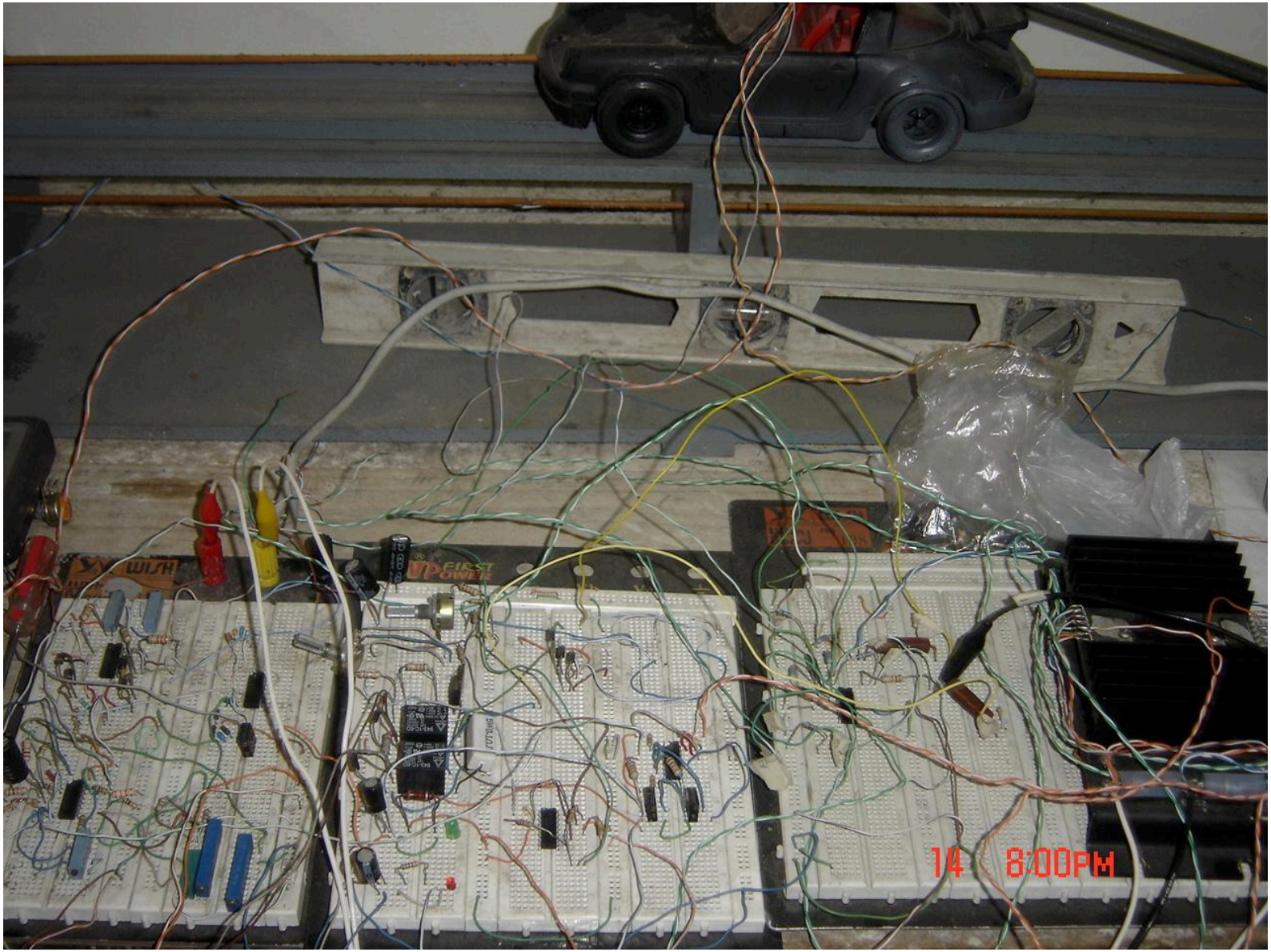
Zona Muerta del Motor

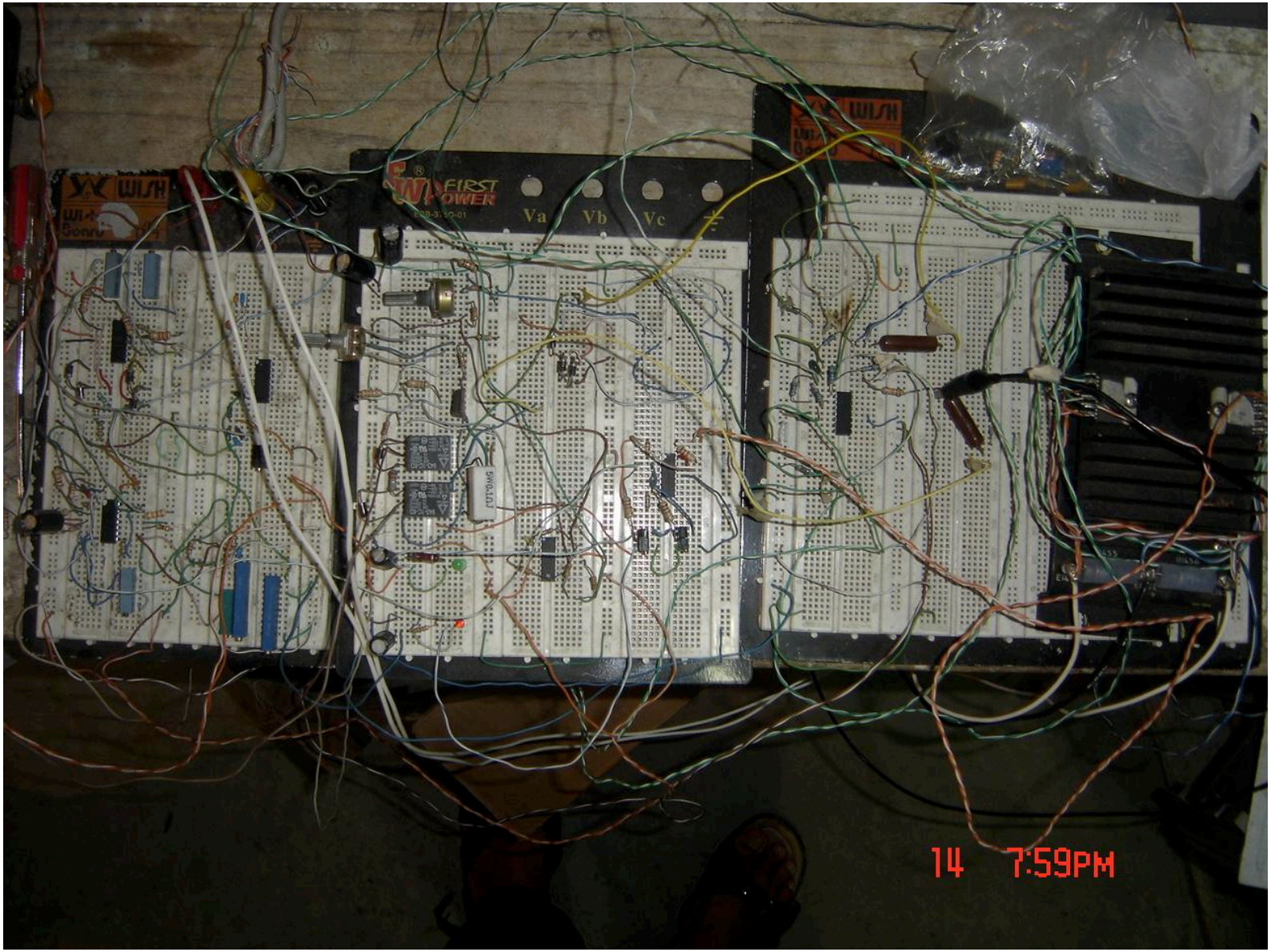
$$V_{out} = \begin{cases} V_{in} + 1.8V & \text{Si } V > 0 \\ V_{in} - 1.2V & \text{Si } V < 0 \end{cases}$$








14 8:00PM


FIRST POWER
Va
Vb
Vc
14 7:59PM

14 7:08PM

14 7:09PM

14 7:56PM

14 7:57PM

2235A
14 7:10PM

14 8:01PM

Conclusiones y Recomendaciones

- ✓ Dispositivos físicos actúan en estado de saturación..
- ✓ Limitación de ganancias que inciden en el estado de saturación.
- ✓ Reemplazo del driver analizado por un OPA-548.
- ✓ Uso de aisladores y flitros para disminuir el rizado en las señales provenientes de los sensores.
- ✓ Uso de frenado dinámico por parte del motor.
- ✓ Se delimita la region del actuador por inestabilizar el sistema

Conclusiones y Recomendaciones

✓ La realimentación reduce el efecto de las perturbaciones y modera los errores de modelado, no obstante ante la presencia de perturbaciones y ruido en el sensor se debe incluir:

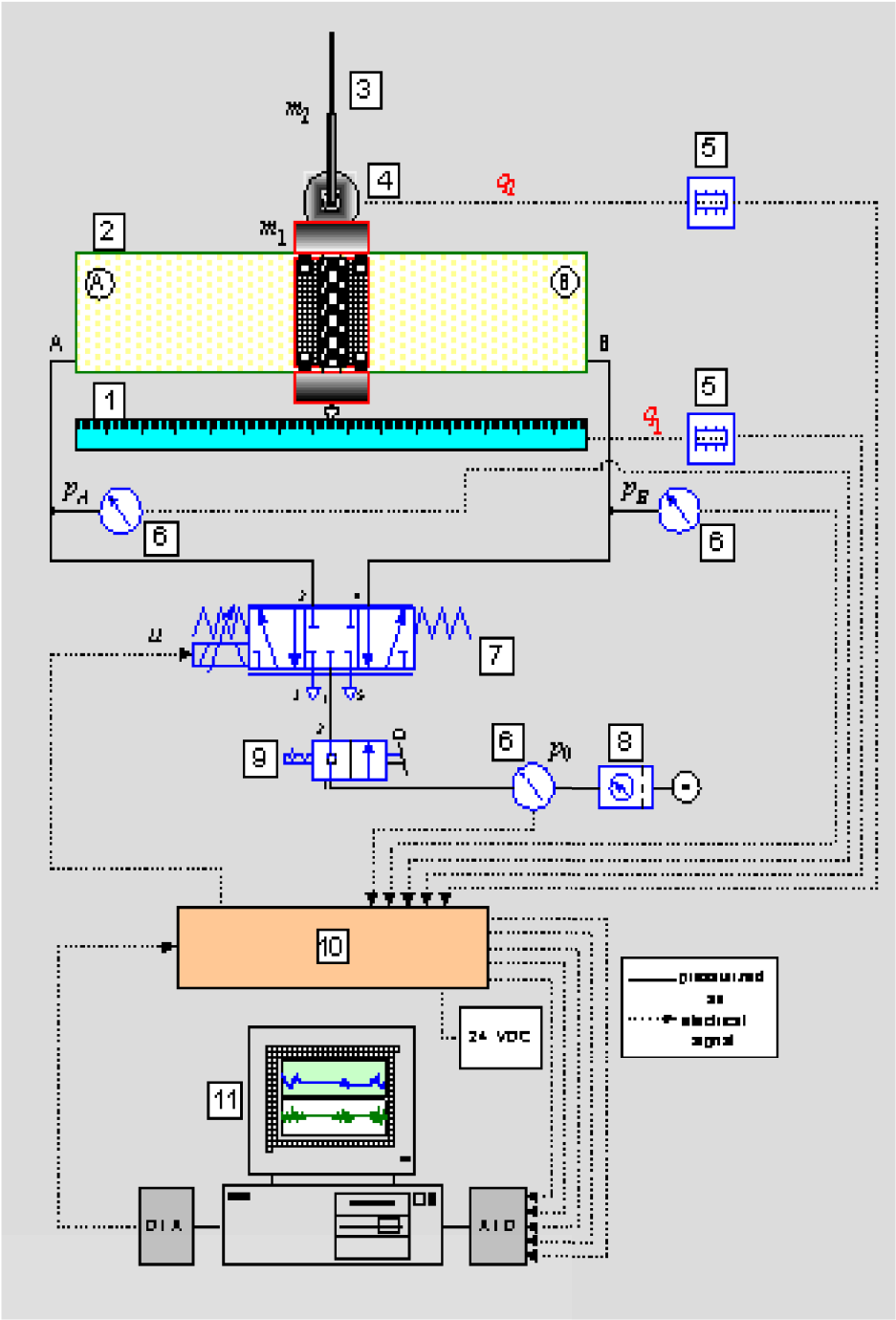
• Desempeño de seguimiento.

•Reducir la sensibilidad a ruido en el sensor, ganancia significativa en la región de baja frecuencia y mínima en la región de alta frecuencia.

• Se debe delimitar la señal de control para futuras mejoras.

• Reducir la sensibilidad ante errores en el modelado.

• Establecer una estabilidad robusta.



1. Potenciómetro Lineal.
2. Cilindro Lineal sin Vástago.
3. Péndulo Invertido.
4. Servopotenciómetro rotacional.
5. Tarjeta de Referencia electrónica.
6. Trasductor de Presión.
7. Válvula proporcional 5/3.
8. Unidad FLR.
9. Válvula de Suministro.
10. Interfase electrónica.
11. PC del Ordenador.

GRACIAS POR SU ATENCIÓN