



D-4837

7
620.7

075

401.00014

ESCUELA SUPERIOR
POLITECNICA DEL LITORAL
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA

"ANALISIS TEORICO EXPERIMENTAL DE UN
SISTEMA DE CONTROL DE NIVEL DE TRES TANQUES EN SERIE"

TESIS DE GRADO

Previa a la obtención del Título de

INGENIERO MECANICO

presentada por

CARLOS ALBERTO ORRALA POVEDA

GUAYAQUIL-ECUADOR

1982

AGRADECIMIENTO

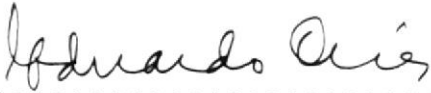
Al Ing. Eduardo Orcés, Director de Tesis,
por su decidida y constante colaboración
en el desarrollo de la misma.

Al Ing. Giulio Ricci, ex-Director de Tesis,
que se esforzó por culminar este trabajo;
y además, a todas aquellas personas que di-
recta e indirectamente han colaborado en su
realización.

DEDICATORIA

A mis Padres

A mis Hermanos


.....
Ing. Eduardo Orcés P.,
DIRECTOR DE TESIS

DECLARACION EXPRESA

"La responsabilidad por los hechos, ideas y doctrinas expuestos en esta tesis, me corresponden exclusivamente; y, el patrimonio intelectual de la misma, a la ESCUELA SUPERIOR POLITENICA DEL LITORAL".

(Reglamento de Exámenes y Títulos Profesionales de la ESPOL).

Carlos Orrala P.
.....
CARLOS ORRALA POVEDA

R E S U M E N

Este proyecto tiene como finalidad desarrollar el modelo matemático y la comprobación experimental del sistema de control de nivel de tres tanques colocados en serie, para que ante cualquier perturbación que existiere, partiendo desde el estado estable, pueda realizar esta operación en el menor tiempo posible y en forma óptima.

El sistema de control de nivel de los tanques en serie ahorra controladores, facilita el transporte y permite un control eficiente del nivel de líquido de los tanques. Todos estos factores justifican la finalidad de este proyecto que tiene su aplicación en las empresas industriales que tienen maquinarias con tanques de alimentación y en procesos químicos, etc.

La tesis contempla el desarrollo de un modelo digital en el lenguaje basic y la construcción de un prototipo para realizar el análisis teórico y experimental del sistema.

INDICE GENERAL

	<u>Pág.</u>
RESUMEN.	VI
INDICE GENERAL	VII
INDICE DE FIGURAS.	X
INDICE DE TABLAS	XV
INDICE DE GRAFICOS	XVIII
INTRODUCCION	27
I ANALISIS TEORICO.	31
1.1 Análisis de las Variables que intervienen en el sistema.	31
1.1.1 Diagrama de Bloques	38
1.1.2 Determinación de la función de transfe- rencia del sistema.	42
1.1.3 Diagrama de Flujo de Señales.	49
1.2 Análisis de las Variables de estado espacio .	54
1.2.1 Vector Espacio.	60
1.2.2 Valores Característicos	63
1.2.3 Vectores Característicos.	67
1.2.4 Representación en el Estado Espacio a partir de la función de transferencia .	75

VIII

	<u>Pág.</u>
1.2.5 Obtención de la solución de la ecuación de Estado Espacio	86
1.2.6 Controlabilidad y Observabilidad	99
1.2.7 Método Digital para obtener la respuesta del Sistema.	117
1.2.7.1 Diagrama de Flujo.	122
1.3 Acciones de Control.	125
1.3.1 Control Proporcional	126
1.3.2 Control Integral	128
1.3.3 Control Derivativo	146
1.4 Análisis de la Estabilidad	155
1.4.1 Lugar geométrico de las raíces	158
1.4.2 Respuesta a la Frecuencia	186
1.4.3 Método de Nyquist.	190
1.5 Simulación Analógica	208
II ANALISIS EXPERIMENTAL.	225
2.1 Descripción del Equipo Experimental.	225
2.1.1 Generalidades sobre el Equipo experimental utilizado.	226
2.1.2 Diagrama del Equipo.	227
2.1.3 Característica de los diferentes componen- tes del equipo	227
2.2 Obtención de los Resultados Experimentales . . .	235
III ANALISIS DE LOS RESULTADOS	296
3.1 Comparación de los Resultados Experimentales con	

IX

	<u>Pág.</u>
los teóricos.	296
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.	331
APENDICES.	337
A.- Programa de Computadora	338
B.- Curvas.	379
BIBLIOGRAFIA.	439

INDICE DE FIGURAS

<u>Nº</u>	<u>Pág.</u>
1 a) Sistema de nivel de líquido, b) Carga Hidrostática en función de Caudal.	34
2 Sistema de control de nivel de líquido de ciclo abierto con entrada en el primer tanque.	36
3 (a-b-c) Representaciones en bloques para las ecuaciones (14) hasta la (16).	41
4 Diagrama de bloque del sistema de ciclo abierto, con la entrada en el primer tanque	41
5 Representación en bloque para el sistema cuando la entrada es en el segundo tanque.	42
6 a), b) Reducciones sucesivas del diagrama de bloques. c) Diagrama de Bloque Final.	45
7 a), b) Reducciones sucesivas del diagrama de bloque c) Diagrama de Bloque Final.	46
8 a) Reducción del Diagrama de Bloque. b) Diagrama de Bloque Final.	47
9 a), b) Reducción del Diagrama de Bloque, c) Diagrama de bloque Final.	47
10 Gráficos para el flujo de señal cuando la entrada está en el primer tanque	53

XI

<u>Nº</u>		<u>Pág.</u>
11	Gráfico del Flujo de Señal cuando la entrada está en el segundo tanque.	54
12	Diagrama de Bloque del Sistema de Control	56
13	Sistema de tres tanques en serie con tres entradas.	110
14	Modos característicos del sistema de tres tanques	113
15	Diagrama de flujo de señal de los tres tanques en el dominio modal.	116
16	Diagrama de Flujo para determinar la respuesta del Sistema.	124
17	Diagrama de Bloque de un Control Proporcional	127
18	Sistema de Control de Nivel de líquido con Control Proporcional	128
19	Diagrama de Bloque de Ciclo Cerrado	130
20	Sistema de Control de Nivel con la entrada en el segundo tanque.	134
21	Diagrama de Bloque de un Control Integral	140
22	Integrador Hidráulico	140
23	Diagrama de Bloque de Ciclo Cerrado	142
24	a) Sistema de Control tipo Derivativo-Proporcional. b) Modificación Escalón en H_1 y la correspondiente modificación "y" en función de t. c) Diagrama de	

<u>Nº</u>		<u>Pág.</u>
	Bloque del Sistema de Control.	.148
25	Diagrama de Bloque de Ciclo Cerrado.	.151
26	Estabilidad en el Plano S	.156
27	Sistema de Control de Red cerrada.	.161
28	Representación Vectorial de los Términos del numera- dor y del denominador.	.165
29	Representación de los Lugares Geométricos sobre el Eje Real.	.166
30	Representación vectorial de los Términos del numera- dor y del denominador.	.172
31	Representación de los Lugares Geométricos sobre el Eje Real.	.173
32	Representación de los Lugares Geométricos que inter- ceptan al Eje Real y sobre el Eje Real	.179
33	Representación vectorial de los términos del numera- dor y del denominador.	.181
34	Representación de los Lugares Geométricos sobre el Eje Real.	.183
35	El Plano Polar	.189
36	Contorno de Nyquist y Mapeo de GH(S)	.200
37	Contorno de Nyquist y Mapeo para GH(S)	.204

XIII

<u>Nº</u>	<u>Pág.</u>
38	Diagrama de Nyquist para $GH(S)$ 207
39	Operaciones Matemáticas efectuadas por una Computadora Analógica. 210
40	Amplificador Operacional y Configuraciones de Impedancia. 211
41	Inversor de Signo 214
42	a) Diagrama Esquemático de un Sumador. b) Símbolo del Sumador. 215
43	a) Diagrama desquemático de un Integrador. b) Símbolo del Integrador 216
44	a) Potenciómetro. b) Símbolo del Potenciómetro. . . 217
45	Diagrama Esquemático del Computador Analógico para resolver las Ecuaciones 221
46	Versión simplificada del Diagrama del Computador de la Fig. Nº 45. 223
47	a) Foto del equipo experimental utilizado. b) Diagrama esquemático del Equipo. 228
48	Tanque de Reservorio. 229
49	Válvula de Vástago. 230
50	Control Proporcional. 231
51	Tanques en Serie. 232

<u>Nº</u>		<u>Pág.</u>
52	Llave de Compuerta.	233
53	Válvula Solenoide	234
54	Determinación de la Resistencia de Interconexión R_2 .	242
55	Determinación de la Resistencia de Interconexión R_4 .	242
56	Variación del nivel del Tanque de Reservorio en estado estable.	371
57	Variación del nivel del Tanque de Reservorio cuando sufre una perturbación de vaciado y llenado, --- (70-22 cm).	372

INDICE DE TABLAS

<u>Nº</u>		<u>Pág.</u>
1	Transformaciones de Diagramas de Bloque.	48
2	Datos de Magnitudes y Angulos de Fase.	207
3	Datos de las Areas a diferentes alturas del Tanque de Reservorio.	236
4	Datos de las Areas a diferentes alturas de los Tanques en Serie	237
5	Datos de Calibración de Vaciado de los Tanques en Serie.	239
6	Datos de Calibración de la Válvula de Vastago, (H vs Q)	244
7	Datos de Calibración de la Válvula de Vastago, (Q vs Y)	248
8	Datos de variación del Nivel de los Tanques en Serie cuando el Sistema tiene una perturbación de Vaciado y Llenado con KP de 0.197.	256
9	Datos de variación del nivel de los tanques en se- rie cuando el sistema tiene una perturbación de 4.33 cm en el nivel del primer tanque con KP de 0.197.	261

XVI

<u>Nº</u>		<u>Pág.</u>
10	Datos de variación del nivel de los tanques en serie cuando el sistema tiene una perturbación de 4.25 cm en el nivel del segundo tanque con KP de 0.197.	264
11	Datos de variación del nivel de los tanques en serie cuando el sistema tiene una perturbación de 3.75 cm en el nivel del tercer tanque con KP de 0.197.	268
12	Datos de variación del nivel de los tanques en serie cuando el sistema tiene una perturbación de vaciado y llenado con KP de 0.942	272
13	Datos de variación del nivel de los tanques en serie cuando el sistema tiene una perturbación de vaciado y llenado con KP de 1.45	279
14	Datos de variación del nivel de los tanques en serie cuando el sistema tiene una perturbación de vaciado y llenado con KP de 0.197.	285
15	Datos de variación del nivel de los tanques en serie cuando el sistema tiene una perturbación de 3.33 cm en el nivel del primer o tercer tanque con KP de 0.197.	291

XVII

Nº

Pág.

16	Datos de variación del nivel de los tanques en serie cuando el sistema tiene una perturbación de 3.33 cm en el nivel del segundo tanque con KP de 0.197.	294
----	--	-----

INDICE DE GRAFICOS

<u>Nº</u>	<u>Pág.</u>
1	El sistema en estado estable con una perturbación escalón de 10 cm en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 29.1 min y una constante de proporcionalidad K_p de 0.197. 224
2	Curva de Calibración de Vaciado de los Tanques en Serie. 240
3	Curva de Calibración de la Válvula de Vástago (nivel del tanque de reservorio "h" versus el caudal de salida "Q"). 247
4	Curva de Calibración de la Válvula de Vástago (caudal de salida "Q" versus desplazamiento del Vástago "Y"). 250
5	El sistema en estado estable con perturbación de vaciado y llenado (70-22 cm) en el tanque de reservorio y una constante de proporcionalidad K_p de 0.197 260
6	El sistema en estado estable con perturbación de 4.33 cm en el primer tanque y una constante de proporcionalidad K_p de 0.197 262

<u>Nº</u>		<u>Pág.</u>
7	El sistema en estado estable con perturbación de 4.25 cm en el nivel del segundo tanque y una constante de proporcionalidad K_p de 0.197.	.266
8	El sistema en estado estable con perturbación de 3.75 cm en el nivel del tercer tanque y una constante de proporcionalidad K_p de 0.197.	.270
9	El sistema en estado estable con perturbación de vaciado y llenado (70-22 cm) en el tanque de reservorio y una constante de proporcionalidad K_p de 0.942.	.278
10	El sistema en estado estable con perturbación de vaciado y llenado (70-22 cm) en el tanque de reservorio y una constante de proporcionalidad K_p de 1.45.	.282
11	El sistema en estado estable con perturbación de vaciado y llenado (70-22 cm) en el tanque de reservorio y una constante de proporcionalidad K_p de 0.197.	.293
12	El sistema en estado estable con perturbación de 3.33 cm en el nivel del primer o tercer tanque .	.293
13	El sistema en estado estable con perturbación de	

<u>Nº</u>	<u>Pág.</u>
	3.33 cm en el nivel del segundo tanque y una constante de proporcionalidad K_p de 0.197. 295
14	El sistema en estado estable. 374
15	El sistema en estado estable con perturbación de vaciado y llenado (70-22 cm) en el tanque de reservorio. 375
16	El sistema en estado estable con perturbación de 4.33 cm en el nivel del primer tanque 377
17	El sistema en estado estable con perturbación de 4.25 cm en el nivel del segundo tanque. 378
18	El sistema en estado estable con perturbación de 3.75 cm en el nivel del tercer tanque 379
19	El sistema en estado estable con perturbación escalón de 10 cm en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 2.5 min. 381
20	El sistema en estado estable con una perturbación rampa 4T en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 2.5 min. 383
21	El sistema en estado estable. 384
22	El sistema en estado estable con perturbación de vaciado y llenado (70-22 cm) en el tanque de reservorio. 386

<u>Nº</u>	<u>Pág.</u>
23	El sistema en estado estable con perturbación de 3.33 cm en el nivel del primer o tercer tanque. . . 388
24	El sistema en estado estable con perturbación de 3.33 cm en el nivel del segundo tanque. 389
25	El sistema en estado estable con perturbación escalón de 10 cm en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 2.5 min. 391
26	El sistema en estado estable con una constante de proporcionalidad K_p de 0.197. 392
27	El sistema en estado estable con perturbación de vaciado y llenado (70-22 cm) en el tanque de reservorio y una constante de proporcionalidad K_p de 0.197. 394
28	El sistema en estado estable con perturbación de 4.33 cm en el nivel del primer tanque y una constante de proporcionalidad K_p de 0.197. 396
29	El sistema en estado estable con perturbación de 4.25 cm en el nivel del segundo tanque y una constante de proporcionalidad K_p de 0.197. 397
30	El sistema en estado estable con perturbación de 3.75 cm en el nivel del tercer tanque y una constante de proporcionalidad K_p de 0.197. 399

<u>Nº</u>	<u>Pág.</u>
31	El sistema en estado estable con perturbación de vaciado y llenado (70-22 cm) en el tanque de reservorio y una constante de proporcionalidad K_p de 0.942.400
32	El sistema en estado estable con perturbación de vaciado y llenado (70-22 cm) en el tanque de reservorio y una constante de proporcionalidad K_p de 1.45.401
33	El sistema en estado estable con una perturbación escalón de 10 cm en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 2.5 min y una constante de proporcionalidad K_p de 0.197.403
34	El sistema en estado estable con una perturbación escalón de 10 cm en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 2.5 min y una constante de proporcionalidad K_p de 0.942.405
35	El sistema en estado estable con una perturbación rampa 4T en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 2.5 min y una constante de proporcionalidad K_p de 0.197.406
36	El sistema en estado estable con una perturbación

NºPág.

	rampa 4T en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 2.5 min y una constante de proporcionalidad K_p de 0.942.	408
37	El sistema en estado estable con una constante de proporcionalidad K_p de 0.197.	410
38	El sistema en estado estable con perturbación de vaciado y llenado (70-22 cm) en el tanque de reservorio y una constante de proporcionalidad K_p de 0.197.	412
39	El sistema en estado estable con perturbación de 3.33 cm en el nivel del primer o tercer tanque y una constante de proporcionalidad K_p de 0.197. . . .	413
40	El sistema en estado estable con perturbación de 3.33 cm en el nivel del segundo tanque y una constante de proporcionalidad K_p de 0.197.	414
41	El sistema en estado estable con una perturbación escalón de 10 cm en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 2.5 min con una constante de proporcionalidad K_p de 0.197.	416
42	El sistema en estado estable con perturbación de vaciado y llenado (70-22 cm) en el tanque de reser-	

<u>Nº</u>	<u>Pág.</u>
	vorio y una constante de integración KI de 0.05. . . 418
43	El sistema en estado estable con perturbación de vaciado y llenado (70-22 cm) en el tanque de reser- vorio y una constante de integración KI de 0.2. . . 420
44	El sistema en estado estable con perturbación esca- lón de 10 cm en el tanque de reservorio en un de - terminado tiempo de 10 min y una constante de in - tegración KI de 0.05. 421
45	El sistema en estado estable con perturbación esca- lón de 10 cm en el tanque de reservorio en un de - terminado tiempo de 10 min y una constante de in - tegración KI de 0.1. 422
46	El sistema en estado estable con perturbación rampa T en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 10 min y una constante de integración KI de 0.05. 425
47	El sistema en estado estable con perturbación rampa T en el tanque de reservorio en un determinado tiem- po de 10 min y una constante de integración KI de 1.426
48	El sistema en estado estable con perturbación de vaciado y llenado (70-22 cm) en el tanque de reser-

<u>Nº</u>	<u>Pág.</u>
	vorio, una constante de proporcionalidad K_p de 0.5 y una constante K de 0.1. 429
49	El sistema en estado estable con perturbación de vaciado y llenado (70-22 cm) en el tanque de reser- vorio, una constante de proporcionalidad K_p de 0.197 y una constante K de 0.01 430
50	El sistema en estado estable con perturbación esca- lón de 10 cm en el tanque de reservorio en un de - terminado tiempo de 2.5 min, una constante de pro- porcionalidad K_p de 0.197 y una constante K de 0.01. 432
51	El sistema en estado estable con una perturbación escalón de 10 cm en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 2.5 min, una constante de proporcionalidad K_p de 0.5 y una constante K de 0.01. 433
52	El sistema en estado estable con una perturbación escalón de 10 cm en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 2.5 min, una constante de proporcionalidad K_p de 0.5 y una constante K de 0.6. 434
53	El sistema en estado estable con perturbación ram- pa 4T en el tanque de reservorio en un determinado

NºPág.

- tiempo de 2.5 min, con una constante de proporcionalidad K_p de 0.197 y una constante K de 0.01. . . 437
- 54 El sistema en estado estable con perturbación rampa 4T en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 2.5 min, con una constante de proporcionalidad K_p de 0.5 y una constante K de 0.01. . . 438



BIBLIOTECA

I N T R O D U C C I O N

GENERALIDADES

El control automático se ha convertido en parte importante e integral de los procesos de manufacturas e industriales, existiendo controles de nivel del líquido, temperatura, presión, humedad, viscosidad y flujo, entre otros.

El problema principal que se presenta en cualquier tipo de control de nivel es: la determinación de las cantidades apropiadas de líquido que el sistema de control requiere para poder mantener los niveles de líquido dentro del rango de operación permisible.

En esta tesis analizamos un sistema de control de nivel que utiliza una entrada en uno de los tanques en serie; como el sistema comprende una entrada y tres salidas, tendremos en la salida tres variables. Al analizarlo por la teoría de control convencional, estamos restringidos a una entrada con una determinada salida. Mientras que la teoría de control moderna utiliza el concepto de estado espacio que nos permite analizar sistemas de entradas y

salidas múltiples. Este método se basa en el análisis y síntesis del sistema de control considerando un conjunto de "n" ecuaciones diferenciales de primer orden.

Al representar el sistema en un conjunto de ecuaciones diferenciales simultáneas éstas pueden escribirse en forma matricial, siendo uno de los aspectos más importantes el que nos permite una solución por computadoras. Una aplicación útil de la relación que se obtiene es para la solución en función del tiempo del sistema lineal y de tiempo discreto en la computadora digital.

Este sistema se lo analiza para las diferentes acciones de control básico, tales como el proporcional, el integral y el derivativo para lograr las correcciones relativas a una desviación.

También se determina la estabilidad por medio de los métodos de lugar geométrico de las raíces y las respuestas a la frecuencia para diferentes tipos de entradas o perturbaciones.

Como el sistema dispone de un modelo, también éste se lo simula por medio de la computadora analógica, usando para ello la analogía entre el voltaje del amplificador electrónico

y la variable del sistema que se modela.

Además analizamos el sistema a través de un prototipo que tiene en la entrada una válvula de vástago accionado por un control proporcional (flotador).

OBJETIVOS

Dada la importancia que tienen sus diferentes aplicaciones las mediciones y controles de nivel de líquido en los tanques de combustible, en los procesos químicos, etc., se ha realizado un estudio teórico y experimental de un sistema de control de nivel de tres tanques en serie.

El principal objetivo es el de representar el sistema por el método de estado espacio el cual nos permite analizar un sistema de entradas y salidas múltiples, las cuales están representadas en forma de matrices. Se desarrolla un modelo digital que nos permite simular este sistema y así poder analizarlo variando cualquiera de sus parámetros, obteniendo una respuesta deseada a las características del control que se está simulando.

Cabe indicar que la simulación del sistema se la desarrolla con el control proporcional, integral y el proporcional-

derivativo.

Además, se controlan los niveles en los diferentes tanques y se optimiza el sistema de control utilizando solamente una entrada, controlada por una válvula de vástago, accionado por un control proporcional.

CAPITULO I

ANALISIS TEORICO

1.1 ANALISIS DE LAS VARIABLES QUE INTERVIENEN EN EL SISTEMA

Como el sistema a analizarse es de control de nivel, el cual está formado de un tanque reservorio que alimenta a uno de los tres tanques en serie teniendo cada uno su respectiva salida, es conveniente introducir el concepto de resistencia y capacitancia para describir las características dinámicas para el sistema de nivel de líquido.

Sea el flujo a través de una tubería corta que conecta dos tanques, o las salidas de uno de los tanques en serie. En este caso se define la resistencia al flujo del líquido, como la variación de diferencia de nivel (la diferencia de niveles de líquido entre los dos tanques) necesaria para producir una variación unitaria en el caudal; es decir:

$$R = \frac{\text{Variación de diferencia de nivel, en cm}}{\text{Variación en caudal, en cm}^3/\text{seg}}$$

Como la relación entre el caudal y la diferencia de nivel difiere entre el caso del flujo laminar y el turbulento, primeramente analizaremos un ejemplo:

Sea el sistema de nivel de líquido que aparece en la Fig. N° 1 (a). En este sistema el líquido fluye a través de la válvula de carga en la parte inferior del tanque. Si el flujo a través de esta restricción es laminar, la relación entre el caudal de régimen y la carga hidrostática de régimen al nivel de la restricción es:

$$Q = KH \quad (1)$$

donde:

Q = Caudal de régimen, en cm^3/seg

K = Coeficiente en cm^2/seg

H = Carga hidrostática de régimen, en cm

Para flujo laminar se obtiene la resistencia R_t como:

$$R_t = \frac{dH}{dQ} = \frac{H}{Q}$$

La resistencia de flujo laminar es constante y análoga

a la resistencia eléctrica.

Si el flujo a través de la restricción es turbulento, el caudal del régimen es:

$$Q = K\sqrt{H} \quad (2)$$

Donde:

Q = Caudal de régimen, en cm^3/seg

K = Coeficiente en $\text{cm}^{2.5}/\text{seg}$

H = Carga hidrostática de régimen, en cm

Se obtiene la resistencia R_t para flujo turbulento de:

$$R_t = \frac{dH}{dQ} = \frac{2H}{Q}$$

Usando las resistencias de flujo turbulento, se puede linealizar la relación no lineal entre Q y H según la ecuación (2). Esta linealización es válida siempre que las modificaciones en carga y caudal, con respecto a sus valores estabilizados, sea pequeña. Esa relación linealizada está dada por:

$$Q = \frac{2H}{R_t}$$

En muchos casos reales el valor del coeficiente K en la

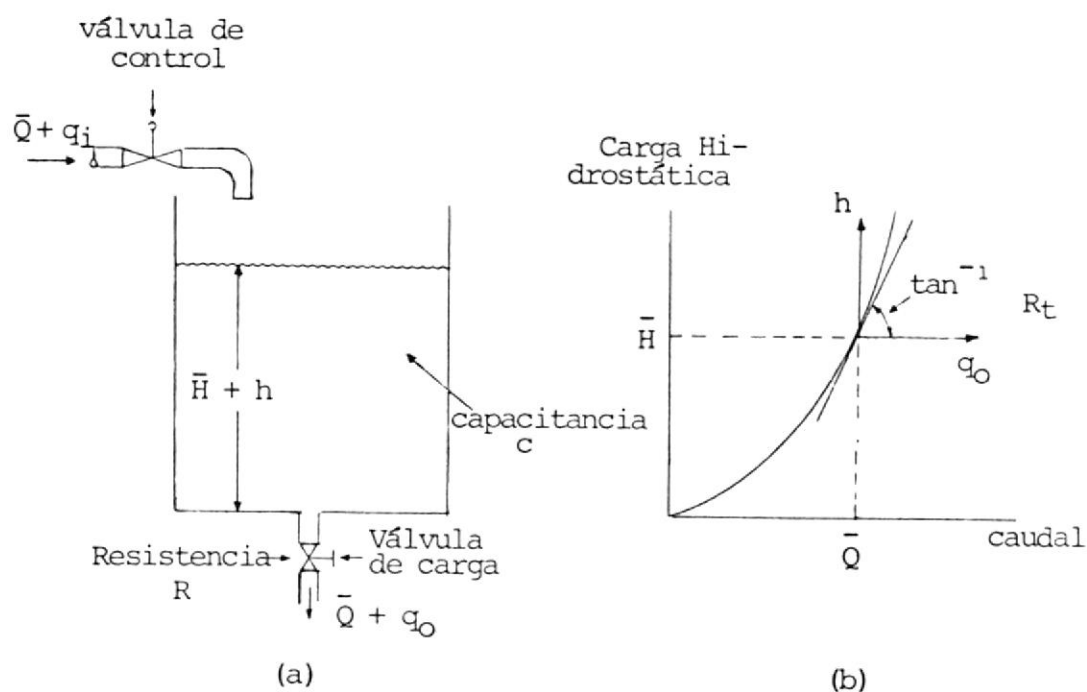


FIGURA N° 1

- a) Sistema de Nivel de Líquido
 b) Carga Hidrostática en función de Caudal

Ec. (2) que depende del coeficiente de flujo y del área de la restricción, no es conocido. En ese caso se puede hallar la resistencia trazando la representación gráfica de la carga hidrostática en función del caudal basados en los valores experimentales y midiendo la pendiente de la curva en la condición de funcionamiento. En la Fig. N° 1 (b) se puede ver un ejemplo de un diagrama como el mencionado y el punto de estabilidad de operación y resistencia R_t aparecen indicados en la figura (la resistencia R_t es la pendiente de

la curva en el punto de operación). La aproximación lineal se basa en el hecho de que la curva efectiva no difiere mucho de su tangente si las condiciones de operación no varían mucho.

La capacitancia C de un tanque es definida como la variación en cantidad de líquido acumulado necesario para producir una variación unitaria en el potencial (carga hidrostática).

$$C = \frac{\text{Variación en el líquido almacenado, en cm}^3}{\text{Variación de Carga, en cm}}$$

La capacitancia del tanque es igual al área de la sección recta. Si ésta es constante, la capacitancia es constante para cualquier carga.

En la Fig. N° 2 aparece un sistema de ciclo abierto en el que los tres tanques interactúan entre sí. Así, la función de transferencia del sistema no es el producto de tres funciones de transferencia de primer orden

Se definen la variables del siguiente modo:

$\bar{Q}$ = Caudal de régimen (antes de haber ocurrido algún cambio), en cm^3/seg .

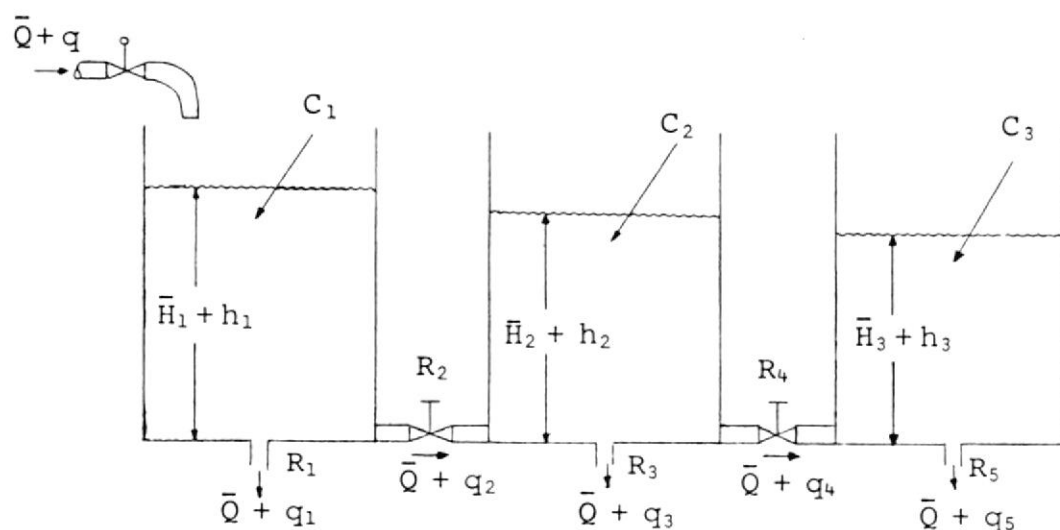


FIGURA N° 2

Sistema de Control de Nivel de Líquido
de Ciclo Abierto con Entrada en el Primer Tanque

q = Pequeña desviación del caudal de entrada respecto al valor de régimen, en cm^3/seg .

q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 = pequeña desviación del caudal de salida y de interconexión respecto al valor de régimen, cm^3/seg .

$\bar{H}_1, \bar{H}_2, \bar{H}_3$ = Carga Hidrostática de régimen (antes de ocurrir un cambio) en cm.

h_1, h_2, h_3 = Pequeña desviación de la carga hidrostática respecto al valor de régimen, en cm.

Como se indicó previamente se puede considerar lineal

a un sistema si el flujo es laminar. Aún si el flujo es turbulento, el sistema puede ser linealizado si se mantienen reducidas las variaciones de las variables. En el caso de que el sistema es lineal o linealizado, se puede obtener la ecuación diferencial de este sistema del siguiente modo:

La diferencia de los caudales de entrada menos los caudales de salida durante el pequeño intervalo de tiempo dt es igual a la cantidad adicional acumulada en el tanque. Usando los símbolos como se los definió en la figura anterior se pueden obtener las ecuaciones siguientes para este sistema:

$$C_1 \frac{dh_1}{dt} = q - q_1 - q_2 \quad (3)$$

$$\frac{h_1}{R_1} = q_1 \quad (4)$$

$$\frac{h_1 - h_2}{R_2} = q_2 \quad (5)$$

$$C_2 \frac{dh_2}{dt} = q_2 - q_3 - q_4 \quad (6)$$

$$\frac{h_2}{R_3} = q_3 \quad (7)$$

$$\frac{h_2 - h_3}{R_4} = q_4 \quad (8)$$

$$C_3 \frac{dh_3}{dt} = q_4 - q_5 \quad (9)$$

$$\frac{h_3}{R_5} = q_5 \quad (10)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4), (5), (7), (8) y (10) en las ecuaciones (3), (6) y (9) tenemos:

$$C_1 \frac{dh_1}{dt} = - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) h_1 + \frac{h_2}{R_2} + q \quad (11)$$

$$C_2 \frac{dh_2}{dt} = \frac{h_1}{R_2} - \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) h_2 + \frac{h_3}{R_4} \quad (12)$$

$$C_3 \frac{dh_3}{dt} = \frac{h_2}{R_4} - \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) h_3 \quad (13)$$

1.1.1 Diagrama de Bloques

Con objeto de analizar un sistema completo de control o uno de sus componentes, es de mucha ayuda hacer un esquema; una forma común de hacerlo es un diagrama operacional de bloques. En este tipo de representación, las diferentes trayectorias de transferencias de información se muestran como líneas llenas que conectan rectángulos.

Estos rectángulos representan componentes de control o procesos que pueden experimentar algún cambio. Otro símbolo que se usa es un círculo que representa un punto de suma, La operación algebraica apropiada se indica por un signo más (+) y/o menos (-) próximo a la punta de flecha apropiada. A este punto, tres líneas pueden entrar, pero únicamente una línea puede salir.

Los diagramas de bloque nos servirán como auxiliares para describir el sistema de control.

Los diagramas de bloques que analizaremos primeramente es el sistema de ciclo abierto mediante las ecuaciones anteriormente determinadas.

Considerando las ecuaciones (11), (12), (13), tenemos:

$$C_1 \frac{dh_1}{dt} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)h_1 = \frac{h_2}{R_2} + q \quad (14)$$

$$C_2 \frac{dh_2}{dt} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)h_2 = \frac{h_1}{R_2} + \frac{h_3}{R_4} \quad (15)$$

$$C_3 \frac{dh_3}{dt} + \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right)h_3 = \frac{h_2}{R_4} \quad (16)$$

Para obtener el diagrama de bloque del sistema primero se transforman las ecuaciones del sistema a la forma de Laplace y después se representan individualmente en forma de bloque.

Asumiendo que:

$$M = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$N = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$$

$$P = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}$$

Las representaciones en bloque de las ecuaciones (14) hasta la (16) se muestran en la Fig. N° 3 (a) hasta (c) respectivamente.

Asumiendo que

$$A = M + C_1 S$$

$$B = N + C_2 S$$

$$C = P + C_3 S$$

Luego estos bloques se unen para obtener el dia-

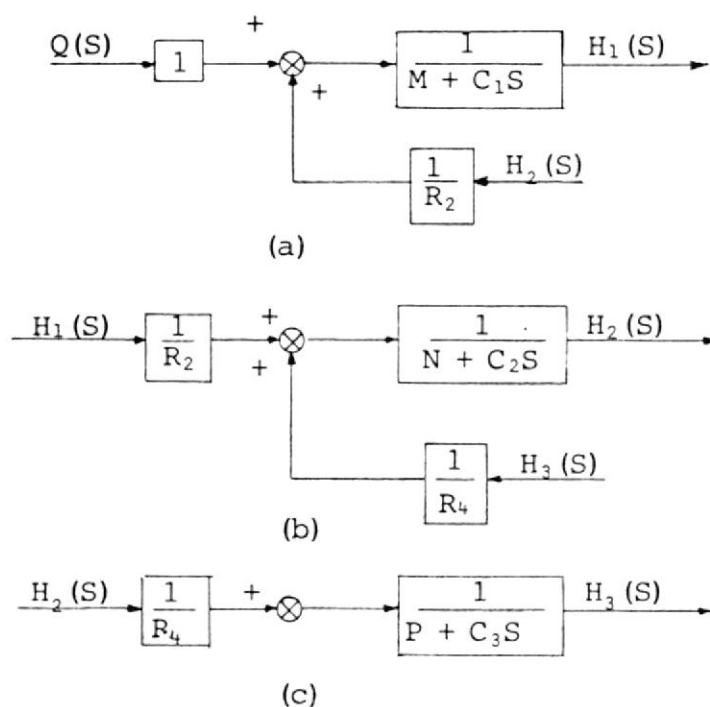


FIGURA N° 3

(a-b-c).- Representaciones en Bloques
para las ecuaciones (14) hasta la (16)

grama de bloque que se muestra en la Fig. N° 4.

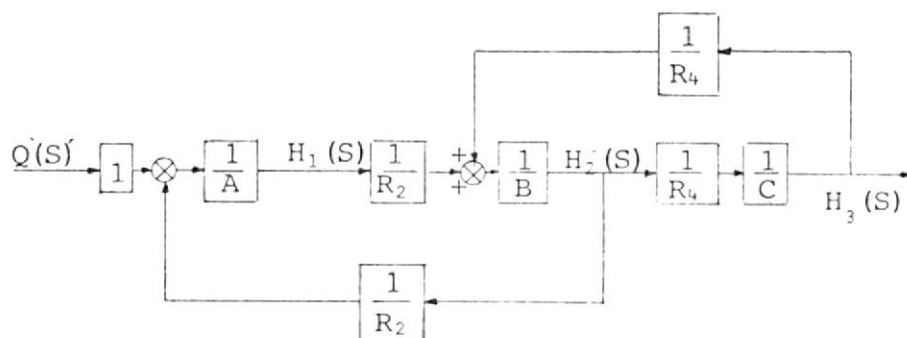


FIGURA N° 4

Diagrama de Bloque del sistema de Ciclo Abierto,
con la entrada en el Primer Tanque

Mientras que para el caso en que la entrada es en el segundo tanque obtenemos el diagrama de bloque de ciclo abierto como se muestra en la Fig. N° 5.

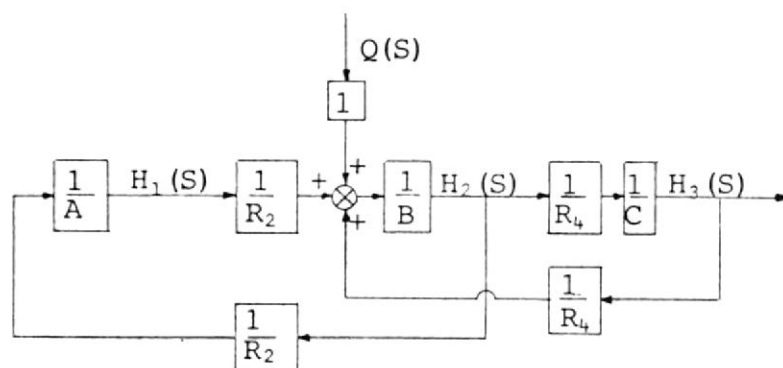


FIGURA N° 5

Representación en Bloque para el Sistema
cuando la entrada es en el Segundo Tanque

1.1.2 Determinación de la Función de Transferencia del Sistema

La función de transferencia de un sistema lineal invariante en el tiempo está definida como la relación de la Transformada de Laplace de la salida (Función respuesta) a la transformada de Laplace de la entrada (Función excitadora), bajo las suposiciones de que todas las condiciones iniciales son cero.

Sea el sistema de ciclo abierto que puede verse en la Fig. N° 2. En este sistema los tres tanques interactúan entre sí.

Así la función de transferencia del sistema no es el producto de tres funciones de transferencia de primer orden.

En lo que sigue se supondrán solo pequeñas variaciones de las variables con respecto a sus valores en estado de régimen.

Debido a que el sistema tiene tres salidas, para poder analizarlo debemos determinar sus respectivas funciones de transferencia para cada una de sus salidas con respecto a la entrada, para lo cual utilizaremos el método de reducción de bloques.

Es posible simplificar un diagrama de bloque muy complejo con muchos lazos de realimentación por una modificación paso a paso utilizando reglas del álgebra de diagramas de bloques. En la Tabla N° 1 se dan algunas de estas importantes reglas (Ver Pág. N° 48). Hay que notar, que al

simplificar el diagrama de bloques, los nuevos bloques se vuelven complejos, debido a que generan nuevos polos y ceros.

Para determinar la función de transferencia de la salida " H_3 " con respecto a la entrada " Q " consideramos el diagrama de bloque anteriormente determinado para el sistema de ciclo abierto, cuando la entrada es en el primer tanque.

Obtenemos la Fig. N° 6 (a), desplazando el punto de suma del lazo positivo de realimentación que contiene $1/R_4$ fuera del lazo positivo de realimentación que contiene $1/R_2$. Se obtiene la Fig. N° 6 (b) eliminando el lazo de realimentación positivo que contiene $1/R_2$. Se obtiene la Fig. N° 6 (c), eliminando el último lazo de realimentación positivo.

Para determinar la función de transferencia de las salidas " H_2 " con respecto a la entrada " Q ", considerando nuevamente el diagrama de bloques de ciclo abierto de la Fig. N° 4, se desplaza el punto de bifurcación que contiene $1/R_4$ y obtenemos la Fig. N° 7 (a). Eliminando el lazo

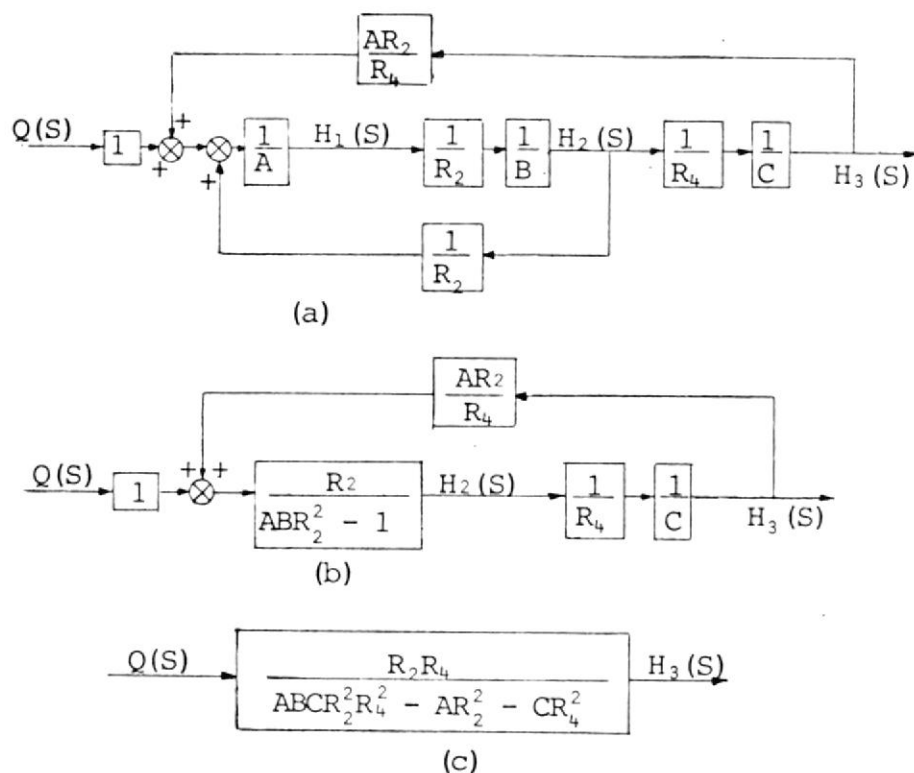
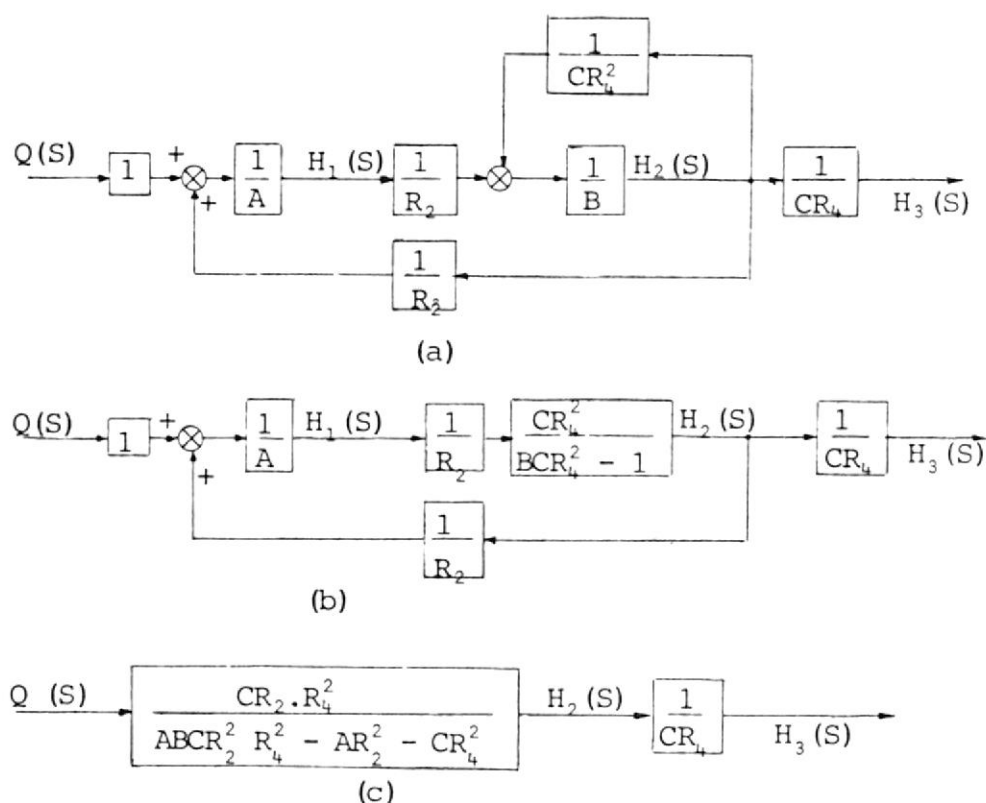


FIGURA N° 6

(a) (b) - Reducciones sucesivas del diagrama de Bloques
 (c) - Diagrama de Bloque Final

de realimentación positiva que contiene $1/CR_4$ obtenemos la Fig. N° 7 (b). Finalmente eliminando el lazo de realimentación positiva que contiene $1/R_2$ obtenemos la Fig. N° 7 (c).

Para determinar la función de transferencia de la salida " H_1 " con respecto a la entrada " Q ", consideramos el diagrama de bloque de la Fig. N° 7 (b). Se desplaza el punto de bifurcación

FIGURA N^o 7

(a) (b).- Reducciones sucesivas del Diagrama de Bloque
 (c).- Diagrama de Bloque Final

que contiene $1/R_2$ a la salida H_1 , obteniéndose la Fig. N^o 8 (a) y finalmente eliminando el último lazo de realimentación positiva obtenemos la Fig. N^o 8 (b).

Considerando la Fig. N^o 5 y realizando los métodos de reducción de diagrama de bloque, obtenemos el diagrama de ciclo abierto en forma compacta para poder determinar las funciones de trans-

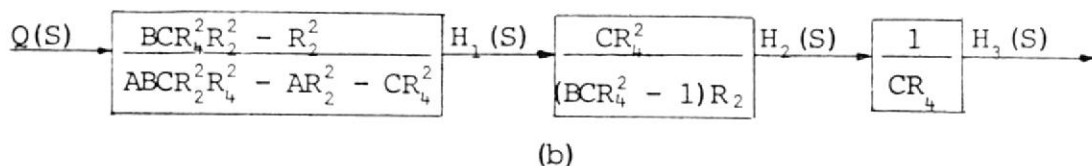
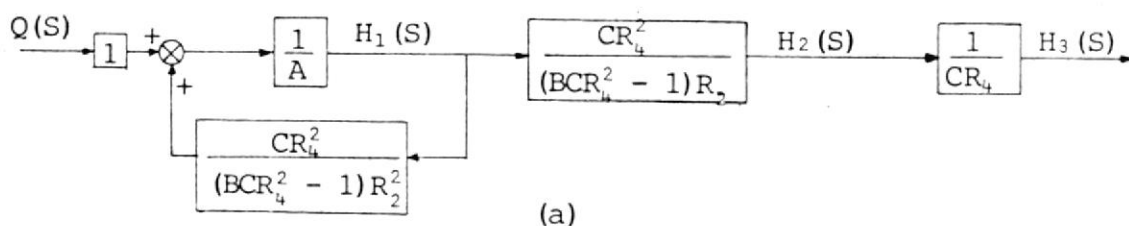


FIGURA N° 8

(a).- Reducción del Diagrama de Bloque

(b).- Diagrama de Bloque Final

ferencia cuando se tiene la entrada en el segundo tanque como se muestra en la Fig. N° 9.

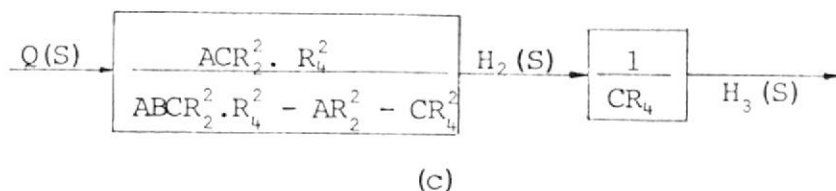
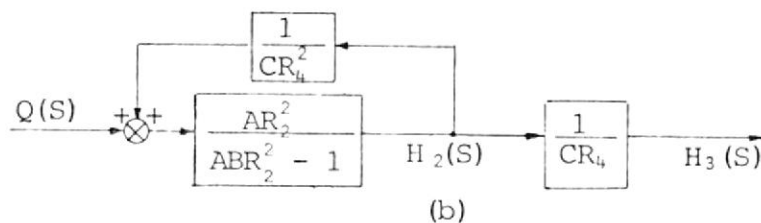
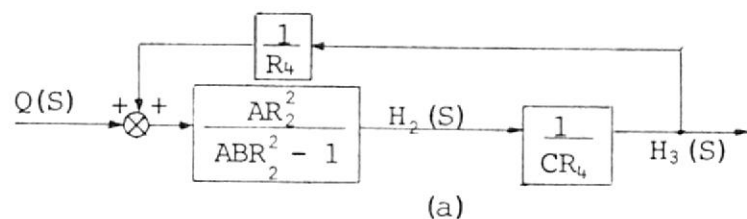


FIGURA N° 9

(a) (b).- Reducción del Diagrama de Bloque

(c).- Diagrama de Bloque Final

TABLA I
TRANSFORMACIONES DE DIAGRAMAS DE BLOQUES

Transformación	Diagrama Original	Diagrama Equivalente
1.- Combinación de bloques en cascada.		
2.- Movimiento de un punto de suma anterior a un bloque.		
3.- Movimiento de un punto de separación posterior a un bloque.		
4.- Movimiento de un punto de separación anterior a un bloque.		
5.- Movimiento de un punto de suma posterior a un bloque.		
6.- Eliminación de una red de retroalimentación.		

1.1.3 Diagrama de Flujo de Señales

Un procedimiento alternativo para hallar las relaciones entre las variables de un sistema de control complicado, es el procedimiento de gráfico de flujo de señales.

Un gráfico de flujo de señal es un diagrama que representa un conjunto de ecuaciones lineales simultáneas y consiste en una red en la cual los nodos están conectados por ramas con dirección y sentido. Cada nodo representa una variable del sistema y cada rama conectada entre dos nodos actúa como un multiplicador de señal. Además la señal fluye solamente en un sentido. Se indica el sentido del flujo de señal por una flecha ubicada en la rama y el factor de multiplicación aparece a lo largo de la rama.

El gráfico de flujo muestra el flujo de señales de un punto de un sistema a otro y da las relaciones entre las señales. La ventaja de usarlo es que dispone de una fórmula de ganancia denominada fórmula de ganancia de Mason, la cual da las relaciones entre las variables del sistema

sin requerir una resolución del gráfico.

Las propiedades importantes de los gráficos de flujo de señal son las siguientes:

- a.- Una rama indica la dependencia funcional de una señal respecto a otra. Una señal se desplaza únicamente en la dirección y sentido especificado por la flecha de la rama.
- b.- Un nudo suma las señales de todas las ramas de entrada y transmite esta suma a todas las ramas de salida.
- c.- Un nudo mixto que tiene ramas tanto de entrada como de salida puede ser considerado como un nudo de salida (sumidero) añadiendo una rama con transmitancia unitaria.
- d.- Para un sistema dado, el diagrama de flujo de señal no es único. Se pueden dibujar muchos gráficos de flujo de señal diferentes para un sistema dado, escribiendo en forma distinta las ecuaciones del sistema.

La transmitancia entre un nudo de entrada y un nudo de salida es la ganancia total o transmitancia total entre estos dos nudos.

La fórmula de ganancia de Mason, aplicable a la ganancia total está dada por:

$$p = \frac{1}{\Delta} \sum_k P_k \Delta_k \quad (17)$$

Donde:

P_k = ganancia del trayecto o transmitancia del
 k - ésimo trayecto directo.

Δ = Determinante del gráfico

Δ = $1 -$ (Suma de todas las ganancias de lazo distintos) + (Suma de los productos de las ganancias de todas las combinaciones posibles de dos lazos no adjuntos) - (Suma de los productos de ganancia de todas las combinaciones posibles de tres lazos adjuntos) +...

$\Delta = 1 - \sum L_a + \sum L_b L_c - \sum L_d L_e L_f + \dots$

Δ_k = Cofactor del determinante de K - ésimo trayecto directo del gráfico con los lazos adjuntos del K - ésimo trayecto directo quitados.

Considerando el sistema de ciclo abierto y par -

tiendo de las ecuaciones lineales simultáneas anteriormente determinadas encontramos el diagrama de flujo de señales, entonces:

$$C_1 \frac{dh_1}{dt} + Mh_1 = \frac{h_2}{R_2} + q$$

$$C_2 \frac{dh_2}{dt} + Nh_2 = \frac{h_1}{R_2} + \frac{h_3}{R_4}$$

$$C_3 \frac{dh_3}{dt} + Ph_3 = \frac{h_2}{R_4}$$

La transformación y las soluciones para $H_1(S)$, $H_2(S)$, y $H_3(S)$ nos da:

$$H_1(S) = A \left[\frac{H_2(S)}{R_2} + Q(S) \right] \quad (18)$$

$$H_2(S) = B \left[\frac{H_1(S)}{R_2} + \frac{H_3(S)}{R_4} \right] \quad (19)$$

$$H_3(S) = C \left[\frac{H_2(S)}{R_4} \right] \quad (20)$$

Para cada una de las ecuaciones (18), (19) (20), tenemos la gráfica parcial para el flujo de señal representada en la Fig. N° 10 (a), (b), (c)

La combinación de las gráficas parciales para el flujo de la señal suministran la gráfica para el

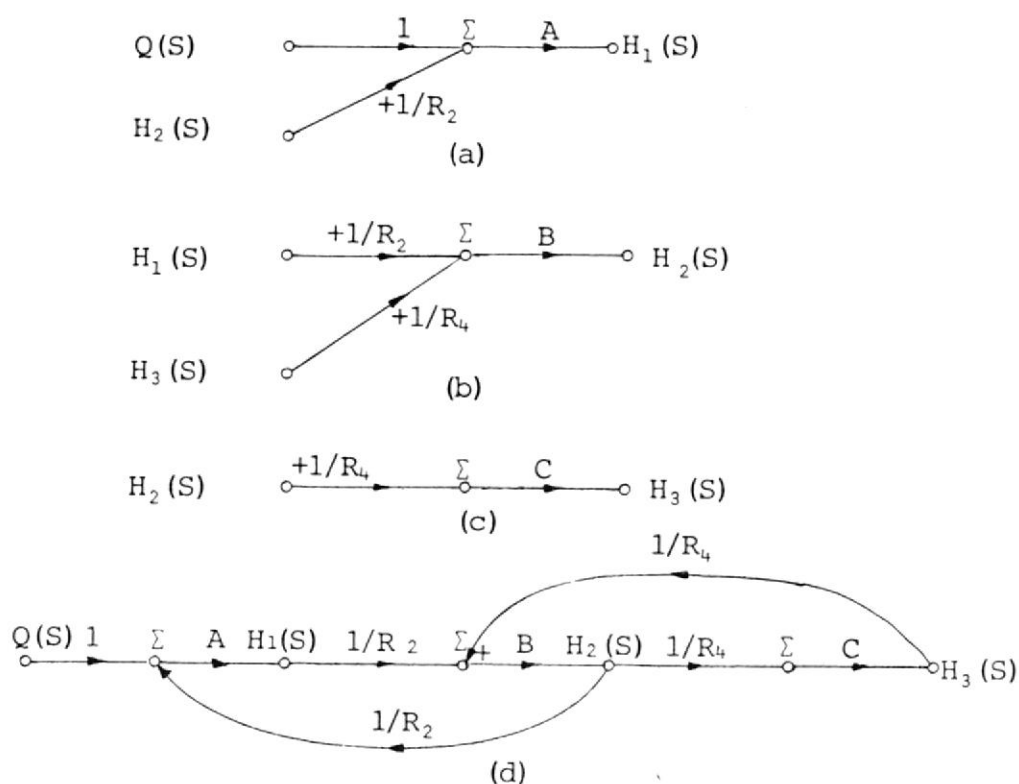


FIGURA N° 10

Gráficas para el flujo de señal cuando la entrada está en el primer tanque

flujo de señal del sistema, mostrada en la Fig. N° 10 (d).

Cuando la entrada es en el segundo tanque, el diagrama de flujo de señales, es como se muestra en la Fig. N° 11.

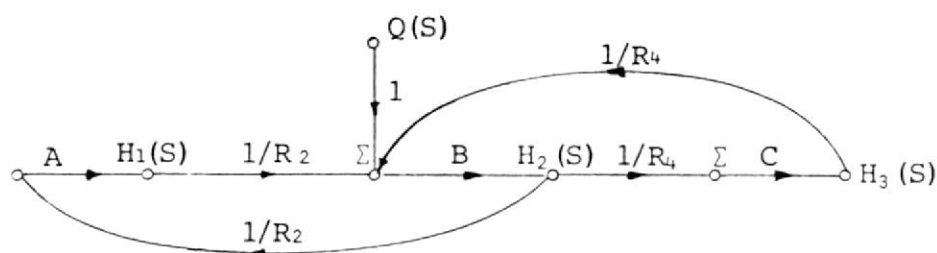


FIGURA N° 11

Gráfica del Flujo de Señal
cuando la entrada está en el segundo tanque

1.2 ANÁLISIS DE LAS VARIABLES DE ESTADO ESPACIO

Un sistema de control que varía en el tiempo es un sistema en que uno o más de sus parámetros pueden variar en función del tiempo, además, un sistema de múltiples variables, es un sistema con varias señales de entrada y salida.

La teoría de control moderna la cual es basada en el concepto de estado espacio es extremadamente útil no solamente para un propósito específico de optimizar el sistema de control sino también para aprovechar el principio en el cual el sistema opera.

En el análisis de los sistemas de control en el domi -

nio del tiempo se utiliza el concepto de estado de un sistema*. El estado de un sistema es un conjunto de números, tales que el conocimiento de estos números y de las funciones de entrada, junto con las ecuaciones que describen la dinámica, proporcionan la salida y el estado futuro del sistema. Para un sistema dinámico, el estado de un sistema se describe en términos de un conjunto de variables de estado: $|X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)|$.

Estas variables son las que determinan el comportamiento futuro de un sistema cuando se conocen el estado presente del mismo y la señales de excitación.

Un estado espacio es definido como un espacio de n dimensión en la cual $X_1, X_2, \dots, X_n$ son las coordenadas. El estado en el tiempo " t " de un sistema definido por " n " ecuaciones diferenciales de primer orden pueden entonces ser representadas por un punto en un estado espacio de n dimensiones. Esto significa que en este método de análisis y síntesis de sistemas de control se considera un conjunto de " n " ecuaciones diferenciales de primer orden en vez de una simple ecuación diferencial de enésimo orden.

* Ver Ref (6).

Un punto en el estado espacio en el tiempo "t" es llamado un punto representativo.

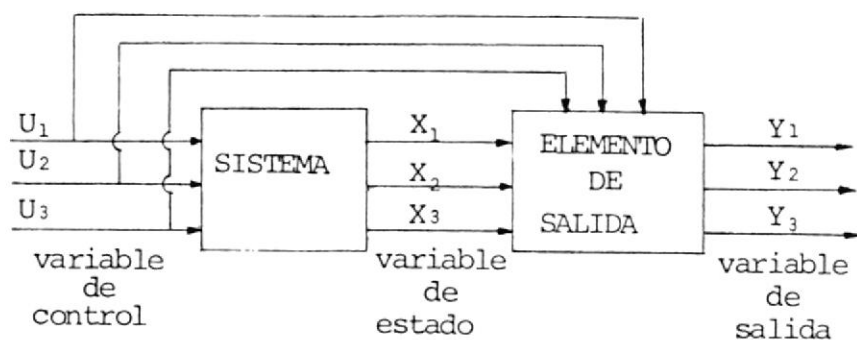


FIGURA N° 12

Diagrama de Bloque del Sistema de Control

Considerando el sistema de control mostrado en la Fig. N° 12, la ecuación de estado del sistema se describe por el conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden escritas en función de las variables de estado ($X_1, X_2, \dots, X_n$). Estas ecuaciones pueden escribirse en forma general si el sistema es lineal como:

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n + b_{11}U_1 + \dots + b_{1m}U_m, \\ \dot{X}_2 &= a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n + b_{21}U_1 + \dots + b_{2m}U_m, \\ \dot{X}_n &= a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \dots + a_{nn}X_n + b_{n1}U_1 + \dots + b_{nm}U_m,\end{aligned}$$

(21)

Y las "m" ecuaciones algebraicas que relacionan las variables de salida, la variable de estado y las variables de control pueden ser escritas como:

$$\begin{aligned} Y_1 &= c_{11}X_1 + c_{12}X_2 + \dots + c_{1n}X_n + d_{11}U_1 + \dots + d_{1m}U_m, \\ Y_2 &= c_{21}X_1 + c_{22}X_2 + \dots + c_{2n}X_n + d_{21}U_1 + \dots + d_{2m}U_m, \quad (22) \\ Y_n &= c_{n1}X_1 + c_{n2}X_2 + \dots + c_{nn}X_n + d_{n1}U_1 + \dots + d_{nm}U_m, \end{aligned}$$

Donde $\dot{X} = dx/dt$. Por ésto, el conjunto de ecuaciones diferenciales simultáneas pueden escribirse en forma matricial como sigue:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_m \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & \dots & d_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_m \end{bmatrix} \quad (24)$$

La matriz columna formada por las variables de estado se denomina vector de estado y se escribe como:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

Los elementos de A dependen de los parámetros del sistema y los elementos de B muestran cómo cualquier variable de control afecta la variable de estado del sistema. C muestra cómo la variable de salida es relacionada con la variable de estado y D cómo las variables de control afectan directamente la variable de salida. La matriz de señales de entrada se define como U. Entonces el sistema puede representarse mediante la notación compacta de la ecuación diferencial vectorial del sistema como:

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \quad (25)$$

$$Y(t) = CX(t) + DU(t) \quad (26)$$

La ecuación diferencial matricial vectorial relaciona la rapidez de cambio en el estado del sistema con el estado del sistema y las señales de entrada.

Debido a que las ecuaciones diferenciales ordinarias pueden ser transformadas en ecuaciones algebraicas usando la transformada de Laplace para ir desde el dominio del tiempo al dominio de S, ya que la transformada de Laplace es un operador escalar, esto puede ser aplicado a las ecuaciones matriciales. Podemos así obtener la transformación de Laplace de las ecuaciones (25), (26) para obtener las siguientes ecuaciones en el

dominio de S:

$$SX(S) - X_0 = AX(S) + BU(S) \quad (27)$$

y

$$Y(S) = CX(S) + DU(S) \quad (28)$$

Donde:

$$\mathcal{L}[X(t)] = X(S), \mathcal{L}[Y(t)] = Y(S), \mathcal{L}[U(t)] = U(S)$$

y

$$X_0 = \lim_{t \rightarrow 0} X(t)$$

Las ecuaciones algebraicas (27) y (28) pueden ser resueltas para $X(S)$ y $Y(S)$.

$$X(S) = (SI - A)^{-1} (X_0 + BU(S)) \quad (29)$$

$$Y(S) = C(SI - A)^{-1} (X_0 + BU(S)) + DU(S) \quad (30)$$

La función de transferencia que relaciona la entrada con la salida en el dominio de S para sistema, teniendo condición inicial cero es definido por la Ec. (31). Para un sistema lineal, ésto puede ser definido como la relación entre el cambio en el estado de entrada y el cambio resultante en la salida.

$$Y(S) = G(S) \cdot U(S) \quad (31)$$

Resolviendo las ecuaciones (29) y (30) para $G(S)$ con $X_0 = 0$:

$$G(S) = C(SI - A)^{-1} B + D \quad (32)$$

$G(S)$, la matriz función de transferencia es una matriz $m \times n$ que relaciona los " n " vectores de entrada a los " m " vectores de salida. Cada elemento de G representa un componente de la relación entrada-salida.

$$G_{ij}(S) = \frac{Y_i(S)}{U_j(S)}$$

La expresión completa para las " i " salidas $Y_i(S)$ es

$$Y_i(S) = G_{i1}(S)U_1(S) + G_{i2}(S)U_2(S) + \dots + G_{ir}(S)U_r(S) \quad (33)$$

1.2.1 Vector Espacio

Un vector espacio " V " en un campo " F " es definido como un conjunto de todos los vectores en " F " para el cual la operación de adición y multiplicación por escalares son definidos y satisfacen

las siguientes reglas:

- a.- Para cualquier par de vectores X y Y en " V ", la suma de X y Y , denotado por $X + Y$, pertenece a " V ". La adición de vectores es conmutativa y asociativa, es decir:

$$X + Y = Y + X$$

$$(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$$

- b.- Para cualquier par de vectores X y Y en " V " existe un vector único " Z " en " V ", tal que $X + Z = Y$. En particular existe un vector único en " V " denotado por " 0 " tal que $X + 0 = X$. para todo X en " V ", y para muchos vectores X en " V ", corresponde un vector único $-X$ en " V " tal que $X + (-X) = 0$.

- c.- Para cualquier vector X en Y y cualquier escalar C en " F " el producto CX pertenece a V , la multiplicación de vectores por escalares es asociativa y distributiva, es decir:

$$(C_1 C_2) X = C_1 (C_2 X)$$

$$C(X + Y) = CX + CY$$

$$(C_1 + C_2)X = C_1 X + C_2 X$$

El producto de la matriz identidad I y un vector X es el mismo vector X :

$$IX = X$$

La definición anterior implica que un vector espacio es un conjunto de vectores con respecto a la suma de vectores y multiplicación de vectores por escalares.

Si " F " es el campo de números reales, " V " es llamado un vector espacio real, sin embargo, si " F " es el campo de número complejo " V " es llamado un vector espacio complejo.

Un vector espacio " V " es llamado un vector espacio dimensionalmente finito si el número de elementos en su base es finito. El número de elementos en una base de un vector espacio dimensionalmente finito " V " es llamado la dimensión de " V ".

Para un vector espacio dado " V " una base no es única, en un vector espacio n dimensional algunas veces tienen " n " elementos. Algún conjunto

de "n" vectores linealmente independientes es una base de un vector espacio n- dimensional. Por ejemplo los siguientes vectores:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad X_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

constituyen una base de un vector espacio tridimensional.

1.2.2 Valores Característicos

Observando las Ecs. (29) y (32) vemos que la matriz inversa $(SI - A)^{-1}$ juega un papel muy importante en la solución de las ecuaciones del sistema en el dominio S, y en la determinación de la función de transferencia. En realidad ésta es la matriz que determina la ecuación característica del sistema.

La inversa de la matriz cuadrada M es definida como una matriz M^{-1} tal que:

$$M.M^{-1} = M^{-1} . M = I$$

Obtenemos M^{-1} desde la matriz anexa de M y de

la determinante de M

$$M^{-1} = \frac{\text{Anex } M}{\text{Det } M} \quad (34)$$

Ya que la determinante $|SI - A|$ aparece en el denominador de todos los $G_{ij}(S)$, la determinante de:

$$|SI - A| \quad (I = \text{mátriz identidad})$$

es llamado el polinomio característico de A y éste es un polinomio de grado n en S. La ecuación característica está dada por $|SI - A| = 0$, ó

$$|SI - A| = \begin{vmatrix} -a_{11} + \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & -a_{22} + \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & -a_{nn} + \lambda \end{vmatrix} \quad (35)$$

$$|SI - A| = (\lambda^n + C_1 \lambda^{n-1} + \dots + C_{n-2} \lambda^2 + C_{n-1} \lambda + C_n) = 0$$

Las "n" raíces de la ecuación característica son los valores característicos de A. Ellas son también llamadas las raíces características. Una matriz real A de "nxn" no necesariamente posee valores característicos reales. Pero ya que $|SI - A| = 0$ es un polinomio con coeficientes reales, algunos valores característicos complejos

pueden ocurrir en pares conjugados. Es decir, si $\alpha + j\beta$ es un valor característico, entonces $\alpha - j\beta$ es también un valor característico de A. Para una matriz diagonal o una matriz triangular, los "n" elementos diagonales son los valores característicos de la matriz.

Si definimos los valores característicos de A como $\lambda_i(A)$, y también de A^{-1} como $\mu_i(A^{-1})$, entonces

$$\lambda^{-1}_i(A) = \mu_i(A^{-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (36)$$

Es decir, si λ_i es un valor característico de A, entonces λ^{-1}_i es un valor característico de A^{-1} .

Finalmente, es posible considerar que, para 2 matrices cuadradas A y B

$$|\lambda I - AB| = |\lambda I - BA|$$

según las ecuaciones del sistema de ciclo abierto, la representación en el estado espacio es:

$$\dot{H} = A.H + B.Q$$

$$\begin{bmatrix} \dot{H}_1 \\ \dot{H}_2 \\ \dot{H}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{M}{C_1} & \frac{1}{R_2 C_1} & 0 \\ \frac{1}{R_2 C_2} & -\frac{N}{C_2} & \frac{1}{R_4 C_2} \\ 0 & \frac{1}{R_4 C_3} & -\frac{P}{C_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [q]$$

Para el prototipo que se analiza la ecuación característica $|\lambda I - A| = 0$ es (Ref. Sección 2.2):

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{bmatrix} -3.51 \times 10^{-3} & 3.24 \times 10^{-3} & 0 \\ 3.24 \times 10^{-3} & -6.67 \times 10^{-3} & 3.14 \times 10^{-3} \\ 0 & 3.141 \times 10^{-3} & -3.442 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = 0$$

Desarrollando la determinante tenemos:

$$\begin{vmatrix} \lambda + 3.51 \times 10^{-3} & -3.24 \times 10^{-3} & 0 \\ -3.241 \times 10^{-3} & \lambda + 6.67 \times 10^{-3} & -3.141 \times 10^{-3} \\ 0 & -3.141 \times 10^{-3} & \lambda + 3.442 \times 10^{-3} \end{vmatrix} = 0$$

La ecuación es:

$$(\lambda^3 + 0.01346\lambda^2 + 3.80723 \times 10^{-5}\lambda + 9.78145 \times 10^{-9}) = 0$$

Por lo tanto los valores característicos son:

$$\lambda_1 = -2.8503 \times 10^{-4}$$

$$\lambda_2 = -3.5748 \times 10^{-3}$$

$$\lambda_3 = -9.5999 \times 10^{-3}$$

Estos valores serán utilizados más adelante para hallar los vectores característicos (o modos naturales de oscilación), para luego poder determinar la observabilidad y controlabilidad del sistema.

1.2.3 Vectores Característicos

El vector P_i de "n x 1" términos satisface la ecuación matricial siguiente:

$$(\lambda_i I - A)P_i = 0 \quad (37)$$

Donde λ_i es el valor característico de A de "n x n" términos. P_i es llamado el vector característico de A asociado con el valor característico λ_i . Ya que los componentes de P_i son determinados desde "n" ecuaciones algebraicas lineales homogéneas, si P_i es un vector característico entonces para algún escalar $\alpha \neq 0$, αP_i es también un vector característico.

El vector característico es llamado un vector característico normalizado, si la longitud o el valor absoluto del vector es la unidad.

Dado el sistema lineal:

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t)$$

Donde $X(t)$ es un vector de "n" componente, $U(t)$ es un vector de "r" componentes y A tiene distintos valores característicos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. A continuación se introduce la matriz no singular P cuyas columnas son los vectores característicos P_i , y se efectúa la siguiente transformación:

$$X(t) = PY(t) \quad (39)$$

Transformando la Ec. (38) en

$$\dot{Y}(t) = \Lambda Y(t) + \Gamma U(t) \quad (40)$$

Con Λ dado por la matriz diagonal

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (n \times n) \quad (41)$$

Esta transformación es también conocida como la transformación de similaridad.

Sustituyendo la Ec. (39) en la Ec. (38), tenemos:

$$\Lambda = P^{-1}AP \quad (42)$$

y

$$\Gamma = P^{-1}B \quad (n \times r) \quad (43)$$

Para determinar la matriz P , se puede hacer el uso de los vectores característicos de A , obteniéndose:

$$P = [P_1 P_2 \dots P_n] \quad (44)$$

Donde $P_i (i = 1, 2, \dots, n)$, son los vectores característicos que están asociados con los valores característicos λ_i . Es decir:

$$\lambda_i P_i = A P_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (45)$$

Formando la matriz "n x n"

$$\begin{aligned} [\lambda_1 P_1 \ \lambda_2 P_2 \ \dots \ \lambda_n P_n] &= [A P_1 A P_2 \ \dots \ A P_n] \\ &= A [P_1 P_2 \ \dots \ P_n] \end{aligned} \quad (46)$$

$$\text{ó } [P_1 P_2 \dots P_n] \Lambda = A [P_1 P_2 \dots P_n] \quad (47)$$

$$\text{Además: } P = [P_1 P_2 \dots P_n]$$

Luego la Ec. (47) es:

$$P \Lambda = A P \quad (48)$$

ó

$$\Lambda = P^{-1} A P \quad (49)$$

La cual es la transformación deseada expresada en términos de los vectores característicos.

Si la matriz A es de la forma canónica de fase variable* , puede ser demostrado que la matriz P que diagonaliza A, es la matriz de Vandermonde:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_n^2 \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad (50)$$

Donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, son los valores característicos de A. Ya que ha sido demostrado que P

* Ver Ref. (5) Pág. 120

contiene en sus columnas los vectores característicos de A, mostraremos que las columnas de la matriz en la Ec. (50) son los vectores característicos de A que son asociados con λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Considerando:

$$P_i = \begin{bmatrix} P_{i1} \\ P_{i2} \\ \vdots \\ P_{in} \end{bmatrix} \quad (51)$$

Son los vectores característicos de A, entonces:

$$(\lambda_i I - A) P_i = 0$$

6

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & \lambda_i + a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i1} \\ P_{i2} \\ \vdots \\ P_{in} \end{bmatrix} = 0 \quad (52)$$

Esta ecuación implica que:

$$\begin{aligned} \lambda_i P_{i1} - P_{i2} &= 0 \\ \lambda_i P_{i2} - P_{i3} &= 0 \\ \lambda_i P_{i,n-1} - P_{in} &= 0 \end{aligned} \quad (53)$$

$$a_n P_{i1} + a_{n-1} P_{i2} + \dots (\lambda_i + a_1) P_{in} = 0$$

Considerando arbitrariamente que $P_{i1} = 1$, entonces la Ec (53) es:

$$P_{i2} = \lambda_i$$

$$P_{i3} = \lambda_i^2$$

$$P_{i,n-1} = \lambda_i^{n-2}$$

$$P_{i,n} = \lambda_i^{n-1}$$

(54)

La cual representa los elementos de las columnas de la matriz de la Ec. (50).

Para nuestro caso particular substituyendo los valores característicos en la ecuación (37) determinamos los vectores característicos.

$$\text{Para } \lambda_1 = -2.8503 \times 10^{-4}$$

$$\left[\begin{array}{c} \lambda_1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{ccc} -3.51 \times 10^{-3} & 3.24 \times 10^{-3} & 0 \\ 3.24 \times 10^{-3} & -6.67 \times 10^{-3} & 3.141 \times 10^{-3} \\ 0 & 3.141 \times 10^{-3} & -3.442 \times 10^{-3} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} P_{11} \\ P_{12} \\ P_{13} \end{array} \right] = 0$$

De donde:

$$3.23 \times 10^{-3} P_{11} - 3.241 \times 10^{-3} P_{12} = 0$$

$$\begin{aligned}
 -3.241 \times 10^{-3} P_{11} + 6.38 \times 10^{-3} P_{12} - 3.14 \times 10^{-3} P_{13} &= 0 \\
 -3.14 \times 10^{-3} P_{12} + 3.16 \times 10^{-3} P_{13} &= 0
 \end{aligned}$$

De estas ecuaciones determinamos:

$$P_{11} = 1.005 P_{12} \cong P_{12}$$

$$P_{12} = 1.005 P_{13} \cong P_{13}$$

Como $P_{11} = P_{12}$, $P_{12} = P_{13}$ entonces: $P_{11} = P_{13}$

Considerando $P_{11} = 1$; tenemos $P_{12} = 1$ y $P_{13} = 1$

Obtenemos el primer vector característico, que es el primer modo:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Interpretando físicamente este vector característico, vemos que corresponde al modo de oscilación natural en que los niveles de los tres tanques oscilan en fase.

Para $\lambda_2 = -3.5748 \times 10^{-3}$

Tenemos las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 -6.375 \times 10^{-5} P_{21} - 3.241 \times 10^{-3} P_{22} &= 0 \\
 -3.241 \times 10^{-3} P_{21} + 3.093 \times 10^{-3} P_{22} - 3.141 \times 10^{-3} P_{23} &= 0 \\
 -3.141 \times 10^{-3} P_{22} - 1.320 \times 10^{-4} P_{23} &= 0
 \end{aligned}$$

De estas ecuaciones determinamos:

$$P_{22} = 0 \quad \text{considerando } 6.375 \times 10^{-5} \approx 0$$

$$P_{21} = 0.969 \quad P_{23} \approx -P_{23}$$

$$\text{Considerando } P_{21} = 1 \text{ Tenemos: } P_{23} = -1$$

Entonces el segundo vector característico o segundo modo natural de oscilación es:

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Este modo corresponde al tanque intermedio sin oscilar, y los dos tanques extremos oscilando en oposición de fase.

$$\text{Para } \lambda_3 = -9.5999 \times 10^{-3}$$

Tenemos las ecuaciones:

$$-6.089 \times 10^{-3} P_{31} - 3.241 \times 10^{-3} P_{32} = 0$$

$$-3.241 \times 10^{-3} P_{31} - 2.932 \times 10^{-3} P_{32} - 3.141 \times 10^{-3} P_{33} = 0$$

$$-3.141 \times 10^{-3} P_{32} - 6.158 \times 10^{-3} P_{33} = 0$$

De estas ecuaciones determinamos

$$P_{32} = -1.878 P_{31} \approx -2 P_{31}$$

$$P_{32} = -1.961 P_{33} \approx -2 P_{33}$$

$$\text{Considerando } P_{32} = 2 \text{ Tenemos: } P_{31} = -1; P_{33} = -1$$

Entonces el tercer vector característico o tercer modo natural de oscilación es:

$$P_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

En este modo de oscilación natural los dos tanques extremos oscilan en fase, y el del centro tiene el doble de amplitud y desfasado 180° .

1.2.4 Representación en el Estado Espacio a partir de la Función de Transferencia

Utilizando la notación vectorial-matricial, se puede expresar una ecuación diferencial de n -ésimo orden por una ecuación diferencial vectorial-matricial de primer orden.

Si " n " elementos del vector constituyen un juego de variables de estado, se denomina ecuación de estado a la ecuación diferencial vectorial-matricial.

Se hace notar que la representación en estado espacio de la función de transferencia siguiente:

$$\frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{b_0 S^n + b_1 S^{n-1} + \dots + b_{n-1} S + b_n}{S^n + a_1 S^{n-1} + \dots + a_{n-1} S + a_n} \quad (55)$$

o su respectiva ecuación diferencial:

$$^{(n)}Y + a_1^{(n-1)}Y + \dots + a_{n-1}^{(n-1)}\dot{Y} + a_n^{(n-1)}Y = b_0^{(n)}U + b_1^{(n-1)}\dot{U} + \dots + b_{n-1}^{(n-1)}\dot{U} + b_n^{(n)}U$$

Entonces debemos definir las variables de estado que deben ser tales que eliminen las derivadas de U en la ecuación de estado (56).

$$\begin{aligned}\dot{X} &= AX + BU \\ Y &= CX + DU\end{aligned}\tag{56}$$

Notando que el conocimiento de $Y(0)$, $Y^1(0)$, ..., $Y^{(n-1)}(0)$, juntamente con las entradas $U(t)$ para $t \geq 0$ determinan totalmente el comportamiento futuro del sistema.

Sabemos que si se definen las siguientes "n" variables como un conjunto de "n" variables de estado.

$$\begin{aligned}X_1 &= Y - \beta_0 U \\ X_2 &= \dot{Y} - \beta_0 \dot{U} - \beta_1 U = \dot{X}_1 - \beta_1 U \\ X_3 &= \ddot{Y} - \beta_0 \ddot{U} - \beta_1 \dot{U} - \beta_2 U = \dot{X}_2 - \beta_2 U \\ X_n &= Y^{(n-1)} - \beta_0^{(n-1)} U^{(n-1)} - \beta_1^{(n-1)} \dot{U}^{(n-1)} - \dots - \beta_{n-2}^{(n-1)} \dot{U} - \beta_{n-1}^{(n-1)} U = \dot{X}_{n-1} - \beta_{n-1} U\end{aligned}\tag{57}$$

Donde $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ son determinados por:

$$\beta_0 = b_0$$

$$\beta_1 = b_1 - a_1\beta_0 \quad (58)$$

$$\beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0$$

$$\beta_3 = b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\beta_0$$

$$\beta_n = b_n - a_1\beta_{n-1} - \dots - a_{n-1}\beta_1 - a_n\beta_0$$

Está garantizado la existencia y unicidad de la solución de la ecuación de estado.

Con la elección actual de variables de estado, se obtienen las ecuaciones de estado y de salida para el sistema, de las ecuaciones (56), (57) y (58)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} [U]$$

$$Y = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0 U$$

En forma matricial:

$$\dot{X} = AX + BU$$

$$Y = CX + DU$$

Donde:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & a_1 \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_{n-2} \\ B_n \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0 \dots \dots \dots 0], \quad D = B_0 - b_0$$

Se puede determinar la condición inicial $X(0)$ utilizando la ecuación (57).

Partiendo de la función de transferencia del sistema, tanto para la entrada en el primer tanque como en el segundo tanque lo representaremos en el método de estado espacio.

Para el caso cuando consideramos la salida " H_3 " con respecto a la entrada de " Q " en el primer tanque tenemos:

$$\frac{H_3(S)}{Q(S)} = \frac{R_2 R_4}{ABCR_2^2 R_4^2 - AR_2^2 - CR_4^2}$$

La ecuación diferencial correspondiente es:

$$\ddot{H}_3 + A1\ddot{H}_3 + A2\dot{H}_3 + A3H_3 = A4Q$$

Donde:

$$A1 = \frac{PC_1C_2 + NC_1C_3 + MC_2C_3}{C_1C_2C_3}$$

$$A2 = \frac{NPC_1R_2^2R_4^2 + MPC_2R_2^2R_4^2 + MNC_3R_2^2R_4^2 - C_1R_2^2 - C_3R_4^2}{C_1C_2C_3R_2^2R_4^2}$$

$$A3 = \frac{MNPR_2^2R_4^2 - MR_2^2 - PR_4^2}{C_1C_2C_3R_2^2R_4^2}$$

$$A4 = \frac{1}{C_1C_2C_3R_2R_4}$$

Obtenemos una representación en el estado espacio del sistema con referencia a la ecuación (57), se define así:

$$X_1 = H_3 - B_0Q$$

$$X_2 = \dot{H}_3 - B_0\dot{Q} - B_1Q = \dot{X}_1 - B_1Q$$

$$X_3 = \ddot{H}_3 - B_0\ddot{Q} - B_1\dot{Q} - B_2Q = \dot{X}_2 - B_2Q$$

De la ecuación (58), se determinan B_0 , B_1 , B_2 de la siguiente manera:

$$B_0 = b_0 = 0$$

$$B_1 = b_1 - a_1B_0 = 0 - a_1(0) = 0$$

$$B_2 = b_2 - a_1B_1 - a_2B_0 = 0 - a_1(0) - a_2(0) = 0$$

$$B_3 = b_3 - a_1B_2 - a_2B_1 - a_3B_0$$

$$B_3 = \frac{1}{C_1C_2C_3R_2R_4} - a_1(0) - a_2(0) - a_3(0) = \frac{1}{C_1C_2C_3R_2R_4}$$

Entonces la ecuación de estado del sistema pasa a ser:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -A_3 & -A_2 & -A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ A_4 \end{bmatrix} \quad [Q]$$

Como sabemos que:

$$H_3 = X_1$$

$$\dot{H}_3 = X_2$$

$$\ddot{H}_3 = X_3$$

Podemos determinar una relación entre la salida H_1 y H_2 con las variables de estado X_1 , X_2 y X_3 por medio de las funciones de transferencia que se obtiene a partir del diagrama de bloque de la Fig. N° 8 (b)

$$\frac{H_3(S)}{H_1(S)} = \frac{R_4}{(BCR_4^2 - 1)R_2}$$

$$\frac{H_3(S)}{H_2(S)} = \frac{1}{CR_4}$$

Analizando la primera función de transferencia tenemos:

$$H_1 = \frac{R_2(R_4^2 NP - 1)}{R_4} H_3 + R_2 R_4 (PC_2 + NC_3) \dot{H}_3 + R_2 R_4 C_2 C_3 \ddot{H}_3$$

Entonces, reemplazando en función de las variables de estado:

$$H_1 = \frac{R_2 (R_4^2 NP - 1)}{R_4} X_1 + R_2 R_4 (PC_2 + NC_3) X_2 + R_2 R_4 C_2 C_3 X_3$$

Ahora analizando la segunda función de transferencia tenemos:

$$H_2 = R_4 PH_3 + R_4 C_3 \dot{H}_3$$

Reemplazando en función de las variables de estado

$$H_2 = R_4 PX_1 + R_4 C_3 X_2$$

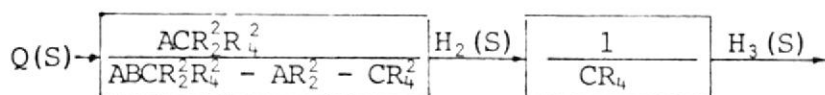
Por lo tanto podemos obtener la ecuación de salida en el método estado-espacio, analizando los tres niveles de los tanques

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(R_4^2 NP - 1) R_2}{R_4} & R_2 R_4 (PC_2 + NC_3) & R_2 R_4 C_2 C_3 \\ R_4 P & R_4 C_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

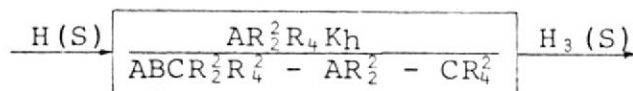
Invirtiendo la matriz podemos obtener las variables de estado X_1 , X_2 y X_3 en función de las condiciones iniciales $H_1(0)$, $H_2(0)$ y $H_3(0)$:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{R_4 C_3} & \frac{-P}{C_3} \\ \frac{1}{R_2 R_4 C_2 C_3} & \frac{-PC_2 + NC_3}{R_4 C_2 C_3^2} & \frac{R_4^2 P^2 C_2 + C_3}{R_4 C_2 C_3^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1(0) \\ H_2(0) \\ H_3(0) \end{bmatrix}$$

Para el caso que se tenga la entrada en el segundo tanque:



Sabiendo que $\frac{Q(S)}{H(S)} = K_h$ y analizando con respecto a la salida del nivel del tercer tanque tenemos:



La función de transferencia sería:

$$\frac{H_3(S)}{H(S)} = \frac{AR_2^2 R_4 K_h}{ABCR_2^2 R_4^2 - AR_2^2 - CR_4^2}$$

y su correspondiente ecuación diferencial es:

$$\ddot{H}_3 + A5\ddot{H}_3 + A6\dot{H}_3 + A7H_3 = A8\dot{H} + A9H$$

Donde:

$$A5 = \frac{PC_1C_2 + NC_1C_3 + MC_2C_3}{C_1C_2C_3}$$

$$A6 = \frac{NPC_1R_2^2R_4^2 + MPC_2R_2^2R_4^2 + MNC_3R_2^2R_4^2 - C_1R_2^2 - C_3R_4^2}{C_1C_2C_3R_2^2R_4^2}$$

$$A7 = \frac{MNPR_2^2R_4^2 - MR_2^2 - PR_4^2}{C_1C_2C_3R_2^2R_4^2}$$

$$A8 = K_h/C_2C_3R_4$$

$$A9 = MK_h/C_1C_2C_3R_4$$

Obtenemos una representación en el estado espacio del sistema con referencia a la ecuación (57).

Definimos:

$$X_1 = H_3 - B_0 H$$

$$X_2 = \dot{H}_3 - B_0 \dot{H} - B_1 H = \dot{X}_1 - B_1 H$$

$$X_3 = \ddot{H}_3 - B_0 \ddot{H} - B_1 \dot{H} - B_2 H = \dot{X}_2 - B_2 H$$

De la Ec. (58) se determinan: B_0 , B_1 , B_2 , de la siguiente manera:

$$B_0 = b_0 = 0$$

$$B_1 = b_1 - a_1 B_0 = 0 - a_1(0) = 0$$

$$B_2 = b_2 - a_1 B_1 - a_2 B_0 = \frac{Kh}{C_2 C_3 R_4} - a_1(0) - a_2(0) = \frac{Kh}{C_2 C_3 R_4}$$

$$B_3 = b_3 - a_1 B_2 - a_2 B_1 - a_3 B_0 =$$

$$= \frac{MK_h}{C_1 C_2 C_3 R_4} - \frac{(PC_1 C_2 + NC_1 C_3 + MC_2 C_3)}{C_1 C_2 C_3} \left[\frac{Kh}{C_2 C_3 R_4} \right] - a_2(0) - a_3(0) =$$

$$= \frac{(PC_1 C_2 + NC_1 C_3)Kh}{C_1 C_2 C_3 R_4} = -A_{10}$$

Entonces, la ecuación de estado del sistema es:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -A_7 & -A_6 & -A_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ A_8 \\ -A_{10} \end{bmatrix} \quad [H]$$

Como sabemos que:

$$H_3 = X_1$$

$$\dot{H}_3 = X_2$$

$$\ddot{H}_3 = X_3 + \frac{Kh}{C_2 C_3 R_4} H$$

Podemos determinar una relación entre la salida H_1 y H_2 con las variables de estado X_1 , X_2 , X_3 .

por medio de las funciones de transferencia que se obtiene a partir del diagrama de bloque de la Fig. N° 5.

$$\frac{H_3(S)}{H_2(S)} = \frac{1}{R_4(P + C_3S)}$$

Analizando la primera función de transferencia que nos relaciona H_3 con H_2

$$H_2 = R_4 P H_3 + R_4 C_3 \dot{H}_3$$

entonces

$$H_2 = R_4 P X_1 + R_4 C_3 X_2$$

Analizando el punto de suma en la entrada de H_2 tenemos:

$$E = K_h H + \frac{H_1}{R_2} + \frac{H_3}{R_4}$$

Obtenemos la relación de la salida H_2 con la entrada E

$$E = N H_2 + C_2 \dot{H}_2$$

Entonces:

$$K_h H + \frac{H_1}{R_2} + \frac{H_3}{R_4} = N H_2 + C_2 \dot{H}_2$$

De la expresión para H_2 obtenemos su derivada

$$\dot{H}_2 = R_4 \dot{P} H_3 + R_4 C_3 \dot{H}_3$$

$$\ddot{H}_2 = R_4 \ddot{P} H_3 + R_4 C_3 \ddot{H}_3$$

Reemplazando tenemos:

$$K_h H + \frac{H_1}{R_2} + \frac{H_3}{R_4} = N(R_4 \dot{P} H_3 + R_4 C_3 \dot{H}_3) + C_2 (R_4 \dot{P} H_3 + R_4 C_3 \ddot{H}_3)$$

Además la relación de H_3 con X_1 , X_2 y X_3

$$K_h H + \frac{H_1}{R_2} + \frac{X_1}{R_4} = N R_4 P X_1 + N R_4 C_3 X_2 + C_2 R_4 P X_2 + R_4 C_3 C_2 (X_3 + \frac{K_h H}{C_2 C_3 R_4})$$

$$H_1 = (N R_2 R_4 P - \frac{R_2}{R_4}) X_1 + (R_2 R_4 N C_3 + R_2 R_4 P C_2) X_2 + R_2 R_4 C_3 C_2 X_3$$

Entonces obtenemos la ecuación de salida en el método de estado espacio, analizando los tres niveles:

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_2 (N R_4^2 P - 1)}{R_4} & R_2 R_4 (N C_3 + P C_2) & R_2 R_4 C_2 C_3 \\ R_4 P & R_4 C_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

Nuevamente despejando las variables de estado X_1 , X_2 , X_3 en función de las variables H_1 , H_2 y H_3 , obtenemos:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{R_4 C_3} & -\frac{P}{C_3} \\ \frac{1}{R_2 R_4 C_2 C_3} & -\frac{(P C_2 + N C_3)}{R_4 C_2 C_3^2} & \frac{R_4^2 P^2 C_2 + C_3}{R_4 C_2 C_3^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1(0) \\ H_2(0) \\ H_3(0) \end{bmatrix}$$

Entonces, se han determinado las ecuaciones de estado, cuando el sistema es de ciclo abierto, para los casos en que la entrada es en el primer tanque, y el caso en que la entrada es en el segundo tanque*. Estas ecuaciones serán usadas más adelante.

1.2.5 Obtención de la Solución de la Ecuación de Estado Espacio

Considerando el sistema de nivel de líquido de los 3 tanques, pero analizando el sistema de ciclo abierto lo representamos en el estado espacio considerando una entrada y sus respectivas salidas. Como el sistema que estamos analizando es de múltiples salidas y una entrada, utilizamos el método de estado espacio, el cual se describe por el conjunto de "n" ecuaciones diferenciales de primer orden, entonces:

$$C_1 \frac{dH_1}{dt} = -MH_1 + \frac{H_2}{R_2} + Q$$

$$C_2 \frac{dH_2}{dt} = \frac{H_1}{R_2} - NH_2 + \frac{H_3}{R_4}$$

$$C_3 \frac{dH_3}{dt} = \frac{H_2}{R_4} - PH_3$$

* Ver Apéndice B, Casos 1 y 2

Por lo tanto, la ecuación de estado es representada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{H}_1 \\ \dot{H}_2 \\ \dot{H}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-M}{C_1} & \frac{1}{R_2 C_1} & 0 \\ \frac{1}{R_2 C_2} & -\frac{N}{C_2} & \frac{1}{R_4 C_2} \\ 0 & \frac{1}{R_4 C_3} & -\frac{P}{C_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [Q] \quad (60)$$

Para obtener la solución de la ecuación de estado espacio seguiremos el siguiente método matricial. Uno de los aspectos más importantes de un método de matrices es que ellos permiten por una solución por computadora. Para ganar una futura comprensión sobre la naturaleza del método de matrices es necesario investigar las técnicas analíticas y los procedimientos para resolver ecuaciones diferenciales en forma de matriz.

Así, considerando el sistema de "n" ecuaciones diferenciales de primer orden, sin fuerza excitadora:

$$\begin{aligned} \dot{H}_1 &= a_{11}H_1 + a_{12}H_2 + \dots + a_{1n}H_n \\ \dot{H}_2 &= a_{21}H_1 + a_{22}H_2 + \dots + a_{2n}H_n \\ \dot{H}_n &= a_{n1}H_1 + a_{n2}H_2 + \dots + a_{nn}H_n \end{aligned} \quad (61)$$

La correspondiente representación matricial es:

$$\dot{H} = AH \quad (62)$$

Donde:

$$H = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

La solución de este sistema es simplificada si se puede determinar una matriz P , tal que la transformación $H = PY$ transforma al sistema anterior en la forma:

$$\begin{aligned} \dot{Y}_1 &= \lambda_1 Y_1 + 0 + \dots + 0 \\ \dot{Y}_2 &= 0 + \lambda_2 Y_2 + \dots + 0 \\ \dot{Y}_n &= 0 + 0 + \dots + \lambda_n Y_n \end{aligned}$$

Esta es la llamada la forma normal. La correspondiente representación matricial es:

$$\dot{Y} = \Lambda Y \quad (63)$$

Donde:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

La matriz Λ es llamada la matriz lambda. Para

determinar P , notamos primeramente que la Ec. (61) es satisfecha por:

$$H_1 = C_1 e^{\lambda t}$$

$$H_2 = C_2 e^{\lambda t}$$

$$H_n = C_n e^{\lambda t}$$

Sustituyendo estos valores de $H_1, H_2, \dots, H_n$ en la Ec. (61) tenemos:

$$C_1 \lambda e^{\lambda t} = a_{11} C_1 e^{\lambda t} + a_{12} C_2 e^{\lambda t} + \dots + a_{1n} C_n e^{\lambda t}$$

$$C_2 \lambda e^{\lambda t} = a_{21} C_1 e^{\lambda t} + a_{22} C_2 e^{\lambda t} + \dots + a_{2n} C_n e^{\lambda t}$$

$$C_n \lambda e^{\lambda t} = a_{n1} C_1 e^{\lambda t} + a_{n2} C_2 e^{\lambda t} + \dots + a_{nn} C_n e^{\lambda t}$$

Cancelando el factor $e^{\lambda t}$ y arreglando nos queda:

$$(a_{11} - \lambda) C_1 + a_{12} C_2 + \dots + a_{1n} C_n = 0$$

$$a_{21} C_1 + (a_{22} - \lambda) C_2 + \dots + a_{2n} C_n = 0$$

$$a_{n1} C_1 + a_{n2} C_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda) C_n = 0$$

Aplicando las reglas de Cramer's para determinar $C_1, C_2, \dots, C_n$ nos da que la solución no trivial ocurre si, y solo si:

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad (64)$$

La representación matricial para la determinante anterior es:

$$|A - \lambda I| = 0 \quad (65)$$

Al evaluar esta determinante, resulta un polinomio de orden "n" en λ .

Este polinomio es la ecuación característica para el sistema. Las raíces de la ecuación característica son los "n" valores de λ para lo cual la ecuación característica se resuelve. Estos "n" valores, son designados $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, para $\lambda = \lambda_i$, la Ec. (64) toma la forma:

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda_i) & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda_i) & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & (a_{nn} - \lambda_i) \end{vmatrix} = 0$$

Designando los cofactores de la primera fila como $A_{11}, A_{21}, \dots, A_{n1}$ la determinante anterior puede ser expresada en términos de sus expansiones de la primera fila, que es:

$$(a_{11} - \lambda_i)A_{11} + a_{12}A_{21} + \dots + a_{1n}A_{n1} = 0$$

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{21} + \dots + a_{1n}A_{n1} = \lambda_i A_{11}$$

Si la primera fila es reemplazada por las "m" filas; el valor de la determinante es todavía cero. La expansión de la primera fila es:

$$a_{m1}A_{1i} + a_{m2}A_{2i} + \dots + (a_{mn} - \lambda_i)A_{ni} + \dots a_{mi}A_{ni} = 0 \quad \text{ó}$$

$$a_{m1}A_{1i} + a_{m2}A_{2i} + \dots + a_{mi}A_{ni} + \dots + a_{ni}A_{ni} = \lambda_i A_{ni} \quad (66)$$

Aplicando la transformación $H = PY$ a la Ec. (62) obtenemos:

$$\dot{H} = AH = APY$$

Si P es determinada como la matriz:

$$P = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \dots \dots A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} \dots \dots A_{2n} \\ A_{n1} & A_{n2} \dots \dots A_{nn} \end{bmatrix} \quad (67)$$

Entonces el producto AP es:

$$AP = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} \dots A_{1i} \dots A_{1n} \\ A_{21} \dots A_{2i} \dots A_{2n} \\ A_{n1} \dots A_{ni} \dots A_{nn} \end{bmatrix}$$

El producto de las "m" fila de la matriz A y las "i" columna de la matriz P es el lado izquierdo de la Ec. (66), que es igual a $\lambda_i A_{ni}$. El resultado del producto AP puede ser escrito en la

forma:

$$AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 A_{11} & \dots & \lambda_i A_{1i} & \dots & \lambda_n A_{1n} \\ \lambda_1 A_{21} & & \lambda_i A_{2i} & & \lambda_n A_{2n} \\ \lambda_1 A_{n1} & & \lambda_i A_{ni} & & \lambda_n A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 A_{11} & \lambda_2 A_{12} & \dots & \lambda_n A_{1n} \\ \lambda_1 A_{21} & \lambda_2 A_{22} & \dots & \lambda_n A_{2n} \\ \lambda_1 A_{n1} & \lambda_2 A_{n2} & \dots & \lambda_n A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$AP = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \dots A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} \dots A_{2n} \\ A_{n1} & A_{n2} \dots A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \dots \dots 0 \\ 0 & \lambda_2 \dots \dots 0 \\ 0 & 0 \dots \dots \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$AP = P\Lambda$$

Multiplicando por P^{-1} tenemos que:

$$P^{-1} AP = \Lambda \quad (68)$$

La sustitución de $H = PY$ y $\dot{H} = P\dot{Y}$ en la ecuación (62) nos da:

$$P\dot{Y} = APY$$

Premultiplicando por P^{-1} tenemos:

$$\dot{Y} = P^{-1}APY = \Lambda Y \quad (69)$$

Así la matriz P es dada por la Ec. (67) y es la matriz deseada la cual transforma a la Ec. (61) a la forma canónica.

En la forma general dada por la Ec. (61), no hay función forzada $f(t)$ y esto se denomina el caso libre de fuerza. La representación general de estado espacio para un sistema excitado por una función forzada $f(t)$ es:

$$\begin{aligned}\dot{H}_1 &= a_{11}H_1 + a_{12}H_2 + \dots + a_{1n}H_n + b_1f(t) \\ \dot{H}_2 &= a_{21}H_1 + a_{22}H_2 + \dots + a_{2n}H_n + b_2f(t) \\ \dot{H}_n &= a_{n1}H_1 + a_{n2}H_2 + \dots + a_{nn}H_n + b_nf(t)\end{aligned}$$

La correspondiente forma matricial es:

$$\dot{H} = AH + Bf(t) \quad (70)$$

Donde:

$$H = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_n \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

La transformación $H = PY$ transforma este sistema en la forma:

$$P\dot{Y} = APY + Bf(t)$$

Premultiplicando por la inversa P^{-1} tenemos:

$$\dot{Y} = P^{-1}APY + P^{-1}Bf(t) = AY + P^{-1}Bf(t) \quad (71)$$

Esta es la forma canónica deseada.

Para resolver la forma canónica, es necesario transformar las condiciones iniciales desde el sistema original al sistema canónico; $Y(0) = P^{-1}H(0)$. La solución del sistema original es obtenida por la transformación de la solución canónica a las variables de estado original, $H = PY$. Las matrices P y P^{-1} pueden ser obtenidas por el método clásico anteriormente explicado.

Según el método para el sistema excitado por una función forzada y además conociendo el nivel en que van a trabajar los tanques, las resistencias tanto de salidas como la de interconexión de un tanque a otro, donde las áreas transversal de los tres tanques son iguales, determinamos la solución de la ecuación (60).

Los valores de las resistencias y de las áreas, están determinadas en las Págs. N^os. 235, 238 y son los siguientes:

$$\begin{aligned} R_1 &= 5.714 \frac{\text{seg}}{\text{cm}^2} & R_2 &= 0.4762 \frac{\text{seg}}{\text{cm}^2} & R_3 &= 5.405 \frac{\text{seg}}{\text{cm}^2} \\ R_4 &= 0.4914 \frac{\text{seg}}{\text{cm}^2} & R_5 &= 5.128 \frac{\text{seg}}{\text{cm}^2} & C_1 = C_2 = C_3 &= 647.92 \text{cm}^2 \end{aligned}$$

Reemplazando estos valores en la Ec. (60), tenemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{H}_1 \\ \dot{H}_2 \\ \dot{H}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.51 \times 10^{-3} & 3.24 \times 10^{-3} & 0 \\ 3.24 \times 10^{-3} & -6.67 \times 10^{-3} & 3.141 \times 10^{-3} \\ 0 & 3.141 \times 10^{-3} & -3.442 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.5434 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [Q]$$

Los valores característicos que a continuación anotamos fueron determinados anteriormente (Ver Pág. N° 66).

$$\lambda_1 = -2.8503 \times 10^{-4}$$

$$\lambda_2 = -3.5748 \times 10^{-3}$$

$$\lambda_3 = -9.5999 \times 10^{-3}$$

A partir de estos valores característicos se obtienen los vectores característicos (Ver. Pág. 72)

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad P_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La matriz modal es construida a partir de los vectores característicos

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

La matriz inversa es:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/6 & 1/3 & -1/6 \end{bmatrix}$$

La evaluación de $\Lambda = P^{-1}AP$ verifica que P es tal que diagonaliza a la matriz A transformándola en la matriz Λ , en la cual los valores característicos aparecen en la diagonal.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/6 & 1/3 & -1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3.51 \times 10^{-3} & 3.24 \times 10^{-3} & 0 \\ 3.24 \times 10^{-3} & -6.67 \times 10^{-3} & 3.141 \times 10^{-3} \\ 0 & 3.141 \times 10^{-3} & -3.442 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -2.8503 \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & -3.5748 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & -9.5999 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

Como el sistema tiene una entrada y es forzado, la forma canónica de este sistema es:

$$\dot{Y} = \Lambda Y + P^{-1}BQ(t)$$

La ecuación de estado en el dominio diagonalizado (modal) es:

$$\begin{bmatrix} \dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_2 \\ \dot{Y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.8503 \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & -3.5748 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & -9.5999 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/6 & 1/3 & -1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5434 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [Q]$$

Las correspondientes ecuaciones diferenciales son:

$$\dot{Y}_1 + 2.8503 \times 10^{-4} Y_1 = 5.144 \times 10^{-4} Q_1$$

$$\dot{Y}_2 + 3.5748 \times 10^{-3} Y_2 = 7.717 \times 10^{-4} Q_1$$

$$\dot{Y}_3 + 9.5999 \times 10^{-3} Y_3 = 2.572 \times 10^{-4} Q_1$$

Asumiendo las condiciones iniciales:

$$H_1(0) = 0; \quad H_2(0) = 0; \quad H_3(0) = 0'$$

Las condiciones iniciales en términos de Y ,
($Y = P^{-1}H$) también serán cero.

Para el caso cuando "Q" es una función escalón
de $76.67 \text{ Cm}^3/\text{seg}$ tenemos:

$$\dot{Y}_1 + 2.8503 \times 10^{-4} Y_1 = 3.944 \times 10^{-2}$$

$$\dot{Y}_2 + 3.5748 \times 10^{-3} Y_2 = 5.916 \times 10^{-2}$$

$$\dot{Y}_3 + 9.5999 \times 10^{-3} Y_3 = 1.972 \times 10^{-2}$$

Obtenemos las soluciones de estas ecuaciones:

$$Y_{1C}(t) = c_1 e^{-2.8503 \times 10^{-4} t} \quad Y_{1P}(t) = 138.4$$

$$\text{donde: } Y_1(t) = c_1 e^{-2.8503 \times 10^{-4} t} + 138.4$$

$$Y_{2C}(t) = c_2 e^{-3.5748 \times 10^{-3} t} \quad Y_{2P}(t) = 16.55$$

$$\text{Donde: } Y_2(t) = c_2 e^{-3.5748 \times 10^{-3} t} + 16.55$$

$$Y_{3C}(t) = c_3 e^{-9.5999 \times 10^{-3} t} \quad Y_{3P}(t) = 2.054$$

$$\text{Donde: } Y_3(t) = c_3 e^{-9.5999 \times 10^{-3} t} + 2.054$$

Las constantes C_1 , C_2 , C_3 son evaluadas a partir de las condiciones iniciales:

$$Y_1 = Y_2 = Y_3 = 0 \text{ para } t = 0$$

Entonces tenemos:

$$c_1 = -138.4$$

$$c_2 = -16.55$$

$$c_3 = -2.054$$

Luego:

$$Y_1(t) = -138.4 e^{-2.8503 \times 10^{-4} t} + 138.4$$

$$Y_2(t) = -16.55 e^{-3.5748 \times 10^{-3} t} + 16.55$$

$$Y_3(t) = -2.054 e^{-9.5999 \times 10^{-3} t} + 2.054$$

La solución deseada es obtenida por la transformación de $H = PY$ que es la variable de estado original.

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix}$$

Donde:

$$H_1(t) = Y_1(t) + Y_2(t) - Y_3(t)$$

$$H_2(t) = Y_1(t) + 2Y_3(t)$$

$$H_3(t) = Y_1(t) - Y_2(t) - Y_3(t)$$

Reemplazando los valores de $Y_1(t)$, $Y_2(t)$ y $Y_3(t)$, obtenemos la solución del sistema para una entrada escalón $Q = 76.67 \text{ cm}^3/\text{seg}$:

$$H_1(t) = 2.054e^{-9.5999 \times 10^{-3}t} - 16.55e^{-3.5748 \times 10^{-3}t} - 138.4e^{-2.8503 \times 10^{-4}t} + 152.0$$

$$H_2(t) = -4.108e^{-9.5999 \times 10^{-3}t} - 138.4e^{-2.8503 \times 10^{-4}t} + 142.51$$

$$H_3(t) = 2.054e^{-9.5999 \times 10^{-3}t} + 16.55e^{-3.5748 \times 10^{-3}t} - 138.4e^{-2.8503 \times 10^{-4}t} + 119.8$$

1.2.6 Controlabilidad y Observabilidad

Un sistema es controlable en el tiempo t_0 si es posible transferir un sistema por medio de un vector de control no restringido, desde cualquier estado inicial $X(t_0)$ a cualquier otro estado en

un intervalo de tiempo finito.

Un sistema es observable en el tiempo t_0 si, con el sistema en el estado $X(t_0)$, es posible determinar este estado, partiendo de la observación de la salida durante un intervalo de tiempo finito.

Analizando la controlabilidad, tenemos que aún cuando la mayor parte los sistemas físicos son controlables y observables, los modelos matemáticos correspondientes, pueden no poseer las propiedades de controlabilidad y observabilidad, entonces es necesario conocer las condiciones bajo las cuales un sistema es controlable y observable.

Comenzaremos por definir la independencia lineal de vectores y luego se deducen las condiciones para una controlabilidad de estado completa.

Independencia Lineal de Vectores.- Los Vectores $X_1, X_2, \dots, X_n$ son linealmente independientes si:

$$C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n = 0$$

Donde $C_1, C_2, \dots, C_n$, son constante, implica que:

$$C_1 = C_2 = \dots C_n = 0$$

Inversamente los vectores $X_1, X_2, \dots, X_n$ son linealmente dependientes, si y solamente si, se puede expresar X_i como una combinación lineal de X_j ($j = 1, 2, \dots, n; j \neq i$), ó

$$X_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n C_j X_j$$

Para algún conjunto de constantes C_j , esto significa que si se puede expresar X_i como una combinación lineal de los otros vectores en el conjunto, es linealmente dependiente de ellos, o no es un término independiente del conjunto.

La controlabilidad de estado completo considerando el sistema de tiempo continuo:

$$\dot{H} = AH + BU \quad (72)$$

Donde:

H = Vector de estado (vector n-dimensional)

U = Señal de Control

$A = \text{Matriz de "n \times n"}$

$B = \text{Matriz de "n \times 1"}$

Deducimos la condición de controlabilidad completa de estado, suponiendo que el estado final es el origen del estado espacio y que el tiempo inicial es cero, o sea $t_0 = 0$.

La solución de la Ec. (72) es:

$$H(t) = e^{At}X(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}BU(\tau)d\tau$$

Aplicando la definición de controlabilidad completa de estado tenemos:

$$H(t_1) = 0 = e^{At_1}H(0) + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}BU(\tau)d\tau$$

o

$$H(0) = -\int_0^{t_1} e^{-A\tau}BU(\tau)d\tau \quad (73)$$

Se puede escribir: $e^{-A\tau}$ en la siguiente forma, usando el teorema de Caley-Hamilton*:

$$e^{-A\tau} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau)A^k \quad (74)$$

Reemplazando la Ec. (74) en la Ec. (73)

$$H(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau)U(\tau)d\tau \quad (75)$$

* Ref. (5), pág. 146



Si:

$$\int_0^{t_1} \alpha_k(\tau) U(\tau) d\tau = \beta_k$$

La Ec. (75) es:

$$H(0) = - \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \beta_k$$

$$H(0) = - [B | AB | \dots | A^{n-1}B] \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \quad (76)$$

Esto requiera que el rango de la matriz "nxn"

$$[B | AB | \dots | A^{n-1}B]$$

Sea "n".

De este análisis se puede establecer la condición de controlabilidad de estado completo:

El sistema dado por la Ec. (72) es de estado completamente controlable, si y solamente si, los vectores $B, AB, \dots, A^{n-1}B$, son linealmente independiente, o si la matriz de "nxn"

$$[B | AB | \dots | A^{n-1}B]$$

Es de rango "n".

Una forma alternativa de la condición de contro-

labilidad completa de estado para el mismo sistema de tiempo continuo analizado anteriormente es la siguiente. Teniendo que:

U = Vector de control (Vector r -dimensional)

B = Matriz de "nxr"

Si los vectores característicos de A son distintos, es posible hallar una matriz de transformación P tal que:

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Cada columna de la matriz P es un vector característico de A asociado con λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$)

Se define: $H = PY$ (77)

Reemplazando la Ec. (77) en la Ec. (72), se obtiene:

$$\dot{Y} = P^{-1}APY + P^{-1}BU \quad (78)$$

Definiendo: $P^{-1}B = F = (f_{ij})$

Se escribe la Ecuación (78)

$$\dot{Y}_1 = \lambda_1 Y_1 + f_{11} U_1 + f_{12} U_2 + \dots + f_{1r} U_r$$

$$\dot{Y}_2 = \lambda_2 Y_2 + f_{21} U_1 + f_{22} U_2 + \dots + f_{2r} U_r$$

$$\dot{Y}_n = \lambda_n Y_n + f_{n1} U_1 + f_{n2} U_2 + \dots + f_{nr} U_r$$

Si los elementos de cualquier fila en la matriz F de "n x r" son todos cero la correspondiente variable de estado no puede ser controlada por ninguna de las U_i . Por tanto, la condición de estado de controlabilidad completa, es que si los vectores característicos de A son distintos, el sistema será de estado completamente controlable si, y solamente si, ninguna fila de $P^{-1}B$ tenga todos sus elementos cero. Es importante notar que para aplicar esta condición de controlabilidad completa de estado, hay que poner la matriz $P^{-1}AP$ en la Ec. (78) en forma diagonal.

Si la matriz A en la Ec. (72) no tiene vectores característicos distintos, la diagonalización es imposible. En ese caso, se puede transformar A en la forma canónica de Jordan.

Analizando la observabilidad completa del siste-

ma continuo descrito por las ecuaciones:

$$\dot{H} = AH \quad (79)$$

$$Y = CH \quad (80)$$

El vector de salida $Y(t)$ es:

$$Y(t) = Ce^{At}H(0)$$

Sabiendo que:

$$e^{At} = \sum_{K=0}^{n-1} \alpha_K(t) A^K$$

Se obtiene:

$$Y(t) = \sum_{K=0}^{n-1} \alpha_K(t) CA^K H(0)$$

6

$$Y(t) = \alpha_0(t)CH(0) + \alpha_1(t)CAH(0) + \dots + \alpha_{n-1}(t)CA^{n-1}H(0) \quad (81)$$

Si el sistema es completamente observable, dada la salida $Y(t)$ en un intervalo de tiempo $0 \leq t \leq t_1$, $H(0)$ queda determinada en forma única a partir de la Ec. (80). Se puede demostrar que ésto requiere que el rango de la matriz "nmxn"

$$\begin{bmatrix} C \\ \dots\dots\dots \\ CA \\ \dots\dots\dots \\ CA^{n-1} \\ \dots\dots\dots \end{bmatrix}$$

Sea "n".

De este análisis se puede establecer la condición de observabilidad como sigue: El sistema descrito por las Ecs. (79) y (80) es completamente observable si, y solamente si, la matriz de "n x n".

$$[C^* \quad AC^* \quad \dots \quad (A^*)^{n-1}C^*]$$

Es de rango "n" o tiene vectores columna linealmente independientes.

La forma alternativa de la condición de observabilidad completa del mismo sistema continuo es suponiendo que la matriz de transformación P transforma A en una matriz diagonal

$$P^{-1}AP = \Lambda$$

Donde Λ es una matriz diagonal.

Se define $H = PZ$

Entonces se puede escribir las Ecs. (79) y (80) como:

$$\dot{Z} = P^{-1}APZ = \Lambda Z$$

$$Y = CPZ$$

Por tanto

$$Y(t) = CPe^{\Lambda t}Z(0)$$

6

$$Y(t) = CP \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} Z(0) = CP \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & z_1(0) \\ e^{\lambda_2 t} & z_2(0) \\ e^{\lambda_n t} & z_n(0) \end{bmatrix}$$

El sistema es completamente observable si ninguna de las columnas de la matriz CP de "mxn" consiste en todos elementos cero. Esto es porque si la i-ésima columna de CP consiste en todos los elementos cero, la variable de estado $z_i(0)$ no aparecerá en la ecuación de salida y, por tanto no se podrá determinar por observación de $Y(t)$.

Por tanto, no se puede determinar $H(0)$ que está relacionada con $Z(0)$ por la matriz no singular P.

Si no se puede transformar la matriz A en una matriz diagonal, utilizando una matriz de transformación S adecuada, se transforma A en la forma canónica de Jordan o:

$$S^{-1}AS = J$$

Donde J está en la forma canónica de Jordan. Se

define: $H = SZ$

Entonces se puede escribir las Ecs. (79) y (80)

$$\dot{Z} = S^{-1}ASZ = JZ$$

$$Y = CSZ$$

Por tanto:

$$Y(t) = CSe^{Jt}Z(0)$$

El sistema es completamente observable si: (1) no hay dos bloques de Jordan en J asociadas a los mismos valores característicos, (2) ninguna columna de CS que corresponde a la primera fila en cada bloque de Jordan consiste en elementos nulos y (3) ninguna columna de CS que corresponde a valores característicos distintos consiste en elementos cero.

Conociendo los conceptos en las condiciones tanto para la controlabilidad y observabilidad, analizamos el sistema (partiendo de las ecuaciones de estado espacio), considerando tres entradas; cómo se muestra en la Fig. N° 13.

Para diseñar el sistema de control apropiado pa-

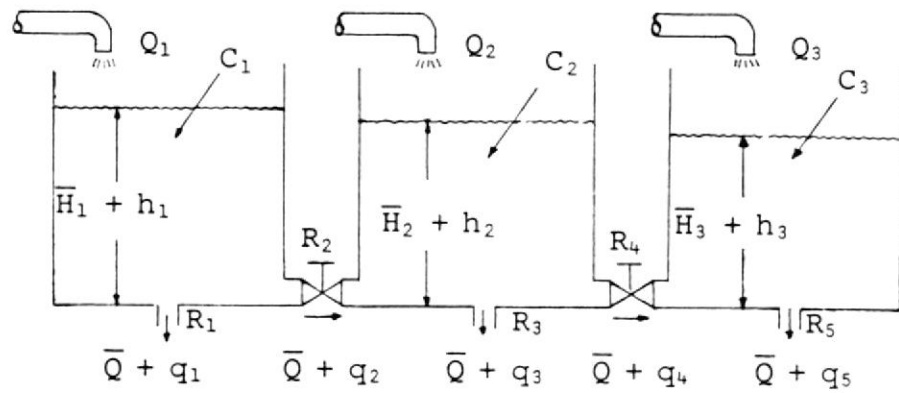


Fig. N° 13.- Sistema de tres tanques en serie con tres entradas.

ra este sistema hay que determinar cuál de las tres posibles entradas Q_1 , Q_2 , Q_3 hay que controlar y cuál de las variables de estado H_1 , H_2 , H_3 hay que medir.

Las ecuaciones de estado son:

$$\begin{bmatrix} \dot{H}_1 \\ \dot{H}_2 \\ \dot{H}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{M}{C_1} & \frac{1}{R_2 C_1} & 0 \\ \frac{1}{R_2 C_2} & -\frac{N}{C_2} & \frac{1}{R_4 C_2} \\ 0 & \frac{1}{R_4 C_3} & -\frac{P}{C_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix}$$

Reemplazando los valores de las resistencias y de las áreas tenemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{H}_1 \\ \dot{H}_2 \\ \dot{H}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.51 \times 10^{-3} & 3.24 \times 10^{-3} & 0 \\ 3.24 \times 10^{-3} & -6.67 \times 10^{-3} & 3.141 \times 10^{-3} \\ 0 & 3.141 \times 10^{-3} & -3.442 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 1.5434 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 1.5434 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 1.5434 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix}$$

Debido a que la matriz A es idéntica a la de la sección anterior, se consideran los valores característicos y los vectores característicos anteriormente determinados (Ver Págs. N° 66 y 72) de los cuales se determina la matriz modal P que es:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Los valores característicos dan la respuesta característica u oscilación libre de un sistema modal y los vectores característicos dan el modo de oscilación o respuesta característica correspondiente a cada valor característico. Es conveniente observar el estado del sistema como un punto en el espacio vectorial H_1, H_2, H_3 .

Los tres vectores característicos están en direcciones no paralelas en el estado espacio (Fig. N° 14(a)). Estos son movidos a diferentes razones

a lo largo de estos vectores que está descrito por el modo característicos (debido a que los vectores característicos no son paralelos a cualquier otro, algún punto en el estado espacio puede ser representado en término de componentes en cualquier dirección de los vectores característicos). Cualquier modo de oscilación libre del sistema con condiciones iniciales arbitrarias puede ser representado como la suma de vectores paralelos a los vectores característicos.

El significado físico de los modos es mostrado en la Fig. N° 14 (b). El primer modo describe un estado de movimiento en el cual el nivel es simultáneamente igual en todos los tanques. El segundo modo describe un estado en el cual el primer y el tercer nivel de los tanques son movidos en dirección opuesta y el nivel del segundo tanque no es movido. En el tercer modo, el nivel en el tanque uno y en el tercero se dirigen en dirección opuesta al nivel del tanque dos. La razón de disminución de cualquiera de los modos es dado por el término exponencial $e^{\lambda_1 t}$. En este caso, el tercer modo disminuye más rápidamente ($\lambda_3 = -9.5999 \times 10^{-3}$), y el pri-

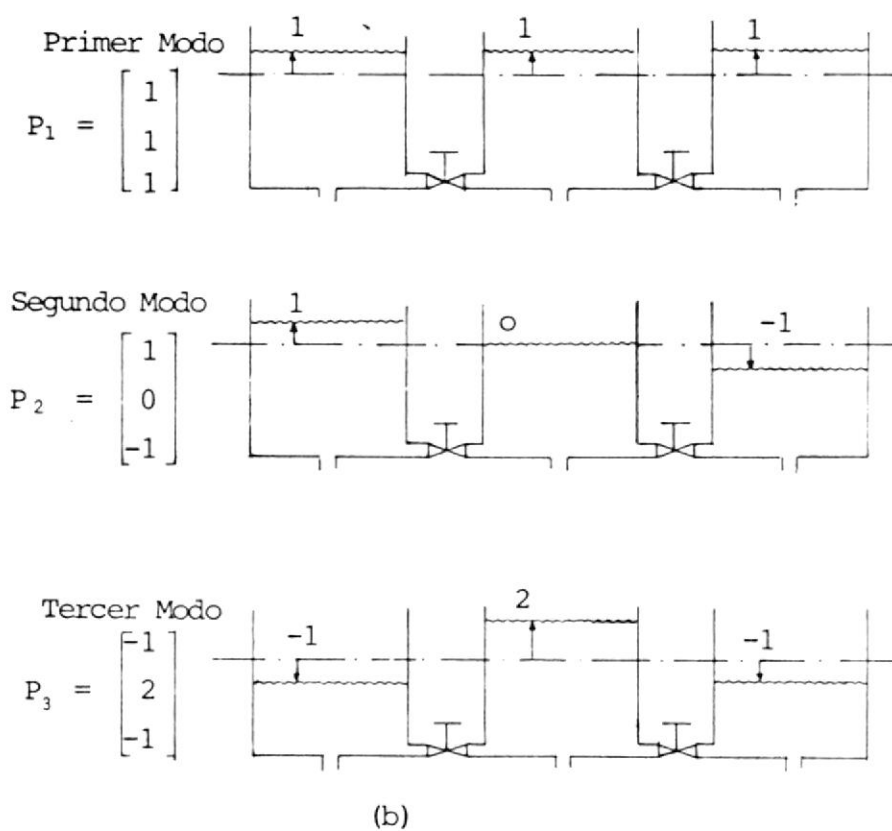
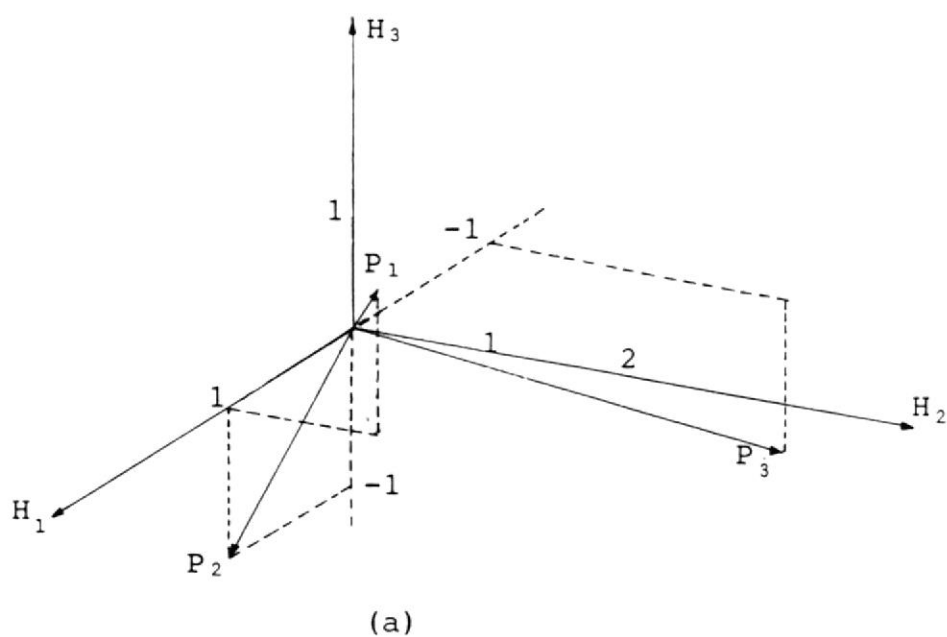


Fig. N° 14.- Modos Característicos del Sistema de Tres Tanques.

mer modo disminuye más lentamente ($\lambda_1 = -.2.8503 \times 10^{-4}$)

La ecuación de estado en el dominio diagonalizado (modal) es:

$$\begin{bmatrix} \dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_2 \\ \dot{Y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28503 \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & -3.5748 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & -9.5999 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/6 & 1/3 & -1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.55434 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 1.5434 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 1.5434 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix}$$

Se establece el efecto de las entradas Q_1 , Q_2 , y Q_3 en el control del sistema, analizando la ecuación de estado. Para que una entrada controle el sistema, ésta debe afectar todos los modos del mismo.

Al analizar la controlabilidad determinamos el producto $P^{-1}B$:

$$P^{-1}B = \begin{bmatrix} 5.145 \times 10^{-4} & 5.145 \times 10^{-4} & 5.145 \times 10^{-4} \\ 7.717 \times 10^{-4} & 0 & -7.717 \times 10^{-4} \\ -2.572 \times 10^{-4} & 5.145 \times 10^{-4} & -2.572 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Entonces el sistema es controlable por la prime-

mera o tercera entrada porque la matriz $P^{-1}B$ no tiene cero en su primera o tercera fila; pero no es controlable por la segunda entrada, ya que el cero en la segunda posición de la segunda fila de $P^{-1}B$ muestra que la entrada Q_2 no tiene efecto sobre el segundo modo (Ver Fig. N° 15)

La salida es analizada en forma similar. Considérese el vector de salida Y .

$$Y = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix}$$

La ecuación de salida es:

$$Y = CH + DQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} H + (0)Q$$

En el dominio modal esta ecuación es:

$$Y = CPH^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1^* \\ H_2^* \\ H_3^* \end{bmatrix}$$

El cero que aparece en la segunda fila del producto CP muestra que el segundo modo no es observable

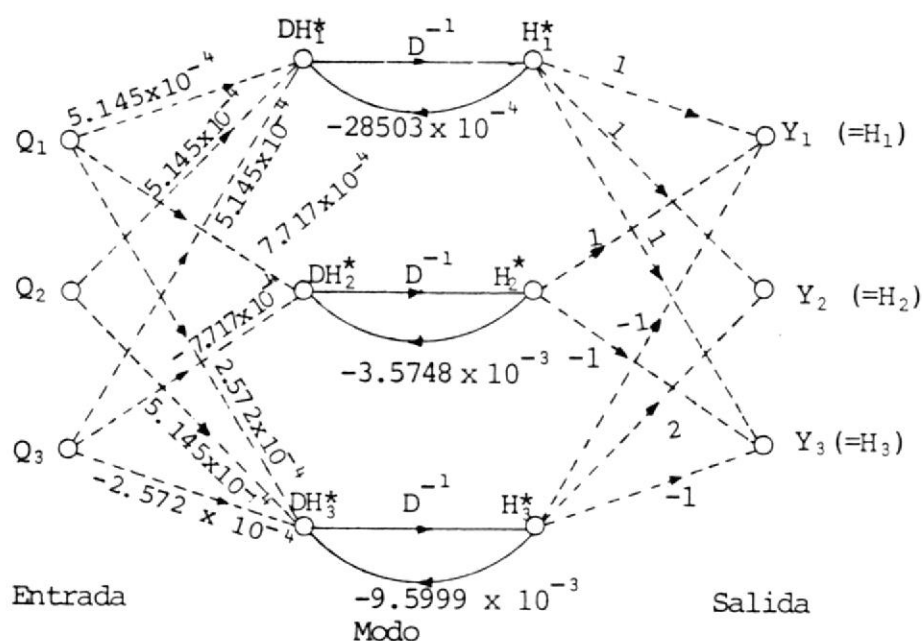


Fig. N° 15.- Diagrama de Flujo de Señal de los tres tanques en el dominio modal.

por intermedio de la salida Y_2 .

El significado físico de estos resultados para obtener un control objetivo, si el sistema es forzado por medio de un líquido introducido en el tanque intermedio (entrada Q_2) del sistema, se encuentra que ninguna manipulación de la entrada tiene ningún efecto sobre el segundo modo; afecta solamente la amplitud del primer y tercer modo. Además, ninguna lectura en el segundo modo puede obtenerse por medio de la observación de este modo, el nivel del segundo tanque.

1.2.7 Método Digital para Obtener la Respuesta del Sistema

Una aplicación útil de la relación que será derivada en esta sección, es la solución en la computadora digital, para la respuesta, en base del tiempo del sistema lineal, y de tiempo continuo. Por la naturaleza de la computadora digital, la solución, en el dominio del tiempo será realizada paso por paso, que es la solución obtenida para un número finito de puntos en el tiempo.

La solución del cálculo digital (o solución numérica), es un modelo de tiempo discreto del proceso de tiempo continuo real. Seguiremos varios pasos y produciremos un Algoritmo, que es una secuencia numérica y una operación lógica, la cual es trasladada en un programa de computadora. En la construcción del algoritmo, no se incluye algún dato específico. El algoritmo que formula el modelo de tiempo discreto y calcula la respuesta en base del tiempo, se determina de la siguiente forma:

La solución en serie de la Ec. (25) es:

$$X(t) = S(t)X(0) + \int_0^t S(t - \tau)BU(\tau)d\tau \quad (82)$$

Donde,

$$S(t) = e^{AT} = I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \dots + \frac{1}{n!} A^n t^n \quad (83)$$

A continuación determinamos la derivación de la ecuación en diferencias finitas de matrices a partir de la Ec. (82), para un intervalo de tiempo $KT \leq t \leq (K + 1)T$, donde T represente el intervalo de prueba.

$$X_{K+1} = e^{AT}X_K + e^{AT} \int_0^t e^{-A\tau'} BU(\tau')d\tau' \quad (84)$$

Donde

$$\tau' = \tau - KT$$

Considerando que la entrada $Q(t)$ es constante dentro del intervalo de tiempo y que los cambios ocurren en la función de entrada al final del intervalo de tiempo.

Con estas asunciones podemos integrar la Ec. (84)

$$X_{K+1} = e^{AT}X_K + e^{AT} (I - e^{-AT}) A^{-1} BU_K$$

$$X_{K+1} = e^{AT}X_K + (e^{AT} - I) A^{-1} BU_K \quad (85)$$

Asumiendo adicionalmente que A^{-1} existe, tenemos la siguiente ecuación

$$X_{K+1} = PX_K + QU_K \quad (86)$$

Donde,

$$P = e^{AT} = S(T); \quad Q = (S(T) - I)A^{-1}B$$

Para determinar la solución en el dominio del tiempo comenzamos con una condición X_0 , aplicando la Ec. (85) repetidamente, que es de la siguiente manera:

Usamos la ecuación para determinar X_1 y sustituimos el valor encontrado de X_1 en el lado derecho de la ecuación para determinar X_2 y así sucesivamente hasta X_n . El resultado obtenido es equivalente a:

$$X_K = P^K X_0 + \sum_{i=0}^{K-1} P^{K-1-i} Q U_i \quad (87)$$

Como la nueva solución utiliza más matrices que escalares, el proceso de cálculo es muy tedioso para realizarse por cálculo manual. Una posible técnica para resolver esta ecuación con la ayuda

de una computadora digital es la siguiente:

Para usar la Ec. (87) y determinar la respuesta en base del tiempo de un sistema, calculamos las matrices P y Q, las cuales relacionan las matrices A y B del sistema por la Ec. (86). Ya que el intervalo de prueba T es involucrado al calcular P y Q, estas matrices necesitan ser calculadas una vez para un sistema dado. El intervalo de prueba es escogido a partir de las características del sistema o, si es un modelo digital a partir de un sistema de tiempo continuo.

Una manera simple y conveniente para calcular P y Q es usando la expresión de serie para S(t).

Podemos evitar la matriz inversa (A^{-1}) en la relación Q, expandiendo la cantidad interna al parentésis en una serie de potencia.

$$(S(T) - I) = (I + AT + \frac{1}{2!} (AT)^2 + \dots) - I$$

$$(S(T) - I) = AT + \frac{1}{2!} (AT)^2 + \dots$$

Multiplicando esta serie por A^{-1} , tenemos la si-

guiente expresión, la cual no involucra alguna inversión de matriz para Q.

$$Q = T(I + \frac{1}{2!} AT + \frac{1}{3!} (AT)^2 + \dots)B \quad (88)$$

Resumiendo tenemos el siguiente método* que se seguirá para el cálculo digital:

- 1.- Determinamos $q = \max |A_{ij}T|$, donde A_{ij} , es un elemento de la matriz A.
- 2.- Encontramos un p que aproximadamente satisface la ecuación:

$$\frac{1}{p!} (nq)^p e^{nq} = 0.001$$
 donde, n es el orden del sistema.
- 3.- Calculamos P desde la Ec. (83) terminando la serie después de los p términos.
- 4.- Calculamos Q desde la Ec. (88), terminando la serie después de los p términos.
- 5.- Determinamos la respuesta en base del tiempo desde la Ec. (87).

* Método de Paynter, Ref. (9), p. 103

1.2.7.1 Diagrama de Flujo

El diagrama de flujo es en general un conjunto de instrucciones que pueden ser usadas para resolver una clase de problemas. Después que el diagrama de flujos es obtenido y ha sido escrito el programa de computadora, los datos son introducidos para un problema específico, donde el programa de computadora puede ser usado repetidamente para resolver muchos problemas específicos. El diagrama de flujo que formula el modelo de tiempo discreto y calcula su respuesta en un tiempo dado se muestra en la Fig. N° 16.

Este diagrama de flujo se inicia leyendo el incremento de tiempo y los valores de la matriz características, donde determinamos el máximo valor absoluto entre el producto del incremento de tiempo con los valores de los elementos de la matriz característica, luego determinamos un valor de p para que se cumpla la relación:

$$\left(\frac{1}{p!}\right) (nq)^p e^{nq} \leq 0.001$$

Donde n es el orden del sistema, seguidamente inicializamos la matriz identidad tanto para la matriz P como para la matriz QS , y se determinan los valores de las matrices P y QS hasta el valor de p anteriormente determinado.

A partir de la matriz QS determinamos el valor de la matriz Q multiplicando por los coeficientes de la matriz B y el incremento del tiempo. Luego consideramos las condiciones iniciales, las entradas y el tiempo máximo para obtener la respuesta deseada del sistema y sumamos los valores del producto de la matriz P por el incremento de tiempo más el producto de la matriz Q por la entrada. Finalmente obtenemos los resultados y los graficamos en la pantalla. Este diagrama de flujo que se utiliza en esta tesis, es descrito en una forma específica en el Apéndice A. (Ver Pág.338)

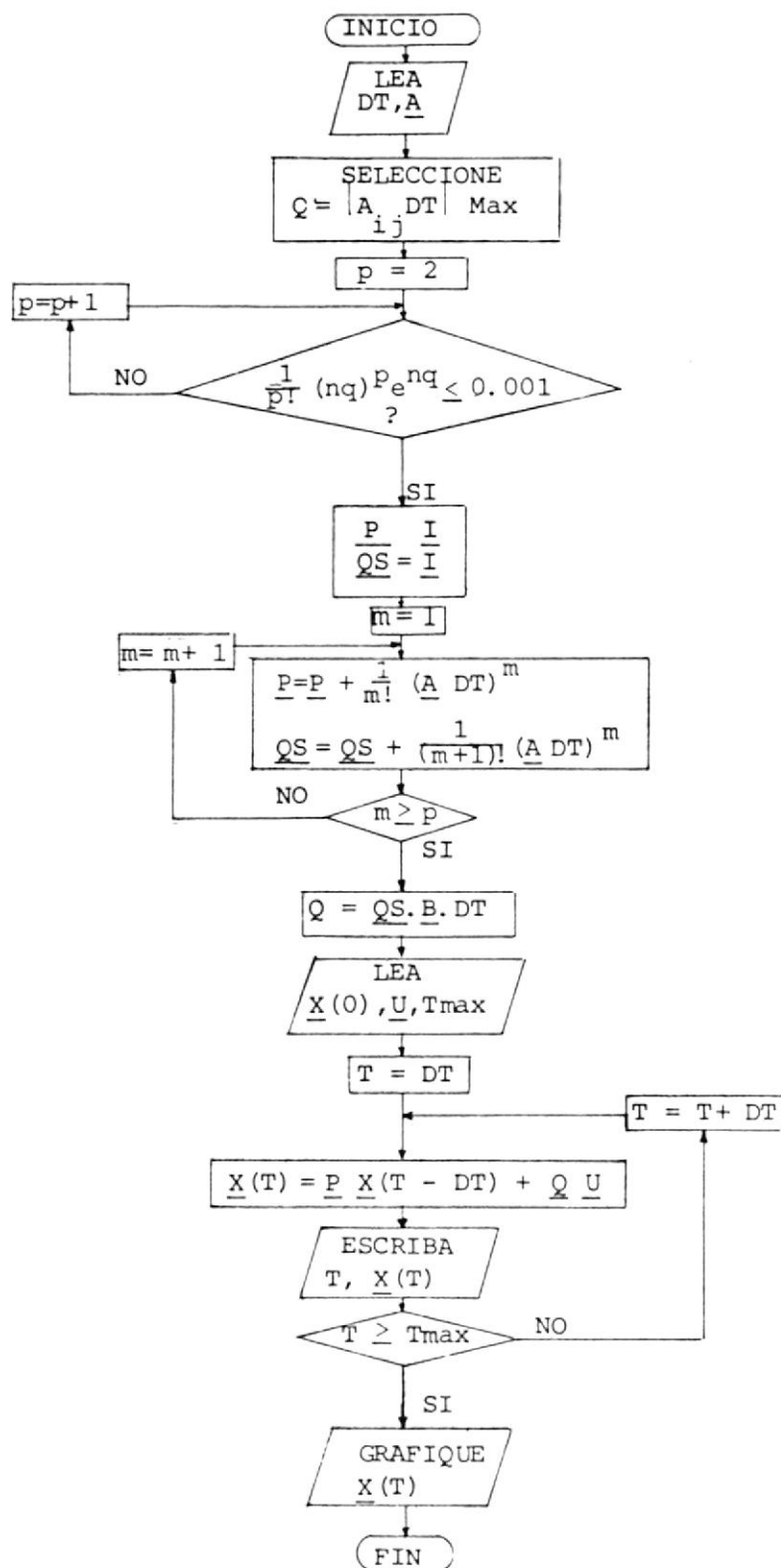


Fig. N° 16.- Diagrama de Flujo para determinar la Respuesta del Sistema.

1.3 ACCIONES DE CONTROL

La acción de control se refiere a la manera que la señal actuante es empleada por los elementos de control del sistema para lograr las correcciones relativas a una desviación. Cuando únicamente se aplica al instrumento de medición el término forma de control, describe la manera en que un controlador en particular, cambia su salida relativa a una señal de desviación. En la práctica se considera que la acción de control de un controlador, es la forma que se aplica a la regulación de un proceso.

El conocimiento de las características de las diversas acciones de control es útil al predecir la respuesta de los sistemas de control. Especialmente en aquellos casos donde las funciones de transferencia para las partes del sistema que está siendo controlado son desconocidas, o, no están bien definidas y además permite al Ingeniero de control hallar la solución más apropiada para una aplicación en particular.

Deberá hacerse hincapié en que la acción de control aplicada a la corrección de la entrada de un proceso, es resultante de las características de operación de

todos los elementos funcionales que componen el sistema de control.

Cada acción de control tiene sus ventajas características y sus limitaciones. Por lo general mientras más difícil sea controlar un proceso, más complicado será la acción de control que mejor se adapte al control del citado proceso. En este capítulo analizaremos 3 acciones de control básicas, que son: El control proporcional, el control integral y el control derivativo.

1.3.1 Control Proporcional

Para un control proporcional, se toma la acción correctiva de manera que sea proporcional al error. Expresado matemáticamente, tenemos:

$$M(t) = K_p e(t) \quad (89)$$

Donde:

$M(t)$ = Un cambio de la variable manipulada

K_p = La ganancia del control proporcional

$e(t)$ = El error, o la señal actuante.

La función de transferencia del control proporcional es:

$$\frac{M(S)}{E(S)} = K_p$$

Una característica importante de la acción del control proporcional se describe en la Ec. (89). Si tiene una corrección sostenida (debido a una perturbación sostenida que actúa sobre el sistema), existirá un error correspondiente en el estado estable, es decir:

$$e(t)_{e.e} = \frac{m(t)_{e.e}}{K_p}$$

Cualquiera que sea el mecanismo en sí, y la potencia que lo alimenta, el control proporcional esencialmente es un amplificador con ganancia ajustable. En la Fig. N° 17 se representa un diagrama de bloque de este control.

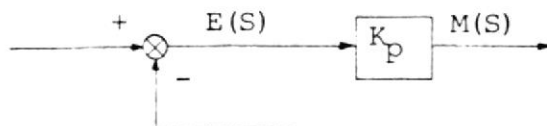


Fig. N° 17.- Diagrama de Bloque de un Control Proporcional.

Analizando el sistema de control de nivel del líquido que se ve en la Fig. N° 18, donde el control es del tipo proporcional y además que todas las variables: r , q , h_1 , h_2 , h_3 , q_1 , q_2 y q_3 están medidas desde sus respectivos valores de estado de régimen y también suponiendo que los valores de las variables son suficientemente pequeñas para que se pueda aproximar al sistema, por un modelo matemático lineal ya obtenido anteriormente en la cual utilizamos directamente las ecuaciones diferenciales de ciclo abierto para representar el sistema en el estado espacio.

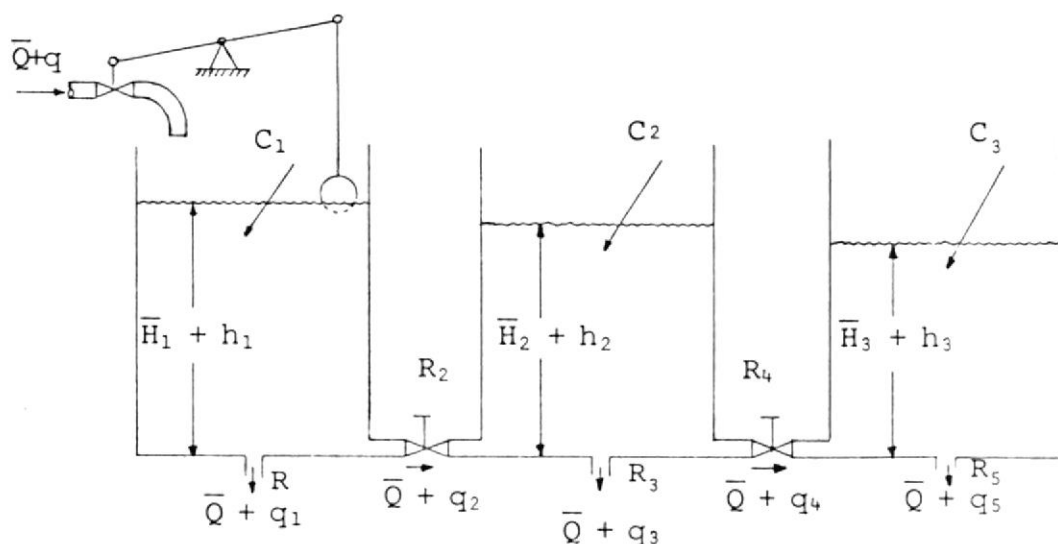


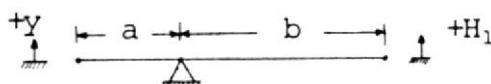
Fig. N° 18.- Sistema de Control de Nivel de Líquido con Control Proporcional.

El cambio del caudal de entrada está dado por la relación en función de la altura del tanque de reservorio y el desplazamiento del vástago de la válvula, donde:

$$q = f(h, y)$$

$$q = \left. \frac{\partial q}{\partial h} \right|_{y = \text{const.}} \cdot h + \left. \frac{\partial q}{\partial y} \right|_{h = \text{const.}} \cdot y$$

Además, el desplazamiento "y" del vástago está relacionada con el control proporcional, donde:



$$K_p = \frac{a}{b} ; \quad y = K_p (-h_1) = -K_p h_1$$

Entonces:

$$q = \left. \frac{\partial q}{\partial h} \right|_{y = \text{const.}} h + \left. \frac{\partial q}{\partial y} \right|_{h = \text{const.}} (-K_p h_1)$$

Los cambios en la válvula se los determina a partir del Gráfico N° 4 que son las curvas de calibración de la válvula alrededor del punto de operación, las cuales se las representa por:



$$K_h = \left. \frac{\partial q}{\partial h} \right|_{y = \text{const.}}$$

$$K_y = \left. \frac{\partial q}{\partial y} \right|_{h = \text{const.}}$$

Considerando el diagrama de bloque de ciclo abierto del sistema obtenemos el diagrama de bloque de ciclo cerrado, como se muestra en la Fig. N° 19.

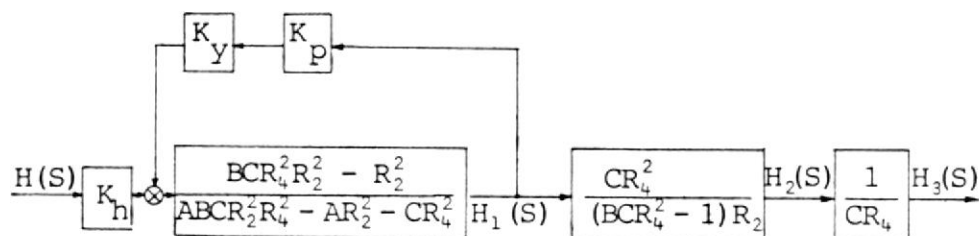
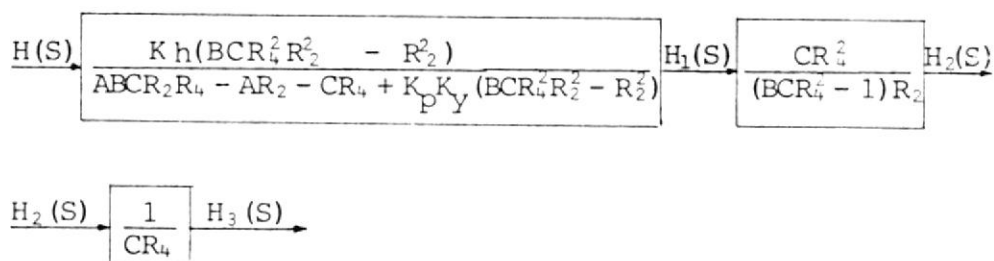


Fig. N° 19.- Diagrama de Bloque de Ciclo Cerrado

Reduciendo el diagrama de bloque tenemos:



El diagrama de bloque analizado desde $H(S)$ hasta $H_3(S)$ es:

$$H(S) \rightarrow \boxed{\frac{K_h R_2 R_4}{ABC R_2^2 R_4^2 - AR_2^2 - CR_4^2 + K_p K_y (BC R_4^2 R_2^2 - R_2^2)}} \rightarrow H_3(S)$$

La respectiva función de transferencia es:

$$\frac{H_3(S)}{H(S)} = \frac{K_h R_2 R_4}{ABC R_2^2 R_4^2 - AR_2^2 - CR_4^2 + K_p K_y (BC R_4^2 R_2^2 - R_2^2)}$$

La correspondiente ecuación diferencial es:

$$\ddot{H}_3 + \frac{A1}{C_1 C_2 C_3} \dot{H}_3 + \frac{A2 - A3}{A6} \dot{H}_3 + \frac{A4 - A5}{A6} H_3 = \frac{K_h}{A7} H$$

Obtenemos una representación en el estado espacio del sistema. Con referencia a la Ec. (57), se define:

$$X_1 = H_3 - B_0 H$$

$$X_2 = \dot{H}_3 - B_0 \dot{H} - B_1 H = \dot{X}_1 - B_1 H$$

$$X_3 = \ddot{H}_3 - B_0 \ddot{H} - B_1 \dot{H} - B_2 H = \dot{X}_2 - B_2 H$$

De la ecuación (58), se determina B_0 , B_1 , B_2 y B_3 que son:

$$B_0 = 0$$

$$B_1 = 0$$

$$B_2 = 0$$

$$B_3 = \frac{K_h}{C_1 C_2 C_3 R_2 R_4}$$

Entonces la ecuación de estado del sistema es:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{A4-A5}{A6} & -\frac{A2-A3}{A6} & -\frac{A1}{C_1C_2C_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_h}{A7} \end{bmatrix} [H]$$

Donde:

$$A1 = PC_1C_2 + NC_1C_3 + MC_2C_3 + K_pK_YC_2C_3$$

$$A2 = R_2^2R_4^2(NPC_1 + MPC_2 + MNC_3 + K_pK_YC_2P + K_pK_YNC_3)$$

$$A3 = C_1R_2^2 + C_3R_4^2$$

$$A4 = R_2^2R_4^2(MNP + K_pK_YNP)$$

$$A5 = MR_2^2 + PR_4^2 + K_pK_YR_2^2$$

$$A6 = C_1C_2C_3R_2^2R_4^2$$

$$A7 = C_1C_2C_3R_2R_4$$

Como sabemos que:

$$H_3 = X_1$$

$$\dot{H}_3 = X_2$$

$$\ddot{H}_3 = X_3$$

Luego se relacionan las salidas H_1 y H_2 con las variables de estado X_1 , X_2 y X_3 por medio de las funciones de transferencia que se determinan a partir del diagrama de bloque del ciclo cerrado.

do, que son:

$$H_1 = \frac{R_2 (R_4^2 NP - 1)}{R_4} X_1 + R_2 R_4 (PC_2 + NC_3) X_2 + R_2 R_4 C_2 C_3 X_3$$

$$H_2 = R_4 P X_1 + R_4 C_3 X_2$$

Por lo tanto, obtenemos la ecuación de la salida en el método de estado espacio analizando los tres niveles.

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_2 (R_4^2 NP - 1)}{R_4} & R_2 R_4 (PC_2 + NC_3) & R_2 R_4 C_2 C_3 \\ R_4 P & R_4 C_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

Invirtiendo la matriz anterior se obtienen las variables X_1 , X_2 , X_3 en función de las condiciones iniciales para H_1 , H_2 , H_3 .

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{R_4 C_3} & -\frac{P}{C_3} \\ \frac{1}{R_2 R_4 C_2 C_3} & -\frac{PC_2 + NC_3}{R_4 C_2 C_3} & \frac{R_4^2 P^2 C_2 + C_3}{R_4^2 C_2 C_3^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1(0) \\ H_2(0) \\ H_3(0) \end{bmatrix}$$

El sistema con la entrada en el primer tanque, con el control proporcional con una ganancia K_p , y evaluando las constantes K_y , K_h alrededor del punto de operación tenemos los siguientes valores numéricos, los cuales serán obtenidos en la parte

experimental de esta tesis.

$$K_p = 0.197$$

$$K_y = 141.97 \text{ Cm/seg}$$

$$K_h = 0.3194 \text{ Cm/seg}$$

Además conociendo los valores de las resistencias y de las áreas de los tanques, obtenemos la respuesta del sistema a partir del programa de computadora. (Ver Apéndice B, Caso 3).

Considerando el sistema con la entrada en el segundo tanque lo analizamos partiendo del diagrama de bloque de ciclo abierto y obtenemos el diagrama de bloque de ciclo cerrado como se muestra en la Fig. N° 20.

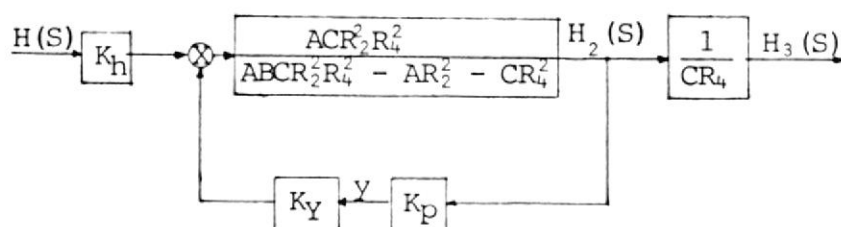


Fig. N° 20.- Sistema de Control de nivel con la entrada en el segundo Tanque.

Reduciendo el diagrama de bloque tenemos:

$$\frac{H(S)}{H(S)} \rightarrow \frac{ACK_p R_2^2 R_4^2}{ABCR_2^2 R_4^2 - AR_2^2 - CR_4^2 + K_p K_Y ACR_2^2 R_4^2} \xrightarrow{H_2(S)} \frac{1}{CR_4} H_3(S)$$

Por lo tanto la función de transferencia de la relación de $H(S)$ con $H(S)$ es:

$$\frac{H_3(S)}{H(S)} = \frac{AK_p R_4 R_2^2}{ABCR_2^2 R_4^2 - AR_2^2 - CR_4^2 + K_p K_Y ACR_2^2 R_4^2}$$

La correspondiente ecuación diferencial es:

$$\ddot{H}_3 + \frac{A1}{C_1 C_2 C_3} \dot{H}_3 + \frac{A2 - A3}{A6} \dot{H}_3 + \frac{A4 - A5}{A6} H_3 = \frac{K_h}{C_2 C_3 R_4} \dot{H} + \frac{K_h M}{A7} H$$

Donde:

$$A1 = PC_1 C_2 + NC_1 C_3 + MC_2 C_3 + K_p K_Y C_1 C_3$$

$$A2 = R_2^2 R_4^2 (NPC_1 + MPC_2 + MNC_3 + K_p K_Y MC_3 + K_p K_Y PC_1)$$

$$A3 = C_1 R_2^2 + C_3 R_4^2$$

$$A4 = R_2^2 R_4^2 (MNP + K_p K_Y PM)$$

$$A5 = MR_2^2 + PR_4^2$$

$$A6 = C_1 C_2 C_3 R_2^2 R_4^2$$

$$A7 = C_1 C_2 C_3 R_4$$

Obtenemos una representación en el estado espacio del sistema, con referencia a la Ec. (57), se define:

$$X_1 = H_3 - B_o H$$

$$X_2 = \dot{H}_3 - B_0 \dot{H} - B_1 H = \dot{X}_1 - B_1 H$$

$$X_3 = \ddot{H}_3 - B_0 \ddot{H} - B_1 \dot{H} - B_2 H = \dot{X}_2 - B_2 H$$

De la Ec. (58) se determinan B_0 , B_1 , B_2 y B_3

$$B_0 = 0$$

$$B_1 = 0$$

$$B_2 = \frac{K_h}{C_2 C_3 R_4}$$

$$B_3 = - \frac{(P C_2 + N C_3 + K_p K_y C_3) K_h}{C_2^2 C_3^2 R_4} = - \frac{N_1}{N_2}$$

Entonces la ecuación de estado espacio del sistema es:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{A_4 - A_5}{A_6} & -\frac{A_2 - A_3}{A_6} & -\frac{A_1}{C_1 C_2 C_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_h}{C_2 C_3 R_4} \\ -\frac{N_1}{N_2} \end{bmatrix} [H]$$

Como

$$H_3 = X_1$$

$$\dot{H}_3 = X_2$$

$$\ddot{H}_3 = X_3 + \frac{K_h}{C_2 C_3 R_4} H$$

Determinamos una relación entre H_1 y H_2 con las variables de estado X_1 , X_2 , y X_3 por medio de las funciones de transferencia que se obtienen a partir del diagrama de bloque de ciclo abierto

$$\frac{H_3(S)}{H_2(S)} = \frac{1}{R_4(P + C_3S)}$$

Analizando la función de transferencia que relaciona H_3 con H_2 tenemos:

$$H_2 = R_4PH_3 + R_4C_3\dot{H}_3$$

Entonces:

$$H_2 = R_4PX_1 + R_4C_3X_2$$

Analizando el punto de suma de la entrada a H_2 tenemos:

$$E = K_H H + \frac{H_1}{R_2} + \frac{H_3}{R_4} - K_P K_Y H_2$$

Obtenemos la relación de la salida H_2 con la entrada E

$$E = NH_2 + C_2\dot{H}_2$$

Igualando ambas expresiones y reemplazando la derivada de H_2 obtenemos H_1

$$H_1 = (R_2NR_4P + R_4PK_PK_YR_2 - \frac{R_2}{R_4})X_1 + (NR_4C_3R_2 + C_2PR_2R_4 + R_2R_4C_3K_PK_Y)X_2 + R_2R_4C_2C_3X_3$$

Luego la ecuación de salida en función de la variable de estado es:

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{PR_2R_4^2P_1 - R_2}{R_4} & C_3R_2R_4P_1 + C_2PR_2R_4 & R_2R_4C_2C_3 \\ R_4P & R_4C_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

Donde, $P_1 = N + K_p K_y$

Invirtiendo la matriz anterior se obtienen las variables X_1 , X_2 , X_3 en función de las condiciones iniciales para H_1 , H_2 , H_3

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{R_4C_3} & -\frac{P}{C_3} \\ \frac{1}{R_2R_4C_2C_3} & -\frac{C_3P_1 + C_2P}{R_4C_2C_3^2} & \frac{C_2P^2R_4^2 + C_3}{C_2C_3^2R_4^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1(0) \\ H_2(0) \\ H_3(0) \end{bmatrix}$$

Teniendo el sistema con una constante de proporcionalidad K_p y evaluando las constantes K_y y K_h alrededor del punto de operación, además conociendo los valores de las resistencias, las áreas de los tanques y las ecuaciones matriciales obtenemos las respuestas del sistema a partir del programa de computadora. (Ver Apéndice B, Caso 4).

1.3.2 Control Integral

Un control integral permite hacer una corrección

que es proporcional a la integral de la señal del error actuante con respecto al tiempo. Expresando matemáticamente tenemos:

$$m(t) = K_i \int e dt \quad (90)$$

$$\delta \quad \frac{d}{dt} (m(t)) = K_i e$$

Donde:

$m(t)$ = Un cambio de la variable manipulada

K_i = La ganancia del control integral

$e(t)$ = El error, o la señal actuante

La función de transferencia del control integral es:

$$\frac{M(S)}{E(S)} = \frac{K_i}{S}$$

En la Ec. (90) observamos que la corrección se hace proporcional al error, de manera que un control integral continúa corrigiendo hasta que el error sea cero; pero existe una desventaja, que el control integral tiende a sobre corregir, produciendo una respuesta oscilatoria y en algunos casos inestabilidad.



La Fig. N^o 21 muestra el diagrama de bloque de un control integral.

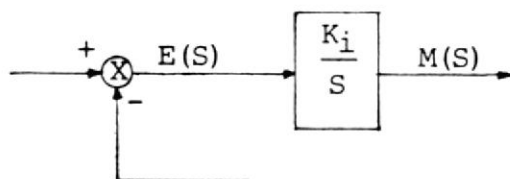


Fig. N^o 21.- Diagrama de Bloque de un Control Integral.

Considerando que el control integral del sistema es un integrador hidráulico de la siguiente característica, como se muestra en la Fig. N^o 22

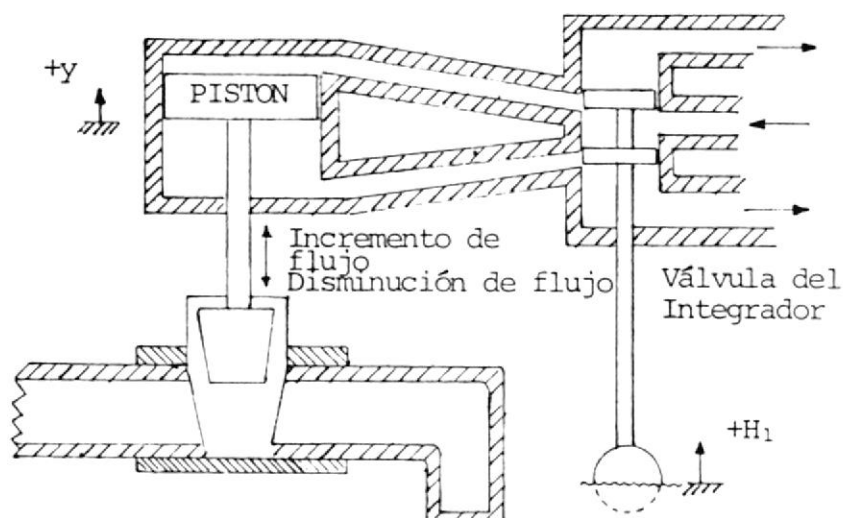


Fig. N^o 22.- Integrador Hidráulico

Analizando el integrador hidráulico del sistema, tenemos:

Que la masa del vástago es despreciable con respecto al pistón, entonces la caída de presión a través de la válvula permanece constante. En este caso el caudal que va al pistón es proporcional al área descubierta por la válvula, la cual es proporcional a la distancia H_1

$$q = -cH_1$$

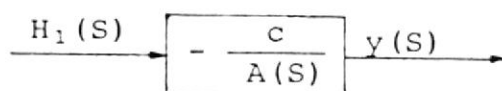
Donde q es el caudal que se desplaza desde la válvula por la cámara al pistón. Este caudal q en la cámara del pistón es igual a la razón de cambio de volumen de la cámara, y también a la velocidad del pistón Dy por el área transversal A del pistón.

$$q = ADy$$

Igualando las dos expresiones de q y resolviendo para " y " tenemos:

$$y = - \frac{c}{AD} H_1$$

Escribiendo en forma de diagrama de bloque tenemos:



Analizando el sistema de control de nivel con el

control integral en el primer tanque, partiendo del diagrama de bloque de ciclo abierto obtenemos el diagrama de bloque de ciclo cerrado como se muestra en la Fig. N° 23.

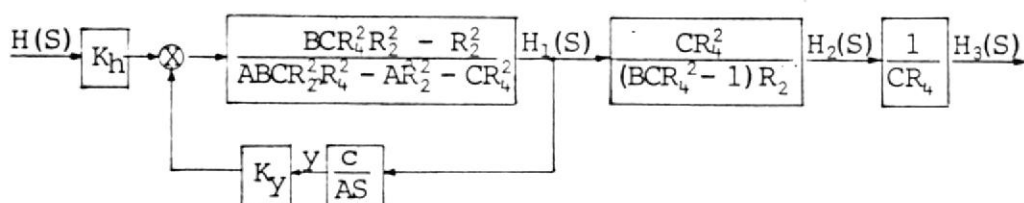


Fig. N° 23.- Diagrama de Bloque de Ciclo Cerrado

Reduciendo el diagrama de bloque tenemos:

$$H(S) \rightarrow \left[\frac{K_h R_2 R_4 S}{S (ABCR_2^2 R_4^2 - AR_2^2 - CR_4^2) + K_y K_i (BCR_2^2 R_4^2 - R_2^2)} \right] \rightarrow H_3 S$$

Donde, $K_i = \frac{C}{A}$

La función de transferencia es:

$$\frac{H_3(S)}{H(S)} = \frac{K_h R_2 R_4 S}{S (ABCR_2^2 R_4^2 - AR_2^2 - CR_4^2) + K_y K_i (BCR_2^2 R_4^2 - R_2^2)}$$

La correspondiente ecuación diferencial es:

$$\ddot{H}_3 + I_1 \ddot{H}_3 = \frac{I_2 - I_3}{I_4} \ddot{H}_3 + \frac{I_5 - I_6}{I_4} \dot{H}_3 + I_7 H_3 = I_8 \dot{H}$$

Donde,

$$I1 = \frac{PC_1C_2 + NC_1C_3 + MC_2C_3}{C_1C_2C_3}$$

$$I2 = (NPC_1 + MPC_2 + MNC_3 + K_Y K_i) R_2^2 R_4^2$$

$$I3 = C_1 R_2^2 + C_3 R_4^2$$

$$I4 = C_1 C_2 C_3 R_2^2 R_4^2$$

$$I5 = (MNP + K_Y K_i C_2 P + K_Y K_i C_3 N) R_2^2 R_4^2$$

$$I6 = MR_2^2 + PR_4^2$$

$$I7 = \frac{K_Y K_i N P R_4^2}{C_1 C_2 C_3 R_4^2} - \frac{K_Y K_i}{C_1 C_2 C_3 R_4^2}$$

$$I8 = \frac{Kh}{C_1 C_2 C_3 R_2 R_4}$$

Obtenemos una representación del sistema en el estado espacio, con referencia a la Ec.(57), se define:

$$X_1 = H_3 - B_o H$$

$$X_2 = \dot{H}_3 - B_o \dot{H} - B_1 H = \dot{X}_1 - B_1 H$$

$$X_3 = \ddot{H}_3 - B_o \ddot{H} - B_1 \dot{H} - B_2 H = \dot{X}_2 - B_2 H$$

$$X_4 = \ddot{H}_3 - B_o \ddot{H} - B_1 \dot{H} - B_2 \dot{H} - B_3 H = \dot{X}_3 - B_3 H$$

De la Ec.(58) se determinan las constantes B_o , B_1 , B_2 , B_3 y B_4

$$B_0 = 0$$

$$B_1 = 0$$

$$B_2 = 0$$

$$B_3 = \frac{K_h}{C_1 C_2 C_3 R_2 R_4}$$

$$B_4 = -\frac{K_h (PC_1 C_2 + NC_1 C_3 + MC_2 C_3)}{C_1^2 C_2^2 C_3^2 R_2 R_4}$$

La ecuación de estado espacio es:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ \dot{X}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -I7 & -\frac{I5 - I6}{I4} & -\frac{I2 - I3}{I4} & -I1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I8 \\ -I9 \end{bmatrix} \quad [H]$$

Donde,

$$I9 = \frac{K_h (PC_1 C_2 + NC_1 C_3 + MC_2 C_3)}{C_1^2 C_2^2 C_3^2 R_2 R_4}$$

Como:

$$H_3 = X_1$$

$$\dot{H}_3 = X_2$$

$$\ddot{H}_3 = X_3$$

$$\ddot{\ddot{H}}_3 = X_4 + \frac{K_h}{C_1 C_2 C_3 R_2 R_4} H$$

Determinamos una relación entre la salida H_1 y H_2

con las variables de estado X_1 , X_2 , X_3 , y X_4 por medio de las funciones de transferencia que se obtienen a partir del diagrama de bloque de ciclo cerrado.

$$H_2 = R_4 P H_3 + R_4 C_3 \dot{H}_3$$

$$H_1 = \frac{R_2 (R_4^2 NP - 1)}{R_4} H_3 + R_2 R_4 (PC_2 + NC_3) \dot{H}_3 + R_2 R_4 C_2 C_3 \ddot{H}_3$$

Entonces:

$$H_2 = R_4 P X_1 + R_4 C_3 X_2$$

$$H_1 = \frac{R_2 (R_4^2 NP - 1)}{R_4} X_1 + R_2 R_4 (PC_2 + NC_3) X_2 + R_2 R_4 C_2 C_3 X_3$$

Luego, la ecuación de las salidas en función de las variables de estado espacio es:

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_2 (R_4^2 NP - 1)}{R_4} & R_2 R_4 (PC_2 + NC_3) & R_2 R_4 C_2 C_3 \\ R_4 P & R_4 C_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

Invirtiendo la matriz anterior se obtienen las variables X_1 , X_2 , X_3 en función de las condiciones iniciales para H_1 , H_2 , H_3

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{R_4 C_3} & -\frac{P}{C_3} \\ \frac{1}{R_2 R_4 C_2 C_3} & -\frac{PC_2 + NC_3}{R_4 C_2 C_3} & \frac{R_4^2 P^2 C_2 + C_3}{R_4 C_2 C_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1(0) \\ H_2(0) \\ H_3(0) \end{bmatrix}$$

El sistema con la entrada en el primer tanque, el control integral con una ganancia K_i y evaluando las constantes K_y , K_h alrededor del punto de operación, además conociendo los valores de las resistencias, las áreas de los tanques y las ecuaciones matriciales obtenemos la respuesta del sistema a partir del programa de computadora. (Ver Apéndice B, Caso 5).

1.3.3 Control Derivativo

El control derivativo hace una corrección proporcional a la derivada del error con respecto al tiempo. Expresado matemáticamente

$$m(t) = K_d \frac{de}{dt} \quad (91)$$

Donde,

K_d = la ganancia del control derivativo

Para un valor constante de la señal actuante e , la salida del elemento de control es cero. Por lo tanto, puede el estado estable existir en un sistema de control derivativo para un valor constante de la señal de error. Ya que opera en la

razón de cambio del error, el modo de control derivativo es usado en combinación con los controles proporcional e integral. La adición de la acción derivativa es limitada para sistemas que responden muy lento.

Considerando que el control derivativo del sistema es un amortiguador de las siguientes características, que se muestra en la Fig. N° 24(a), actúa como un elemento derivador, donde se introduce un desplazamiento escalón en la posición del pistón H_1 momentáneamente el desplazamiento "y" es igual al H_1 . Sin embargo debido a la acción del resorte, fluye aceite a través de la resistencia R y el cilindro retorna a su posición original. En la Fig. N° 24 (b) se tiene curvas de H_1 e "y" en función de t.

Deducimos la función de transferencia del sistema entre el desplazamiento "y" y H_1 , donde la presión sobre el pistón son P_1 y P_2 y considerando despreciable la fuerza de inercia involucrada. Entonces la fuerza sobre el pistón debe equilibrar la fuerza del resorte.

$$A(P_2 - P_1) = ky^*$$

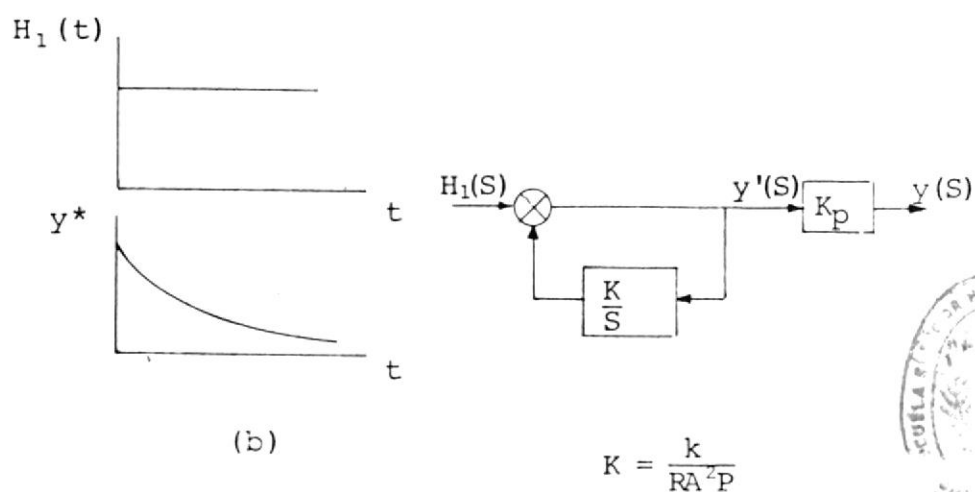
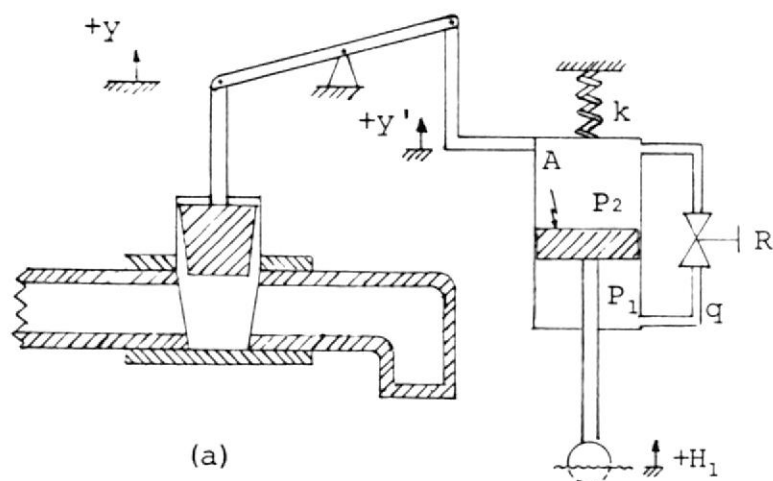


Fig. N^o 24.- a) Sistema de Control tipo derivativo-proporcional.

b) Modificación escalón en H_1 y la correspondiente modificación "y" en función de t.

c) Diagrama de Bloque del Sistema de Control

Donde,

A = Area del pistón en Cm^2

k = Constante del resorte en Kg/Cm

El caudal q está dado por

$$q = \frac{P_2 - P_1}{R}$$

Donde,

q = Caudal a través de la restricción en Kg/Seg.

R = Resistencia al flujo en la restricción en $\text{Kg-seg/Cm}^2\text{-Kg.}$

Como el flujo a través de la restricción durante dt segundo debe igualar la modificación en masa de aceite abajo del pistón durante los mismos dt segundos se obtiene:

$$qdt = A\rho(dH_1 - dy^*)$$

Donde ρ = densidad en Kg/Cm^3

Si el fluido es incompresible se escribe esta ecuación:

$$\frac{dH_1}{dt} - \frac{dy^*}{dt} = \frac{q}{A\rho} = \frac{P_2 - P_1}{RA\rho} = \frac{ky^*}{RA^2\rho}$$

6

$$\frac{dH_1}{dt} = \frac{dy^*}{dt} + \frac{ky^*}{RA^2\rho}$$

Como:

$$y = -K_p y^* \quad \delta \quad y^* = -\frac{y}{K_p}$$

Reemplazando tenemos:

$$\frac{dH_1}{dt} = -\frac{1}{K_p} \frac{dy}{dt} - \frac{ky}{\rho RA^2 K_p}$$

Tomando las transformadas de Laplace en ambos miembros de la ecuación con las condiciones iniciales cero se obtiene:

$$SH_1(S) = -\frac{1}{K_p} SY(S) - \frac{k}{RA^2\rho K_p} Y(S)$$

La función de transferencia de este sistema es:

$$\frac{Y(S)}{H_1(S)} = -\frac{S}{\frac{S}{K_p} + \frac{k}{RA^2\rho K_p}}$$

Se define,

$$K = \frac{k}{RA^2\rho}$$

Entonces:

$$\frac{Y(S)}{H_1(S)} = -\frac{K_p S}{S + K} = -\frac{K_p}{1 + \frac{K}{S}}$$

En la Fig. N° 24 (c) se encuentra la representación en diagrama de bloque de este sistema.

Analizando el sistema con el control derivativo-proporcional, considerando la entrada en el primer tanque, y a partir del diagrama de bloque de ciclo abierto obtenemos el diagrama de bloque de ciclo cerrado como se muestra en la Fig. N° 25.

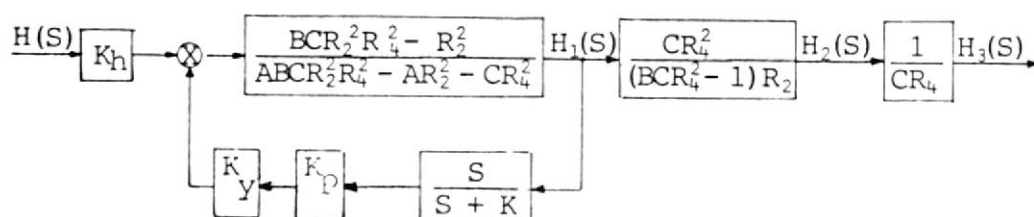


Fig. N° 25.- Diagrama de Bloque de Ciclo Cerrado

Reduciendo el diagrama de bloque tenemos:

$$H(S) \rightarrow \left[\frac{(S + K) R_2 R_4 K_h}{(S + K) (ABCR_2^2 R_4^2 - AR_2^2 - CR_4^2) + K_p K_y S (BCR_2^2 R_4^2 - R_2^2)} \right] H_3(S)$$

La función de transferencia es:

$$\frac{H_3(S)}{H(S)} = \frac{(S + K) R_2 R_4 K_h}{(S + K) (ABCR_2^2 R_4^2 - AR_2^2 - CR_4^2) + K_p K_y S (BCR_2^2 R_4^2 - R_2^2)}$$

La correspondiente ecuación diferencial es:

$$\ddot{H}_3 + D1\ddot{H}_3 + \frac{D2 - D3}{D4} \ddot{H}_3 + \frac{D5 + D6}{D4} \dot{H}_3 + \frac{D7}{D4} H_3 = D8\dot{H} + D9H$$

Donde,

$$D1 = \frac{C_1 (PC_2 + NC_3) + C_2 C_3 (M + K_P K_Y + C_1 K)}{C_1 C_2 C_3}$$

$$D2 = R_2^2 R_4^2 [(PC_2 + NC_3) (M + K_P K_Y + C_1 K) + (MC_2 C_3 K + NPC_1)]$$

$$D3 = C_1 R_2^2 + C_3 R_4^2$$

$$D4 = C_1 C_2 C_3 R_2^2 R_4^2$$

$$D5 = R_2^2 (M + K_P K_Y + C_1 K) (NPR_4^2 - 1)$$

$$D6 = R_4^2 [R_2^2 MK (PC_2 + NC_3) - (P + C_3 K)]$$

$$D7 = [MR_2^2 (PNR_4^2 - 1) - PR_4^2] K$$

$$D8 = \frac{K_h}{C_1 C_2 C_3 R_2 R_4}$$

$$D9 = \frac{KK_h}{C_1 C_2 C_3 R_2 R_4}$$

Obtenemos una representación del sistema en el estado espacio. Con referencia a la Ec. (57), se definen:

$$X_1 = H_3 - B_0 H$$

$$X_2 = \dot{H}_3 - B_0 \dot{H} - B_1 H = \dot{X}_1 - B_1 H$$

$$X_3 = \ddot{H}_3 - B_0 \ddot{H} - B_1 \dot{H} - B_2 H = \dot{X}_2 - B_2 H$$

$$X_4 = \ddot{H}_3 - B_0 \ddot{H} - B_1 \dot{H} - B_2 \dot{H} - B_3 H = \dot{X}_3 - B_3 H$$

De la Ec. (58) determinamos B_0 , B_1 , B_2 , B_3 , y B_4

$$B_0 = 0$$

$$B_1 = 0$$

$$B_2 = 0$$

$$B_3 = \frac{K_h}{C_1 C_2 C_3 R_2 R_4}$$

$$B_4 = -\frac{(C_1 (P C_2 + N C_3) + C_2 C_3 (M + K_p K_y)) K_h}{C_1^2 C_2^2 C_3^2 R_2 R_4}$$

La ecuación de estado espacio es:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ \dot{X}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{D7}{D4} & -\frac{D5+D6}{D4} & -\frac{D2-D3}{D4} & -D1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D8 \\ D10 \end{bmatrix} \quad [H]$$

Donde:

$$D10 = \frac{-(C_1 (P C_2 + N C_3) + C_2 C_3 (M + K_p K_y)) K_h}{C_1^2 C_2^2 C_3^2 R_2 R_4}$$

Como:

$$H_3 = X_1$$

$$\dot{H}_3 = X_2$$

$$\ddot{H}_3 = X_3$$

$$\ddot{H}_3 = X_4 + \frac{K_h}{C_1 C_2 C_3 R_2 R_4} H$$

Determinamos una relación entre las salidas H_1 y H_2 con las variables X_1 , X_2 y X_3 por medio de las funciones de transferencias que se obtienen a partir del diagrama de bloque de ciclo cerrado.

$$H_2 = R_4 P H_3 + R_4 C_3 \dot{H}_3$$

$$H_1 = \frac{R_2 (R_4^2 NP - 1)}{R_4} H_3 + R_2 R_4 (PC_2 + NC_3) \dot{H}_3 + R_2 R_4 C_2 C_3 \ddot{H}_3$$

Por lo tanto,

$$H_2 = R_4 P X_1 + R_4 C_3 X_2$$

$$H_1 = \frac{R_2 (R_4^2 NP - 1)}{R_4} X_1 + R_2 R_4 (PC_2 + NC_3) X_2 + R_2 R_4 C_2 C_3 X_3$$

Luego la ecuación de las salidas en función de las variables de estado espacio es:

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_2 (R_4^2 NP - 1)}{R_4} & R_2 R_4 (PC_2 + NC_3) & R_2 R_4 C_2 C_3 \\ R_4 P & R_4 C_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

Invirtiendo la matriz anterior se obtienen las variables X_1 , X_2 , X_3 en función de las condiciones iniciales para H_1 , H_2 , H_3

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{R_4 C_3} & -\frac{P}{C_3} \\ \frac{1}{R_2 R_4 C_2 C_3} & -\frac{P C_2 + N C_3}{R_4 C_2 C_3^2} & \frac{R_4^2 P^2 C_2 + C_3}{R_4^2 C_2 C_3^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1(0) \\ H_2(0) \\ H_3(0) \end{bmatrix}$$

El sistema con la entrada en el primer tanque, el control derivativo proporcional con la ganancia K_p , K y evaluando las constantes K_y , K_h alrededor del punto de operación, además conociendo los valores de las resistencias, las áreas de los tanques y las ecuaciones matriciales obtenemos la respuesta del sistema a partir del programa de computadora. (Ver Apéndice B, Caso 6).

1.4 ANÁLISIS DE LA ESTABILIDAD

Una característica importante del funcionamiento transitorio de un sistema es la estabilidad del mismo, donde, la estabilidad de un sistema se determina por la respuesta a las entradas de perturbaciones.

Un sistema estable es aquel que permanece en reposo a no ser que se excite por una fuente externa, en tal caso, volverá al reposo una vez que desaparecen todas las excitaciones.

Específicamente, por la definición de estabilidad, un sistema lineal es estable si, y solamente si, el valor absoluto de la respuesta a un impulso, $g(t)$ integrado sobre un rango finito, es finito.

La localización de los polos de un sistema en el plano S indica la respuesta transitoria resultante. Los polos en la parte izquierda del plano S dan como resultado una respuesta decreciente para entradas de perturbaciones. Mientras que en forma semejante los polos en el eje imaginario " jW ", y en el plano de la derecha dan como resultado una respuesta neutral y una creciente o inestable respectivamente, para una entrada de perturbación. En la Fig. N° 26 se muestra la división del plano S .

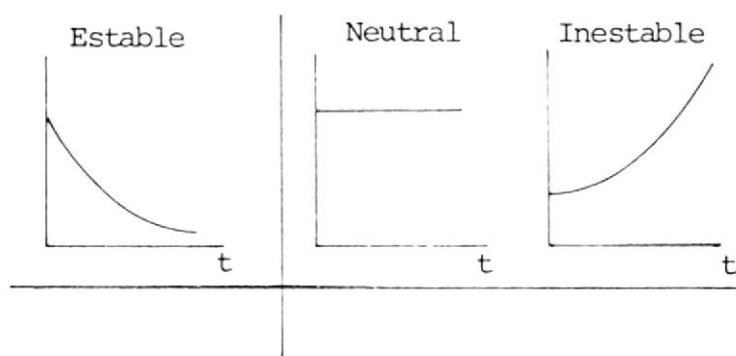


Fig. N° 26.- Estabilidad en el plano S

Por lo tanto, los polos de los sistemas dinámicos deseables deben encontrarse en la parte izquierda del plano S .

En términos de sistemas lineales, reconocemos que el requisito de la estabilidad puede definirse por la localización de los polos de la función de transferencia de red cerrada. Esta función se describe como:

$$T(S) + \frac{P(S)}{q(S)} = \frac{K \prod_{i=1}^M (S + Z_i)}{S^N \prod_{k=1}^O (S + \sigma_k) \prod_{m=1}^R (S^2 + 2\alpha_m S + (\alpha_m^2 + \omega_m^2))} \quad (92)$$

donde $q(S) = \Delta(S) = 0$, es la ecuación característica cuyas raíces son los polos del sistema de red cerrada. Además la respuesta de salida para una entrada impulso es:

$$c(t) = \sum_{k=1}^O A_k e^{-\sigma_k t} + \sum_{m=1}^R B_m \left(\frac{1}{\omega_m}\right) e^{-\alpha_m t} \sin \omega_m t \quad (93)$$

Cuando $N = 0$

Considerando que los polos del sistema de red cerrada debe estar en la parte izquierda del plano S , una condición necesaria y suficiente para que un sistema de retroalimentación sea estable, es que todos los polos de la función de transferencia del sistema tengan par-

tes reales negativas.

Para determinar la estabilidad de un sistema de control por retroalimentación determinamos las raíces de la ecuación característica $q(s) = 0$, pero sin embargo se han desarrollado varios métodos que permiten determinar la estabilidad del sistema sin resolver la ecuación, los que se analizarán en las siguientes secciones:

1.4.1 Lugar Geométrico de las Raíces

Las características de las respuestas transitorias de un sistema de lazo cerrado son determinadas por los polos de lazo cerrado. Por lo tanto, en el análisis de la estabilidad de un sistema es importante ubicar los polos de lazo cerrado en el plano S . Los polos de lazo cerrado son las raíces de la ecuación característica y para determinarlos tenemos que descomponer en factores el polinomio característico. Esto, en general es laborioso si el grado del polinomio característico es tres o mayor. Entonces se desarrolla un método simple para determinar las raíces de la ecuación característica denominado método del lugar geométrico de las raíces.

La técnica del lugar geométrico de las raíces es un método gráfico para dibujar el lugar geométrico de las raíces en el plano S a medida que varía un parámetro. Como el método nos proporciona información gráfica, puede usarse un bosquejo aproximado para obtener información cualitativa relacionada con la estabilidad y funcionamiento del sistema. Además si las localizaciones de las raíces no son satisfactorias, los ajustes necesarios del parámetro frecuentemente pueden determinarse fácilmente por medio del lugar geométrico de las raíces.

El método del lugar geométrico de las raíces consiste en lo siguiente:

Considerando el funcionamiento dinámico de un sistema de control de red cerrada que se describe mediante la función de transferencia:

$$T(S) = \frac{C(S)}{R(S)} = \frac{p(S)}{q(S)} \quad (94)$$

Donde $p(S)$ y $q(S)$ son polinomios en S . Las raíces de la ecuación característica $q(S) = 0$ determinan los modos de respuesta del sistema. Para

el caso de un sistema de red cerrada usando la fórmula de Mason para la ganancia del flujo de señal, encontramos que:

$$\Delta(S) = 1 - \sum_{n=1}^N L_n + \sum_{m,q}^{M,N} L_m L_q - \sum L_r L_s L_t \dots \quad (95)$$

Donde L_q es igual al valor de la transmitancia q -ésima de la red propia, entonces tenemos una ecuación característica que se describe como:

$$q(S) = \Delta(S) = 1 + F(S) \quad (96)$$

Para determinar las raíces de la ecuación característica hacemos la Ec. (96) igual a cero y obtenemos:

$$1 + F(S) = 0 \quad (97)$$

Por lo tanto, la Ec. (97) puede describirse como:

$$F(S) = -1 \quad (98)$$

Y las raíces de la ecuación característica deben satisfacer esa relación. En el caso del sistema de una red, como el de la Fig. N° 27, tenemos la

ecuación característica:

$$1 + GH(S) = 0$$

Donde, $F(S) = G(S)H(S)$

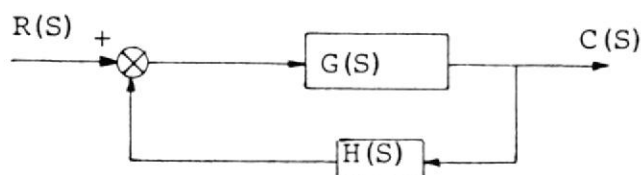


Fig. N° 27.- Sistema de Control de Red Cerrada

Las raíces características del sistema deben satisfacer la Ec. (98), donde las raíces están en el plano S , y como S es una variable compleja, la Ec. (98) puede describirse en la forma polar, como:

$$|F(S)| \frac{-\angle F(S)}{\angle F(S)} = -1 \quad (99)$$

Y por lo tanto, es necesario que:

$$|F(S)| = 1$$

y,

$$\frac{-\angle F(S)}{\angle F(S)} = 180^\circ + K360^\circ \quad (100)$$

Donde,

$$K = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

En general, la función $F(S)$ es:

$$F(S) = \frac{K(S + Z_1)(S + Z_2)(S + Z_3) \dots (S + Z_n)}{(S + p_1)(S + p_2)(S + p_3) \dots (S + p_n)} \quad (101)$$

Entonces los requisitos de la magnitud y el ángulo para el lugar geométrico de las raíces son:

$$|F(S)| = \frac{K|S + Z_1| |S + Z_2| \dots}{|S + p_1| |S + p_2| \dots} = 1 \quad (102)$$

y,

$$\begin{aligned} \angle F(S) &= \angle S + Z_1 + \angle S + Z_2 + \dots - \\ &\quad - (\angle S + p_1 + \angle S + p_2 \dots) \end{aligned} \quad (103)$$

El requisito de la magnitud Ec. (102) nos permite determinar el valor de K para una localización dada S_1 , de una raíz. Un punto de prueba en el plano S , S_1 , se verifica como localización de una raíz cuando satisface la Ec. (103).

Todos los ángulos se miden en la dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj a partir de una línea horizontal.

Generalmente estamos interesados en determinar el lugar geométrico de las raíces, a medida que K varía en el intervalo siguiente:

$$0 \leq K \leq \infty$$

Escribiendo la Ec. (97) de tal forma, que aparece el parámetro de interés K , como factor:

$$\prod_{j=1}^n (S + p_j) + K \prod_{i=1}^m (S + z_i) = 0$$

Por lo tanto, cuando $K = 0$, las raíces de la ecuación característica son los polos de $P(S)$, además cuando K se aproxima al infinito, las raíces son los ceros de $P(S)$. Entonces observamos que el lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica $1 + KP(S) = 0$ comienza en los polos de $P(S)$ y termina en los ceros de $P(S)$, a medida que K aumenta desde cero hasta el infinito.

Determinamos el lugar geométrico de las raíces cuando el sistema se lo analiza con el control proporcional, el integral y el derivativo-proporcional.

Analizando el ciclo cerrado del sistema con el

control proporcional, teniendo la entrada en el primer tanque, a partir de la ecuación para $H_3(S)/H(S)$ obtenida a partir de la Fig. N° 19, se obtiene la siguiente ecuación característica:

$$ABCR_2^2R_4^2 - AR_2^2 - CR_4^2 + K_pK_y(BCR_2^2R_4^2 - R_2^2) = 0$$

Reemplazando los valores de las constantes, (parte experimental, pág. 235) obtenemos la ecuación característica en la siguiente forma:

$$\frac{(S + 0.5736)(S + 0.0099)(S + 0.2094)}{(S + 0.0851)(S + 0.4986)} = -K_p$$

Los ceros son: -0.0851; -0.4986 y los polos son: -0.5736; -0.0099; -0.2094.

Para construir el diagrama del lugar geométrico de las raíces del sistema, primero graficamos los polos del numerador, luego los ceros del denominador como es ilustrado en la Fig. N° 28. La localización de los polos del numerador son indicados por cruces (X) y los ceros del denominador son indicados por círculos (O).

Entonces la ecuación anterior puede escribirse en forma vectorial:

$$\frac{|S + 0.5736|}{|S + 0.0851|} \frac{|S + 0.0099|}{|S + 0.4986|} \frac{|S + 0.2094|}{|S + 0.4986|} = |-K_p| = K_p$$

La longitud o magnitud de cada vector satisface la condición de magnitud, donde $|S + 0.5736|$ es la magnitud del vector $S + 0.5736$ como se ilustra en la Fig. N° 28.

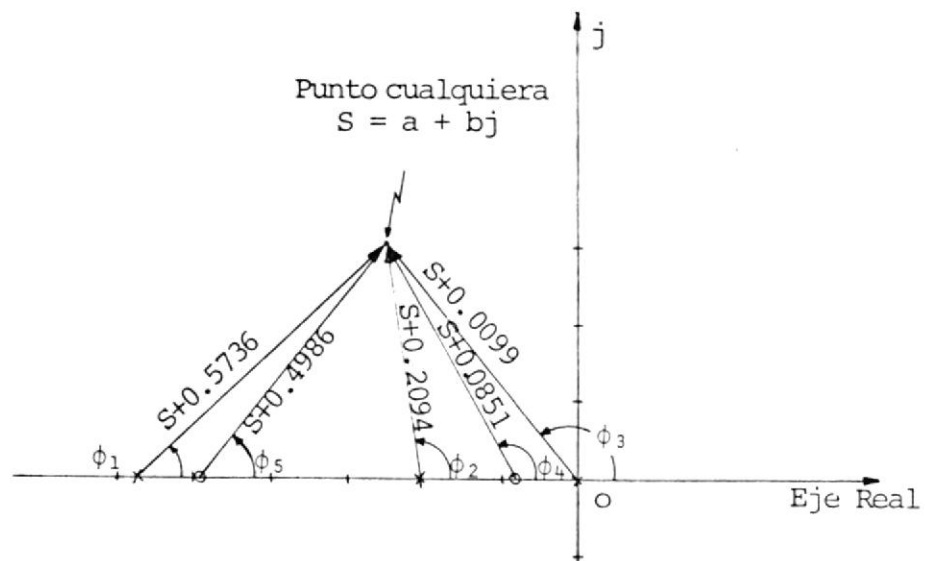


Fig. N° 28.- Representación Vectorial de los Términos del numerador y del denominador.

La condición de ángulo es:

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5 = 180^\circ + K360^\circ$$

Donde:

$$\phi_1 = \angle (S + 0.5736)$$

$$\phi_2 = \angle (S + 0.2094)$$

$$\phi_3 = \angle (S + 0.0099)$$

$$\phi_4 = \angle (S + 0.0851)$$

$$\phi_5 = \angle (S + 0.4986)$$

Los ángulos $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5$ son ilustrados en la Fig. N° 28.

Con estas condiciones determinamos la localización del lugar geométrico de las raíces sobre el eje real como es ilustrado en la Fig. N° 28.

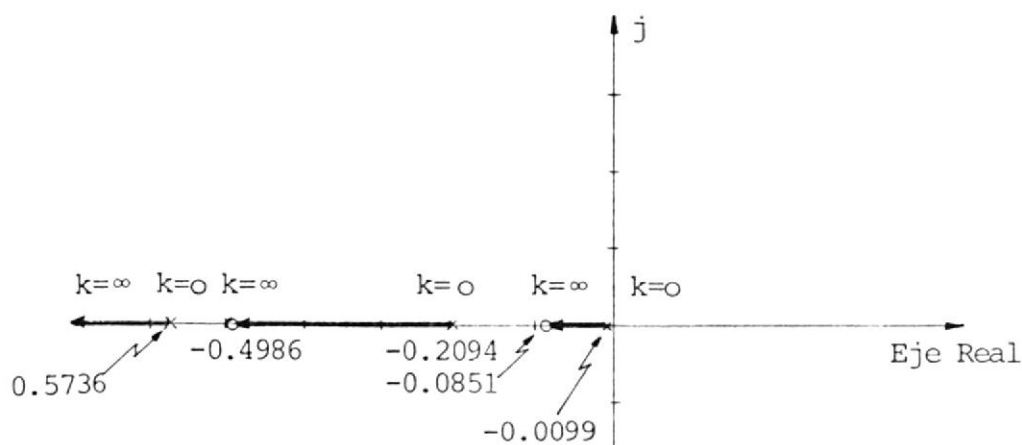


Fig. N° 29.- Representación de los Lugares Geométricos sobre el Eje Real.

La localización del lugar geométrico sobre el eje

real están determinados por los polos x 's y los ceros θ 's.

Cuando el punto S está situado a la derecha del punto -0.0099 sobre el eje real tenemos:

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = \phi_5 = 0^\circ$$

Entonces:

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 - \phi_4 - \phi_5 = 0^\circ$$

En este caso no se cumple la condición de ángulo, por lo tanto no existe lugar geométrico en el lado derecho del punto -0.0099

Cuando S se encuentra entre los puntos -0.0099 y -0.0851 tenemos:

$$\phi_3 = 180^\circ$$

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_4 = \phi_5 = 0^\circ$$

Entonces

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 - \phi_4 - \phi_5 = 180^\circ$$

Por lo tanto, se cumple la condición de ángulos, entonces existe un lugar geométrico entre estos dos puntos.

Considerando el punto S entre los puntos -0.0851 y -0.2094 tenemos que:

$$\phi_3 = \phi_4 = 180^\circ$$

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_5 = 0^\circ$$

Entonces:

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 - \phi_4 - \phi_5 = 0^\circ$$

En este caso no se cumple la condición de ángulo, por lo tanto no existe lugar geométrico entre estos dos puntos.

Cuando el punto S se encuentra entre los puntos -0.2094 y -0.4986 tenemos:

$$\phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 180^\circ$$

$$\phi_1 = \phi_5 = 0^\circ$$

Entonces

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 - \phi_4 - \phi_5 = 180^\circ$$

Por lo tanto, se cumple la condición de ángulo,

entonces existe un lugar geométrico entre estos dos puntos.

Considerando el punto S entre los puntos -0.4986 y -0.5736 tenemos que:

$$\phi_1 = 0^\circ$$

$$\phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = \phi_5 = 180^\circ$$

Entonces

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 - \phi_4 - \phi_5 = 0^\circ$$

En este caso no se cumple la condición de ángulo, por lo tanto no existe un lugar geométrico entre estos dos puntos.

Cuando el punto S está situado a la izquierda del punto -0.5736 tenemos que:

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = \phi_5 = 180^\circ$$

Entonces

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 - \phi_4 - \phi_5 = 180^\circ$$

En este caso se cumple la condición de ángulo, por lo tanto existe un lugar geométrico a la izquierda del punto -0.5736.

Además, para la construcción de lugar geométrico se determinan las asíntotas para valores de S grandes.

Entonces, en la ecuación de la condición de ángulo, los términos 0.0099; 0.0851; 0.2094; 0.4986 y 0.5736 son despreciables comparados con los valores de S , la ecuación queda determinada de la siguiente manera:

$$\angle S + \angle S + \angle S - \angle S - \angle S = 180^\circ \pm K360^\circ$$

La condición de ángulos es:

$$\angle S = 180^\circ \pm K360^\circ$$

Solamente un ángulo distinto es obtenido: 180°

En general, el ángulo de las asíntotas es:

$$\angle S = \frac{180^\circ \pm K360^\circ}{n-m} \quad K = 0, 1, 2, \dots$$

Donde,

n = Números de polos de S

m = Números de ceros de S

El número de asíntotas es igual a " $n-m$ "

Como la diferencia " $n-m$ " es 1 no existe intersec-

ción de las asíntotas con el eje real; aunque el valor de K aumente hasta el infinito, el lugar geométrico de las raíces se encuentra sobre el eje real, como se muestra en la Fig. N° 29.

Una vez determinados los lugares geométricos de las raíces concluimos que el sistema es estable, debido a que los lugares geométricos están en el lado izquierdo del plano S .

Analizando el ciclo cerrado del sistema con el control integral, teniendo la entrada en el primer tanque, a partir de la Ecuación para $H_3(S)/H(S)$ obtenida de la Fig. N° 23, se obtiene la siguiente ecuación característica:

$$S(ABCR_2^2R_4^2 - AR_2^2 - CR_4^2) + K_Y K_I (BCR_2^2R_4^2 - R_2^2) = 0$$

Reemplazando los valores de las constantes, (parte experimental, pág. 235), obtenemos la ecuación característica en la siguiente forma:

$$\frac{S(S + 0.5736)(S + 0.0099)(S + 0.2094)}{(S + 0.0851)(S + 0.4986)} = -K_I$$

Donde, los polos son: 0, -0.5736, -0.0099, -0.2094

y los ceros -0.4986 , -0.0851 .

En este caso para construir el diagrama del lugar geométrico de las raíces del sistema se procede como en el caso anterior.

Entonces la ecuación puede escribirse en forma vectorial:

$$\frac{|S|}{|S + 0.0851|} \frac{|S + 0.5736|}{|S + 0.4986|} \frac{|S + 0.0099|}{|S + 0.2094|} = |-K_i| = K_i$$

La longitud o magnitud de cada vector satisface la condición de magnitudes donde $|S|$ es la magnitud del vector S como se muestra en la Fig. N° 30.

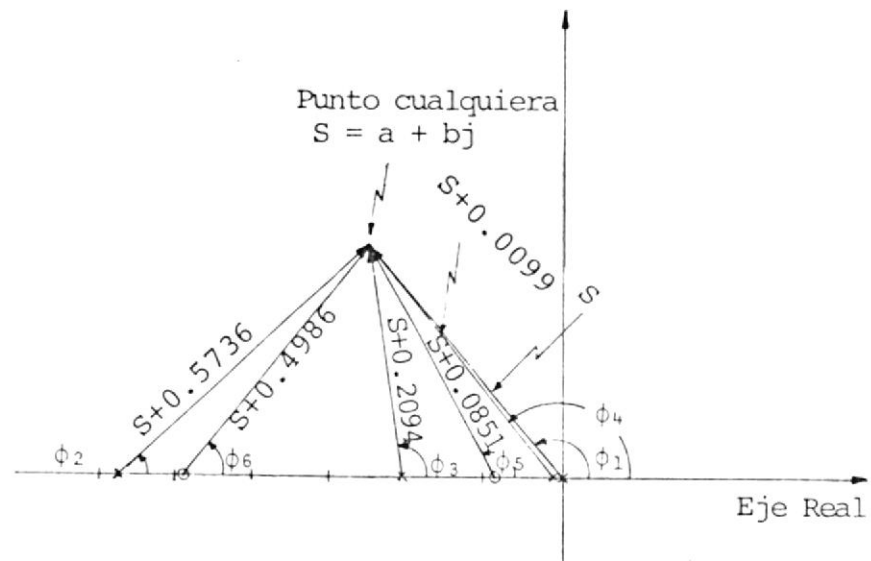


Fig. N° 30.- Representación vectorial de los términos del numerador y del denominador.

La condición de ángulo es:

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 - \phi_5 - \phi_6 = 180^\circ \pm K360^\circ$$

Donde:

$$\phi_1 = \angle (S)$$

$$\phi_2 = \angle (S + 0.5736)$$

$$\phi_3 = \angle (S + 0.2094)$$

$$\phi_4 = \angle (S + 0.0099)$$

$$\phi_5 = \angle (S + 0.0851)$$

$$\phi_6 = \angle (S + 0.4986)$$

Los ángulos $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi_6$, son ilustrados en la Fig. N° 30.

Con estas condiciones determinamos la localización del lugar geométrico de las raíces sobre el eje real como es ilustrado en la Fig. N° 30.

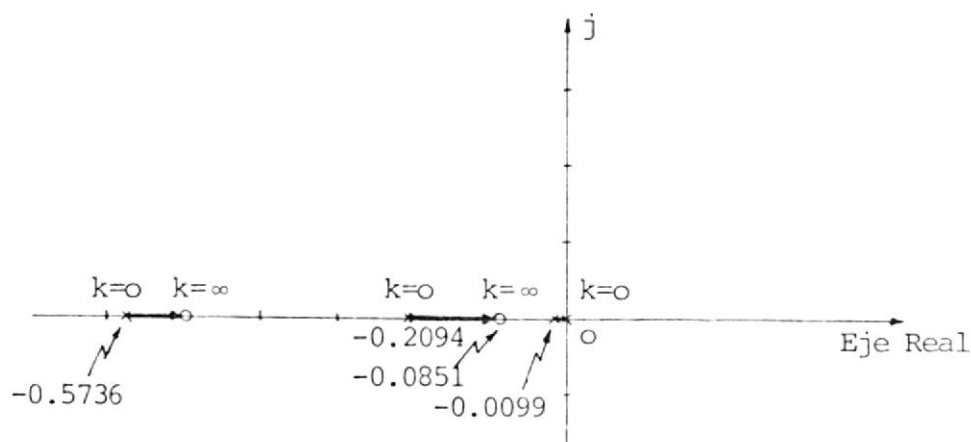


Fig. N° 31.- Representación de los lugares geométricos sobre el eje real.

La localización del lugar geométrico sobre el eje real está determinada por los polos x 's y los ceros θ 's.

Cuando el punto S está situado a la derecha del origen sobre el eje real, tenemos:

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = \phi_5 = \phi_6 = 0^\circ$$

Entonces

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 - \phi_5 - \phi_6 = 0^\circ$$

En este caso no se cumple la condición de ángulo, por lo tanto no existe lugar geométrico en el lado positivo del eje real.

Para un punto S que se encuentra entre los puntos -0.0099 y 0.0 tenemos:

$$\phi_1 = 180^\circ$$

$$\phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = \phi_5 = \phi_6 = 0^\circ$$

Entonces:

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 - \phi_5 - \phi_6 = 180^\circ$$

Por lo tanto, se cumple la condición de ángulos, entonces existe un lugar geométrico entre estos

dos puntos.

Considerando el punto S entre los puntos -0.0099 y -0.0851 tenemos

$$\phi_1 = \phi_4 = 180^\circ$$

$$\phi_2 = \phi_3 = \phi_5 = \phi_6 = 0^\circ$$

Entonces:

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 - \phi_5 - \phi_6 = 360^\circ$$

En este caso no se cumple la condición de ángulo, por lo tanto no existe lugar geométrico entre estos dos puntos.

Cuando el punto S se encuentra en los puntos: -0.0851 y -0.2094 tenemos:

$$\phi_1 = \phi_4 = \phi_5 = 180^\circ$$

$$\phi_2 = \phi_3 = \phi_6 = 0^\circ$$

Entonces:

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 - \phi_5 - \phi_6 = 540^\circ$$

Por lo tanto, se cumple la condición de ángulo, entonces existe un lugar geométrico entre estos dos puntos.

Así sucesivamente se determinan los lugares geométricos para los puntos menores que -0.2094 , como se puede observar en la Fig. N° 31.

Además, para la construcción del lugar geométrico se determinan las asíntotas para valores de S grandes.

Entonces en la ecuación de la condición de ángulo los términos 0.0099 ; 0.0851 ; 0.2094 ; 0.4986 y 0.5736 son despreciables comparados con los valores de S , la ecuación queda determinada de la siguiente manera:

$$\angle S + \angle S + \angle S + \angle S - \angle S - \angle S = 180^\circ \pm K360^\circ$$

La condición de ángulo es:

$$\angle S = 90^\circ \pm K 180^\circ$$

Solamente los ángulos de: 90° , -90° , 270° son obtenidos de esta ecuación.

En general el ángulo de las asíntotas es:

$$\angle S = \frac{180^\circ \pm K360^\circ}{n - m} \quad K = 0, 1, 2, \dots$$

Donde,

n = Números de polos de S

m = Números de ceros de S

El número de asíntotas es igual a " $n-m$ ".

Como la diferencia " $n-m$ " es 2, existe intersección de las asíntotas con el eje real.

Entonces para determinar la intersección de las asíntotas con el eje real utilizamos la siguiente ecuación:

$$\sigma_c = \frac{\sum(\text{Polos}) - \sum(\text{ceros})}{n - m}$$

Reemplazando los valores de los polos y los ceros, obtenemos el punto de intersección de las asíntotas

$$\sigma_c = -0.1046$$

Para conocer el punto en el cual el lugar geométrico entre 0 y -0.0099 departe desde el eje real se determina el máximo valor que K_i obtenido entre estos dos puntos. Así un método alternativo* para determinar el punto de apertura es resolviendo la ecuación característica para K_i .

* Ver demostración en Ref. (3)

$$K_i = - \frac{S(S + 0.5736)(S + 0.0099)(S + 0.2094)}{(S + 0.0851)(S + 0.4986)}$$

Diferenciando e igualando a cero la ecuación tenemos que:

$$\frac{dK_i}{dS} = 0$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos que el punto de apertura es:

$$S_1 = -0.00548$$

Donde K_i es un máximo.

Por lo tanto, con los valores obtenidos de σ_c y S_1 determinamos el lugar geométrico de las raíces que interceptan al eje real, como se muestra en la Fig. N° 32.

Una vez obtenidos los lugares geométricos de las raíces, determinamos que el sistema es estable, debido a que los lugares geométricos se encuentran en el lado izquierdo del plano S , además tenemos que para un determinado valor de K_i el sistema es oscilatorio, porque dos lugares geométricos se separan del eje real, donde a medida que se amortigua esta oscilación el sistema tien-

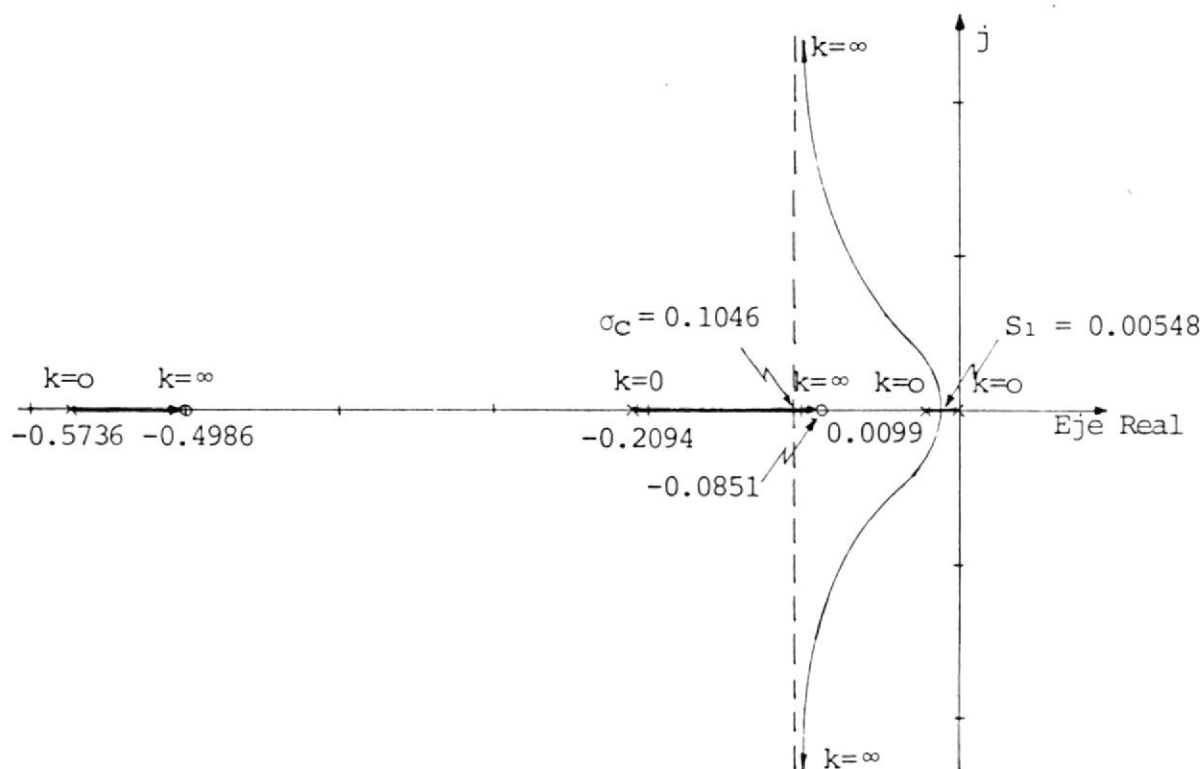


Fig. N° 32.- Representación de los Lugares Geométricos que interceptan al eje real y sobre el eje real.

de a estabilizarse.

Analizando el ciclo cerrado del sistema con el control derivativo-proporcional, teniendo la entrada en el primer tanque, a partir de la ecuación para $H_3(S)/H(S)$ obtenida de la Fig. N° 25 se obtiene la siguiente ecuación característica:

$$(S + K) (ABCR_2^2 R_4^2 - AR_2^2 - CR_4^2) + K_p K_y (BCR_2^2 R_4^2 - R_2^2) = 0$$

Reemplazando los valores de las constantes (parte experimental, pág.235) obtenemos la ecuación característica en la siguiente forma:

$$\frac{(S + K)(S + 0.5736)(S + 0.0099)(S + 0.2094)}{S(S + 0.0851)(S + 0.4986)} = -K_p$$

Donde, los polos son: $-K$, -0.5736 , -0.0099 , -0.2094 y los ceros 0 , -0.0851 , -0.4986 .

Para construir el diagrama del lugar geométrico de las raíces del sistema se procede como en el caso anterior, como se muestra en la Fig. N° 33.

Entonces la ecuación puede escribirse en forma vectorial:

$$\frac{|S + K|}{|S|} \frac{|S + 0.5736|}{|S + 0.0851|} \frac{|S + 0.0099|}{|S + 0.4986|} \frac{|S + 0.2094|}{|S + 0.4986|} = -|K_p| = K_p$$

La longitud o magnitud de cada vector satisface la condición de magnitudes donde $|S + K|$ es la magnitud del vector $(S + K)$ como se muestra en la Fig. N° 33.

La Fig. N° 33 representa el lugar geométrico para un valor de K menor a -0.5736 .

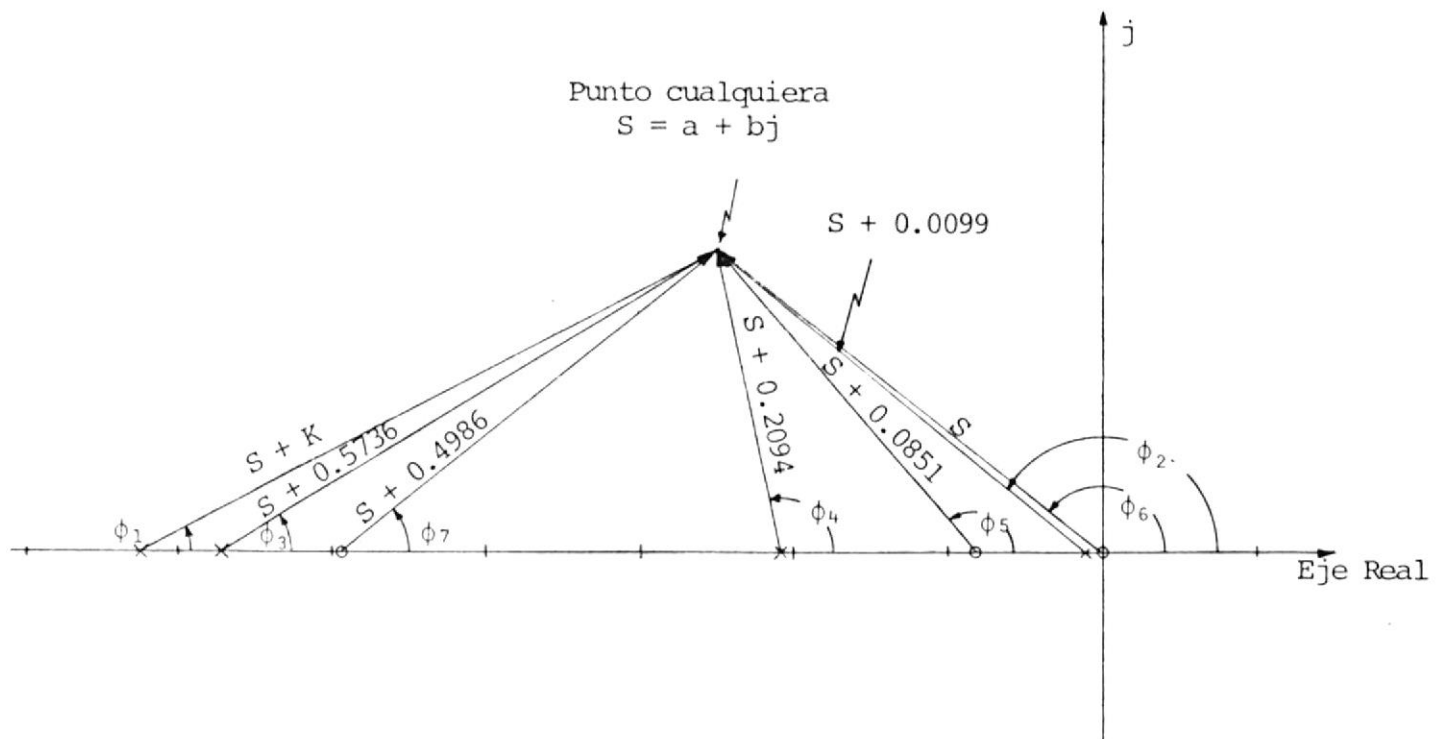


Fig. N° 33.- Representación vectorial de los términos del
 numerador y del denominador.

La condición de ángulo es:

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 - \phi_5 - \phi_6 - \phi_7 = 180^\circ \pm K360^\circ$$

Donde:

$$\phi_1 = \angle (S + K)$$

$$\phi_2 = \angle (S + 0.0099)$$

$$\phi_3 = \angle (S + 0.5736)$$

$$\phi_4 = \angle (S + 0.2094)$$

$$\phi_5 = \angle (S + 0.0851)$$

$$\phi_6 = \angle (S)$$

$$\phi_7 = \angle (S + 0.4986)$$

Los ángulos $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi_6, \phi_7$ son ilustrados en la Fig. N° 33 para un punto cualquiera S.

Con estas condiciones determinamos la localización del lugar geométrico de las raíces sobre el eje real, las cuales son determinadas por los polos x's y los ceros θ 's.

Cuando el punto S está situado a la derecha del origen sobre el eje real tenemos:

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = \phi_5 = \phi_6 = \phi_7 = 0^\circ$$

Entonces:

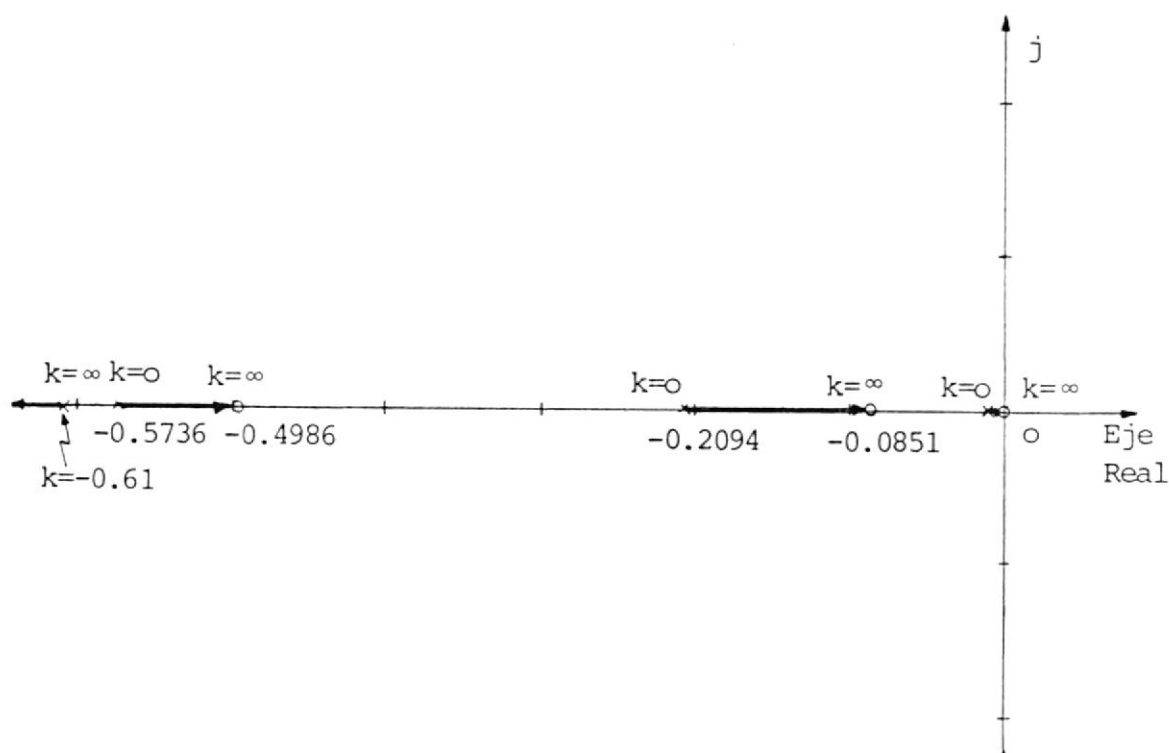


Fig. N° 34.- Representación de los lugares geométricos sobre el eje real.

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 - \phi_5 - \phi_6 - \phi_7 = 0^\circ$$

En este caso no se cumple la condición de ángulo, por lo tanto no existe lugar geométrico en el lado positivo del eje real.

Para un punto S que se encuentra en los puntos -0.0099 y 0.0 tenemos:

$$\phi_1 = 180^\circ$$

$$\phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = \phi_5 = \phi_6 = \phi_7 = 0^\circ$$

Entonces:

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 - \phi_5 - \phi_6 - \phi_7 = 180^\circ$$

Por lo tanto, se cumple la condición de ángulo, entonces existe un lugar geométrico entre estos dos puntos.

Así sucesivamente se determinan los lugares geométricos para los puntos menores que -0.0099, como se muestra en la Fig. N° 34.

Además, para la construcción de lugar geométrico se determinan las asíntotas para valores de S grandes.

Entonces en la ecuación de la condición de ángulo, los términos 0.0099, 0.0851, 0.2094, 0.4986, 0.5736, K son despreciables comparados con los valores de S, la ecuación queda determinanda de la siguiente manera:

$$\angle S_1 + \angle S_2 + \angle S_3 + \angle S_4 - \angle S_5 - \angle S_6 - \angle S_7 = 180^\circ \pm K360^\circ$$

La condición de ángulo es:

$$\angle S = 180^\circ \pm K360^\circ$$

Solamente el ángulo 180° es obtenido de esta ecuación.

En general, el ángulo de las asíntotas es:

$$\angle S = \frac{180^\circ \pm K 360^\circ}{n - m} \quad K = 0, 1, 2, \dots$$

Donde,

n = Números de polos de S

m = Números de ceros de S

El número de asíntotas es igual a " $n - m$ "

Como la diferencia de " $n-m$ " es 1 no existe intersección de las asíntotas con el eje real; aunque el valor de K_p aumente hasta el infinito, el lugar geométrico de las raíces se encuentra sobre el eje real, como se muestra en la Fig. N° 34.

Analizando la ecuación característica obtenemos que al incrementar el valor de las constantes de K_p los lugares geométricos de las raíces tienden a los ceros y un lugar geométrico tiende al in -

finito. Por lo tanto, como los ceros y los polos se encuentran en el lado izquierdo del plano S , entonces el sistema es estable.

1.4.2 Respuesta a la Frecuencia

Un camino alternativo muy práctico para el análisis y diseño de un sistema de control es el método de la respuesta de frecuencia.

La respuesta de frecuencia de un sistema se define como la respuesta del sistema en el estado estacionario a una señal sinusoidal de entrada.

Una ventaja del método de la respuesta de frecuencia es la fácil disponibilidad de señales de prueba sinusoidales para diversos rangos de frecuencia y amplitudes, además es un método seguro y sencillo para el análisis experimental del sistema. Otra ventaja de este método es que puede obtenerse la función de transferencia que describe el comportamiento sinusoidal en el estado estacionario de un sistema, reemplazando en la función de transferencia del sistema $T(S)$ a s por $j\omega$.

Usando la transformada de Fourier, la cual es un método de la respuesta de frecuencia que permite considerar la función de transferencia $T(jW)$ y relaciona las características de amplitud y fases del sistema. Si consideramos la respuesta de frecuencia del sistema de red cerrada, podríamos tener una entrada $r(t)$ que tenga una transformada de Fourier en el dominio de la frecuencia, como:

$$R(jW) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t) e^{-jWt} dt \quad (104)$$

Entonces puede obtenerse la respuesta de frecuencia de salida de un sistema de control, sustituyendo $S = jW$ en la relación del sistema de red cerrada, $C(S) = T(S) * R(S)$ de modo que:

$$G(jW) = T(jW)R(jW) = \frac{G(jW)}{1 + G(jW)H(jW)} * R(jW) \quad (105)$$

Donde la respuesta de salida transitoria es:

$$C(t) = \mathcal{F}^{-1}\{C(jW)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(jW) e^{jWt} dW \quad (106)$$

Generalmente, es difícil calcular esta integral de la transformada inversa, excepto los más simples, debido a eso analizamos un integración gráfica.

Considerando la función de transferencia de un sistema $G(S)$ puede describirse en el dominio de la frecuencia por la relación:

$$G(jW) = G(S) \Big|_{S = jW} = R(jW) + jX(jW) \quad (107)$$

Donde,

$$R(jW) = \text{Re}(G(jW)) \quad \text{y}$$

$$X(jW) = \text{Im}(G(jW))$$

La función de transferencia se representa por la magnitud $G(jW)$ y la fase $\phi(jW)$ como:

$$G(jW) = |G(jW)| e^{j\phi(jW)} = |G(jW)| \angle \phi(W) \quad (108)$$

Donde,

$$\phi(W) = \tan^{-1} \frac{X(W)}{R(W)}$$

$$|G(W)|^2 = (R(W))^2 + (X(W))^2$$

La representación de la respuesta de frecuencia del sistema $G(jW)$ puede utilizar cualquiera de las Ecs. (107) ó (108), mientras la representación gráfica polar de la respuesta de frecuencia se obtiene usando la Ec. (107) como se muestra en la Fig. N° 35. Las coordenadas de la gráfica

polar son las partes reales e imaginarias de $G(j\omega)$

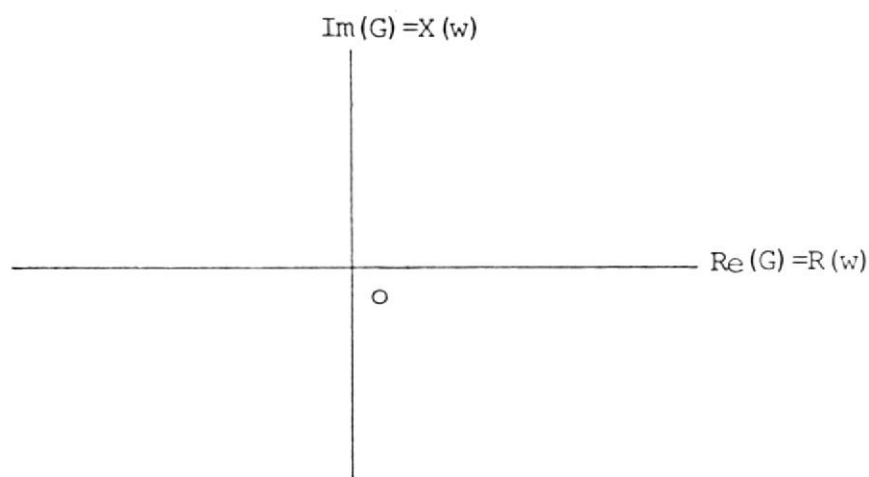


Fig. N° 35.- El Plano Polar

Para un sistema de control es necesario determinar si el sistema es o no estable, lo cual nos interesa investigar la estabilidad de un sistema en el dominio de la frecuencia real. La respuesta de frecuencia de un sistema representa la respuesta sinusoidal del sistema en el estado estacionario y proporciona suficiente información para la determinación de la estabilidad relativa del sistema, la cual sería un criterio útil de estabilidad en el dominio de la frecuencia que permita modificar un sistema con el objeto de aumentar su estabilidad relativa.

Un criterio de la estabilidad en el dominio de

la frecuencia fue desarrollado por Nyquist y es un método para la investigación de la estabilidad de los sistemas lineales de control que analizamos en la siguiente sección.

1.4.3 Método de Nyquist

Es un método fundamental para la investigación de la estabilidad de los sistemas lineales de control. Se basa en un teorema de la teoría de la función de una variable compleja, debido a Cauchy. El teorema de Cauchy está relacionado con el mapeo de contornos en el plano S complejo, donde se emplea la teoría de la variable compleja para su demostración.

Para determinar la estabilidad relativa de un sistema de red cerrada, analizamos la ecuación característica del sistema:

$$F(S) = 1 + P(S) = 0 \quad (109)$$

La cual, en términos de la gráfica del flujo de señal la ecuación característica es:

$$F(S) = \Delta(S) = 1 - \Sigma L_n + \Sigma L_m L_q \dots$$

Donde $\Delta(S)$ es la determinante de la gráfica. Para garantizar la estabilidad, debemos cerciorarnos que todos los ceros de $F(S)$ están en la parte izquierda del plano S . Por tanto, para analizar y entender el criterio de Nyquist, consideramos en forma breve la aplicación de los mapeos de contornos en el plano complejo.

Estamos interesados en el mapeo de contornos en el plano S mediante una función $F(S)$. Como S es una variable compleja, $S = \sigma + j\omega$. La función $F(S)$ es por si misma compleja y puede definirse como $F(S) = u + jv$, representándose en un plano $F(S)$ complejo en coordenadas u y v . Este tipo de mapeo que retiene los ángulos del contorno del plano S en el plano $F(S)$, se conoce como mapeo conforme. También un contorno cerrado en el plano S da como de resultado un contorno cerrado en el plano $F(S)$, y es recorrido en el mismo sentido.

Por convención, la superficie dentro de un contorno a la derecha de su recorrido se considera que es la superficie encerrada por el contorno. Por tanto, supondremos que el recorrido de un

contorno en el sentido del movimiento de la manecilla del reloj es positiva y que la superficie encerrada dentro del contorno está a la derecha.

El teorema de Cauchy está relacionado con el mapeo de una función $F(S)$ que tiene un número finito de polos y ceros dentro del contorno, de tal forma que podemos expresar la función $F(S)$ como:

$$F(S) = \frac{\prod_{i=1}^n (S + S_i)}{\prod_{k=1}^m (S + S_k)} \quad (110)$$

Donde, S_i son los ceros y S_k los polos de la función $F(S)$. Esta función es la ecuación característica anteriormente obtenida de tal forma que $P(S)$ es:

$$P(S) = N(S)/D(S)$$

Donde,

$$F(S) = 1 + \frac{N(S)}{D(S)} = \frac{D(S) + N(S)}{D(S)} = \frac{\prod_{i=1}^n (S + S_i)}{\prod_{k=1}^m (S + S_k)} \quad (111)$$

Y los polos de $P(S)$ son los polos de $F(S)$. Sin

embargo los ceros de $F(S)$ son los que constituyen las raíces característica del sistema e indican su respuesta, de la cual se deduce el teorema de Cauchy que dice:

"Si un contorno $\Gamma(s)$ en el plano S rodea Z ceros y P polos de $F(S)$ y no pasa a través de ningún polo o cero de $F(S)$ cuando el recorrido es en dirección del movimiento del reloj a lo largo del contorno, el contorno correspondiente $\Gamma(F)$ en el plano $F(S)$ rodea el origen del dicho plano, $N = Z - P$ veces en la misma dirección".

Con el objeto de investigar la estabilidad de un sistema de control, consideramos la ecuación características que es: $F(S) = 0$, de tal forma que:

$$F(S) = 1 + P(S) = \frac{K \sum_{i=1}^n (S + S_i)}{\sum_{k=1}^m (S + S_k)} = 0 \quad (112)$$

Para que un sistema sea estable, todos los ceros de $F(S)$ deben estar en la parte izquierda del plano S . Por tanto, escogemos un contorno $\Gamma(s)$ en el plano S que encierre toda la parte derecha

del plano S y, por medio del teorema de Cauchy determinamos si algunos de los ceros de $F(S)$ están dentro de $\Gamma(s)$.

Ya que el criterio de Nyquist está relacionado con la aplicación de la ecuación característica,

$$F(S) = 1 + P(S)$$

Y el número de rodeos del origen del plano $F(S)$, alternativamente podemos definir la función $F'(S)$ de tal forma que:

$$F'(S) = F(S) - 1 = P(S) \quad (113)$$

El cambio de funciones representadas por la ecuación (113) es conveniente, pues $P(S)$ se obtiene en forma factorizada, entonces la aplicación de $\Gamma(S)$ en el plano S se hará a través de la función $F'(S) = P(S)$ en el plano $P(S)$. Por tanto podemos establecer el criterio de estabilidad de Nyquist:

"Un sistema de control con retroalimentación es estable, si, y solamente si el contorno $\Gamma(P)$ en el plano $P(S)$ no rodea al punto $(-1,0)$, cuando

el número de polos de $P(S)$ en la parte derecha del plano S es cero ($P = 0$)".

Mientras tanto, cuando el número de polos de $P(S)$ en la parte derecha del plano S es diferente de cero, el criterio de Nyquist es:

"Un sistema de control con retroalimentación es estable si, y solamente si, para el contorno $\Gamma(P)$, el número de rodeos del punto $(-1,0)$ en el sentido contrario al movimiento del reloj, es igual al número de polos de $P(S)$ con partes reales positivas".

La base para los dos conceptos anteriores es el hecho que para el mapeo de $F(S) = P(S)$, el número de raíces (o ceros) de $1 + P(S)$ en la parte derecha del plano S se representa por la expresión:

$$Z = N + P$$

Evidentemente, si el número de polos de $P(S)$ en la parte derecha del plano S es cero ($P = 0$), para un sistema estable necesitamos que $N = 0$ y que el contorno $\Gamma(P)$ no rodee el punto $(-1,0)$.

Así mismo, si P es diferente de cero y para un sistema estable, si $Z = 0$, entonces debemos tener $N = -P$, o P rodeos en sentido contrario al movimiento del reloj.

A través del método de Nyquist analizaremos la estabilidad del sistema con los tres tipos de control: proporcional, integral, derivativo-proporcional.

a.- Analizando el sistema de control de ciclo cerrado con el control proporcional en el primer tanque tenemos la ecuación:

$$GH(S) = \frac{K_p (S + 0.0851) (S + 0.4986)}{(S + 0.5736) (S + 0.0099) (S + 0.2094)}$$

Reemplazando S por jW tenemos:

$$GH(jW) = \frac{K_p (jW + 0.0851) (jW + 0.4986)}{(jW + 0.5736) (jW + 0.0099) (jW + 0.2094)}$$

Entonces la ecuación en forma de magnitudes y ángulos de fases es:

$$M(W) = \frac{K_p [(W)^2 + (0.0851)^2]^{\frac{1}{2}} [(W)^2 + (0.4986)^2]^{\frac{1}{2}}}{[W^2 + (0.5736)^2]^{\frac{1}{2}} [W^2 + (0.0099)^2]^{\frac{1}{2}} [W^2 + (0.2094)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\phi(W) = \tan^{-1}(11.75W) + \tan^{-1}(2.01W) - \tan^{-1}(1.74W) - \\ - \tan^{-1}(1010.1W) - \tan^{-1}(4.78W)$$

En este caso $P(S) = GH(S)$ y se determina el contorno $\Gamma(P) = \Gamma(GH)$ en el plano $GH(S)$. En la Fig. N° 36(a) se muestra el contorno $\Gamma(S)$ en el plano complejo S . El contorno $\Gamma(S)$ pasa a lo largo del eje jW desde $-j\infty$ hasta $+j\infty$, el contorno se completa mediante una trayectoria semi-circular de radio r que se aproxima al infinito.

En la Fig. N° 36(b) se muestra un bosquejo del contorno $\Gamma(GH)$. Evidentemente, la parte del contorno $\Gamma(GH)$ desde $W = 0^+$ hasta $W = +\infty$ es simplemente $GH(jW)$, que es la gráfica polar de la frecuencia real. Consideramos en detalle cada parte del contorno $\Gamma(S)$ de Nyquist y determinamos las partes correspondientes del contorno $\Gamma(GH)$ del plano $GH(S)$.

- 1.- En el origen del plano S : La parte del contorno $\Gamma(S)$ desde $W = 0^-$ hasta $W = 0^+$ se mapea por medio de la función $GH(S)$, como la gráfica polar de frecuencia real, ya que $S = jW$:

$$GH(S) \Big|_{S=jW} = GH(jW)$$

$$\lim_{W \rightarrow 0} GH(jW) = \frac{K_p(0.0851)(0.4986)}{(0.5736)(0.0099)(0.2094)} \underline{/0^\circ}$$

$$= 35.68 K_p \underline{/0^\circ}$$

2.- Parte desde $W = 0^+$ hasta $W = +\infty$: La parte del contorno $\Gamma(S)$ desde $W = 0^+$ hasta $W = +\infty$ se mapea por medio de la función $GH(S)$, como la gráfica polar de frecuencia real, ya que $S = jW$

$$GH(S) \Big|_{S=jW} = GH(jW)$$

Para esta parte del contorno en la Fig. N° 36(b) se muestra este resultado en la gráfica polar de frecuencia real. Cuando W se aproxima a $+\infty$, tenemos:

$$\lim_{W \rightarrow \infty} GH(jW) = 0 \underline{/-90^\circ}$$

3.- Parte desde $W = +\infty$ hasta $W = -\infty$: La parte circular, de radio $r \rightarrow \infty$, del contorno $\Gamma(S)$ desde $W = +\infty$ hasta $W = -\infty$ se mapea en el

punto cero en el origen del plano $GH(S)$ por la función $GH(S)$. El mapeo se representa por:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} GH(S) \Big|_{S = re^{j\phi}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \left| \frac{K_p}{r} \right| e^{-j\phi}$$

Cuando ϕ cambia desde $\phi = 90^\circ$ en $W = +\infty$ hasta $\phi = -90^\circ$ en $W = -\infty$ en el plano S , el contorno en el plano $GH(S)$ se mueve desde un ángulo de -90° en $W = +\infty$ hasta un ángulo de $+90^\circ$ en $W = -\infty$. La magnitud del contorno $GH(S)$ cuando r es infinito siempre es cero o una constante.

4.- Parte desde $W = -\infty$ hasta 0^- : La parte del contorno $\Gamma(S)$ desde $W = -\infty$ hasta $W = 0^-$ se mapea mediante la función $GH(S)$ como sigue:

$$GH(S) \Big|_{S = -jW} = GH(-jW)$$

Debido a ésto obtenemos el conjugado complejo de $GH(jW)$ y la gráfica para la parte desde $W = -\infty$ hasta $W = 0^-$ es simétrica con la gráfica polar desde $W = +\infty$ hasta $W = 0^+$. En la figura N° 36(b) se muestra esta grá-

fica polar en el plano $GH(S)$.

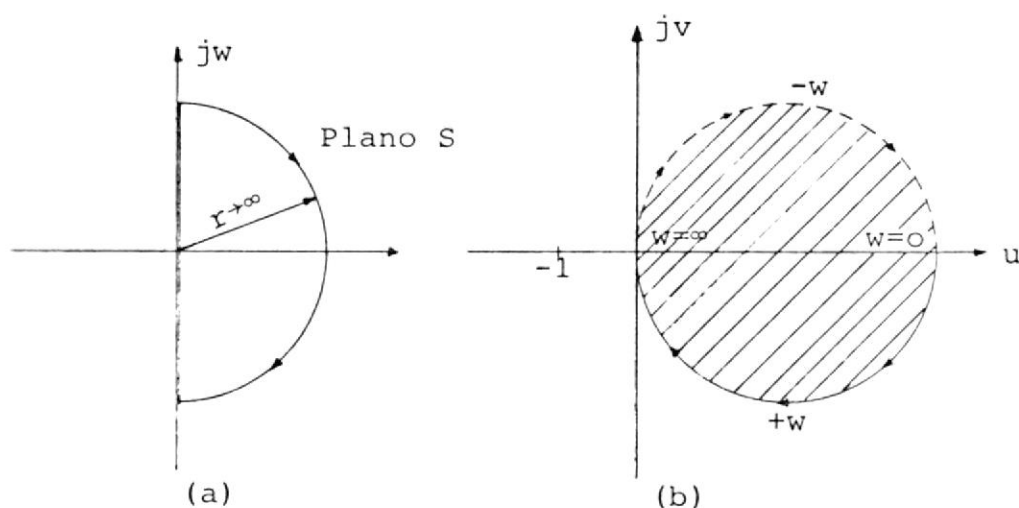


Fig. N° 36.- Contorno de Nyquist y mapeo de $GH(S)$

Luego, para investigar la estabilidad del sistema, notamos primero que el número de polos es cero dentro de la parte derecha del plano S . Por lo tanto, para que este sistema sea estable necesitamos que $N = Z = 0$ y el contorno $\Gamma(GH)$ no debe rodear al punto -1 en el plano GH . Examinando la Fig. N° 36 (b) encontramos que independientemente del valor de la ganancia K_p , el contorno no rodea al punto -1 y el sistema es siempre estable, cuando $K_p \geq 0$.

b.- Analizando el sistema de control de ciclo cerrado con el control integral en el primer tanque, obtenemos que la ecuación característica es:

$$GH(S) = \frac{K_i(S + 0.0851)(S + 0.4986)}{S(S + 0.0099)(S + 0.2094)(S + 0.5736)}$$

En este caso, $P(S) = GH(S)$ y determinamos el contorno $\Gamma(P) = \Gamma(GH)$ en el plano $GH(S)$.

En la Fig. N° 37(a) se muestra el contorno $\Gamma(S)$ en el plano S ; se efectúa una vuelta infinitesimal alrededor del polo en el origen por medio de un pequeño semicírculo de radio ϵ , donde $\epsilon \rightarrow 0$. Esta vuelta es una consecuencia de la condición del teorema de Cauchy, la cual exige que el contorno no pase a través del polo en el origen. En la Fig. N° 37(b) se muestra un bosquejo del contorno $\Gamma(GH)$. Evidentemente, la parte del contorno $\Gamma(GH)$ desde $W = 0^+$ hasta $W = +\infty$ es simplemente $GH(jW)$, que es la gráfica polar de la frecuencia real y determinamos las partes correspondientes del contorno $\Gamma(GH)$ del plano $GH(S)$.

- 1.- El origen del plano S: La pequeña vuelta semicircular alrededor del polo en el origen puede representarse haciendo $S = \epsilon e^{j\phi}$ y permitiendo que ϕ varíe desde -90° en $W = 0^-$ hasta $+90^\circ$ en $W = 0^+$. Como ϵ se aproxima a cero, el mapeo de $GH(S)$ es:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} GH(S) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{K}{\epsilon}\right) e^{-j\phi}$$

Por tanto, el ángulo del contorno en el plano $GH(S)$ cambia desde 90° en $W = 0^-$ hasta -90° en $W = 0^+$, pasando a través de 0° en $W = 0$. El radio del contorno en el plano $GH(S)$ para esta parte del contorno es infinito como se muestra la Fig. N° 37(b).

- 2.- Parte desde $W = 0^+$ hasta $W = +\infty$: La parte del contorno $\Gamma(S)$ desde $W = 0^+$ hasta $W = +\infty$ se mapea por medio de la función $GH(S)$ como gráfica polar de frecuencia real ya que $S = jW$ y

$$GH(S) \Big|_{S = jW} = GH(jW)$$

Para esta parte del contorno. En la Fig. N° 37(b) se muestra este resultado en la gráfi-

ca polar de frecuencia real. Cuando W se aproxima a $+\infty$, tenemos:

$$\lim_{W \rightarrow \infty} GH(jW) = \lim_{W \rightarrow \infty} \left| \frac{K_i}{W^2} \right| \angle -180^\circ$$

Por tanto, la magnitud se aproxima a cero en un ángulo de -180° , en el plano $GH(S)$.

3.- Parte desde $W = +\infty$ hasta $W = -\infty$: La parte de $\Gamma(S)$ desde $W = +\infty$ hasta $W = -\infty$, a lo largo del círculo de radio $r \rightarrow \infty$, se mapea en el punto cero en el origen del plano $GH(S)$ por la función $GH(S)$. El mapeo se representa por:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} GH(S) \Big|_{S = re^{j\phi}} \equiv \lim_{r \rightarrow \infty} \left| \frac{K_i}{r^2} \right| e^{-2j\phi}$$

Donde ϕ cambia desde $\phi = +90^\circ$ en $W = +\infty$ hasta $\phi = -90^\circ$ en $W = -\infty$.

Debido a ello el contorno en el plano $GH(S)$ se mueve desde un ángulo de -180° en $W = +\infty$ hasta un ángulo de $+180^\circ$ en $W = -\infty$. La magnitud del contorno $GH(S)$ cuando r es infinito siempre es cero o una constante.

Nuevamente, su mapeo es simétrico para $GH(jW)$

y $GH(-jW)$ de tal forma que es suficiente investigar el lugar geométrico de $GH(jW)$.

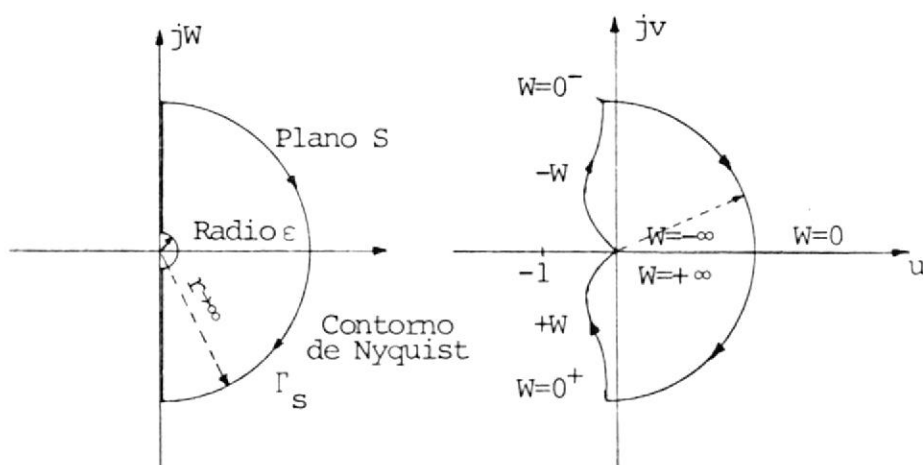


Fig. N° 37.- Contorno de Nyquist y Mapeo para $GH(S)$

Luego, para investigar la estabilidad de este sistema observamos que el número de polos, P , es cero dentro de la parte derecha del plano S . Por lo tanto, para que este sistema sea estable necesitamos que $N = Z = 0$ y el contorno $\Gamma(GH)$ no debe rodear el punto -1 en el plano GH . Examinando la Fig. N° 37(b), encontramos que independientemente del valor de la ganancia K_i , el contorno no rodea al punto -1 y el sistema es siempre estable, cuando $K_i \geq 0$.

c.- Analizando el sistema de control de ciclo cerrando con el control derivativo-proporcional en el primer tanque, se tiene que la ecuación característica es:

$$GH(S) = \frac{K_p S (S + 0.0851)(S + 0.4986)}{(S + K)(S + 0.5736)(S + 0.0099)(S + 0.2094)}$$

En la Fig. N° 37(a) se muestra el contorno $\Gamma(S)$ de Nyquist. Nuevamente su aplicación es simétrica para $GH(jW)$ y $GH(-jW)$ de tal forma que es suficiente investigar el lugar geométrico de $GH(jW)$.

El origen del plano S se mapea en un semi-círculo de radio infinito como en el caso anterior. También, como esperábamos, el semi-círculo, $re^{j\phi}$ en el plano S se mapea en el punto $GH(S) = 0$. Por tanto, para investigar la estabilidad del sistema, es suficiente graficar la parte del contorno $\Gamma(GH)$ que es la gráfica polar de la frecuencia real $GH(jW)$ para $0^+ < W < +\infty$, por tanto cuando $S = +jW$ tenemos que:

$$M(W) = \frac{K_p W [W^2 + (0.0851)^2]^{\frac{1}{2}} [W^2 + (0.4986)^2]^{\frac{1}{2}}}{[W^2 + K^2]^{\frac{1}{2}} [W^2 + (0.5736)^2]^{\frac{1}{2}} [W^2 + (0.0099)^2]^{\frac{1}{2}} [W^2 + (0.2094)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

Y

$$\phi(W) = \frac{\pi}{2} + \tan^{-1}(11.8W) + \tan^{-1}(2.01W) - \tan^{-1}\left(\frac{W}{K}\right) - \\ - \tan^{-1}(1.75W) - \tan^{-1}(1010.1W) - \tan^{-1}(4.78W)$$

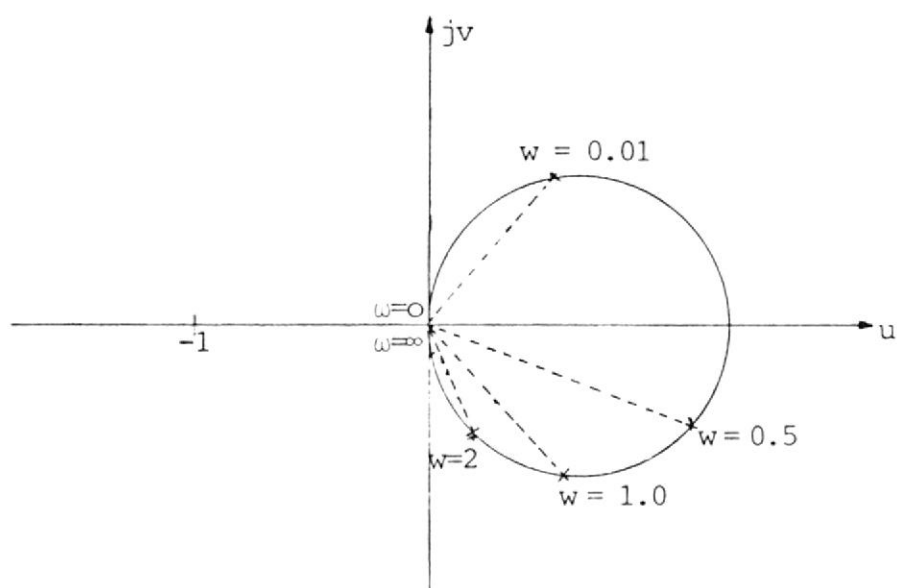
Cuando $W = 0+$, la magnitud del lugar geométrico es cero en un ángulo de 90° en el plano $GH(S)$. Cuando W se aproxima a $+\infty$ tenemos:

$$\lim_{W \rightarrow \infty} GH(jW) = \lim_{W \rightarrow \infty} \left| \frac{K_p}{W} \right| \angle -\pi/2$$

Por lo tanto, $GH(jw)$ se aproxima a una magnitud cero en un ángulo de -90° . Para el semicírculo de radio r , cuando r se aproxima al infinito, tenemos:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} GH(S) \Big|_{S = re^{j\phi}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \left| \frac{K_p}{r} \right| e^{-j\phi}$$

Donde ϕ varía desde $\phi = +90^\circ$ en $W = +\infty$ hasta $\phi = -90^\circ$ en $W = -\infty$. Debido a esto el contorno en el plano $GH(S)$ se mueve desde un ángulo -90° en $W = +\infty$ hasta un ángulo de $+90^\circ$ en $W = -\infty$. La magnitud del contorno $GH(S)$ cuando r es infinito siempre es cero o una constante. En la Fig. N° 38 se muestra esta gráfica polar en el plano $GH(S)$.

Fig. N° 38.- Diagrama de Nyquist para $GH(S)$

En la Fig. N° 38 se representa el diagrama de Nyquist, cuando analizamos el sistema con la constante de retardo $K = 0.6$, el cual se lo determina reemplazando valores a la frecuencia, que están representados en la Tabla N° 2.

W	$ GH(W) $	$\angle GH(W)$
0.01	0.418	47.88°
0.5	1.111	-21.61°
1.0	0.816	-48.17°
2.0	0.472	-67.47°
10.0	0.099	-85.37°

Tabla N° 2.- Datos de Magnitudes y Angulos de Fase.

Para investigar la estabilidad del sistema, observamos que el número de polos es cero dentro de la parte derecha del plano S . Por tanto, para que este sistema sea estable necesitamos que $N = Z = 0$ y el contorno $\Gamma(GH)$ no debe rodear el punto -1 en el plano GH . Examinando la Fig. N° 38 encontramos que independientemente del valor de la ganancia K_p , el contorno no rodeará al punto -1 y el sistema siempre es estable cuando $K_p \geq 0$.

1.5 SIMULACION ANALOGICA

Cuando se dispone de un modelo para un componente o sistema, puede utilizarse una computadora para investigar el comportamiento del sistema.

Una simulación de computadora emplea un modelo y las condiciones reales del sistema que se modela, así como también instrucciones reales de entrada a los cuales está sujeto el sistema.

Un sistema puede simularse usando computadoras digitales y analógicas. Una computadora electrónica analógica se emplea para establecer un modelo de un sistema, usando para ello analogía entre el voltaje del amplifi-

ficador electrónico y la variable del sistema que se modela. Además las entradas y salidas de un sistema son representadas por voltajes, entonces, el comportamiento de un sistema puede ser observado y los datos registrados usando osciloscopios y registradores electromecánicos. La exactitud de los resultados de una computadora analógica está limitada naturalmente por la precisión de los componentes que forman la computadora y de la habilidad para medir exactamente los voltajes.

Una computadora electrónica analógica generalmente tiene disponibles las funciones matemáticas que incluyen integración, multiplicación por una constante, multiplicación de dos funciones, suma algebraica, y generación de funciones, las cuales se representan con los símbolos de la Fig. N° 39.

Los elementos que efectúan estas operaciones de manera tal, que la computadora analógica es ideal para obtener la solución continua de una ecuación diferencial, ya sea lineal o no lineal.

El núcleo de la computadora analógica es el amplificador operacional. Este elemento, con la impedancia correcta para la entrada y la retroalimentación forma el

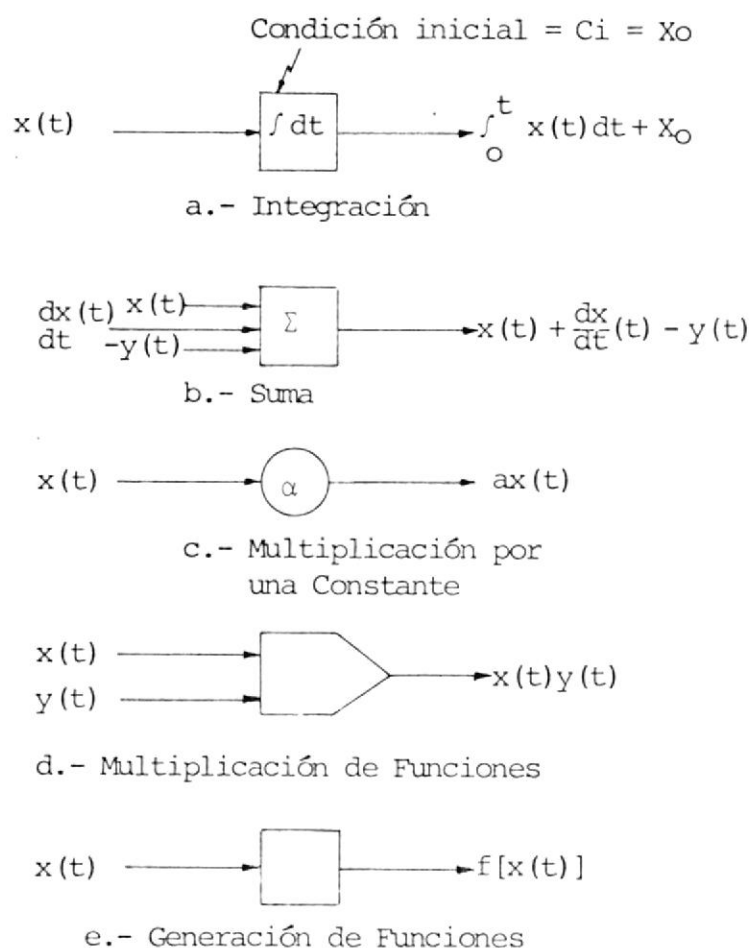


Fig. N° 39.- Operaciones Matemáticas efectuadas por una Computadora Analógica.

bloque electrónico básico para la suma y la integración. El amplificador operacional de C.C., está representado por el diagrama de la Fig. N° 40(a). El amplificador se especifica como de alta ganancia porque es conveniente tener una razón o relación entre la señales de salida o entrada tan grande como sea posible, donde, para propósitos de cálculo es conveniente tener una relación lineal entre salida y entrada.

da para todo el rango del voltaje de salida.

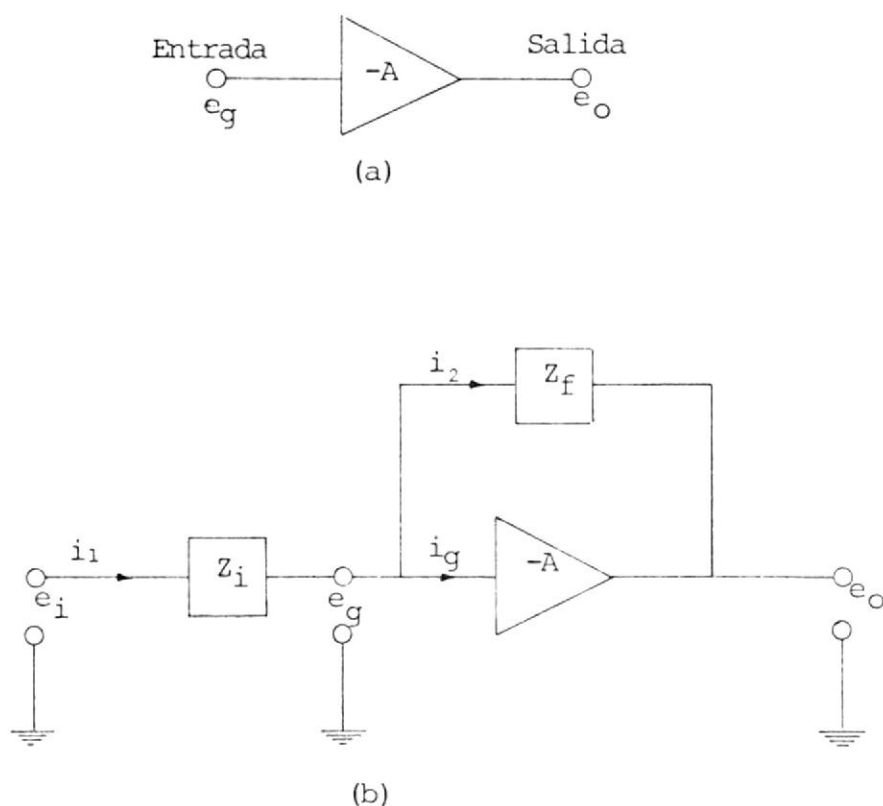


Fig. N° 40.- Amplificador Operacional y Configuraciones de Impedancia.

Otro requerimiento de un buen amplificador operacional incluye : Voltaje nulo de salida para un voltaje nulo de entrada, impedancia interna de entrada extremadamente alta, inversión de polaridad entre los voltajes de salida y entrada y poco ruido generado dentro del amplificador.

Suponiendo que el amplificador de la Fig. N° 40(a) se

modifica por la adición de una impedancia Z_i en serie con el amplificador y una impedancia de retroalimentación Z_f de la salida a la entrada del amplificador, como se muestra en la Fig. N° 40(b), la relación entre los voltajes de salida y entrada se la determina de la siguiente manera, debido a que la impedancia interna de entrada del amplificador es alta, entonces no habrá corriente de entrada por tanto $i_g \approx 0$, y por la Ley de Kirchhoff

$$i_1 = i_2 \quad (114)$$

Además la corriente a través de una impedancia eléctrica es igual a la caída de potencial dividida entre la impedancia, tenemos que:

$$i_1 = \frac{e_i - e_g}{Z_i} \quad i_2 = \frac{e_g - e_o}{Z_f} \quad (115)$$

Sustituyendo la Ec. (115) en (114)

$$\frac{e_i}{Z_i} = \frac{e_g}{Z_i} + \frac{e_g}{Z_f} - \frac{e_o}{Z_f} \quad (116)$$

También la relación de voltaje de salida al voltaje de rejilla del amplificador, como se muestra en la Fig. N°

40(a) es:

$$e_o = -Ae_g \quad (117)$$

Donde $A = 10^6 \sim 10^8$, por tanto un amplificador operacional cambia el signo algebraico.

Sustituyendo la Ec. (117) en la Ec. (116) tenemos que:

$$\frac{e_i}{Z_i} = -\frac{e_o}{Z_f} - \frac{e_o}{A} \left(\frac{1}{Z_f} + \frac{1}{Z_i} \right) \quad (118)$$

En general, el valor $|A|$ es grande y el valor de $|e_o|$ es pequeño, además el valor de Z_i y Z_f son grandes, entonces despreciamos el segundo término en el segundo miembro de la Ec. (118), obteniendo de esta manera la relación:

$$e_o = -\frac{Z_f}{Z_i} e_i \quad (119)$$

La Ec. (119) es la ecuación básica que relaciona e_i , e_o del amplificador operacional de C.C. de alta ganancia que se muestra en la Fig. N° 40(b).

Inversión de signo.- Usando resistencias como impedancia de entrada y de retroalimentación, como se muestra

en la Fig. N° 41. La Ec. (119) se convierte en:

$$e_o = - \frac{R_f}{R_i} e_i$$

La tensión de salida es igual a la tensión de entrada multiplicado por una constante $(-R_f/R_i)$ la cual es negativa. Así la Fig. N° 41 muestra un circuito que produce una inversión de signo.

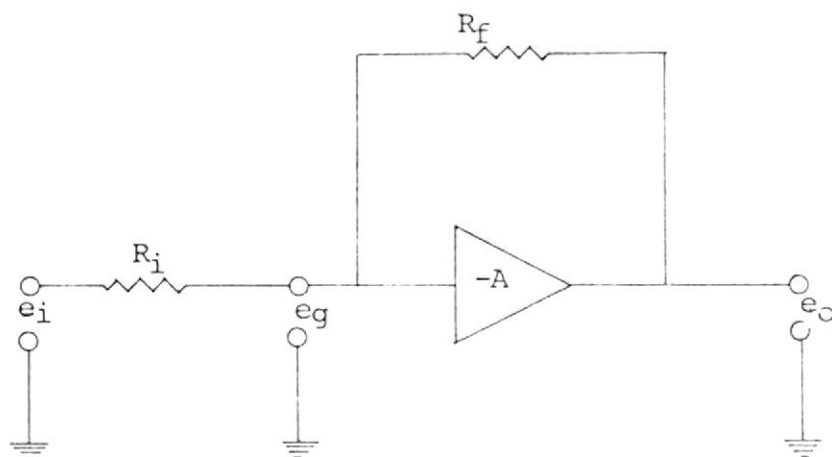


Fig. N° 41.- Inversor de Signo

Suma.- En el caso que necesitemos sumar algunas variables usamos resistencias, como impedancia de entrada y retroalimentación en un amplificador operacional de C.C. de alta ganancia.

La Fig. N° 42(a), muestra un diagrama esquemático de

un sumador que suma "n" entrada. La salida e_o es:

$$e_o = -\left(\frac{R_f}{R_1} e_1 + \frac{R_f}{R_2} e_2 + \dots + \frac{R_f}{R_n} e_n\right) \quad (120)$$

La Fig. N° 42(b) es el símbolo comúnmente utilizado para este caso.

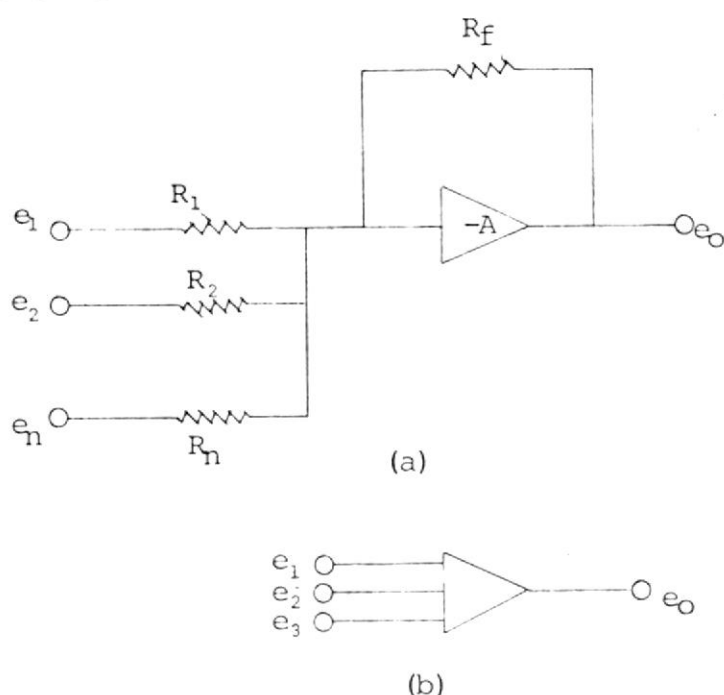


Fig. N° 42.- a) Diagrama Esquemático de un sumador
b) Símbolo del sumador

Integración.- Mientras que en la integración con un amplificador operacional se utiliza un capacitor como impedancia de realimentación y un resistor como una impedancia de entrada, como se muestra en la Fig. N° 43(a). La Ec. (119) pasa a ser:

$$e_o = - \frac{1}{R_i C_f} \int_0^t e_i dt \quad (121)$$

Para integrar la entrada e_i y obtener la salida e_o se considera la condición inicial, indicando la condición inicial $e(0)$ se puede escribir la Ec. (121) como:

$$e_o(t) = - \frac{1}{R_i C_f} \int_0^t e_i dt + e(0) \quad (122)$$

Cada integrador debe ser inicialmente polarizado por una tensión de C.C. para dar la necesaria condición inicial. En la Fig. N° 43(b) se muestra el símbolo comúnmente utilizado para un integrador.

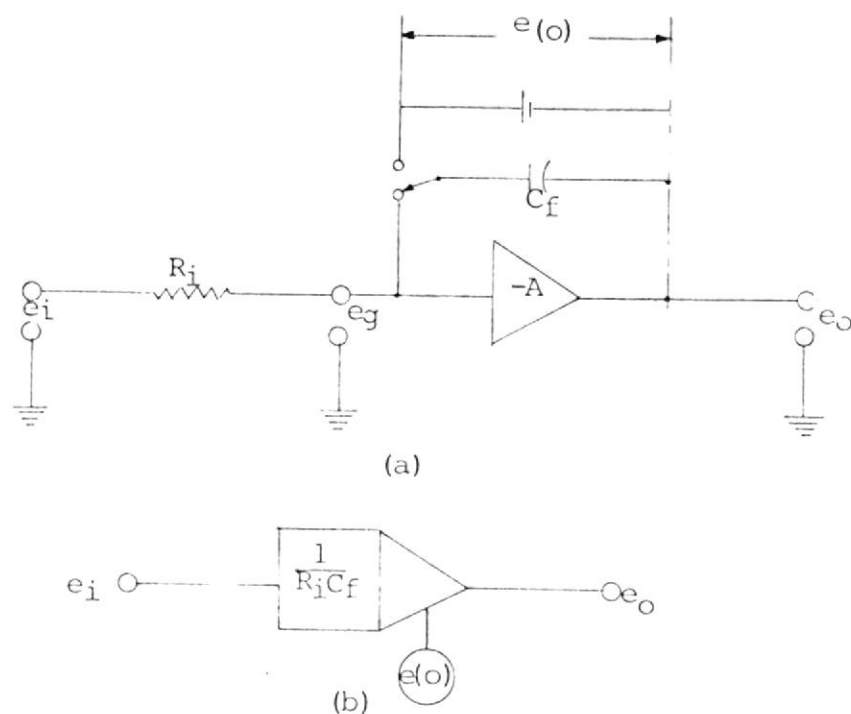


Fig. N° 43.- a) Diagrama esquemático de un Integrador
b) Símbolo del Integrador

Multiplicación por una fracción.- La multiplicación de e_i por una constante B , donde $0 < B < 1$, puede ser lograda por el potenciómetro que se muestra en la Fig. N° 44(a), la salida e_o es:

$$e_o = \frac{R_f}{R_i} e_i \quad (123)$$

La Fig. N° 44(b) muestra el símbolo comúnmente utilizado para un potenciómetro.

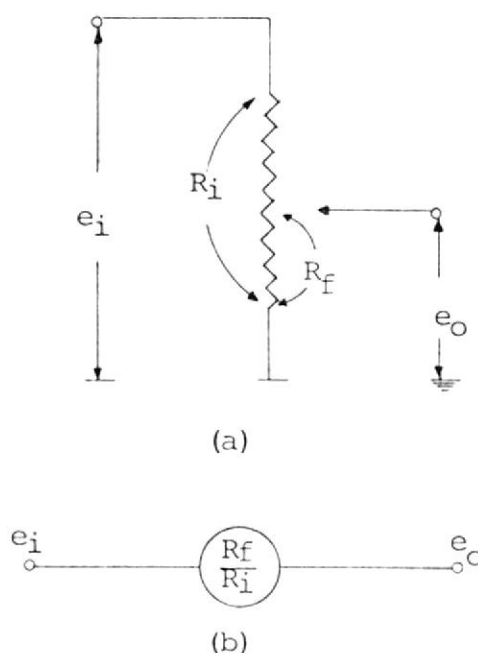


Fig. N° 44.- a) Potenciómetro
b) Símbolo del Potenciómetro

Para el caso de resolver ecuaciones diferenciales usando la computadora electrónica analógica debemos seguir

los siguientes pasos:

- 1.- Para establecer un diagrama de computadora, es suponer que se dispone de la derivada de orden más alto.
- 2.- Se despeja en la ecuación diferencial esta derivada de orden superior, donde se obtiene la variable, integrando la derivada de orden superior y también, indicar las condiciones iniciales.

Es importante recordar que hay cambio de signo en cada amplificador operacional. Por tanto, si la cantidad de amplificadores operacionales (integradores y sumadores) en un lazo es par, la tensión de salida aumenta hasta saturarlo, entonces la cantidad de amplificadores operacionales en cualquier lazo debe ser impar.

Con respecto a los factores de escala tenemos que la salida de cualquier amplificador no debe exceder 100 voltios para evitar la saturación. La saturación de tensión produce errores en la solución, además la tensión máxima en cualquier amplificador no debe ser demasiado pequeña. Para asegurar la exactitud adecuada, es deseable que la máxima variación de tensión de salida en cualquier amplificador esté alrededor de 70

a ± 90 voltios.

Al establecerse el diagrama de computadora es deseable que la máxima variación de tensión de salida, sea la misma para cualquier amplificador. A este respecto es de importancia elegir la magnitud adecuada de factores de escala. La magnitud de los factores de escala relacionan las tensiones de salida de los amplificadores con las correspondientes cantidades físicas.

La simulación del sistema dinámico es una aplicación importante de la computadora analógica. En particular la computadora analógica es útil en determinar los efectos de variaciones de parámetros en el funcionamiento de circuitos.

Analizando el sistema de ciclo cerrado con el control proporcional, teniendo la entrada en el primer tanque, tenemos las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$C_1 \frac{dh_1}{dt} = -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)h_1 + \frac{h_2}{R_2} + k_h h - K_Y K_P h_1$$

$$C_2 \frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{R_2} h_1 - \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)h_2 + \frac{1}{R_4} h_3$$

$$C_3 \frac{dh_3}{dt} = \frac{h_2}{R_4} - \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right)h_3$$



Reemplazando los valores de las resistencias, las áreas, las constantes K_h , K_y para el punto de operación y la constante de proporcionalidad K_p de 0.197 tenemos:

$$\frac{dh_1}{dt} = -2.709h_1 + 0.194h_2 + 0.03h_3$$

$$\frac{dh_2}{dt} = 0.195h_1 - 0.4h_2 + 0.189h_3$$

$$\frac{dh_3}{dt} = 0.189h_2 - 0.207h_3$$

Considerando las condiciones iniciales $h_1(0) = 0$, $h_2(0) = 0$ y $h_3(0) = 0$.

Como ya tenemos despejado la derivada de orden superior para nuestro caso, podemos obtener las variables h_1 , h_2 y h_3 integrando $\dot{h}_1$, $\dot{h}_2$ y $\dot{h}_3$.

En la Fig. N° 45 se muestra el diagrama del computador analógico para resolver este sistema. Se hace notar que la suma de las entradas a los integradores es el término de la derivada superior que se consideró originalmente disponible.

En este diagrama asumimos que:

$$\begin{array}{lll}
 a = 0.03 & a_1 = 2.709 & a_2 = 0.194 \\
 b_1 = 0.195 & b_2 = 0.4 & b_3 = 0.189 \\
 c_1 = 0.189 & c_2 = 0.207 &
 \end{array}$$

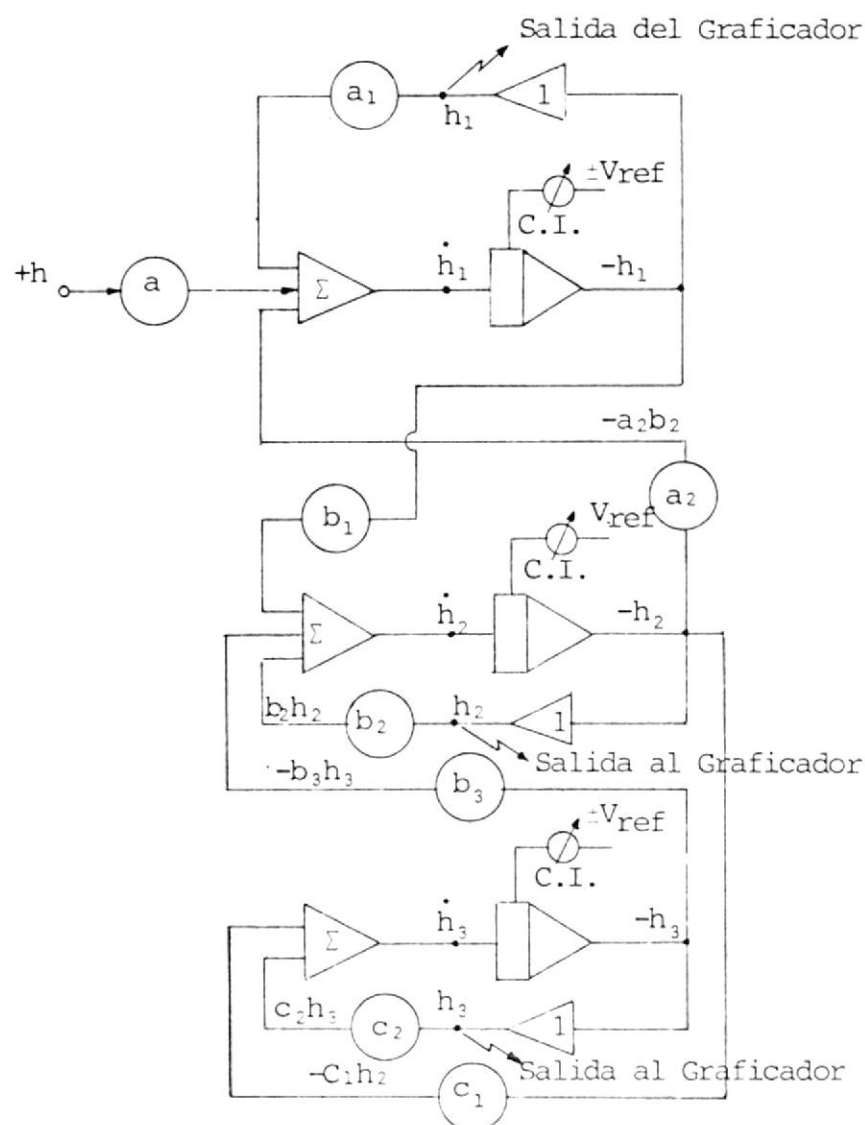


Fig. N° 45.- Diagrama Esquemático del Computador Analógico para resolver las ecuaciones.

En el diagrama que se muestra en la Fig. N° 45, se re-

duce el número de elementos para disminuir el efecto de ruido y mantener elevada la exactitud porque es deseable utilizar el mínimo número de amplificadores necesarios (en cualquier computadora analógica, la cantidad de integradores y sumadores es limitada. Al resolver un problema complejo que requiere muchos integradores y sumadores, es necesario usar la mínima cantidad para cada ecuación con el objeto de ahorrar componentes).

En el diagrama de la Fig. N° 45 se eliminan los tres sumadores y se aumenta un invertidor en la entrada.

Para obtener el diagrama simplificador del computador analógico como se muestra en la Fig. N° 46 partimos de las siguientes ecuaciones:

$$-\dot{h}_1 = a_1 h_1 - a_2 h_2 - a h$$

$$-\dot{h}_2 = -b_1 h_1 + b_2 h_2 - b_3 h_3$$

$$-\dot{h}_3 = -c_1 h_2 + c_2 h_3$$

A partir de la Fig. N° 46 se realizan las diferentes conexiones en la computadora analógica con sus respectivos valores de resistencias a los potenciómetros, como el voltaje de entrada para simular el sistema y obtener una determinada respuesta como se muestra en

el Gráfico N° 1. (Ver Pág. N° 224).

Similarmente se obtendría la simulación del sistema a partir de las ecuaciones diferenciales cuando se tiene la entrada en el primer tanque con el control integral y el control derivativo-proporcional.

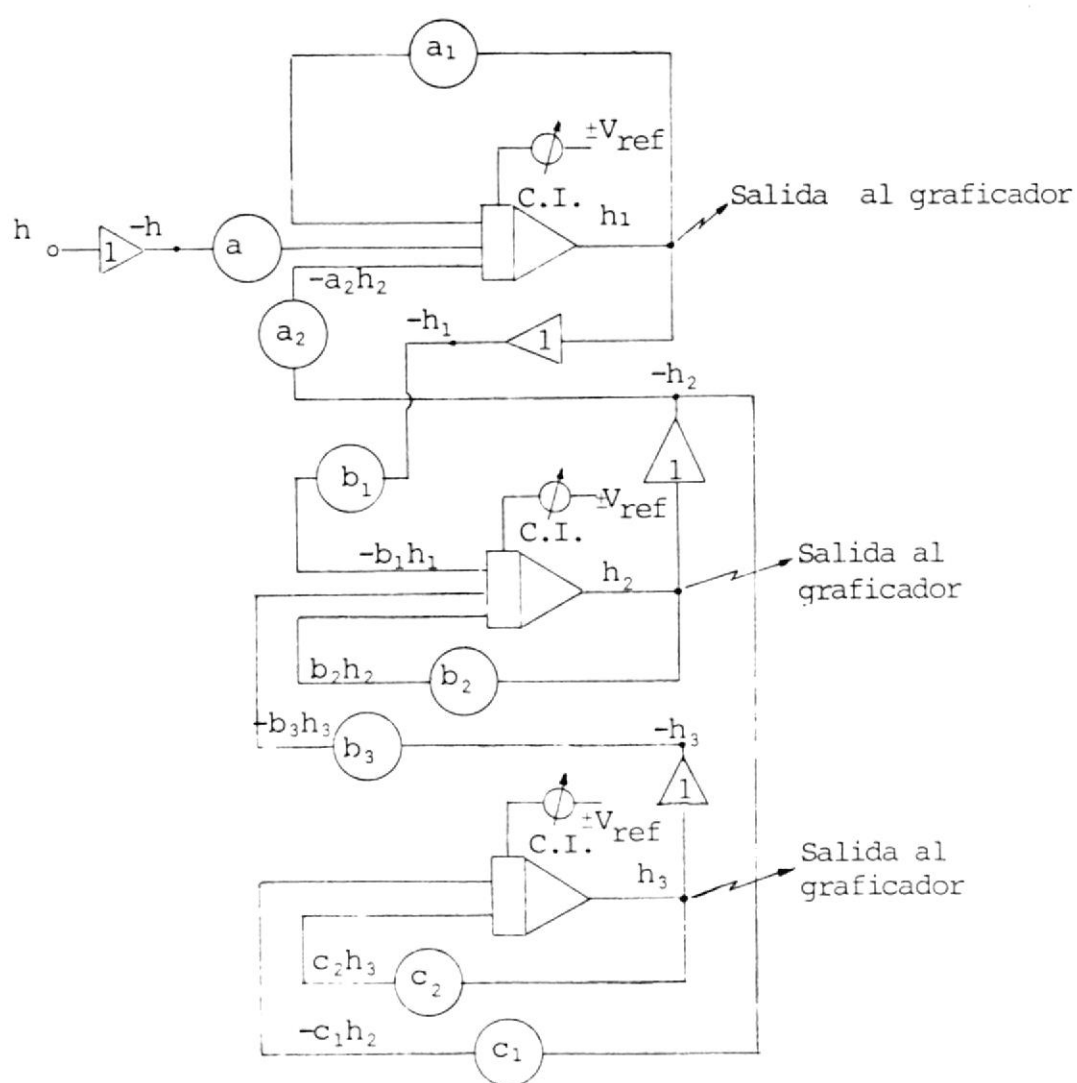


Fig. N° 46.- Versión simplificada del Diagrama del Computador de la Fig. N° 45.

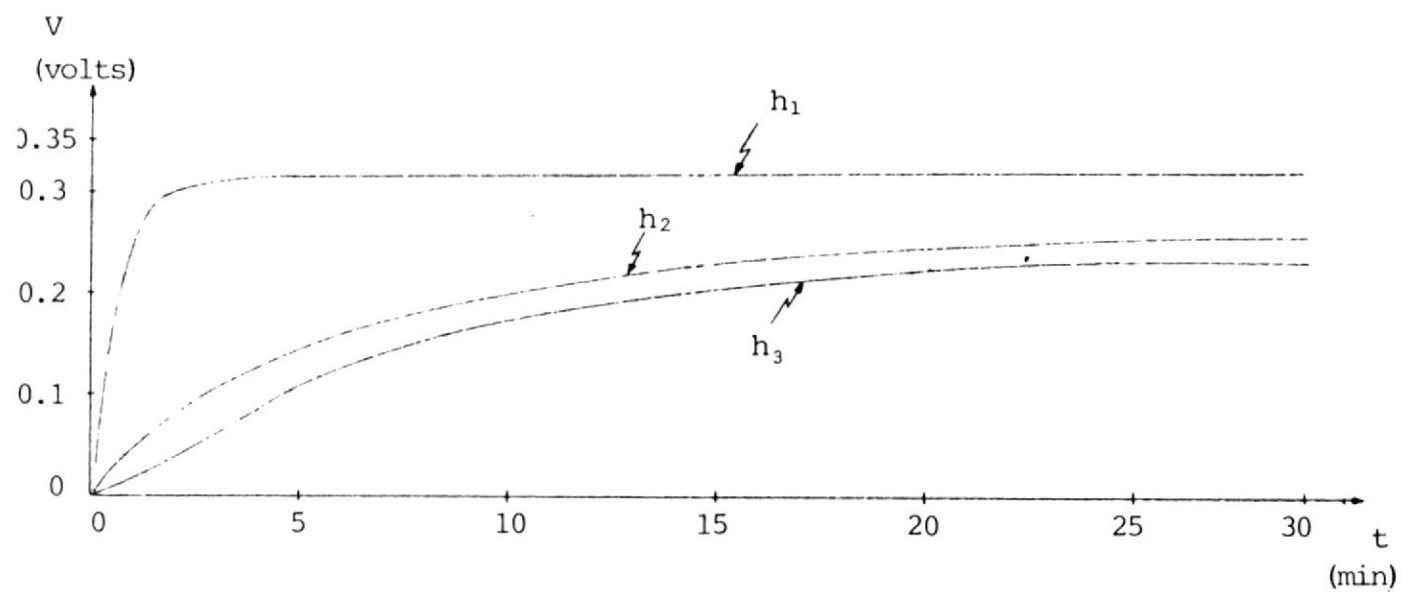


Gráfico N° 1.- El sistema en estado estable con una perturbación escalón de 10 cm. en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 29.1 min y una constante de proporcionalidad K_p de 0.197.

CAPITULO II

ANALISIS EXPERIMENTAL

2.1 DESCRIPCION DEL EQUIPO EXPERIMENTAL

En el análisis experimental de esta tesis se construyó un modelo para un sistema de control del nivel de líquido de tres tanques en serie teniendo un control proporcional en la entrada, el cual permite que la altura del líquido de los tanques se mantenga constante a pesar de las variaciones en el gasto de las salidas y perturbaciones sobre los niveles de los tanques en serie.

Este modelo permite analizar en forma práctica el comportamiento de los niveles cuando ocurren perturbaciones ya sean internas o externas al sistema.

Además, podemos establecer la respuesta o comportamiento de este tipo de control proporcional.

Como este sistema es de tres tanques en serie permite

variar la altura de los niveles de los tanques considerando el nivel del tanque donde se encuentra la entrada.

2.1.1 Generalidades sobre el Equipo Experimental utilizado.

El equipo experimental utilizado es un sistema de control de nivel de líquido que consiste de tres tanques conectados en serie por dos tuberías, teniendo cada una sus respectivas llaves de compuerta para variar la abertura de la llave y así obtener un determinado nivel en cada tanque.

Además, cada uno de los tanques conectados tienen su respectiva salida, donde el diámetro del orificio de salida es el mismo para los tres tanques.

Estos tanques son alimentados por un tanque de reservorio y son controlados por una válvula de vástago que utiliza un tipo de control proporcional.

Para controlar los niveles de los tanques en serie del sistema, es esencial determinar las re-

sistencias o aberturas que deben tener cada una de las llaves de interconexión para obtener los niveles deseados.

Como los tanques tienen una salida de un mismo diámetro, los gastos de salida son equivalentes al nivel del líquido que tiene cada tanque.

También debemos seleccionar la constante de proporcionalidad o el punto de apoyo para que el sistema responda rápidamente y así, la altura del líquido de los tanques, se mantenga constante.

2.1.2 Diagrama del Equipo

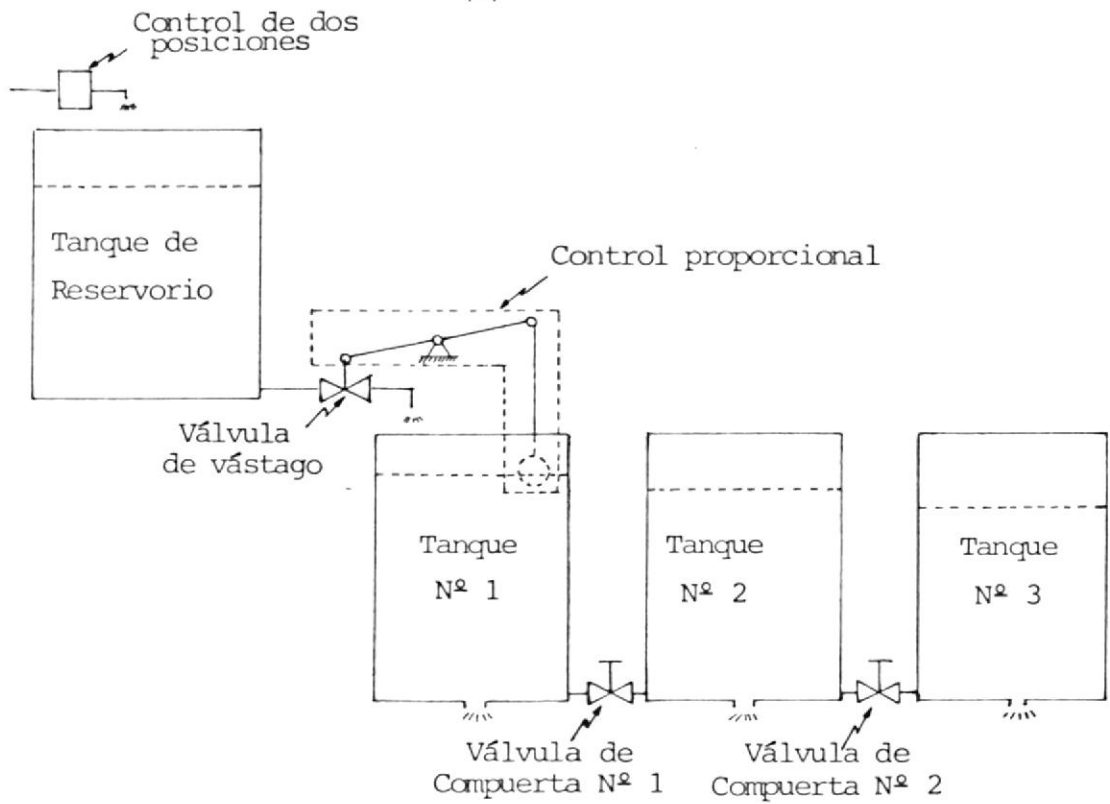
El equipo experimental utilizado y un diagrama del mismo que está representado en bloque en una forma esquemática, se muestran en la Fig.Nº 47.

2.1.3 Características de los Diferentes Componentes del Equipo

Los elementos que componen el equipo experimental son los siguientes:



(a)



(b)

Fig. N° 47.- a) Foto del equipo experimental utilizado
b) Diagrama esquemático del equipo.

- 1.- Tanque de Reservorio.- Es un tanque que cumple la función de almacenamiento de líquido y es llenado por una válvula solenoide que está conectada a la tubería de servicio, y siempre permanecerá lleno. Además tiene una salida que es conectada a la válvula de vástago para así poder abastecer a los tanques en serie y un medidor de nivel visual con una cinta métrica para obtener el nivel del líquido en el tanque, como se muestra en la Fig. N° 48.

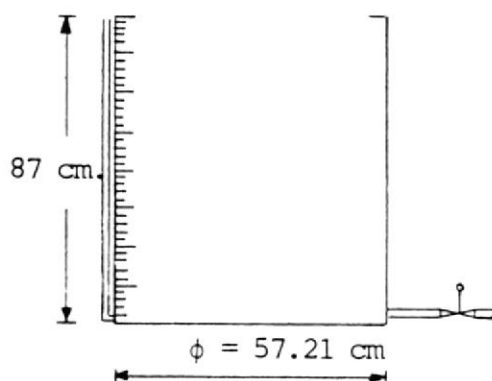


Fig. N° 48.- Tanque de Reservorio

- 2.- Válvula de Vástago.- Es una válvula que permite variar el caudal de entrada según la posición del vástago y está compuesta de una base donde se encuentra la entrada, la sali-

da y el orificio donde se introduce el vástago. Además esta base se acopla con una tuerca para poder tapar la fuga por donde se introduce el vástago, el cual trabaja sobre esta guía, como se muestra en la Fig. N° 49.

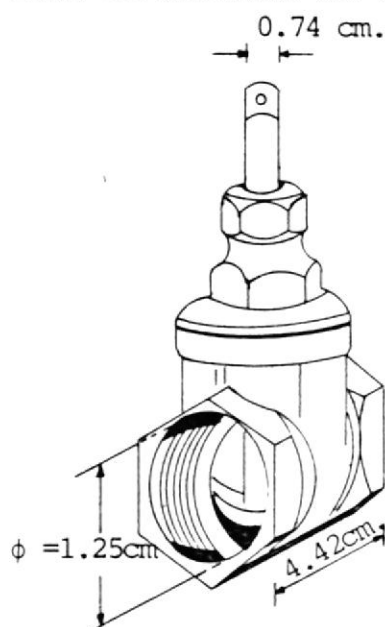


Fig. N° 49.- Válvula de Vástago

3.- Control Proporcional.- El control proporcional está comprendido de una palanca, la cual tiene varios orificios a lo largo de ella para así variar la posición del punto de apoyo, el cual se encuentra sobre una base corrediza para así poder ir de un orificio a otro en la palanca. Además, esta palanca tiene un orificio en cada extremo que le permite conectarse al vástago y a otra palanca donde se

encuentra la boya, que va a estar en contacto con el nivel del líquido donde se encuentra el control. Esto se muestra en la Fig. N° 50.

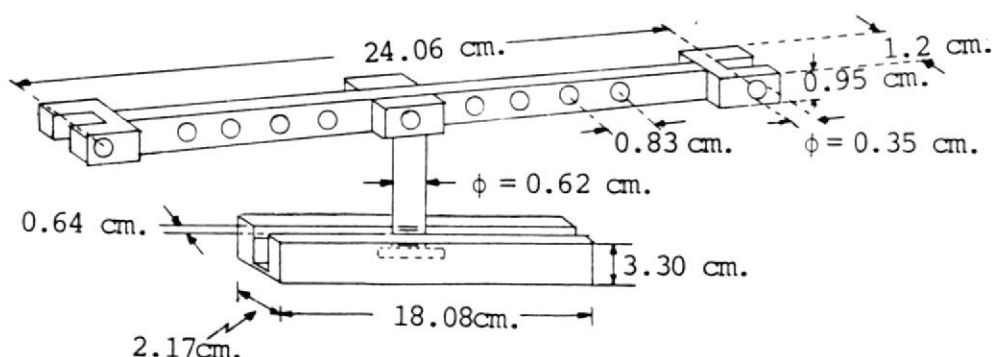


Fig. N° 50.- Control Proporcional

4.- Tanques en Serie.- Son tres tanques que tienen la misma medida, tanto en su longitud como en el área transversal, los cuales cumplen la función de alimentación para cualquier sistema, donde la salida la realizan por medio de un orificio del mismo diámetro en los tres tanques. Además, están conectados de un tanque a otro por una tubería en la cual se encuentra una llave de compuerta que permite variar los niveles de los tanques, regulando la cantidad de líquido que

fluye de un tanque a otro.

Cada uno de estos tanques tienen un medidor de nivel visual con una cinta métrica para determinar la altura del nivel de los mismos, como se muestra en la Fig. N° 51.

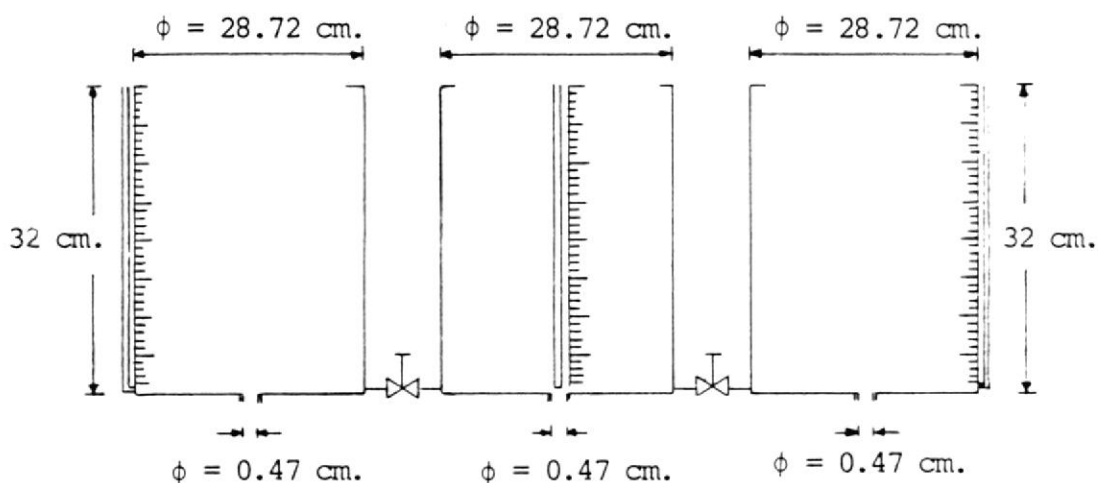


Fig. N° 51.- Tanques en Serie

5.- Llave de Compuerta.- Las llaves de compuerta permiten variar la resistencia de oposición a fluir el líquido de un tanque a otro, y así poder obtener los niveles deseados en cada tanque, para que cada uno de ellos tenga su respectivo caudal de salida.

Las llaves de compuerta se componen de una

base, donde se encuentra la entrada, la salida y un orificio donde se introduce la compuerta, esta base se acopla a una tuerca para solamente dejar el orificio donde se introduce un tornillo sin fin que se acopla con la compuerta, como se muestra en la Fig. N° 52.

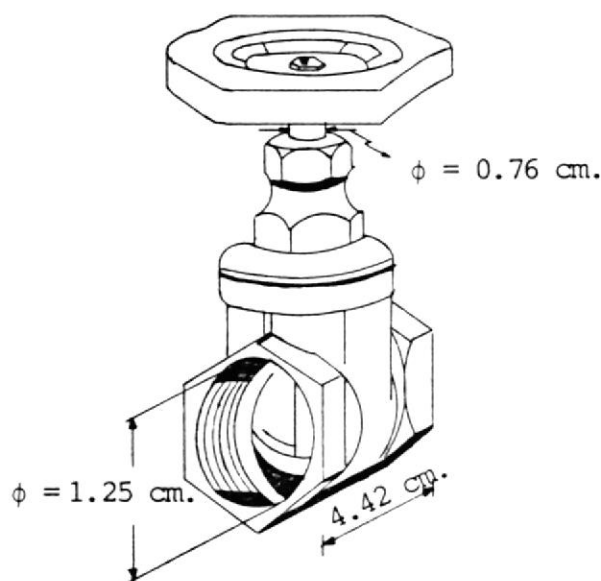


Fig. N° 52.- Llave de Compuerta

6.- Válvula Solenoide.- La válvula solenoide es una combinación de dos unidades básicas funcionales, conteniendo (1) un solenoide (electromagnético), (2) una válvula conteniendo un orificio en el cual un eje es accionado para impedir o admitir flujo.

La válvula es abierta o cerrada por el movi-

miento del eje magnético, el cual es movido dentro del solenoide cuando éste es energizado.

La válvula solenoide tiene un solenoide que se encuentra directamente centrado sobre el cuerpo de la válvula, el cual está encerrado y libre para moverse en un tubo sellado.

Además, la válvula solenoide se conecta con switch que se compone de un flotador con un contactor de corriente continua, como se muestra en la figura N° 53.

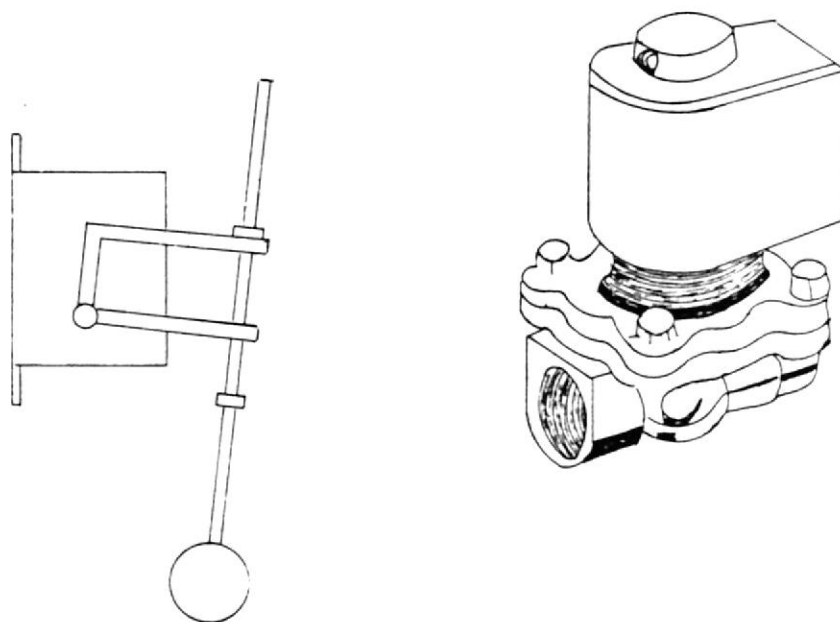


Fig. N° 53.- Válvula Solenoide

2.2 OBTENCION DE LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES

Para llegar a la conclusión de los resultados experimentales se han determinado como paso previo al desarrollo de los siguientes parámetros, tales como:

- 1.- El área transversal del tanque de reservorio.- Se tomaron medidas de la circunferencia del tanque a diferentes alturas y su respectivo espesor, luego con estos datos obtenidos calculamos el diámetro interior para determinar el área transversal.

Una vez determinadas las diferentes áreas transversales calculamos el promedio, como se muestra en la Tabla N° 3.

- 2.- El área transversal de los tanques en serie.- Para obtener el área transversal de los tanques en serie se procedió de la misma manera como en el parámetro anterior, cuyos resultados son mostrados en la Tabla N° 4.

- 3.- Curva de calibración de vaciado de los tanques en serie.- Partiendo desde un punto inicial y luego, a medida que el nivel del tanque comienza a des -

TABLA N° 3

ALTURA Cm	CIRCUNFERENCIA Cm	ESPESOR Cm	DIAMETRO INTERIOR Cm	AREA TRANSVERSAL Cm ²
0	181	0.163	57.001	2551.81
6	180.4	0.163	57.260	2575.09
12	180.2	0.163	57.196	2569.34
18	180.2	0.163	57.196	2569.34
24	179.5	0.163	56.974	2549.43
30	179.8	0.163	57.069	2557.94
36	180.1	0.163	57.165	2566.55
42	180.2	0.163	57.196	2569.34
48	180.3	0.163	57.228	2572.21
54	179.8	0.163	57.165	2566.55
60	183.1	0.163	58.120	2653.02
66	179.9	0.163	57.101	2560.81
72	180.2	0.163	57.196	2569.34
78	180.2	0.163	57.196	2569.34
84	180.3	0.163	57.228	2572.21
PROMEDIO			57.212	2570.87

Datos de las Areas a diferentes alturas del Tanque
de Reservorio.

TABLA N° 4

ALTURA Cm	CIRCUNFERENCIA Cm	ESPEJOR Cm	DIAMETRO INTERIOR Cm	AREA TRANSVERSAL Cm ²
1	91	0.075	28.816	652.17
3	90.6	0.075	28.689	646.42
6	90.6	0.075	28.689	646.42
9	90.6	0.075	28.689	646.42
12	90.5	0.075	28.657	644.99
15	90.6	0.075	28.689	646.42
18	90.6	0.075	28.689	646.42
21	90.7	0.075	28.721	647.86
24	90.7	0.075	28.721	647.86
27	90.75	0.075	28.737	648.58
30	91.2	0.075	28.880	655.06
32	91.3	0.075	28.912	656.50
PROMEDIO				647.92

Datos de las Areas a diferentes alturas
de los Tanques en Serie

cender se obtuvieron diferentes tiempos para un determinado intervalo de altura. Con estos datos obtenidos y el promedio del área transversal del tanque determinamos el caudal, como se ilustra en la Tabla N° 5.

Una vez determinados los caudales con sus respectivas alturas se obtiene la mejor curva, de mejor ajuste. Las ecuaciones utilizadas son las siguientes:

$$y_i = ax_i^b$$

$$x_i = \log x_i$$

$$y_i = \log y_i$$

$$a = \frac{n \sum (x_i y_i) - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum (x_i y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

Usando estas ecuaciones y los datos de la Tabla N° 5, se obtuvo el Gráfico N° 2. (Pág. 240)

- 4.- Las Resistencias.- Para determinar las resistencias en las descargas inferiores de los tanques se consideran los siguientes valores de los niveles:

TABLA N° 5

ALTURA Cm	TIEMPO min	CAUDAL Cm ³ /Seg
24.5	0.34	7.940
23.5	0.99	8.709
22.5	1.63	8.181
21.5	2.28	8.437
20.5	2.94	7.946
19.5	3.62	7.940
18.5	4.34	7.713
17.5	5.03	7.296
16.5	5.77	7.264
15.5	6.51	7.104
14.5	7.31	6.585

Datos de Calibración de Vaciado
de los Tanques en Serie

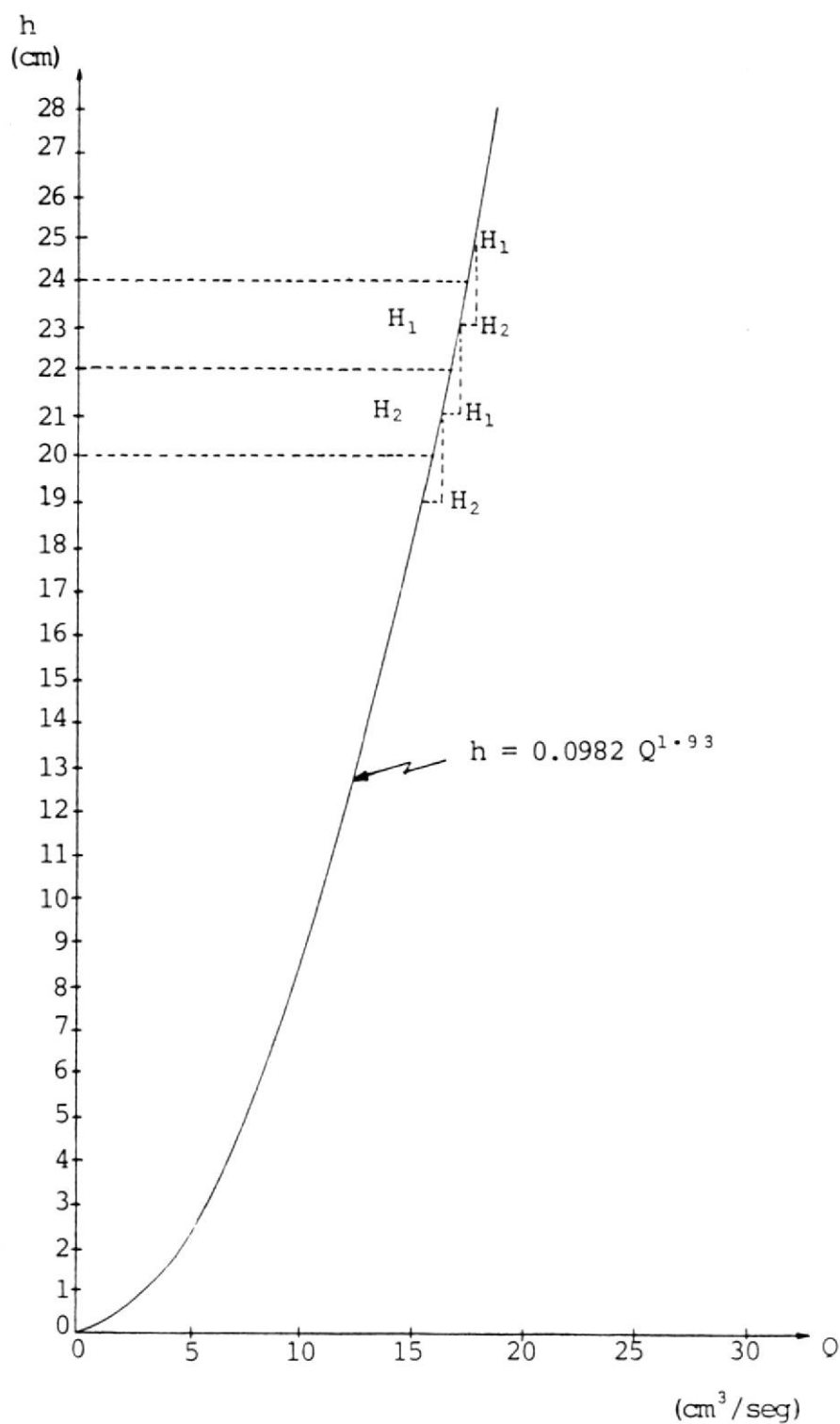


Gráfico N^o 2.- Curva de Calibración de Vaciado de los Tanques en Serie.

$$H_1 = 24 \text{ cm}$$

$$H_2 = 22 \text{ cm}$$

$$H_3 = 20 \text{ cm}$$

Con estos valores considerados nos transportamos a la curva de calibración de los tanques en serie, localizando los puntos de operación, los cuales son linealizados y se calcula las pendientes que son equivalentes a las resistencias respectivas:

$$R_1 = \frac{H_1 - H_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{2}{8.85 - 8.5} = 5.714 \text{ seg/cm}^2$$

$$R_3 = \frac{H_1 - H_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{2}{8.5 - 8.13} = 5.405 \text{ seg/cm}^2$$

$$R_5 = \frac{H_1 - H_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{2}{8.13 - 7.74} = 5.128 \text{ seg/cm}^2$$

Las resistencias de interconexión se determinan mediante el análisis de dos tanques que tienen sus niveles estabilizados.

Considerando los tanques 1 y 2 tenemos: (Ver Fig. N° 54).

En el tanque "1" determinamos la siguiente

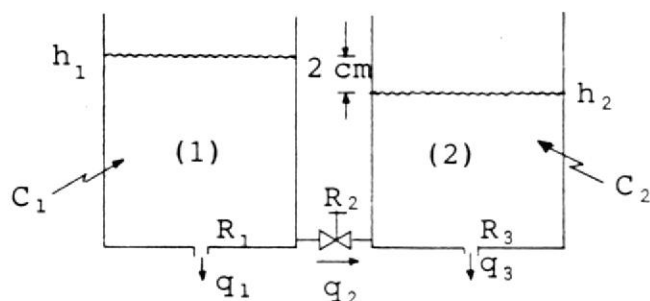


Fig. N° 54.- Determinación de la Resistencia de Interconexión R_2

ecuación:

$$C_1 \frac{dh_1}{dt} = - \frac{h_1}{R_1} - \frac{h_1 - h_2}{R_2} = 0$$

Reemplazando los valores obtenidos en la ecuación, tenemos que:

$$R_2 = 0.4762 \text{ seg/cm}^2$$

Considerando los tanques 2 y 3

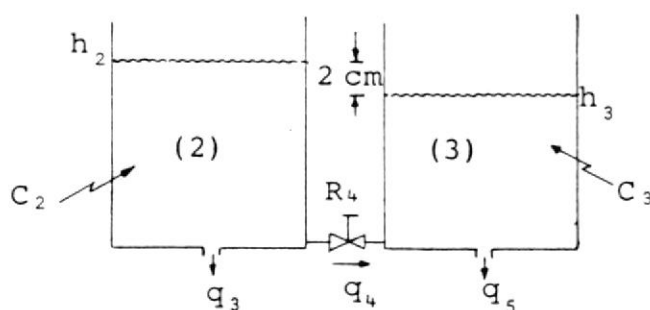


Fig. N° 55.- Determinación de la Resistencia de Interconexión R_4

En el tanque "2" determinamos la siguiente ecuación:

$$C_2 \frac{dh_2}{dt} = - \frac{h_2}{R_3} - \frac{h_2 - h_3}{R_4} = 0$$

Reemplazando los valores obtenidos en la ecuación, tenemos que:

$$R_4 = 0.4914 \text{ seg/cm}^2$$

5.- Curva de calibración de la válvula de vástago (Nivel del tanque de reservorio "H" versus el caudal de salida "Q").- Partiendo desde un punto inicial, luego a medida que el nivel del tanque comienza a desecender se obtuvieron diferentes tiempos para un determinado intervalo de altura, los cuales se analizaron para diferentes posiciones del vástago. Con estos datos obtenidos y el promedio del área transversal del tanque de reservorio determinamos el caudal, como se ilustra en la Tabla N° 6.

Una vez determinados los caudales con sus respectivas alturas se obtienen las curvas de mejor ajuste, como se muestra en el Gráfico N° 3. (Ver Pág. N° 247)

TABLA N° 6

Vástago: 2.5 mm. de abertura			Vástago: 5 mm. de abertura		
ALTURA Cm	TIEMPO min	CAUDAL cm ³ /seg	ALTURA Cm	TIEMPO min	CAUDAL Cm ³ /seg
83.5	1.58	33.91	83.5	0.77	69.74
78.5	4.81	32.42	78.5	2.33	67.63
73.5	8.18	31.17	73.5	3.95	64.76
68.5	11.69	29.90	68.5	5.62	62.35
63.5	15.30	29.39	63.5	7.37	61.11
58.5	18.96	29.27	58.5	9.13	60.86
53.5	22.71	27.91	53.5	10.95	58.38
48.5	26.76	25.12	48.5	12.81	55.10
43.5	31.10	24.28	43.5	14.79	53.16
38.5	35.60	23.29	38.5	16.85	51.08
33.5	40.29	22.38	33.5	19.03	47.31
26.0	48.08	19.86	28.5	21.32	46.11
18.5	56.72	16.51	23.5	23.75	42.31
			18.5	26.38	39.18
			13.5	29.26	35.46
Vástago: 7.5 mm. de abertura			Vástago: 10 mm. de abertura		
ALTURA Cm	TIEMPO min	CAUDAL Cm ³ /seg	ALTURA Cm	TIEMPO min	CAUDAL Cm ³ /seg
83.5	0.44	122.77	83.5	0.34	159.31
78.5	1.32	119.35	78.5	1.02	154.22
73.5	2.23	115.68	73.5	1.73	148.78

Datos de Calibración de la Válvula de Vástago (H vs. Q).

TABLA N° 6 (Contin.)

Vástago: 7.5 mm. de abertura			Vástago: 10 mm. de abertura		
ALTURA Cm	TIEMPO min	CAUDAL Cm ³ /seg	ALTURA Cm	TIEMPO min	CAUDAL Cm ³ /seg
68.5	3.19	109.19	68.5	2.47	141.69
63.5	4.17	109.31	63.5	3.22	141.13
58.5	5.16	107.21	58.5	3.99	139.30
53.5	6.18	102.72	53.5	4.77	133.23
48.5	7.26	96.33	48.5	5.60	124.85
43.5	8.39	92.74	43.5	6.47	122.28
38.5	9.57	89.27	38.5	7.37	115.68
33.5	10.81	83.88	33.5	8.32	109.64
28.5	12.11	80.91	28.5	9.33	104.51
23.5	13.47	76.08	23.5	10.39	97.65
18.5	14.94	70.47	18.5	11.53	90.47
13.5	16.51	65.88	13.5	12.76	83.62

VASTAGO: 12.5 mm de abertura			VASTAGO: 15 mm. de abertura		
ALTURA Cm	TIEMPO Min	CAUDAL Cm ³ /seg	ALTURA Cm	TIEMPO min	CAUDAL Cm ³ /seg
83.5	0.29	182.18	83.5	0.27	198.00
78.5	0.89	177.94	78.5	0.82	192.32
73.5	1.50	171.39	73.5	1.39	185.01
68.5	2.15	161.81	68.5	1.98	175.32
63.5	2.81	163.29	63.5	2.59	176.18
58.5	3.47	160.12	58.5	3.21	172.86
53.5	4.15	153.25	53.5	3.84	164.47
48.5	4.87	143.98	48.5	4.51	156.15

Datos de Calibración de la Válvula de Vástago (H vs. Q)

TABLA N^o 6 (Contin.)

VASTAGO: 12.5 mm. de abertura			VASTAGO: 15 mm. de abertura		
ALTURA Cm	TIEMPO min	CAUDAL Cm ³ /seg	ALTURA Cm	TIEMPO Min	CAUDAL Cm ³ /seg
43.5	5.63	140.58	43.5	5.21	149.61
38.5	6.41	132.74	38.5	5.94	144.95
33.5	7.24	126.17	33.5	6.71	134.07
28.5	8.11	120.36	28.5	7.52	129.22
23.5	9.02	114.81	23.5	8.38	121.59
18.5	10.01	102.99	18.5	9.30	110.55
13.5	11.08	96.33	13.5	10.31	101.63

VASTAGO: 20 mm. de abertura			VASTAGO: 20 mm. de abertura		
ALTURA Cm	TIEMPO min	CAUDAL Cm ³ /seg	ALTURA Cm	TIEMPO min	CAUDAL Cm ³ /seg
83.5	0.27	197.64	48.5	4.49	155.70
78.5	0.79	214.67	43.5	5.19	150.87
73.5	1.36	168.43	38.5	5.91	144.56
68.5	1.98	176.47	33.5	6.67	136.98
63.5	2.58	177.35	28.5	7.48	128.75
58.5	3.20	173.61	23.5	8.33	122.98
53.5	3.83	167.64	18.5	9.25	111.35
			13.5	10.27	100.11

Datos de Calibración de la Válvula
de Vástago (H vs. Q)

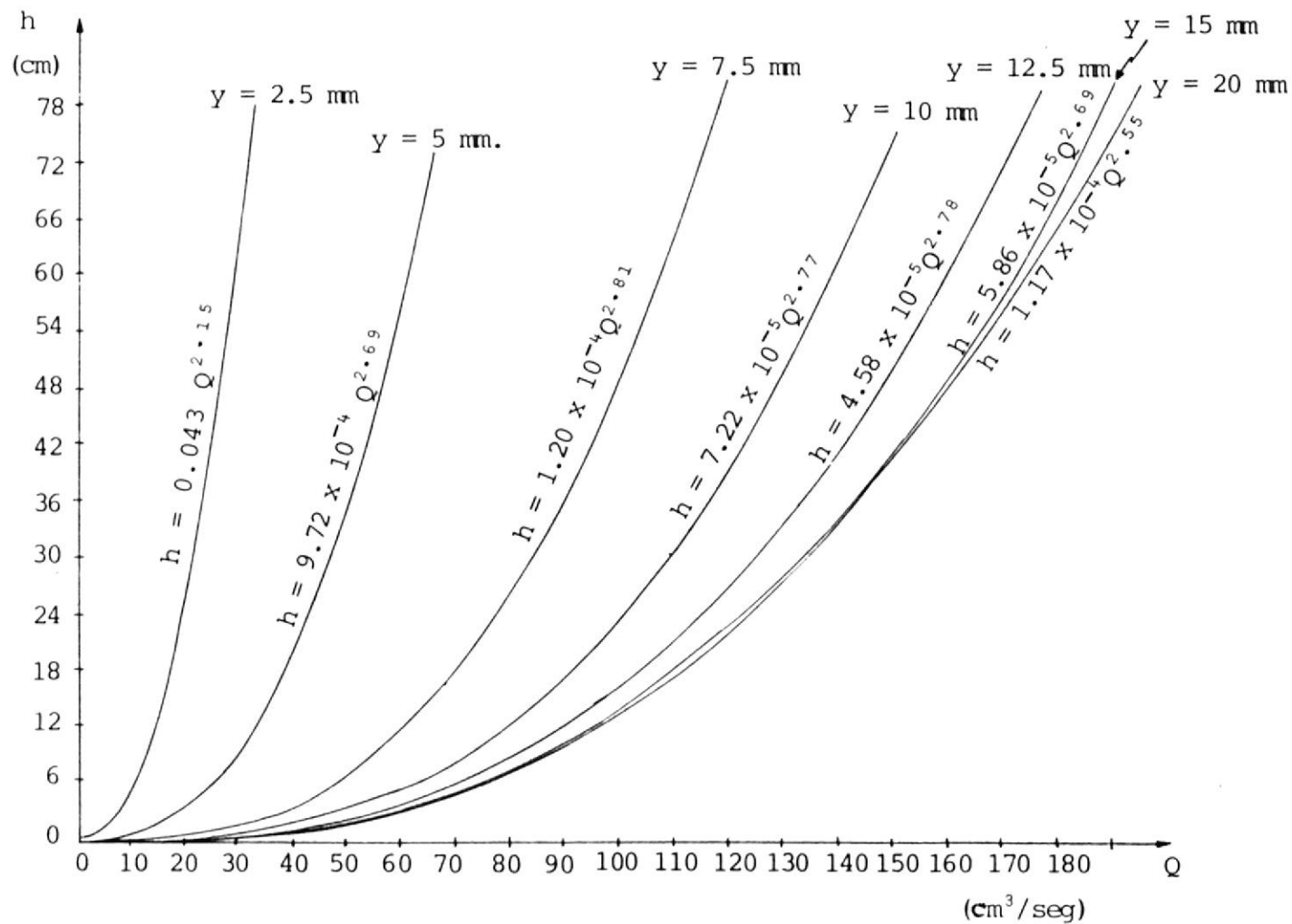


GRAFICO N° 3.- Curva de Calibración de la válvula de Vástago (nivel del tanque de reservorio "h" versus el caudal de salida "Q")

6.- Curva de Calibración de la válvula de vástago (Caudal de salida "Q") versus desplazamiento del vástago "y").- A través del Gráfico N° 3 se determinan las alturas del vástago y el caudal de salida considerado para un nuevo gráfico, manteniendo constante la altura del tanque de reservorio.

Los datos determinados se encuentran tabulados en la Tabla N° 7, la misma que nos ha permitido obtener el gráfico N° 4.

TABLA N° 7

TANQUE DE RESERVORIO (altura = 54 cm)		TANQUE DE RESERVORIO (altura = 63 cm)	
Altura del Vástago cm.	Caudal cm ³ /seg.	Altura del Vástago cm	Caudal cm ³ /seg
0.25	27.50	0.25	29.50
0.35	38.40	0.35	40.68
0.45	50.75	0.45	53.50
0.50	58.20	0.50	61.50
0.60	77.00	0.60	81.70
0.70	94.30	0.70	100.25
0.75	102.50	0.75	108.50

Datos de Calibración de la Válvula de Vástago (Q vs. Y).

TABLA N° 7 (Cont.)

TANQUE DE RESERVORIO (altura = 72 cm.)	
ALTURA DEL VASTAGO cm	CAUDAL cm ³ /seg
0.25	31.40
0.35	43.30
0.45	56.50
0.50	64.60
0.60	86.20
0.70	105.50
0.75	113.80

Datos de Calibración de la Válvula de Vástago (Q vs Y) .

7.- Las constantes de la válvula K_h y K_y en el punto de operación.- Para determinar las constantes K_h y K_y de la válvula, se considera la altura del vástago "y" cuando el sistema se encuentra en estado estable, el cual es de 0.45 Cm.

Con este dato nos transportamos al Gráfico N° 4 y se localiza el punto de operación, el cual se lo linealiza para determinar el caudal de entrada cuando ocurre una perturbación.

Donde

$$q = f(y, h)$$

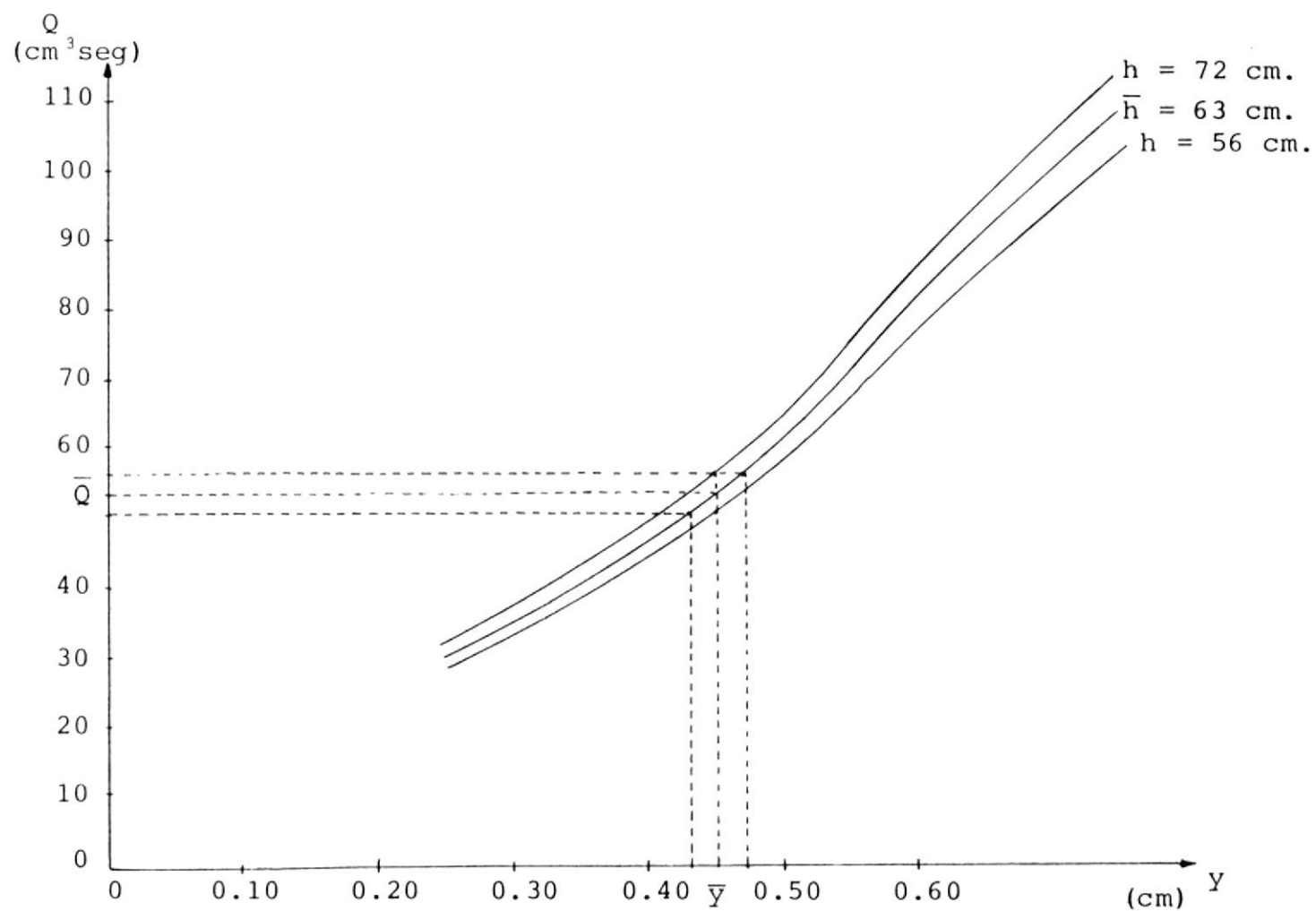


GRAFICO N° 4.- Curva de Calibración de la válvula de vástago (caudal de salida "Q" versus desplazamiento del vástago "y")

Por tanto

$$q = \left. \frac{\partial q}{\partial y} \right|_{h = \text{const}} y + \left. \frac{\partial q}{\partial h} \right|_{y = \text{const}} h$$

Además

$$q = K_y y + K_h h$$

Donde,

$$K_y = \left. \frac{\partial q}{\partial y} \right|_{h = \text{const}} \quad K_h = \left. \frac{\partial q}{\partial h} \right|_{y = \text{const}}$$

Luego, determinamos las constantes K_y y K_h a partir del Gráfico N° 4.

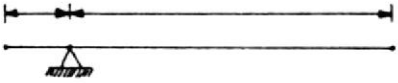
Donde,

$$K_y = \frac{56.5 - 50.75}{0.47 - 0.43} = 141.98 \text{ cm}^2/\text{seg}$$

$$K_h = \frac{50.75 - 56.5}{54 - 72} = 0.3194 \text{ cm}^2/\text{seg}$$

- 8.- La ganancia de proporcionalidad K_p para los diferentes puntos de apoyo.- Para determinar las constantes de proporcionalidad se considera la palanca que está en contacto con el punto de apoyo:

Para el primer punto de apoyo tenemos:

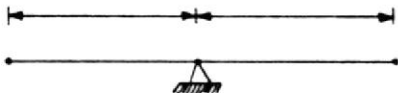


$$a = 3.95 \text{ Cm.}$$

$$b = 20.11 \text{ Cm}$$

$$K_p = \frac{a}{b} = 0.197$$

Para el segundo punto de apoyo, tenemos:

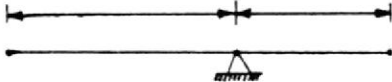


$$a = 11.67 \text{ Cm}$$

$$b = 12.39 \text{ Cm}$$

$$K_p = \frac{a}{b} = 0.942$$

Para el tercer punto de apoyo, tenemos



$$a = 14.23 \text{ Cm}$$

$$b = 9.82 \text{ Cm}$$

$$K_p = \frac{a}{b} = 1.45$$

Una vez determinados los diferentes parámetros analizamos los resultados experimentales para los siguientes casos:

- 1.- El sistema de ciclo cerrado con control proporcional y la entrada en el primer tanque.- Se determina la respuesta del sistema en los siguientes seis casos, con diferentes tipos

de perturbaciones y ganancias en cada uno de ellos.

En los casos a), e) y f) se hace la perturbación en el tanque de reservorio, consistiendo esta perturbación en lo siguiente: Partiendo desde el estado estable del sistema es decir cuando actúa la válvula solenoide y el nivel fluctúa entre 70 y 54 cm. en el reservorio, se produce una perturbación de vaciado en la que se desconecta (se cierra) la válvula de solenoide de entrada de agua al reservorio, y por lo tanto el nivel de éste empieza a descender hasta los 22 cm. En este momento se vuelve a conectar la válvula y el nivel retorna hacia los 70 cm. De allí en adelante se deja que el sistema de control mantenga los niveles de los tanques en sus valores deseados. La ganancia K_p también fue incrementada desde el caso a) hasta el f) para observar su efecto sobre el comportamiento del sistema de control.

En los casos b), c) y d) se mantuvo el

valor de K_p constante y se produjo una perturbación del siguiente tipo. Con el sistema en estado estable, se aumentó bruscamente el nivel de uno de los tanques, y se permitió que actúe el sistema de control para mantener los niveles en sus valores deseados.

a.- El sistema en estado estable con perturbación de vaciado y llenado -----
(70 - 22 cm) en el tanque de reservorio y una constante de proporcionalidad K_p de 0.197.

Cuando el tanque de reservorio se encuentra en estado estable (70 - 54 cm) en un determinado tiempo se produce una diferencia de nivel (70 - 22 cm).

Cuando el nivel se encuentra a 22 Cm. ocurre una perturbación de llenado hasta 70 cm., la cual nos permite llegar a la posición de estado estable como consecuencia de ello se obtienen en los tanques en serie los datos de variación del nivel con

respecto al tiempo, como se puede apreciar en la Tabla N^o 8.

Los datos tabulados en la Tabla N^o 8 permiten establecer el Gráfico N^o 5. (Ver Pág. 260).

b.- El sistema en estado estable con perturbación de 43.3 cm. en el nivel del primer tanque y una constante de proporcionalidad K_p de 0.197.

Cuando el tanque de reservorio se encuentra en estado estable (70 -54 cm) en un determinado tiempo se produce una perturbación externa de 4.3 cm. en el primer tanque, como consecuencia de ello se obtienen en los tanques en serie los datos de variación de nivel con respecto al tiempo, los mismos que son ilustrados en la Tabla N^o 9.

Los datos tabulados en la Tabla N^o 9 nos permiten obtener el Gráfico N^o 6. (Ver Pág. N^o 262).

TABLA N° 8

TANQUE N° 1		TANQUE N° 2		TANQUE N° 3	
ALTURA Cm	TIEMPO min	ALTURA Cm	TIEMPO min	ALTURA Cm	TIEMPO min
23.83	0.00	21.98	0.00	19.85	0.00
23.90	0.98	22.00	0.27	19.90	0.90
24.00	1.44	22.13	1.29	20.00	1.49
24.10	1.74	22.20	1.65	20.08	1.82
24.20	1.96	22.25	2.01	20.14	2.10
24.30	2.36	22.33	2.21	20.20	2.49
24.40	3.00	22.43	2.72	20.28	2.80
24.50	3.68	22.50	3.04	20.33	3.22
24.60	5.00	22.60	3.93	20.38	3.75
24.40	7.80	22.65	4.61	20.40	4.41
24.30	8.08	22.70	5.15	20.40	5.00
24.15	8.54	22.65	7.55	20.38	5.37
24.00	8.98	22.60	8.05	20.37	5.75
24.15	9.64	22.53	8.33	20.34	5.93
24.20	9.70	22.50	8.78	20.27	6.34
24.45	10.90	22.40	9.07	20.20	6.71
24.55	11.66	22.50	10.18	20.10	7.12
24.53	12.74	22.53	10.78	20.20	7.46
24.47	13.13	22.55	11.25	19.90	7.85
24.40	13.85	22.53	12.30	19.78	8.63

Datos de variación del nivel de los tanques en serie cuando el sistema tiene una perturbación de vaciado y llenado con K_p de 0.197

TABLA N° 8
(Continuación)

TANQUE N° 1		TANQUE N° 2		TANQUE N° 3	
ALTURA Cm	TIEMPO min	ALTURA Cm	TIEMPO min	ALTURA Cm	TIEMPO min
24.30	14.67	22.55	13.48	19.75	9.30
24.20	15.27	22.50	15.33	19.80	9.38
24.10	15.99	22.40	16.62	19.90	10.34
24.00	16.61	22.30	17.18	20.00	10.65
23.90	17.28	22.20	17.70	20.10	10.90
23.70	18.29	22.10	18.36	20.23	11.24
23.60	18.77	22.00	18.90	20.30	11.44
23.50	19.14	21.90	19.50	20.35	12.07
23.40	19.40	21.80	19.86	20.33	12.39
23.35	19.79	21.75	20.83	20.30	13.41
23.40	20.39	21.78	21.54	20.20	14.18
23.35	21.47	21.73	22.07	20.00	15.17
23.30	21.75	21.75	22.68	19.85	15.73
23.25	22.37	21.70	23.15	19.80	16.02
23.20	22.98	21.68	23.69	19.70	16.87
23.23	23.54	21.65	24.24	19.65	17.38
23.20	24.18	21.63	25.00	19.60	18.04
23.15	26.27	21.60	25.36	19.55	18.58
23.18	27.39	21.58	25.97	19.58	20.29
23.15	28.21	21.55	27.61	19.55	20.84

Datos de variación del nivel de los tanques en serie
cuando el sistema tiene una perturbación de vaciado
y llenado con K_p de 0.197

TABLA N° 8
(Continuación)

TANQUE N° 1		TANQUE N° 2		TANQUE N° 3	
ALTURA Cm	TIEMPO min	ALTURA Cm	TIEMPO min	ALTURA Cm	TIEMPO min
23.10	28.93	21.53	29.93	19.53	22.60
23.05	29.33	21.50	30.53	19.55	23.15
23.03	29.97	21.48	31.52	19.53	25.19
23.05	30.40	21.45	32.16	19.50	25.81
23.00	31.36	21.43	33.66	19.48	26.46
23.03	31.75	21.53	34.34	19.50	26.99
22.98	33.97	21.60	34.53	19.45	28.04
23.10	34.36	21.70	34.80	19.43	29.68
23.20	34.49	21.80	35.04	19.40	30.41
23.30	34.67	21.90	35.20	19.38	31.66
23.40	34.78	22.00	35.45	19.35	32.21
23.65	34.91	22.10	35.74	19.38	32.57
23.80	35.03	22.20	36.75	19.35	33.68
23.90	35.16	22.30	36.72	19.33	34.17
24.00	35.27	22.40	37.13	19.35	34.84
24.10	35.41	22.50	37.89	19.50	35.36
24.30	35.59	22.55	38.34	19.73	35.81
24.40	35.85	22.60	38.68	19.80	36.38
24.40	36.09	22.63	39.18	20.00	36.99

Datos de variación del nivel de los tanques en serie
cuando el sistema tiene una perturbación de vaciado
y llenado con K_p de 0.197

TABLA N° 8
(Continuación)

TANQUE N° 1		TANQUE N° 2		TANQUE N° 2	
ALTURA	TIEMPO	ALTURA	TIEMPO	ALTURA	TIEMPO
Cm	min	Cm	min	Cm	min
24.30	37.13	22.70	39.70	20.20	37.88
24.20	38.09	22.68	41.39	20.25	38.44
24.15	39.23	22.65	44.07	20.30	38.97
24.10	39.57	22.60	44.46	20.35	39.80
24.00	40.89	22.58	44.86	20.38	40.03
23.90	41.98	22.63	45.87	20.40	40.52
23.75	42.89	22.63	46.96	20.43	40.89
23.70	43.25	22.60	48.10	20.45	42.37
23.60	43.70			20.43	44.15
23.50	44.16			20.40	44.79
23.40	44.70			20.40	45.52
23.33	44.95			20.38	47.23
23.50	45.24			20.38	47.77
23.70	45.44			20.35	48.55
23.83	45.63			20.30	49.74
23.90	45.70				
24.00	45.90				
24.35	46.23				
24.50	46.68				
24.60	47.14				
24.65	48.90				
24.60	49.18				

Datos de variación del nivel de los tanques en serie cuando el sistema tiene una perturbación de vaciado y llenado con K_p de 0.197.

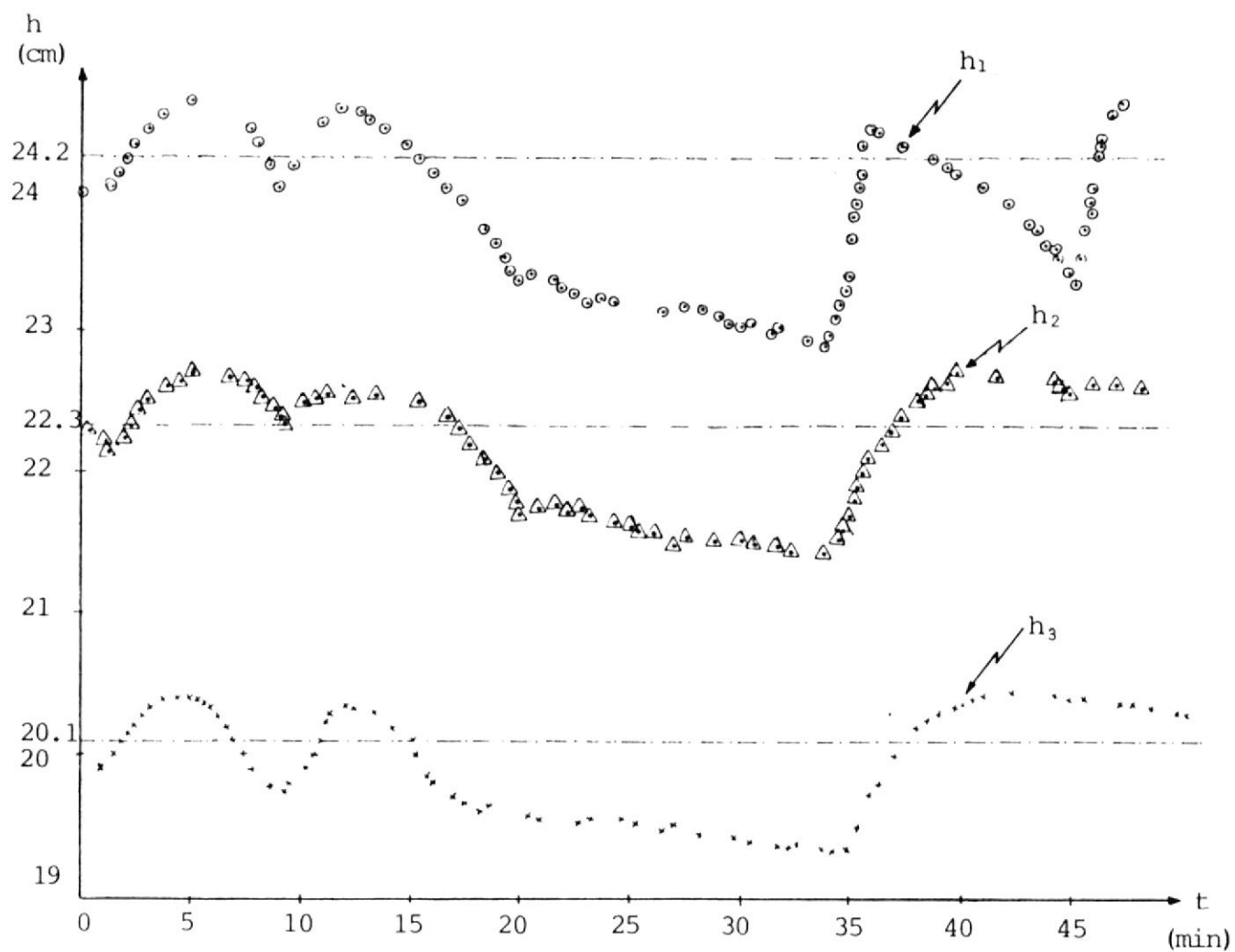


GRAFICO N° 5.- El sistema en estado estable con perturbación de vaciado y llenado (70 - 22 cm) en el tanque de reservorio y una constante de proporcionalidad K_p de 0.197.

TABLA N° 9

TIEMPO min	TANQUE N° 1	TANQUE N° 2	TANQUE N° 3
	ALTURA Cm	ALTURA Cm	ALTURA Cm
0.00	28.30	22.10	19.95
0.12	27.40	22.30	19.95
0.26	26.60	22.40	20.00
0.50	25.50	22.55	20.10
0.75	24.80	22.55	20.15
1.00	24.28	22.50	20.20
1.25	23.98	22.45	20.25
1.50	23.90	22.43	20.30
1.75	23.90	22.35	20.25
1.99	23.90	22.30	20.25
2.27	23.88	22.20	20.20
2.50	23.88	22.10	20.20
2.75	23.88	22.10	20.18
3.00	23.88	22.10	20.18
3.25	23.85	22.00	20.15
3.50	23.85	22.00	20.10
3.75	23.83	22.00	20.05
4.00	23.83	22.00	20.00
4.25	23.83	22.00	19.95
4.49	23.83	22.00	19.95
4.74	23.80	22.00	19.95
5.00	23.80	21.98	19.95
5.25	23.80	22.00	19.95
5.49	23.83	21.95	19.95

Datos de Variación del Nivel de los Tanques
 en Serie cuando el sistema tiene una Perturbación
 de 4.33 cm en el nivel del primer tanque con K_p de 0.197

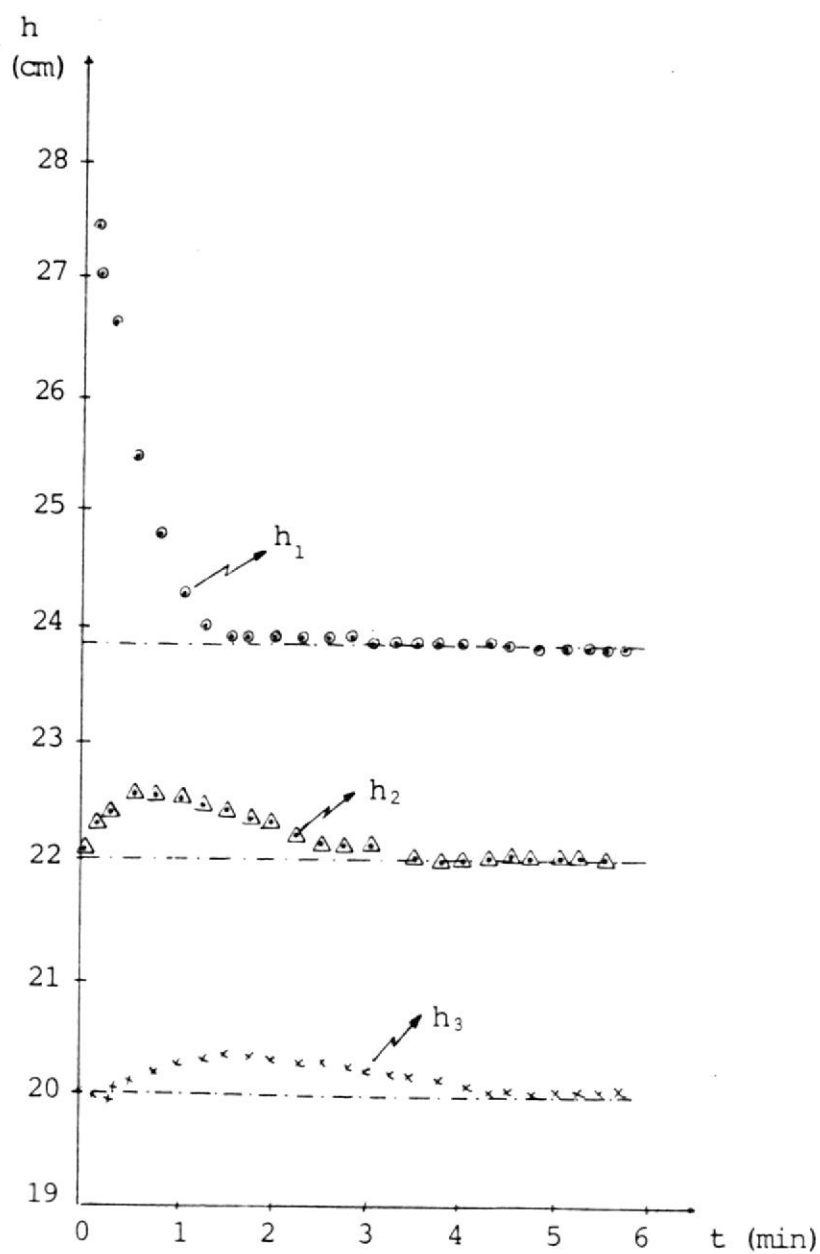


GRAFICO N° 6.- El sistema en estado estable con perturbación de 4.33 cm. en el primer tanque y una constante de proporcionalidad K_p de 0.197.

c.- El sistema en estado estable con perturbación de 4.25 cm. en el nivel del segundo tanque y una constante de proporcionalidad K_p de 0.197.

Cuando el tanque de reservorio se encuentra en estado estable (70 - 54 cm) en un determinado tiempo se produce una perturbación externa de 4.25 cm en el segundo tanque; como consecuencia de ello se obtienen en los tanques en serie los datos de variación de nivel con respecto al tiempo, los mismos que son ilustrados en la Tabla N° 10.

Los datos tabulados en la Tabla N° 10 nos permiten obtener el Gráfico N° 7. (Pág.266).

d.- El sistema en estado estable con perturbación de 3.75 cm. en el nivel del tercer tanque y una constante de proporcionalidad K_p de 0.197.

Cuando el tanque de reservorio se encuentra en estado estable (70 - 54 cm) en un

TABLA N° 10

TIEMPO min	TANQUE N° 1	TANQUE N° 2	TANQUE N° 3
	ALTURA Cm	ALTURA cm	ALTURA Cm
0.00	24.10	26.30	20.10
0.12	24.25	25.60	20.40
0.25	24.40	25.10	20.60
0.50	24.60	24.50	20.80
0.75	24.50	24.20	20.90
1.00	24.40	24.00	21.00
1.26	24.30	23.80	21.05
1.50	24.20	23.70	21.05
1.75	24.20	23.60	21.05
2.00	24.15	23.50	21.00
2.26	24.10	23.40	20.95
2.50	24.05	23.30	20.90
2.75	23.95	23.20	20.90
3.00	23.90	23.10	20.80
3.25	23.85	23.00	20.80
3.50	23.85	22.90	20.75
3.76	23.80	22.85	20.75

Datos de variación del nivel de los tanques en serie cuando el sistema tiene una perturbación de 4.25 cm en el nivel del segundo tanque con

K_p de 0.197.

TABLA N° 10
(Continuación)

TIEMPO min	TANQUE N° 1 ALTURA Cm	TANQUE N° 2 ALTURA Cm	TANQUE N° 3 ALTURA Cm
4.00	23.83	22.80	20.70
4.26	23.80	22.75	20.70
4.50	23.80	22.70	20.65
4.75	23.83	22.70	20.65
5.00	24.00	22.65	20.60
5.25	24.10	22.65	20.60
5.50	24.10	22.60	20.60
5.75	24.00	22.60	20.55
6.00	24.00	22.60	20.55
6.25	23.95	22.60	20.50
6.50	24.00	22.55	20.50
6.75	23.95	22.55	20.50
7.00	23.90	22.55	20.50
7.26	23.90	22.55	20.50
7.50	23.88	22.50	20.45
7.74	23.90	22.50	20.45
8.00	23.90	22.50	20.45

Datos de variación del nivel de los tanques en serie cuando el sistema tiene una perturbación de 4.25 cm en el nivel del segundo tanque con K_p de 0.197

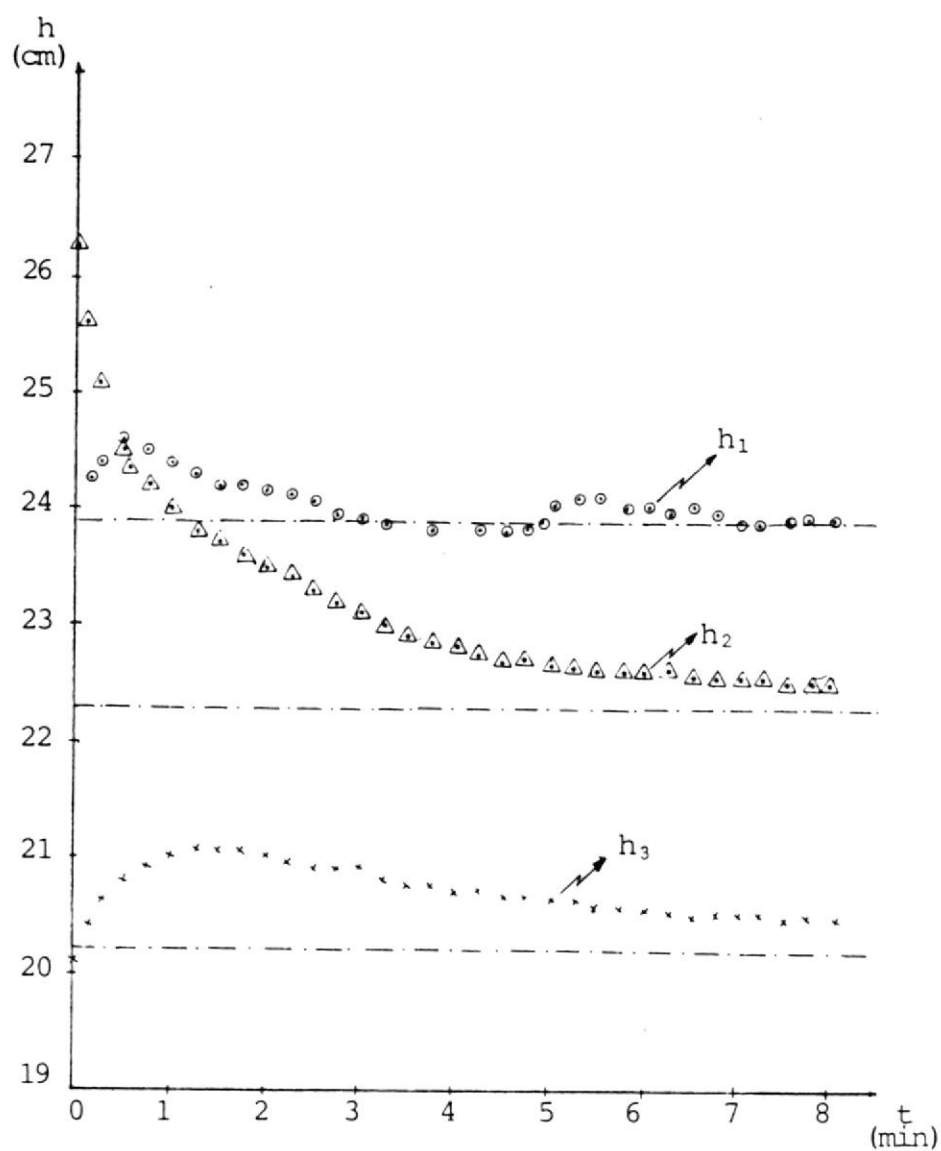


GRAFICO N° 7.- El sistema en estado estable con perturbación de 4.25 cm. en el nivel del segundo tanque y una constante de proporcionalidad K_p de 0.197.

determinado tiempo se produce una perturbación externa de 3.75 Cm en el tercer tanque, como consecuencia de ello se obtienen en los tanques en serie los datos de variación del nivel con respecto al tiempo, los mismos que son ilustrados en la Tabla N° 11.

Los datos tabulados en la Tabla N° 11, nos permiten obtener el Gráfico N° 8. (Ver Pág. N° 270).

e.- El sistema en estado estable con perturbación de vaciado y llenado (70 - 22 cm) en el tanque de reservorio y una constante de proporcionalidad K_p de 0.942.

Cuando el tanque de reservorio se encuentra en estado estable (70 - 54 Cm) en un determinado tiempo se produce una diferencia de nivel (70 - 22 Cm). Cuando el nivel se encuentra a 22 Cm ocurre una perturbación de llenado hasta 70 Cm, las cual nos permite llegar a la posición de estado estable. Como consecuencia de ello se obtiene en los tanques en serie los datos de variación

TABLA N° 11

TIEMPO min	TANQUE N° 1	TANQUE N° 2	TANQUE N° 3
	ALTURA Cm	ALTURA Cm	ALTURA Cm
0.00	24.10	22.10	24.00
0.12	24.15	22.40	23.25
0.25	24.18	22.60	22.85
0.50	24.30	22.80	22.20
0.75	24.40	22.90	21.95
0.98	24.35	22.85	21.85
1.51	24.30	22.80	21.50
2.00	24.10	22.70	21.05
2.26	24.05	22.65	20.93
2.51	24.10	22.60	20.85
2.76	24.05	22.55	20.75
3.01	24.10	22.45	20.68
3.51	24.05	22.35	20.55
4.00	24.07	22.25	20.45
4.24	24.10	22.25	20.43
4.51	24.15	22.25	20.43
5.00	24.10	22.20	20.42
5.26	24.00	22.25	20.42
5.51	24.05	22.25	20.41
5.76	23.98	22.25	20.40
6.01	24.00	22.25	20.38
6.25	23.96	22.25	20.35
6.49	24.05	22.20	20.35
7.00	24.05	22.25	20.34
7.26	24.00	22.25	20.35
7.51	23.96	22.20	20.35

Datos de variación del nivel de los tanques en serie cuando el sistema tiene una perturbación de 3.75 cm en el nivel del tercer tanque con K_p de 0.197.

TABLA N° 11
(Continuación)

TIEMPO min	TANQUE N° 1 ALTURA Cm	TANQUE N° 2 ALTURA Cm	TANQUE N° 3 ALTURA Cm
7.76	24.10	22.20	20.34
8.01	24.05	22.20	20.33
8.26	24.05	22.20	20.33
8.51	24.00	22.20	20.33
8.76	23.95	22.20	20.33
9.01	23.97	22.20	20.33
9.51	24.04	22.20	20.32
9.76	23.95	22.20	20.32
10.01	23.97	22.20	20.32
10.26	24.00	22.20	20.32
10.51	23.98	22.20	20.30
11.01	23.95	22.20	20.28
11.26	23.95	22.20	20.28
11.51	23.90	22.20	20.28
11.76	23.95	22.15	20.25
12.01	23.93	22.15	20.25
12.26	24.00	22.15	20.25
12.50	24.15	22.15	20.25
12.75	24.10	22.15	20.28
13.00	24.07	22.15	20.32
13.51	23.95	22.15	20.30
13.76	23.95	22.15	20.25
14.00	24.00	22.15	20.30
14.26	23.97	22.15	20.30
14.50	23.90	22.15	20.30
14.75	23.93	22.15	20.28
15.00	24.00	22.15	20.28

Datos de variación del nivel de los tanques en serie cuando el sistema tiene una perturbación de 3.75 cm en el nivel del tercer tanque con K_p de 0.197.

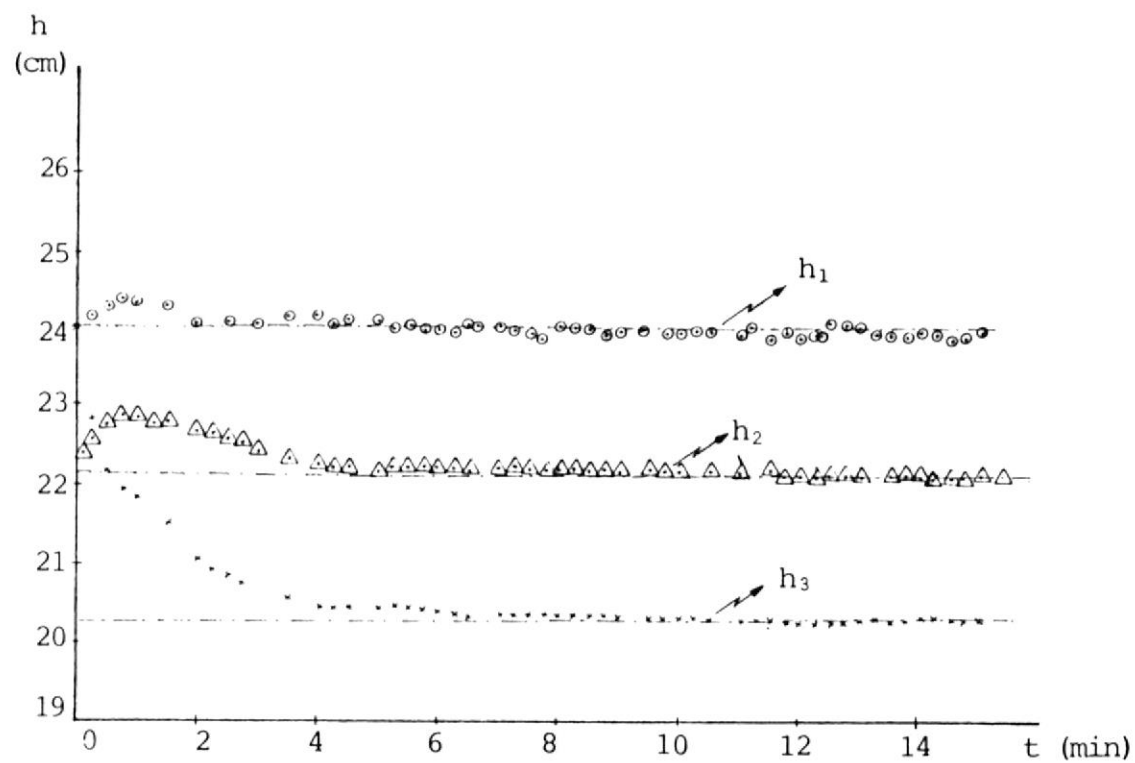


GRAFICO N° 8.- El sistema en estado estable con perturbación de 3.75 cm. en el nivel del tercer tanque y una constante de proporcionalidad K_p de 0.197.

de nivel con respecto al tiempo, como se puede apreciar en la Tabla N° 12.

Los datos tabulados en la Tabla N° 12, nos permite establecer el Gráfico N° 9. (Ver Pág. 278).

f.- El sistema en estado estable con perturbación de vaciado y llenado (70-22 cm) en el tanque de reservorio y una constante de proporcionalidad K_p de 1.45.

Cuando el tanque de reservorio se encuentra en estado estable (70 - 54 cm) en un determinado tiempo se produce una diferencia de nivel (70 - 22 Cm). Cuando el nivel se encuentra a 22 Cm ocurre una perturbación de llenado hasta 70 Cm, la cual nos permite llegar a la posición de estado estable. Como consecuencia de ello se obtienen en los tanques en serie los datos de variación de nivel con respecto al tiempo, como se ilustra en la Tabla N° 13.

Los datos tabulados en la Tabla N° 13, nos

TABLA N° 12

TANQUE N° 1		TANQUE N° 2		TANQUE N° 3	
ALTURA Cm	TIEMPO min	ALTURA Cm	TIEMPO min	ALTURA Cm	TIEMPO min
23.70	0.00	22.23	0.00	20.15	0.00
23.75	0.31	22.20	0.90	20.10	0.46
23.80	0.48	22.16	1.33	20.03	2.16
23.85	0.68	22.12	1.79	20.15	2.72
23.90	1.15	22.08	2.27	20.20	3.05
23.95	1.43	22.03	2.68	20.23	3.74
24.03	1.71	21.98	3.11	20.25	4.65
24.05	2.23	21.94	3.54	20.23	5.80
24.08	2.68	21.90	3.78	20.20	6.81
24.10	3.02	21.86	3.98	20.15	7.53
24.13	3.64	21.82	4.39	20.10	7.96
24.10	3.80	21.76	4.82	20.00	8.56
24.08	4.15	21.70	5.45	20.00	8.64
24.05	4.42	21.74	5.89	19.99	9.24
24.04	4.72	21.76	6.52	19.96	9.43
24.00	5.08	21.76	8.30	20.06	10.93
23.88	5.56	21.80	8.80	20.06	12.74
23.95	5.87	21.82	8.93	20.04	14.13
23.90	6.44	21.86	9.52	20.00	15.90
23.85	6.75	21.90	9.78	19.94	16.64

Datos de variación del nivel de los tanques en serie cuando el sistema tiene una perturbación de vaciado y llenado con K_p de 0.942.

TABLA N° 12

(Continuación)

TANQUE N° 1		TANQUE N° 2		TANQUE N° 3	
ALTURA	TIEMPO	ALTURA	TIEMPO	ALTURA	TIEMPO
Cm	min	Cm	min	Cm	min
23.80	7.16	21.94	10.32	19.90	16.95
23.75	7.51	21.98	10.61	19.92	18.41
23.70	8.00	22.00	10.87	19.92	19.67
23.65	8.24	22.02	11.04	19.90	21.54
23.63	8.47	22.04	11.30	19.88	23.76
23.60	8.79	22.08	11.53	19.86	24.64
23.63	9.05	22.10	11.83	19.82	25.66
23.73	9.22	22.16	12.22	19.80	26.71
23.80	9.64	22.20	12.40	19.78	27.54
23.85	10.11	22.22	12.62	19.76	28.10
23.90	10.48	22.24	12.96	19.73	30.15
23.93	11.24	22.26	13.24	19.71	31.23
23.95	11.65	22.28	13.64	19.68	33.51
24.00	12.02	22.30	14.24	19.68	33.96
24.93	12.46	22.24	15.09	19.64	34.50
24.05	12.93	22.22	15.37	19.68	34.81
24.00	13.58	22.20	15.68	19.74	35.49
24.05	14.08	22.18	16.21	19.80	35.67
24.08	14.48	22.16	16.41	19.84	36.61
24.10	14.86	22.14	16.77	20.02	37.06

Datos de variación del nivel de los tanques en serie cuando el sistema tiene una perturbación de vaciado y llenado con K_p de 0.942.

TABLA N° 12
(Continuación)

TANQUE N° 1		TANQUE N° 2		TANQUE N° 3	
ALTURA	TIEMPO	ALTURA	TIEMPO	ALTURA	TIEMPO
Cm	min	Cm	min	Cm	min
24.08	15.09	22.10	17.04	20.08	37.50
24.04	15.85	22.06	17.34	20.14	37.97
24.00	16.38	22.02	17.78	20.20	38.52
23.95	16.93	21.96	18.14	20.26	39.17
23.88	18.13	21.92	18.62	20.28	39.97
23.84	18.74	21.90	19.68	20.30	40.99
23.78	19.45	21.88	20.59	20.32	41.84
23.72	19.93	21.90	21.17	20.34	42.21
23.60	20.39	21.88	22.34	20.30	43.57
23.56	20.79	21.86	22.88	20.26	43.89
23.50	21.51	21.86	23.80	20.22	44.16
23.44	22.16	21.84	24.62	20.10	44.45
23.44	23.41	21.82	25.55	20.00	44.70
23.42	24.41	21.80	26.49	19.95	44.91
23.38	24.79	21.78	27.61	19.90	45.21
23.38	24.96	21.80	28.32	19.93	46.26
23.30	27.00	21.80	28.69	19.95	46.92
23.28	27.44			20.00	47.46
23.23	28.21	21.78	29.35	20.03	48.03
23.21	28.83	21.72	31.60	20.10	48.58

Datos de variación del nivel de los tanques en serie cuando el sistema tiene una perturbación de vaciado y llenado con K_p de 0.942.

TABLA N° 12
(Continuación)

TANQUE N° 1		TANQUE N° 2		TANQUE N° 3	
ALTURA	TIEMPO	ALTURA	TIEMPO	ALTURA	TIEMPO
Cm	min	Cm	min	Cm	min
23.19	29.75	21.64	33.33	20.15	49.37
23.17	30.67	21.60	33.82	20.20	49.81
23.34	30.95	21.66	34.68	-----	-----
23.50	31.36	21.76	35.73	-----	-----
23.60	31.94	21.83	36.10	-----	-----
23.70	32.70	21.93	36.63	-----	-----
23.74	32.88	22.00	37.10	-----	-----
23.84	32.98	22.10	37.84	-----	-----
23.90	33.06	22.20	38.71	-----	-----
23.92	33.18	22.25	39.24	-----	-----
23.96	33.32	22.30	40.28	-----	-----
23.98	33.65	22.33	41.01	-----	-----
24.00	33.88	22.30	41.84	-----	-----
24.02	34.01	22.32	43.75	-----	-----
24.04	34.27	22.28	44.33	-----	-----
24.06	34.54	22.25	44.62	-----	-----
24.10	34.69	22.23	44.97	-----	-----
24.15	34.81	22.25	45.63	-----	-----
24.18	34.97	22.20	46.61	-----	-----
24.18	35.06	22.15	47.90	-----	-----

Datos de variación del nivel de los tanques en serie cuando el sistema tiene una perturbación de vaciado y llenado con K_p de 0.942.

TABLA N° 12
(Continuación)

TANQUE N° 1		TANQUE N° 2		TANQUE N° 3	
ALTURA Cm	TIEMPO min	ALTURA Cm	TIEMPO min	ALTURA Cm	TIEMPO min
24.16	35.26	22.10	48.53	----	----
24.15	35.47	22.05	48.98	----	----
24.13	35.84	22.00	49.53	----	----
24.14	36.13	----	----	----	----
24.14	36.56	----	----	----	----
24.22	36.89	----	----	----	----
24.23	37.18	----	----	----	----
24.28	37.28	----	----	----	----
24.28	37.52	----	----	----	----
24.26	37.75	----	----	----	----
24.20	38.09	----	----	----	----
24.14	38.31	----	----	----	----
24.10	38.54	----	----	----	----
24.02	38.89	----	----	----	----
23.96	39.36	----	----	----	----
23.90	40.16	----	----	----	----
23.80	40.46	----	----	----	----
23.70	41.16	----	----	----	----

Datos de variación del nivel de los tanques en serie cuando el sistema tiene una perturbación de vaciado y llenado con K_p de 0.942.

TABLA N° 12

(Continuación)

TANQUE N° 1		TANQUE N° 2		TANQUE N° 3	
ALTURA Cm	TIEMPO min	ALTURA Cm	TIEMPO min	ALTURA Cm	TIEMPO min
23.60	41.64	----	----	----	----
23.65	42.13	----	----	----	----
23.68	42.65	----	----	----	----
23.79	43.29	----	----	----	----
23.86	43.64	----	----	----	----

Datos de variación del nivel de los tanques en serie cuando el sistema tiene una perturbación de vaciado y llenado con K_p de 0.942.

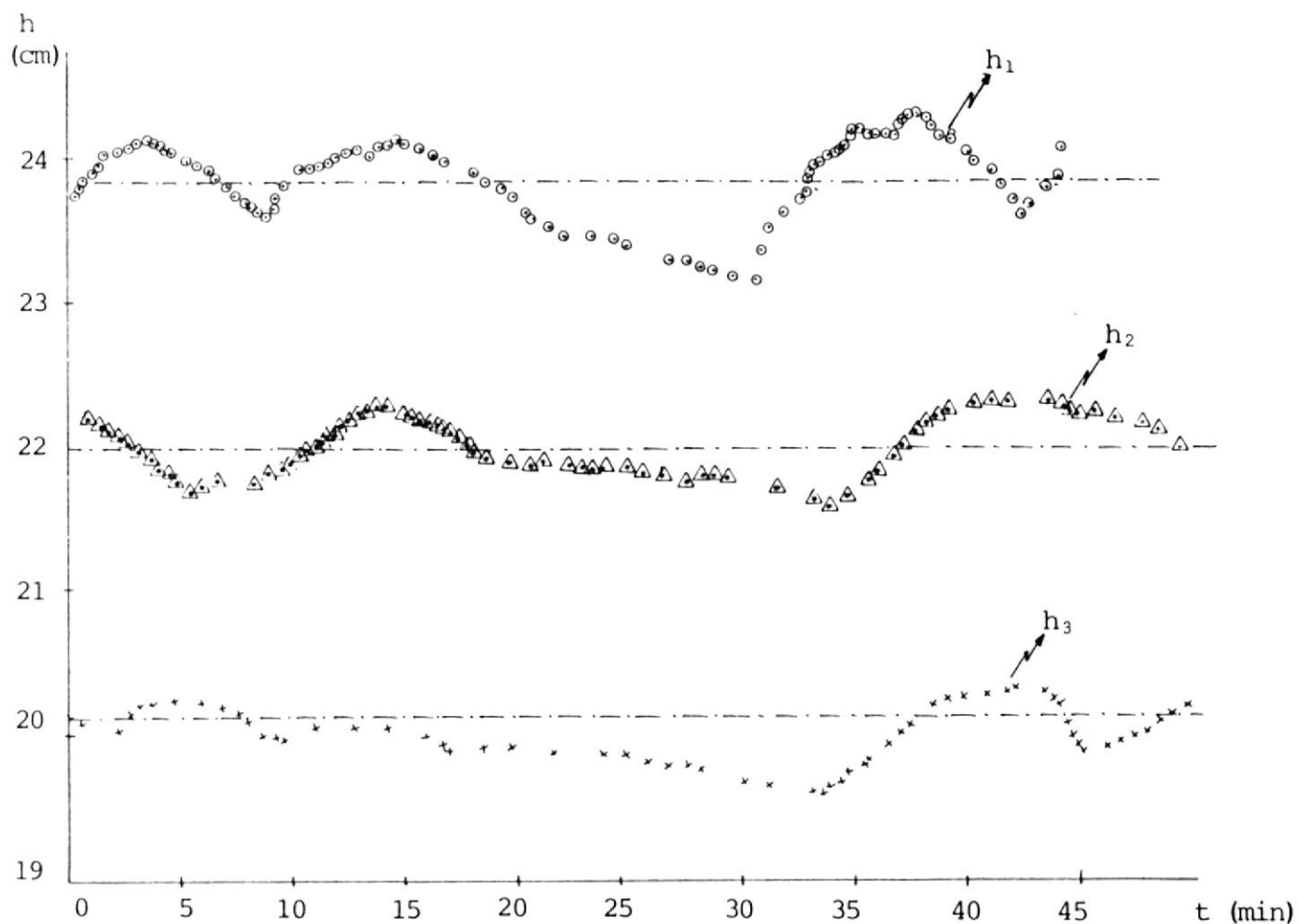


GRAFICO N° 9.- El sistema en estado estable con perturbación de vaciado y llenado (70 - 22 cm) en el tanque de reservorio y una constante de proporcionalidad K_p de 0.992.

TABLA N° 13

TIEMPO min	TANQUE N° 1 ALTURA Cm	TANQUE N° 2 ALTURA Cm	TANQUE N° 3 ALTURA Cm
0.00	24.10	22.20	19.95
0.50	24.20	22.10	19.95
1.00	24.30	22.25	19.95
1.50	24.15	22.30	20.05
2.00	24.00	22.25	20.10
2.50	23.95	22.23	20.15
3.00	23.90	22.20	20.10
3.50	23.85	22.13	20.10
4.00	23.75	22.10	20.05
4.50	23.84	22.00	20.00
5.00	23.90	21.90	19.95
5.50	24.10	21.90	19.90
6.00	24.15	21.85	19.85
6.50	24.20	21.88	19.85
7.03	24.24	21.85	19.85
7.20	24.24	21.90	19.85
7.37	24.26	22.00	19.85
7.78	24.26	22.00	19.85
8.78	24.30	22.10	19.93
9.78	24.20	22.25	20.05

Datos de variación del nivel de los tanques en serie cuando el sistema tiene una perturbación de vaciado y llenado con K_p de 1.45.

TABLA N^o 13
(Continuación)

TIEMPO min	TANQUE N ^o 1 ALTURA Cm	TANQUE N ^o 2 ALTURA Cm	TANQUE N ^o 3 ALTURA Cm
10.78	24.14	22.35	20.30
11.78	24.05	22.20	20.10
12.78	23.95	22.10	20.05
13.78	23.90	22.00	20.00
14.78	23.80	21.90	19.95
15.78	23.75	21.85	19.95
16.78	23.78	21.85	19.90
17.78	23.74	21.85	19.90
18.78	23.70	21.85	19.85
19.78	23.70	21.85	19.85
20.78	23.72	21.80	19.85
21.78	23.72	21.83	19.80
22.78	23.70	21.85	19.80
23.78	23.74	21.83	19.80
24.78	23.72	21.85	19.85
25.32	23.70	21.85	19.85
26.32	23.65	21.80	19.80
26.82	23.60	21.80	19.80

Datos de variación del nivel de los tanques en serie cuando el sistema tiene una perturbación de vaciado y llenado con K_p de 1.45.

TABLA N° 13
(Continuación)

TIEMPO min	TANQUE N° 1 ALTURA Cm	TANQUE N° 2 ALTURA Cm	TANQUE N° 2 ALTURA Cm
27.82	23.65	21.85	19.78
28.10	23.75	21.80	19.78
29.10	23.90	21.75	19.80
29.70	23.95	21.75	19.85
30.70	24.05	21.85	19.90
31.20	24.10	21.90	19.95
32.20	24,05	22.00	20.05
32.70	23.92	22.05	20.10
33.70	23.76	22.00	20.05
34.20	23.70	21.90	20.00
35.20	23.76	21.80	19.90
35.70	23.86	21.75	19.85
36.70	24.00	21.75	19.80
37.20	24.05	21.80	19.70
38.35	24.15	21.85	19.70
38.60	24.15	21.85	19.70
38.77	24.20	22.00	19.75
39.65	24.22	22.10	19.95

Datos de variación del nivel de los tanques en serie cuando el sistema tiene una perturbación de vaciado y llenado con K_p de 1.45.

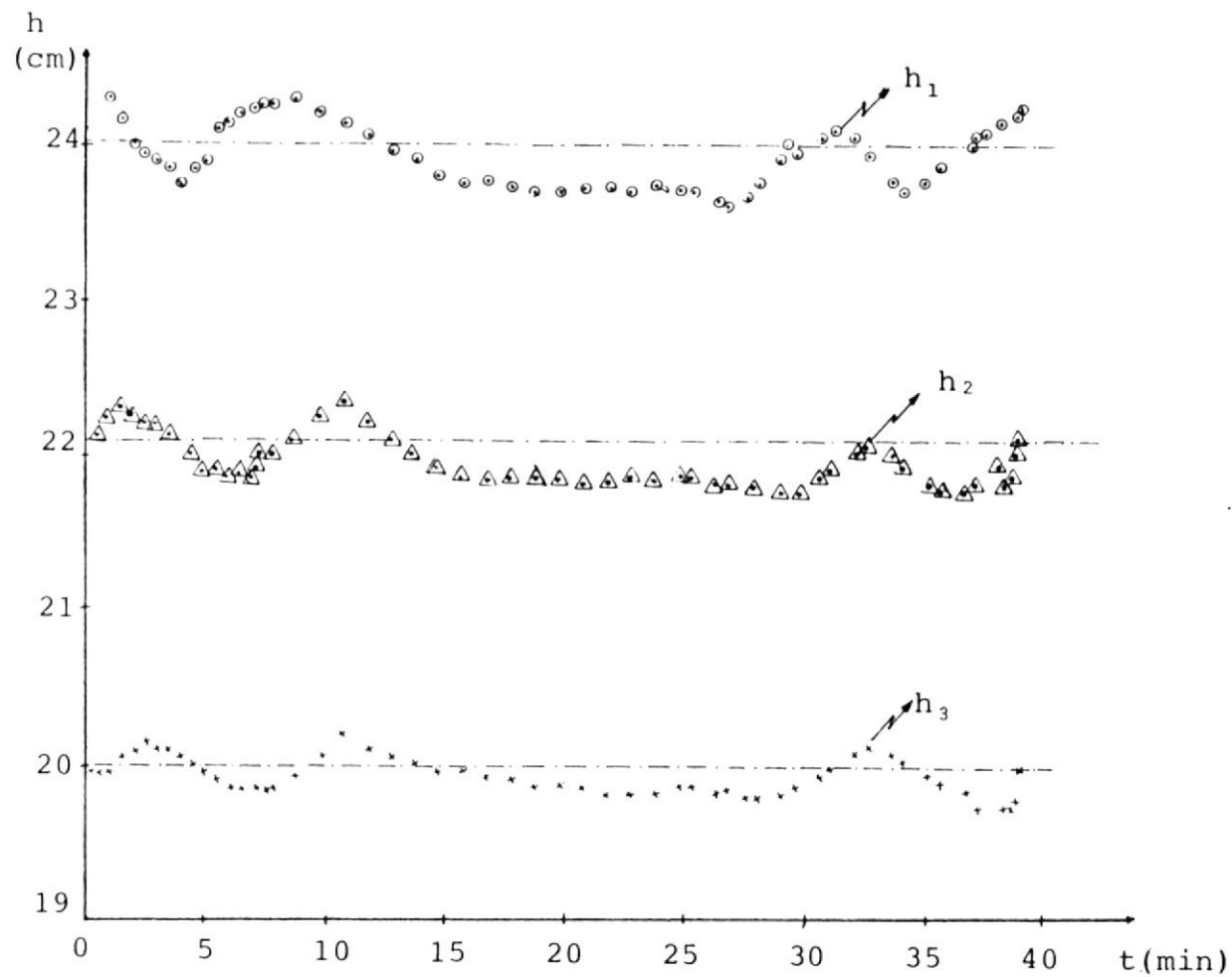


GRAFICO N° 10.- El sistema en estado estable con perturbación de vaciado y llenado (70 - 22cm) en el tanque de reservorio y una constante de proporcionalidad K_p de 1.45.

permite establecer el Gráfico N° 10. (Pág.282)

- 2.- El sistema de ciclo cerrado con el control proporcional y la entrada en el segundo tanque. Se determina la respuesta del sistema en los siguientes tres casos, con diferentes tipos de perturbaciones y manteniendo la ganancia K_p constante.

En el caso a) se hace la perturbación en el nivel del reservorio, de la misma manera que se hizo en el caso a) de la entrada en el primer tanque, y con una ganancia $K_p = 0.197$.

En los casos b) y c) se mantuvo constante el valor de la ganancia $K_p = 0.197$. La perturbación consistió en aumentar el nivel bruscamente en 3.33 cm. en uno de los tanques, y luego se permitió que actúe el sistema de control para mantener los niveles en los valores deseados.

- a.- El sistema en estado estable con perturbación de vaciado y llenado (70 - 22

cm) en el tanque de reservorio y una constante de proporcionalidad K_p de 0.197.

Cuando el tanque de reservorio se encuentra en estado estable (70 - 54 cm) en un determinado tiempo se produce una diferencia de nivel (70 - 22 cm). Cuando el nivel se encuentra a 22 cm. ocurre una perturbación de llenado hasta 70 Cm, la cual nos permite llegar a la posición de estado estable. Como consecuencia de ello se obtienen en los tanques en serie los datos de variación de nivel con respecto al tiempo, como se puede apreciar en la Tabla N° 14.

Los datos tabulados en la Tabla N° 14 permite establecer el Gráfico N° 11, (Ver Pág. N° 283)

b.- El sistema en estado estable con perturbación de 3.33 Cm. en el nivel del primer o tercer tanque.

Cuando el tanque de reservorio se encuentra en estado estable (70 - 54 Cm) en un deter-

TABLA N° 14

TANQUE N° 1		TANQUE N° 2		TANQUE N° 3	
ALTURA Cm	TIEMPO min	ALTURA Cm	TIEMPO min	ALTURA Cm	TIEMPO min
22.00	0.00	23.95	0.00	21.92	0.00
22.05	1.10	23.90	0.36	21.95	1.11
22.10	1.78	23.88	0.77	22.00	1.76
22.15	2.53	23.84	1.07	22.03	2.42
22.20	4.62	23.80	1.40	22.00	3.40
22.23	5.29	23.75	2.09	22.03	3.83
22.20	6.69	23.73	2.75	22.00	4.34
22.18	6.87	23.71	5.02	21.98	5.46
22.16	7.63	23.70	6.87	21.95	5.79
22.10	8.81	23.70	7.04	21.90	6.17
22.05	9.91	23.83	7.53	21.85	6.47
22.02	10.27	23.91	7.82	21.78	7.04
21.95	12.05	23.90	8.73	21.84	7.37
21.95	14.90	23.85	9.56	21.90	7.81
21.96	15.44	23.80	10.43	21.93	8.94
22.00	16.29	23.75	11.07	21.88	10.22
22.01	18.29	23.78	11.71	21.90	10.61
21.95	19.28	23.75	11.96	21.85	11.52
21.85	20.21	23.73	12.79	21.83	12.46
21.75	20.90	23.70	14.49	21.80	13.01

Datos de variación del nivel de los tanques en serie cuando el sistema tiene una perturbación de vaciado y llenado de 0.197.

TABLA N° 14
(Continuación)

TANQUE N° 1		TANQUE N° 2		TANQUE N° 3	
ALTURA Cm	TIEMPO min	ALTURA Cm	TIEMPO min	ALTURA Cm	TIEMPO min
21.65	21.62	23.72	15.05	21.75	14.32
21.52	22.36	23.70	16.67	21.68	19.49
21.45	23.12	23.65	17.16	21.60	20.22
21.35	24.79	23.60	17.57	21.50	21.23
21.30	26.80	23.50	18.60	21.40	23.35
21.25	27.35	23.40	19.25	21.30	24.64
21.35	28.08	23.43	19.83	21.20	25.12
21.45	28.35	23.35	20.59	21.20	26.36
21.55	28.86	23.30	21.85	21.18	27.50
21.65	29.05	23.25	22.60	21.25	28.27
21.75	29.32	23.15	23.60	21.40	28.72
21.95	29.52	23.06	24.61	21.50	29.09
21.92	31.30	22.96	25.50	21.60	29.49
21.95	31.96	22.89	26.92	21.80	29.68
21.98	33.13	22.80	27.52	21.83	30.54
21.92	33.90	23.10	27.90	21.85	31.46
21.95	35.73	23.20	28.16	21.88	32.91
21.92	36.53	23.30	28.35	21.85	33.53
21.98	36.98	23.40	28.52	21.83	34.18
22.05	37.33	23.50	28.79	21.84	35.24
22.08	38.16	23.60	29.05	21.85	36.59
22.06	39.81	23.70	29.27	21.93	37.35

Datos de variación del nivel de los tanques en serie cuando el sistema tiene una perturba-

TABLA N° 14
(Continuación)

TANQUE N° 1		TANQUE N° 2		TANQUE N° 3	
ALTURA Cm	TIEMPO min	ALTURA Cm	TIEMPO min	ALTURA Cm	TIEMPO min
21.98	42.26	23.80	29.44	21.90	39.28
22.00	44.36	23.93	29.71	21.85	39.60
22.13	45.14	23.85	30.11	21.80	40.31
----	----	23.80	30.36	21.83	40.71
----	----	23.78	30.56	21.80	41.53
----	----	23.80	31.15	21.83	42.87
----	----	23.75	31.82	21.80	43.69
----	----	23.73	32.45	21.78	44.37
----	----	23.75	32.91	21.85	45.14
----	----	23.73	34.38	----	----
----	----	23.70	35.33	----	----
----	----	23.68	36.00	----	----
----	----	23.70	36.73	----	----
----	----	23.80	37.27	----	----
----	----	23.88	37.48	----	----
----	----	23.85	40.65	----	----
----	----	23.80	41.33	----	----
----	----	23.75	42.14	----	----
----	----	23.70	42.97	----	----
----	----	23.73	43.55	----	----
----	----	23.70	44.05	----	----
----	----	23.65	44.49	----	----

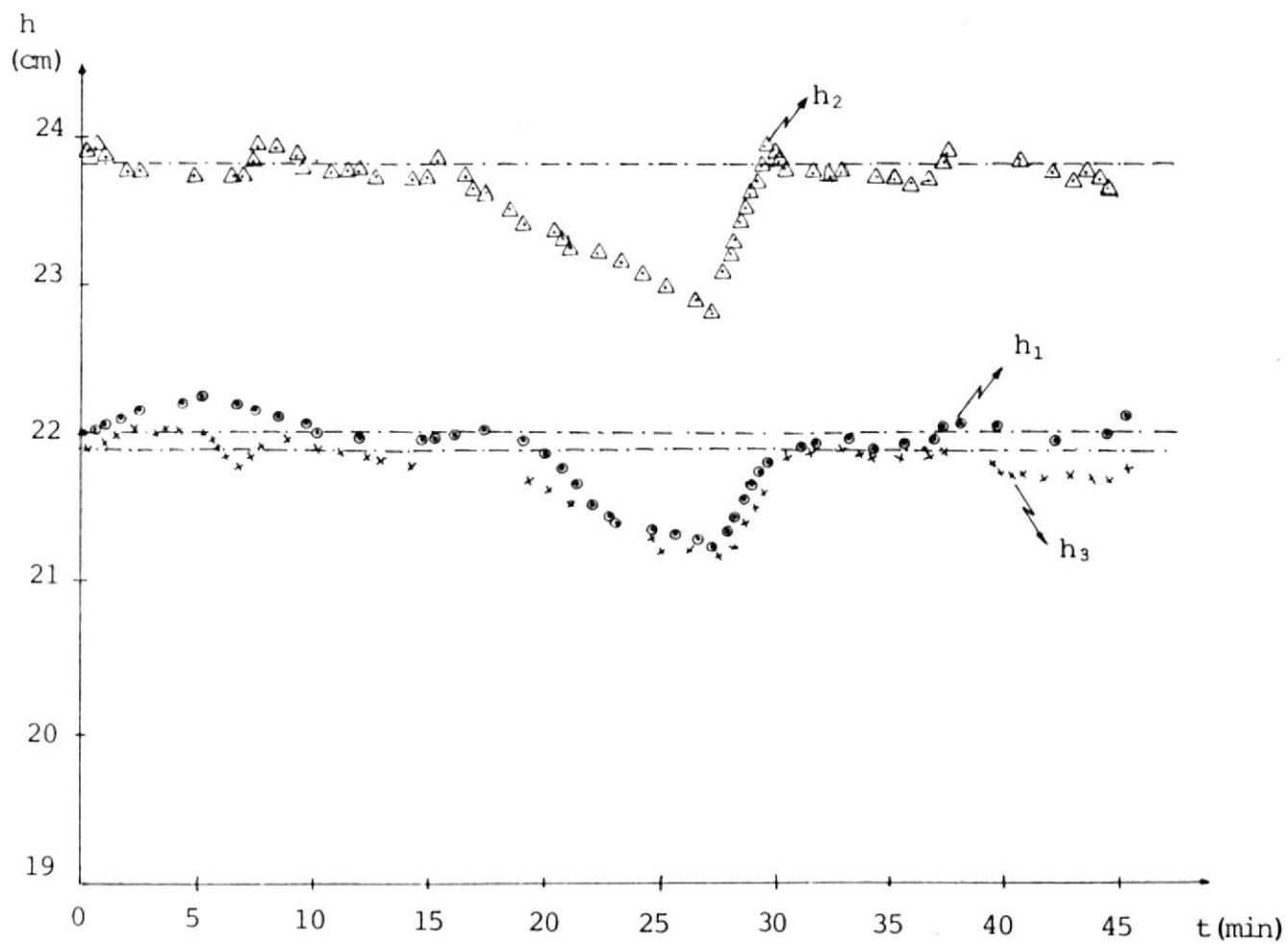


GRAFICO N° 11.- El sistema en estado estable con perturbación de vaciado y llenado (70 - 22 cm) en el tanque de reservorio y una constante de proporcionalidad K_p de 0.197

minado tiempo se produce una perturbación externa de 3.33 cm en el primer o tercer tanque. Como consecuencia se obtienen en los tanques en serie los datos de variación de nivel con respecto al tiempo, los mismos que son ilustrados en la Tabla N° 15.

Los datos tabulados en la Tabla N° 15, nos permiten obtener el Gráfico N° 12. (Ver Pág. N° 293).

c.- El sistema en estado estable con perturbación de 3.33 Cm en el nivel del segundo tanque y una constante de proporcionalidad K_p de 0.197.

Cuando el tanque de reservorio se encuentra en estado estable (70 - 54 cm) en un determinado tiempo se produce una perturbación externa de 3.33 Cm en el segundo tanque. Como consecuencia de ello se obtienen en los tanques en serie los datos de variación de nivel con respecto al tiempo, los mismos que son ilustrados en la Tabla N° 16.

Los datos tabulados en la Tabla N^o 16, nos permiten obtener el Gráfico N^o 13. (Ver Pág. 295).

TABLA N° 15

TIEMPO min	TANQUE N° 1 ALTURA Cm	TANQUE N° 2 ALTURA Cm	TANQUE N° 3 ALTURA Cm
0.00	22.30	24.10	25.50
0.13	22.50	24.25	25.00
0.26	22.55	24.30	24.68
0.51	22.60	24.35	24.45
0.76	22.60	24.25	24.20
1.01	22.55	24.10	24.02
1.26	22.50	23.95	23.80
1.51	22.45	23.90	23.62
1.76	22.40	23.85	23.48
2.01	22.40	23.85	23.36
2.26	22.35	23.80	23.24
2.51	22.30	23.80	23.18
2.76	22.30	23.80	23.06
3.01	22.30	23.80	23.00
3.26	22.20	23.80	22.96
3.51	22.20	23.80	22.85
3.76	22.20	23.75	22.80
3.95	22.21	23.75	22.74
4.26	22.20	23.75	22.70
4.51	22.20	23.75	22.65
4.76	22.30	23.95	22.60

Datos de variación del nivel de los tanques en serie cuando el sistema tiene una perturbación de 3.33 cm en el nivel del primer o tercer tanque con K_p de 0.197.

TABLA N° 15
(Continuación)

TIEMPO min	TANQUE N° 1 ALTURA Cm	TANQUE N° 2 ALTURA Cm	TANQUE N° 3 ALTURA Cm
5.00	22.25	23.95	22.57
5.26	22.25	24.00	22.56
5.50	22.35	24.00	22.54
5.76	22.40	24.00	22.50
6.00	22.45	24.00	22.49
6.25	22.40	24.00	22.48
6.51	22.40	24.00	22.48
6.76	22.35	24.00	22.45
7.01	22.40	24.00	22.43
7.26	22.35	24.00	22.40
7.51	22.35	24.00	22.39
7.76	22.40	24.00	22.36
8.00	22.40	24.00	22.36
8.26	22.40	24.00	22.36
8.51	22.35	24.00	22.32
8.76	22.40	24.00	22.30
9.00	22.35	23.95	22.29
9.25	22.40	23.95	22.26
9.50	22.30	23.85	22.22
9.76	22.25	23.85	22.20
9.99	22.25	23.85	22.18

Datos de variación del nivel de los tanques en serie cuando el sistema tiene una perturbación de 3.33 cm en el nivel del primer o tercer tanque con K_p de 0.197.

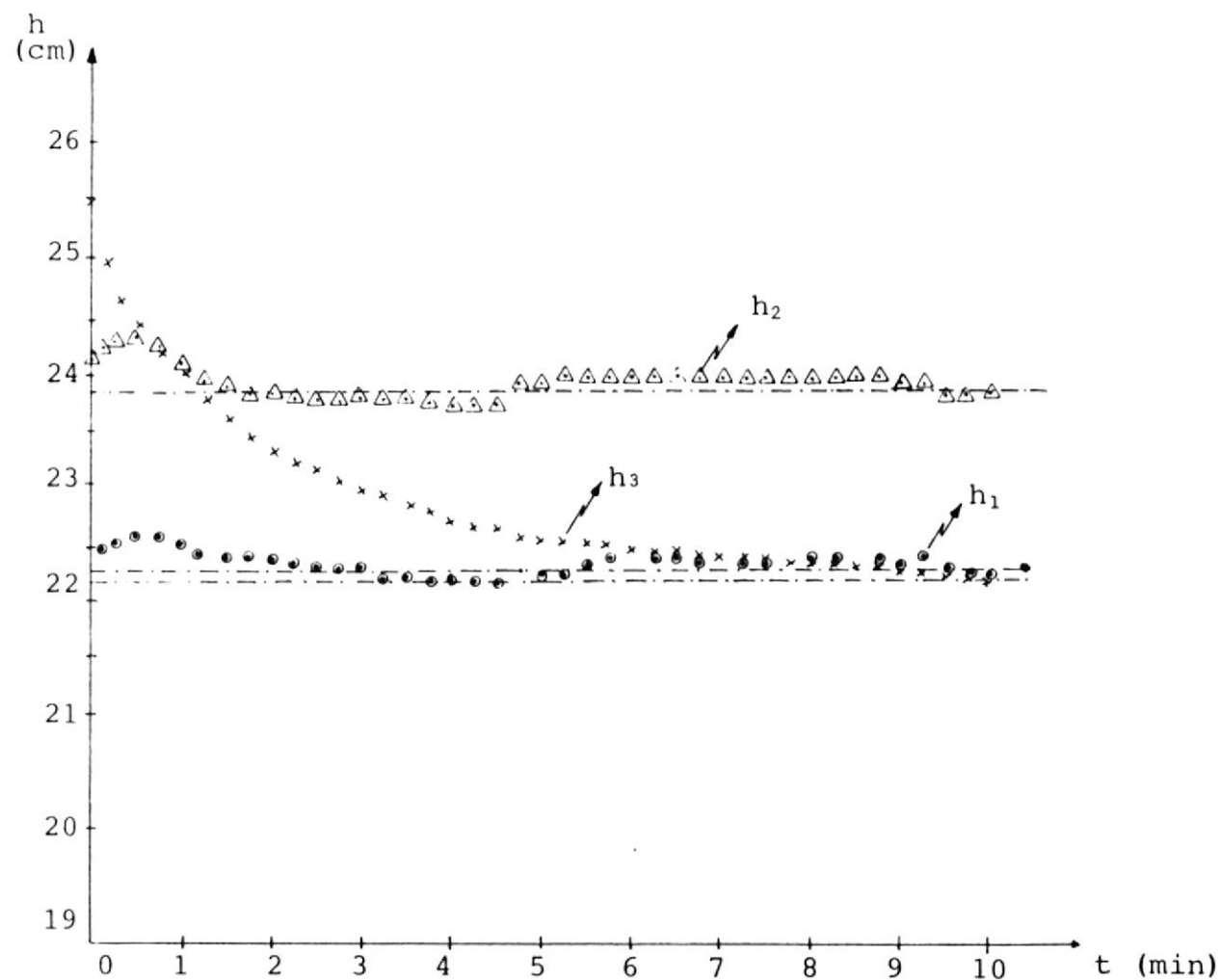


GRAFICO N^o 12.- El sistema en estado estable con perturbación de 3.33 cm en el nivel del primer o tercer tanque.

TABLA N° 16

TIEMPO min	TANQUE N° 1 ALTURA Cm	TANQUE N° 2 ALTURA Cm	TANQUE N° 3 ALTURA Cm
0.00	22.40	27.40	22.30
0.13	22.60	25.80	22.45
0.25	22.70	24.85	22.55
0.50	22.80	24.40	22.65
0.75	22.70	24.23	22.55
1.00	22.60	24.15	22.45
1.26	22.55	24.08	22.40
1.51	22.50	24.04	22.35
1.75	22.45	24.00	22.30
2.00	22.40	23.99	22.25
2.27	22.35	23.98	22.25
2.51	22.35	23.93	22.20
2.75	22.35	23.93	22.20
3.00	22.30	23.93	22.20
3.25	22.30	23.93	22.15
3.50	22.30	23.92	22.15
3.76	22.30	23.90	22.15
4.00	22.25	23.90	22.10
4.25	22.23	23.90	22.10
4.50	22.20	23.89	22.10

Datos de variación del nivel de los tanques en serie cuando el sistema tiene una perturbación de 3.33 cm en el nivel del segundo tanque con K_p de 0.197.

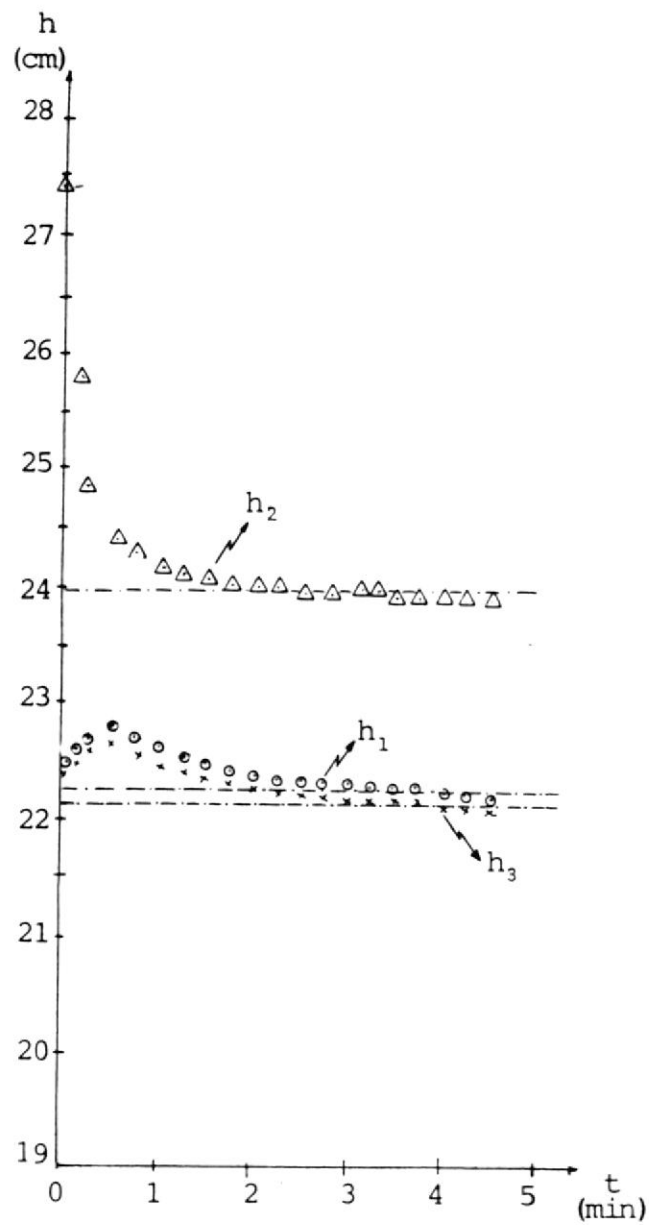


Gráfico N° 13.- El sistema en estado estable con perturbación de 3.33 cm. en el nivel del segundo tanque y una constante de proporcionalidad K_p de 0.197.

CAPITULO III

ANALISIS DE LOS RESULTADOS

3.1 COMPARACION DE LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES CON LOS TEO- RICOS

De las pruebas realizadas en este trabajo puede decirse que es factible controlar el nivel de los tres tanques en serie, como se ha descrito anteriormente en esta tesis. En esta parte se realizó la comparación de los resultados del sistema de ciclo abierto con el sistema de ciclo cerrado cuando se tiene el control proporcional en el primer tanque y cuando se lo tiene en el segundo tanque se analizaron los resultados tanto experimentales como teóricos. Además se realizó un análisis teórico cuando el sistema es de ciclo abierto y de ciclo cerrado con el control integral y el control derivativo-proporcional. Para realizar los análisis teóricos del sistema, se empleó un programa de computadora desarrollado especialmente para este sistema, el cual se encuentra explicado en forma esquemática en el Capítulo I, y en detalle en el Apéndice A.

Puede notarse que este trabajo contiene pruebas iniciales cuyos datos sirven para efectuar otras experiencias adicionales para lograr mejorar la tecnología de este sistema en tesis futuras.

Se han considerado los parámetros más importantes que aparecen en sistemas industriales más sofisticados.

La comparación de los resultados teóricos con los experimentales radica principalmente en el análisis del comportamiento de las variables, tales como: los niveles de los tanques, la constante de proporcionalidad o ganancia, la constante de integración, la constante de retardo del amortiguador con la constante de proporcionalidad cuando se tiene la entrada en el primer o segundo tanque.

Los resultados de las experiencias que se analizarán a continuación tienen como referencia las pruebas realizadas en la computadora digital y las pruebas experimentales considerando las variables anotadas anteriormente. Además se hace referencia de otras pruebas que son: De ciclo abierto, de ciclo cerrado con el control integral y con el control derivativo-proporcional.

1.- El sistema de Ciclo Abierto.- Para realizar la comparación con los resultados experimentales, primero analizamos el sistema de ciclo abierto por medio de la computadora digital.

a) La Entrada en el Primer Tanque

Para este caso tenemos que el sistema simulado cuando es estable (70 - 54 cm) las variaciones máximas de nivel donde se encuentra la entrada es de 1.5cm de altura en los tiempos 4.24 y 14.2 min y los niveles de los otros tanques sufren pequeñas variaciones, como se muestra en el Gráfico N° 14.

Cuando el sistema sufre una perturbación de vaciado y llenado (70-22 cm) las variaciones máximas de nivel en la entrada son de 18 cm de altura en el tiempo de 34.87 min, en el segundo tanque es de 12cm y en el tercer tanque es de 9 cm, pero observamos que el sistema no llega a estabilizarse en el punto de operación de estado estable, como se muestra en el Gráfico N° 15, estabilización que no se produce debido a que el llenado en el tanque de reservorio es rápido, el cual hace que en el tiempo analizado de los niveles de los tanques en serie no alcancen a

estabilizarse, además de que cada uno de los tanques en serie tienen un retardo de tiempo de primer orden, lo que hace que estos niveles responda con determinado retraso.

Cuando el sistema tiene una perturbación de 4.33 cm en el primer tanque observamos que el nivel trata de estabilizarse a un nivel superior en el tiempo de 4.34 min, luego a continuación el nivel queda perturbado, mientras que los niveles de los otros tanques son perturbados en el tiempo analizado, como se muestra en el Gráfico N° 16.

Cuando el sistema tiene una perturbación de 4.25 cm en el segundo tanque observamos que el nivel donde sufre la perturbación trata de estabilizarse en forma exponencial, pero el nivel del tercer tanque sube 1.25 cm, mientras que el nivel del primer tanque también queda perturbado hasta que los otros niveles se estabilicen, como se muestra en el Gráfico N° 17.

Cuando el sistema tiene una perturbación de 3.75 cm en el tercer tanque se observa que el nivel trata de estabilizarse mientras que en el segundo sube

hasta 1 cm, pero en el primer tanque donde se encuentra la entrada el nivel queda perturbado, como se muestra en el Gráfico N° 18.

Comparando los tres casos donde se producen perturbaciones en los niveles de los tanques en serie se observa que los niveles donde ocurre la perturbación tratan de estabilizarse pero en una forma diferente. Notamos que cuando la perturbación es en el primer tanque ésta afecta principalmente al nivel de este tanque y poco a los otros. Cuando la perturbación es en el tanque del medio, ésta afecta proporcionalmente a ambos tanques de los extremos. Finalmente, cuando la perturbación es en el tercer tanque, ésta afecta principalmente al nivel de este tanque y poco al segundo. De aquí se concluye que la perturbación más perjudicial es la que ocurre en el segundo tanque. Sin embargo, el mayor tiempo de estabilización ocurre cuando la perturbación está lo más alejada de donde se encuentra la entrada.

Del análisis de los Gráficos N° 14 y N° 18, se concluye que los niveles de los tanques en serie sufren grandes variaciones para pequeñas perturbaciones, lo

cual hace impráctico realizar pruebas experimentales para perturbaciones más grandes. Por esta razón, para obtener las respuestas a entradas, grandes escalón y rampa, solo se simularon en la computadora, para el caso de ciclo abierto.

Para realizar un mejor estudio del tipo de respuesta del sistema de control se realizaron pruebas con entradas escalón y rampa.

Cuando el sistema tiene una perturbación escalón de 10 cm en la entrada observamos que el nivel del tanque donde se encuentra la entrada no se estabiliza en los 2.5 min que se realizó la prueba, sino que seguirá incrementándose el nivel, el cual no se puede controlar, mientras que los otros niveles sufren pequeños incrementos como se muestra en el Gráfico N° 19.

Cuando el sistema es perturbado en la entrada por medio de una función rampa de $4T$ durante un tiempo de 2.5 min observamos que el nivel del tanque donde se encuentra la entrada aumenta exponencialmente, mientras que los otros niveles sufren pequeños incrementos como se muestra en el Gráfico N° 20.

Como se puede apreciar para estos tipos de pruebas se comprueba que los niveles sufren grandes incre-

mentos, los cuales no se los puede controlar. Debido a ésto, nuevamente, sólo se lo ha realizado en la computadora.

b.- La entrada en el segundo tanque

Cuando el sistema se encuentra en estado estable, la variación máxima de niveles es de 1.25 cm en un tiempo de 4.24 min y 14.2 min, pero solamente donde se encuentra la entrada, mientras que en los otros niveles las perturbaciones son iguales a 0.25 cm debido a que los otros tanques son alimentados por las llaves de interconexión en el mismo instante, además porque las resistencias de interconexión son aproximadamente iguales, como se muestra en el Gráfico N° 21.

Cuando el sistema tiene una perturbación de vaciado y llenado (70 - 22 cm) observamos que el nivel del segundo tanque sufre una variación de 14 cm en el vaciado, mientras que al llenarse se estabiliza en un nivel inferior debido a que el llenado del tanque de reservorio es rápido y el tiempo analizado es pequeño, además porque cada uno de los tanques en serie tienen un retardo de tiempo. Lo mismo sucede con los otros tanques que sufren una varia -

ción de 9 cm con respecto al nivel de operación, como se muestra en el Gráfico N° 22.

Cuando el sistema tiene una perturbación de 3.33 cm en el primer o tercer tanque, observamos que el nivel del primer o tercer tanque disminuye en forma exponencial, mientras que el nivel del segundo tanque, donde se encuentra la entrada tiene su máxima variación de 1.5 cm en un tiempo de 3.45 min, el cual se trata de estabilizar, cuando desaparezca la perturbación en el primer o tercer tanque como se muestra en el Gráfico N° 23.

Cuando el sistema tiene una perturbación de 3.33 cm en el segundo tanque observamos que el nivel donde sufre la perturbación desciende en los 5 min pero los otros niveles tienen sus perturbaciones iguales de 0.75 cm, luego a continuación seguirá descendiendo hasta estabilizarse en el nivel de operación, como se muestra en el Gráfico N° 24.

Del análisis de los gráficos N° 21 y N° 24, podemos concluir que el nivel de los tanques en serie sufren grandes variaciones para pequeñas perturbaciones en la entrada, pero en este caso los incremen -

tos de los niveles en los tanques extremos son iguales. Cuando se tiene perturbaciones en los niveles de los tanques en serie tenemos que las variaciones son mayores cuando se realizan en los tanques extremos, mientras en el caso cuando las perturbaciones se realizan en el tanque del medio, donde se encuentra la entrada, los niveles de los tanques extremos se incrementan en forma igual. En este caso notamos que la perturbación más crítica es la que ocurre en el segundo tanque.

Con el objeto de estudiar mejor la respuesta del sistema, se hacen pruebas con entrada escalón. Cuando el sistema tiene una entrada escalón de 10 cm durante un tiempo de 2.5 min, observamos que el nivel aumenta donde se encuentra la entrada, mientras que los otros tanques también sufren pequeños incrementos en el tiempo observado, como se muestra en el Gráfico N° 25.

Analizando este caso se observa que los niveles de los tanques extremos se perturban en proporciones iguales ante una entrada escalón en el segundo tanque. Mientras que cuando ocurren las perturbaciones en los tanques extremos el nivel del tanque

opuesto sufre una pequeña variación debido a que se interpone el tanque intermedio en donde se encuentra la entrada. Estas pruebas solo fueron simuladas en la computadora por las razones ya anotadas anteriormente.

2.- El Sistema de Ciclo Cerrado con el Control Proporcional.

a.- La entrada en el Primer Tanque

Cuando el sistema está en estado estable con una constante de proporcionalidad K_p de 0.197, observamos que la máxima variación de nivel es de 0.3 cm en los tiempos de 4.24 y 14.20 min en la entrada, mientras que en los otros tanques se observa que los niveles se mantienen constantes como se muestra en el Gráfico N° 26.

Comparando con el resultado del sistema de ciclo abierto, (Gráfico N° 14), se obtiene que la perturbación ha disminuido en 1.2 cm, lo cual demuestra un mejor control de nivel. Este análisis sólo se lo realizó en la computadora.

Cuando se tiene una perturbación de vaciado y llenado (70-22 cm) en el tanque de reservorio con una constante de proporcionalidad K_p de 0.197, se observa que la máxima variación de nivel en el vaciado es de 1.5 cm en el tiempo de 34.87 min que ocurre en el tanque donde se encuentra la entrada y los niveles del segundo y tercer tanque son perturbados 1 y 0.8 cm respectivamente, mientras que en el llenado los niveles se aproximan al punto de operación, como se muestra en el Gráfico N° 27.

Comparando con el resultado del sistema de ciclo abierto (Gráfico N° 15), se obtiene una diferencia de nivel de 16.5 cm en la perturbación máxima, lo que demuestra la eficiencia de utilizar un controlador en el sistema.

También observamos que por medio de la experiencia realizada en el prototipo se ratifica la eficiencia del control sobre el sistema, ya que las diferencias de nivel en la perturbación máxima son de: 0.28; 0.20 y 0.27 cm en el primer, segundo y tercer tanque respectivamente. Estos resultados son comparables a los resultados de la prueba realizada en la computadora digital, como se muestra en el

Gráfico N° 5.

Cuando el sistema está en estado estable con una perturbación de 4.33 cm en el primer tanque, con una constante de proporcionalidad K_p de 0.197, observamos que el sistema se estabiliza rápidamente en un tiempo de 1.42 min, debido a que la perturbación se produce donde se encuentra el control, mientras que los otros niveles de los tanques permanecen constantes como se muestra en el Gráfico N° 28.

Comparando con el resultado del sistema de ciclo abierto (Gráfico N° 16), se obtiene una reducción de tiempo de 3.02 min para estabilizar el sistema, además dentro de este lapso de tiempo los niveles de los otros tanques no sufren ninguna alteración, lo que demuestra la eficiencia del control.

También observamos por medio de la experiencia realizada en el prototipo que se comprueba la eficiencia del control, en la cual se obtiene una diferencia de tiempo de 0.58 min comparado con el ciclo cerrado analizado teóricamente, además los otros niveles son perturbados en pequeña proporción

como se muestra en el Gráfico N° 6.

Estas diferencias existentes entre los resultados teóricos y experimentales no son apreciable cualitativamente ya que mantiene la misma forma como se estabiliza el sistema para lo dos casos, ni cuantitativamente ya que las diferencias de estas variaciones son pequeñas en los dos casos.

Cuando el sistema tiene una perturbación de 4.25 cm en el segundo tanque y una constante de proporcionalidad K_p de 0.197, observamos que el nivel donde ocurre la perturbación se estabiliza en forma exponencial hasta 0.2 cm en el tiempo de 18.42 min realizada la prueba y el nivel del tercer tanque queda perturbado, además el nivel del primer tanque se mantiene constante debido a que en este tanque se encuentra el control, lo que no le permite que se perturbe aunque los otros tanques tengan sus niveles perturbados y luego se estabilicen en el nivel de operación, como se muestra en el Gráfico N° 29.

Comparando con el resultado del sistema de ciclo abierto (Gráfico N° 17), observamos que se obtiene una diferencia de nivel de 0.4 Cm con respecto al

punto de operación y en el nivel del tercer tanque se reduce la perturbación en un factor de 0.5 cm, además el nivel del primer tanque se estabiliza en el nivel de operación. También observamos que por medio de la experiencia realizada en el prototipo se ratifica la eficiencia del control sobre el sistema, ya que en el tiempo de 8 min el nivel donde ocurre la perturbación se estabiliza hasta 0.2 cm con respecto al punto de operación, mientras que el nivel del tercer tanque se encuentra perturbado, también el nivel del primer tanque al principio se perturba y luego se estabiliza, como se muestra en el Gráfico N° 7.

Cuando el sistema tiene una perturbación de 3.75 cm en el tercer tanque y una constante de proporcionalidad K_p de 0.197, observamos que el nivel donde ocurre la perturbación se estabiliza en forma exponencial hasta 0.6 cm en el intervalo de prueba de 18.43 min con respecto al nivel de estado estable, donde el nivel del segundo tanque permanece perturbado hasta 0.4 cm y el nivel del primer tanque no es afectado debido al control, como se muestra en el Gráfico N° 30.

Comparando con el resultado del sistema de ciclo abierto (Gráfico N° 18) donde ocurre la perturbación se obtiene una diferencia de nivel de 0.3 cm con respecto al punto de operación, mientras que el nivel del segundo tanque permanece perturbado con una diferencia de 0.2 cm, y el nivel del primer tanque permanece constante.

Además, es comprobado por la experiencia realizada en el prototipo donde se observa que el sistema se estabiliza en un menor tiempo que el resultado teórico, también tenemos que el nivel donde se encuentra el control no es afectado por la perturbación realizada en el tercer tanque como se muestra en el Gráfico N° 8.

Cuando el sistema es analizado para las perturbaciones sobre el nivel de cada uno de los tanques en serie se observa que no se aprecian diferencias cualitativas importantes entre las respuestas teóricas y las experimentales ya que mantienen la forma semejante entre sus respuestas, además, no se aprecian cuantitativamente diferencias entre estas respuestas ya que sus variaciones son pequeñas.

Cuando el sistema tiene una perturbación de vaciado y llenado (70 - 22 cm) y una constante de proporcionalidad K_p de 0.942, se observa que la máxima variación de nivel donde se encuentra la entrada es de 0.8 cm, mientras que en el segundo y tercer tanque las variaciones de niveles son de 0.5 cm y 0.3 cm respectivamente que fueron obtenidos en los siguientes tiempos: 34.57, 35.38 y 37.9 min, como se muestra en el Gráfico N° 31. Como en este caso se ha aumentado la ganancia de 0.197 a 0.942 para analizar el sistema se aprecia con respecto al gráfico N° 27 cuando fue analizado con una ganancia de 0.197 que en el sistema se ha disminuido el error de estado estable, ya que el error de estado estable es obtenido de la división de la variable manipulada y la ganancia de proporcionalidad, la cual hace que al aumentarse esta ganancia el error disminuya.

Comparando con el resultado experimental se comprueba la eficiencia del control, donde al aumentar la ganancia disminuye el error de estado estable, además se obtiene en el primer y tercer tanque una diferencia de nivel de 0.17 y 0.12 cm respectivamente con respecto a la máxima variación, también observamos que en el llenado solamente el primer tanque

llega al nivel de estado estable mientras los otros niveles se encuentran en un nivel inferior debido a que cada tanque tiene un retraso de tiempo como se muestra en el Gráfico N° 9.

Cuando el sistema tiene una perturbación de vaciado y llenado (70-22 cm) y una constante de proporcionalidad K_p de 1.45, se observa que las máximas variaciones de los niveles son 0.3, 0.2 y 0.1 cm en los tiempos de 34.53; 35.38 y 37.9 min en el primer, segundo y tercer tanque respectivamente, como se muestra en el Gráfico N° 32. Para este caso se aumentó más la constante de proporcionalidad de 0.197 a 1.45, lo cual ocasiona que el error de estado estable haya disminuido aun más con respecto al caso anterior.

Comparando con el resultado experimental, se obtiene que las máximas variaciones tienen una diferencia de 0.12 , 0.15 y 0.12 cm con respecto a las máximas variaciones teóricas, pero esto sucede en otros tiempos: 26.82; 29.7 y 28.1 min en el primer, segundo y tercer tanque respectivamente, además se comprueba la eficiencia del control con esta ganancia donde las variaciones de los niveles son pe-

queñas con respecto al nivel de estado estable, como se muestra en el Gráfico N° 10.

Además se realizó un análisis teórico en el modelo digital para funciones escalón y rampa en el tanque de reservorio, para realizar un mejor estudio de la respuesta del control y comprobar si éste es satisfactorio.

En el caso de una perturbación escalón de 10 cm en el sistema de ciclo abierto se observa que el nivel se incrementa en la entrada, el cual no se lo puede controlar, como se muestra en el Gráfico N° 19, mientras que el sistema de ciclo cerrado con una constante de proporcionalidad K_p de 0.197, cuando ocurre la perturbación escalón se observa que el nivel donde se encuentra la entrada varía hasta otro nivel superior y luego se mantiene constante con un error de estado estable de 0.33 cm, el cual es alcanzado en el tiempo de 1.25 min como se muestra en el Gráfico N° 33. Esto se produce ya que para una perturbación sostenida que actúe sobre el sistema se tiene una corrección sostenida y existirá un error correspondiente en el estado estable.

Además es comprobado este resultado por medio de la computadora analógica en la cual se obtuvo un resultado similar al de la computadora digital, como se muestra en el Gráfico N° 1.

Para realizar un mejor estudio del control proporcional se analizó con una ganancia de proporcionalidad K_p de 0.942, para lo cual se observa que al aumentar esta ganancia, el error de estado estable disminuye, el cual es de 0.08 cm el mismo que es alcanzado en un tiempo de 0.18 min como se muestra en el Gráfico N° 34.

Como se comprueba en este caso, al aumentarse la constante de proporcionalidad en el control se obtiene una disminución del error de estado estable y del tiempo para alcanzar la estabilización.

Para el caso de una perturbación rampa de $4T$ en la entrada durante un tiempo de 2.5 min, tanto para una constante de proporcionalidad K_p de 0.197 como de 0.942 se observa que el error disminuye al aumentar la ganancia de proporcionalidad como se puede apreciar en los Gráficos N° 35 y N° 36.

b.- La entrada en el Segundo Tanque

Cuando el sistema se encuentra en estado estable con una constante de proporcionalidad K_p de 0.197, observamos que la máxima variación de nivel en la entrada es de 0.3 cm en los tiempos de 4.24 y 14.2 min, mientras que los otros niveles permanecen constantes, como se muestra en el Gráfico N° 37.

Comparando con el resultado del sistema de ciclo abierto, se obtiene que la perturbación ha disminuido en 0.95 cm, lo cual justifica la utilización del control proporcional en el sistema.

Cuando el sistema tiene una perturbación de vaciado y llenado (70 - 22 cm) en el tanque de reservorio y una constante de proporcionalidad K_p de 0.197, se observa que la máxima variación donde se encuentra la entrada es de 1.6 cm en el tiempo de 33.97 min, mientras que en el nivel del primer y tercer tanque se produce la misma perturbación que es de 1 cm en el tiempo de 35.09 min como se muestra en el Gráfico N° 38.

Comparando con el resultado del sistema de ciclo

abierto (Gráfico N° 22) se obtiene una diferencia de nivel de 12.4 cm de la máxima variación donde se encuentra la entrada, mientras que en los niveles del primer y tercer tanque se obtuvo una diferencia de 8.0 cm, además en el llenado se alcanza el nivel de estado estable, lo cual no sucede con el sistema de ciclo abierto, debido a ésto es preciso la utilización del control sobre el sistema.

Mientras que en el resultado experimental para este caso, se observa que las máximas variaciones de nivel son de 1.1; 0.75 y 0.72 cm en los tiempos de 27.52; 27.35 y 27.5 min en el segundo, primer y tercer tanque respectivamente donde existe un determinado error tanto en los tiempos como en las variaciones de nivel con respecto al resultado teórico, de lo cual observamos que estas diferencias cualitativamente y cuantitativamente no son importantes ya que se mantiene la forma en los resultados y las variaciones de los dos casos son pequeños, como se muestra en el Gráfico N° 11.

Cuando el sistema tiene una perturbación de 3.33 cm en el nivel del primer o tercer tanque y una constante de proporcionalidad K_p de 0.197, se ob -

serva que el comportamiento del nivel del tanque donde ocurre la perturbación se estabiliza en forma exponencial en un tiempo de 13.79 min, mientras que los otros niveles se mantienen constantes, como se muestra en el Gráfico N° 39.

Comparando con el resultado del sistema de ciclo abierto (Gráfico N° 23) se obtiene que se estabiliza el nivel donde ocurre la perturbación en el tiempo de prueba, además tenemos que los otros niveles se han mantenido constantes a pesar de la perturbación, lo que no sucede con el sistema de ciclo abierto.

Con respecto al resultado experimental se observa que el nivel donde ocurre la perturbación se estabiliza en un tiempo de 10 min, mientras que los otros niveles sufren una pequeña perturbación y luego se mantienen constantes, lo cual comprueba el resultado teórico, como se muestra en el Gráfico N° 12.

Cuando el sistema tiene una perturbación de 3.33 cm en el segundo tanque y una constante de proporcionalidad K_p de 0.197, se observa que el control

tarda un tiempo de 1.78 min para estabilizar el nivel donde ocurre la perturbación, mientras que los otros niveles se mantienen constantes, como se muestra en el Gráfico N° 40.

Comparando con el resultado del sistema de ciclo abierto se obtiene que en el nivel donde ocurre la perturbación se estabiliza en el tiempo de 1.78 min y en los otros niveles se elimina la perturbación, los cuales se mantienen constantes.

Además, comparando con la prueba experimental que se realiza en el prototipo se obtiene que el nivel donde ocurre la perturbación se estabiliza con una diferencia de tiempo de 0.22 min con respecto al resultado teórico, mientras que los otros niveles sufren una pequeña perturbación y luego se estabilizan, lo que comprueba la eficiencia del control, como se muestra en el Gráfico N° 13.

Para realizar un mejor estudio del tipo de respuesta del control sobre el sistema se realizó una prueba con entrada de tipo escalón.

Cuando el sistema tiene una perturbación escalón de

10 cm y una constante de proporcionalidad K_p de 0.197, se observa que el nivel donde ocurre la perturbación se estabiliza en el tiempo de 1.5 min en un nivel superior con 0.31 cm de error de estabilidad, mientras que los otros niveles se perturbaban en una misma proporción de 0.11 cm durante el tiempo de prueba, lo que no ocurre con el resultado del sistema de ciclo abierto, de lo cual con esta prueba se comprueba que los niveles de los tanques extremos donde se encuentra la entrada varían en formas iguales y tratan de estabilizar el sistema en el menor tiempo posible, como se muestra en el Gráfico N° 41.

3.- El sistema de ciclo cerrado con el control integral

Este tipo de control se lo analiza por medio del modelo digital, para lo cual se varía la constante de integración, teniendo la entrada en el primer tanque, considerando las resistencias, las áreas y los niveles del prototipo.

Cuando el sistema tiene una perturbación de vaciado y llenado (70 - 22 cm) en el tanque de reservorio con una constante de integración de 0.05, se obser-

va que la variación de los niveles del sistema es oscilante. En el momento que se produce el vaciado el nivel donde se encuentra la entrada tiene una perturbación de 2 cm y luego se amortigua alrededor del nivel de operación, mientras que el nivel del segundo tanque sufre una pequeña perturbación de 0.4 cm y el nivel del tercer tanque se mantiene constante.

A continuación observamos que en el llenado, el nivel del primer tanque sufre una perturbación de 5.3 cm y luego se amortigua, mientras que el nivel del segundo tanque sufre una perturbación de 1.6 cm y el nivel del tercer tanque tiene una pequeña perturbación de 0.35 cm.

Cabe indicar que las perturbaciones de los niveles de los tres tanques no corren en forma simultánea debido a que cada tanque tiene un retardo de tiempo, como se muestra en el Gráfico N° 42.

Cuando el sistema tiene una perturbación de vaciado y llenado (70-22 cm) con un constante de integración de 0.2, se observa que la variación de los niveles del sistemas es más oscilante que en el ca-

so anterior. En el momento que se produce el vaciado, el nivel del primer tanque tiene una perturbación de 0.85 cm y luego se amortigua alrededor del nivel de operación, mientras que el nivel del segundo tanque sufre una pequeña perturbación de 0.15 cm y el nivel del tercer tanque se mantiene constante.

A continuación observamos que en el llenado, el nivel del primer tanque sufre una perturbación de 1.8 cm y luego se amortigua, mientras que el nivel del segundo tanque sufre una perturbación de 0.4 cm y el nivel del tercer tanque se mantiene constante.

Cabe indicar que las perturbaciones de los niveles de los tres tanques no ocurren en forma simultánea, debido a que cada tanque tiene un retardo de tiempo, como se muestra en el Gráfico N° 43.

De estas dos pruebas realizadas en las cuales se aumentó la constante de integración de 0.05 a 0.20 se observa que la respuesta del sistema es más oscilatoria y las perturbaciones máximas disminuyen tanto en el llenado como en el vaciado.

Para realizar un mejor estudio de la respuesta del

sistema con este tipo de control se realizaron pruebas con entradas de tipos escalón de 10 cm y rampa T que se analizan a continuación.

Cuando el sistema tiene una perturbación escalón de 10 cm durante un tiempo de 10 min en el tanque de reservorio con una constante de integración de 0.05, se observa que la variación de los niveles del sistema es oscilante, mientras el nivel donde se encuentra la entrada tiene una perturbación de 1.25 cm luego se amortigua, además el nivel del segundo y tercer tanque sufre una perturbación de 0.4 y 0.15 cm respectivamente.

Debido a que existe un retardo de tiempo en cada tanque no se producen las perturbaciones en forma simultánea, como se muestra en el Gráfico N° 44.

Cuando el sistema tiene una perturbación escalón de 10 cm durante un tiempo de 10 min en el tanque de reservorio con una constante de integración de 1, se observa que el nivel donde se encuentra la entrada tiene una perturbación de 0.3 cm y luego se amortigua, mientras que el nivel del segundo tanque sufre una pequeña perturbación de 0.05 cm, luego se estabiliza y el nivel del tercer tanque se mantiene estabilizado, como se muestra en el Gráfico N° 45.

A partir de estas pruebas donde se aumentó la constante de integración de 0.05 a 1 se ratifica lo que se había escrito anteriormente sobre que al aumentarse la constante de integración se aumentan las oscilaciones de las respuestas del sistema de control y se disminuyen las variaciones máximas.

Cuando el sistema tiene una perturbación rampa T durante un tiempo de 10 min en el tanque de reservorio con una constante de integración de 0.05 cm se observa que el nivel donde se encuentra la entrada sufre una perturbación de 0.30 cm y luego se amortigua hasta 0.1 Cm, mientras que el nivel del segundo y tercer tanque sufren una perturbación de 0.12 y 0.065 cm respectivamente, como se muestra en el Gráfico N° 46.

Cuando el sistema tiene una perturbación rampa T durante un tiempo de 10 min en el tanque de reservorio con una constante de integración de 1, se observa que el nivel donde se encuentra la entrada sufre una perturbación de 0.02 cm y luego se amortigua hasta 0.01 cm, mientras que los niveles del segundo y tercer tanque sufren una pequeña perturbación de 0.005 y 0.0025 cm respectivamente como

se muestra en el Gráfico N° 47.

De estas pruebas realizadas con entrada rampa T también obtenemos que al aumentar la constante de integración se aumentaron las oscilaciones y se disminuyen las variaciones de los niveles cuando se producen las perturbaciones.

Relacionando cada uno de los casos presentados en este tipo de control se obtiene una reducción de las perturbaciones y un incremento de las oscilaciones del sistema con respecto al nivel de estado estable al aumentar la constante de integración.

4.- El sistema de Ciclo Cerrado con el Control Derivativo-Proporcional.-

Este tipo de control se lo analiza por medio del modelo digital, para lo cual se varía la constante de proporcionalidad K_P y la constante K , teniendo la entrada en el primer tanque, considerando las resistencias, las áreas y los niveles del prototipo.

Cuando el sistema tiene una perturbación de vaciado y llenado (70-22 cm) en el tanque de reservorio

con una constante K de 0.1 y una constante de proporcionalidad K_p de 0.5, se observa cuando ocurre el vaciado el nivel donde se encuentra la entrada tiene una perturbación de 1.35 cm, mientras que el nivel del segundo y tercer tanque sufre una perturbación de 0.75 y 0.5 cm respectivamente.

A continuación observamos que en el llenado, el nivel del primer tanque corrige la perturbación hasta 0.6 cm, mientras que el nivel del segundo tanque también corrige la perturbación hasta 0.5 cm, luego se mantiene constante a igual que el nivel del tercer tanque, como se muestra en el Gráfico N° 48. De lo cual observamos que los niveles no llegan a su nivel de estado estable debido a la manera como el control derivativo funciona con la velocidad del error. El control realiza la rectificación a la perturbación desde el momento en que se produce la perturbación de llenado. Además como el control derivativo que se analizó es un amortiguador, lo cual nos produce en el control un retraso de tiempo, esto implica que la respuesta no sea instantánea, también tenemos que la constante de proporcionalidad nos produce un determinado error de estado estable en el punto don-

de se produce la perturbación.

Cuando el sistema tiene una perturbación de vaciado y llenado (70-22 cm) en el tanque de reservorio con una constante K de 0.01 y una constante de proporcionalidad K_p de 0.197, se observa cuando ocurre el vaciado, el nivel donde se encuentran la entrada tiene una perturbación de 1.95 cm, mientras que el nivel del segundo y tercer tanque sufren una perturbación de 1.1 y 0.8 cm respectivamente.

A continuación observamos que en el llenado, el nivel del primer tanque corrige la perturbación alrededor del nivel de operación, mientras que el nivel del segundo y tercer tanque también se corrigen sin llegar a estabilizarse, como se muestra en el Gráfico N° 49. En este caso tenemos que al disminuir la constante de proporcionalidad, el error ha aumentado. En el momento que se produce la perturbación de llenado el nivel donde se encuentra la entrada si llega al nivel de operación del sistemas, mientras que los niveles de los otros tanques no llegan a normalizarse. Además la constante de retraso de tiempo también se ha disminuido, lo que permite que los niveles del siste-

ma lleguen a su estado estable.

Para realizar un mejor estudio de la respuesta de este tipo de control sobre el sistema se realizaron pruebas con entradas escalón y rampa en las cuales se varían la constante de retraso y la constante de proporcionalidad.

Cuando el sistema tiene una perturbación escalón de 10 cm durante un tiempo de 2.5 min con una constante K de 0.01 y una constante de proporcionalidad K_p de 0.197, se observa que el nivel donde se encuentra la entrada varía hasta otro nivel superior y luego se mantiene constante con un error de estado estable de 0.42 cm, el cual es alcanzado en el tiempo de 1.61 min, mientras que el nivel del segundo tanque tiene una perturbación de 0.1 cm en el tiempo de 2.5 min y el nivel del tercer tanque sufre una pequeña perturbación, como se muestra en el Gráfico N° 50.

Cuando el sistema tiene una perturbación escalón de 10 cm durante un tiempo de 2.5 min con una constante K de 0.01 y una constante de proporcionalidad K_p de 0.5, se observa que el nivel donde

se encuentra la entrada varía hasta otro nivel superior y luego se mantiene constante con un error de estado estable de 0.175 cm, el cual es alcanzado en un tiempo de 0.42 min, mientras que el nivel del segundo tanque tiene una perturbación de 0.05 cm en el tiempo de 2.5 min, y el nivel del tercer tanque sufre una pequeña perturbación, como se muestra en el Gráfico N° 51. Como en este caso se ha aumentado la constante de proporcionalidad, manteniendo constante el retraso de tiempo, se observa que el error de estado estable ha disminuido y que el tiempo para alcanzar este error también se ha disminuido. Esto es debido a que el error de estado estable es inversamente proporcional a la ganancia K_p .

Cuando el sistema tiene una perturbación escalón de 10 cm durante un tiempo de 2.5 min con una constante K de 0.6 y una constante de proporcionalidad K_p de 0.5, se observa que el nivel donde se encuentra la entrada se incrementa hasta una perturbación de 0.35 cm en el tiempo de 2.5 min, mientras que el nivel del segundo tanque tiene una perturbación de 0.075 cm en el tiempo de 2.5 min y el nivel del tercer tanque sufre una pequeña per -

turbación, como se muestra en el Gráfico N° 52. Como en esta prueba se mantuvo constante la ganancia K_p y se aumentó la constante del retraso de tiempo, el nivel donde se encuentra la entrada varía exponencialmente y no se logra estabilizarlo en el tiempo analizado, es decir, que debido al aumento del retraso de tiempo el sistema se hizo inestable.

Cuando el sistema tiene una perturbación rampa $4T$ durante un tiempo de 2.5 min con una constante K de 0.01 y una constante de proporcionalidad K_p de 0.197, se observa que el nivel donde se encuentra la entrada se incrementa hasta una perturbación de 0.315 cm en el tiempo de 2.5 min, mientras que el nivel del segundo tanque tiene una perturbación de 0.05 cm y el nivel del tercer tanque sufre una pequeña perturbación, como se muestra en el Gráfico N° 53.

Cuando el sistema tiene una perturbación rampa $4T$ durante un tiempo de 2.5 min con una constante K de 0.01 y una constante de proporcionalidad K_p de 0.5, se observa que el nivel donde se encuentra la entrada se incrementa hasta una perturbación de 0.07 cm, mientras que el nivel del segundo tanque

sufre una pequeña perturbación y el nivel del tercer tanque se mantiene constante, como se muestra en el Gráfico N° 54. De estas pruebas realizadas con entradas rampa donde se aumentó la constante de proporcionalidad y manteniéndose la misma constante de retraso, se observa que se disminuyen las variaciones de los niveles con respecto al nivel de operación, debido a que las variaciones son inversamente proporcional a la ganancia de proporcionalidad.

Relacionando cada uno de los casos presentados en este tipo de control se obtiene una reducción de las perturbaciones del sistema con respecto al nivel de estado estable cuando se aumenta la constante de proporcionalidad (K_p), además se obtiene para valores pequeños de la constante de retardo (K) una mayor rapidez de estabilización del sistema.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Se ha considerado en esta tesis el sistema de control de nivel de tres tanques colocados en serie, lo cual es un modelo simplificado de algunos sistemas industriales. Se ha hecho la simulación tanto teórica como experimental de este sistema y se han obtenido los respectivos resultados, los que luego de ser analizados y comparados entre si, nos permiten llegar a las siguientes conclusiones:

- 1.- Es posible simular un proceso industrial usando un modelo de computadora digital y analizar su comportamiento manteniéndose dentro de los rangos de un sistema lineal. Aunque los sistemas reales son no-lineales, la aproximación lineal permite caracterizar las diferentes componentes usando ecuaciones lineales, las cuales al ser consideradas en conjunto permiten caracterizar al sistema completo y predecir su comportamiento. Aunque la respuesta del sistema real será un poco diferente a la calculada por el modelo matemático, las diferencias son solamente cuantitativas pero no cualitativas. Los resultados son suficientemente precisos para ser útiles,

y confiables para no conducir a conclusiones erróneas sobre el comportamiento real del sistema.

- 2.- La selección del tipo de control a ser utilizado (Proporcional, Derivativo, Integral, u otros) tiene importancia pues afecta tanto la respuesta transiente como la de estado estable del sistema. Además, debe ser diseñado el lazo de control de tal manera que la sensibilidad a perturbaciones externas sea minimizada.

En condiciones de operación transiente, el controlador proporcional responde bien si se seleccionan adecuadamente los valores de las ganancias, para que el sistema se estabilice rápidamente y se obtenga un pequeño error de estado estable. A pesar de que el control integral elimina el error de estado estable, puede producir inestabilidad si se reduce demasiado el tiempo integral. Es generalmente más fácil obtener un mejor comportamiento transiente con el control proporcional que con el integral. Sin embargo, si se combinan ambas formas de control adecuadamente es posible obtener un buen comportamiento del sistema y eliminar el error de estado estable.

Para el caso del sistema de control derivativo-propor-

cional (modificado) se debe utilizar valores pequeños de la constante de retardo (K) para que el sistema se estabilice rápidamente. Cabe indicar que con este tipo de control se obtiene un incremento del error de estado estable con respecto al control proporcional debido a que el elemento de control proporcional se encuentra directamente aplicado a la derivada del error, mientras que el elemento derivador produce un determinado retardo de tiempo.

- 3.- Para un mejor control de sistema debe utilizarse el control en uno de los tanques extremos cuando se tiene perturbaciones en la entrada, debido a que el nivel en estos tanques se estabiliza rápidamente y solo sufre una pequeña perturbación debido al retraso de tiempo que existe para transmitirse la perturbación entre los tanques. Mientras que el nivel del segundo tanque es perturbado en mayor grado.

Cuando las perturbaciones externas son directamente en los niveles de los tanques, debe utilizarse el control en el tanque intermedio debido a que entonces el nivel de este tanque se estabiliza rápidamente sin perturbar mayormente los niveles de los otros dos tanques.

4.- Referente a la controlabilidad y observabilidad del sistema podemos decir lo siguiente basándonos para ello en los criterios expuestos en el Capítulo I y aplicándolos a la ecuación de estado diagonalizado del sistema (Ecuación N° 78). Esta ecuación se la expresó en términos de los valores numéricos de los diferentes parámetros del sistema y para el caso general de entrada en los 3 tanques, aparece en la Pág. N° 114.

En esta tesis se consideró una sola entrada a la vez, ya sea en el primero, segundo o tercer tanque. Para estos casos, las ecuaciones de estado diagonalizadas correspondientes son:

Para entrada en el primer tanque

$$\begin{bmatrix} \dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_2 \\ \dot{Y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2850 \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & -3.5748 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & -9.5999 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.51478 \times 10^{-3} \\ 0.77717 \times 10^{-3} \\ 0.25739 \times 10^{-3} \end{bmatrix} [Q_1]$$

De la observación de esta ecuación matricial o de la

aplicación de los criterios de controlabilidad y observabilidad, se puede concluir que el sistema es completamente controlable y observable en este caso. Es decir, que se puede ver que Q_1 puede controlar a cada una de las salidas del sistema Y_1, Y_2, Y_3 . Además, como se define (Ec. N° 80) que las salidas del sistema son las variables de estado, entonces el sistema es observable siempre.

De igual manera se puede demostrar la controlabilidad y observabilidad cuando las entradas son en el segundo y tercer tanque.

Hay que notar que si las entradas fueran simultáneas en los tres tanques no habría controlabilidad y observabilidad completa del sistema.

En base a las conclusiones a las que hemos llegado anteriormente, podemos dar las siguientes recomendaciones en el caso de que se decida realizar otro trabajo de tesis continuando lo aquí desarrollado, o que se desee implementar algún sistema de control para un proceso industrial en serie, similar al aquí considerado.

El tipo de control a ser seleccionado debe ser aquel que

combine todas las formas básicas de control (proporcional, integral, derivativo) lo cual nos permita eliminar el error de estado estable y aumentar la rapidez de respuesta del sistema.

En el caso de realizar un proceso industrial en serie similar al analizado debe utilizarse dos llaves de interconexión en paralelo entre cada tanque para mantener siempre alimentados a los otros tanques, mientras en las salidas deben utilizar llaves para variar las aberturas y obtener el caudal necesario para el abastecimiento al proceso controlado. Además, para un mejor control del sistema debe utilizarse una servoválvula y así poder acoplarle los tres tipos de formas de control básico.

Cabe indicar que si se realiza un proceso similar al analizado en esta tesis recomendaría utilizar el control en el tanque intermedio donde se obtendrían mejores condiciones de controlabilidad y observabilidad de los niveles de los tanques, según se ha mostrado en esta tesis.

A P E N D I C E S

APENDICE A

PROGRAMA DE COMPUTADORA

Como paso previo para obtener el programa de computadora se ha realizado un diagrama de flujo, el cual se analiza a continuación:

Diagrama de Flujo.-

El diagrama de flujo que representa el programa principal comienza preguntando la función de entrada del sistema que es introducida en un determinado espacio del programa, luego pregunta las áreas y las resistencias para generar los coeficientes de la matriz características, posteriormente pregunta el tipo de sistema: si es de ciclo abierto, proporcional, integral o derivativo, los cuales se dirigen a la sub-rutina 1000, 1100, 1300 y 1400 respectivamente para cada paso. Debido a que algunos valores de la matriz característica siempre son constantes, entonces son almacenados inicialmente en el programa.

A continuación pregunta el tiempo máximo y determina el

incremento según el tipo de gráfico que se utiliza. Seguidamente calcula el máximo valor absoluto del producto de los coeficientes de la matriz característica por el incremento de tiempo y con éste determina el valor de "p" para verificar la relación*:

$$\frac{1}{p!} (nq)^p e^{nq} \leq 0.001$$

Con estos valores determinados se obtienen los valores de la matriz P y Q. Luego pregunta las condiciones iniciales del sistema con respecto al estado estable, además se considera $H(4) = 0$ debido a que analiza un sistema de tres niveles. Luego grafica los ejes de las curvas y pregunta el máximo valor de la escala que se desea obtener en el gráfico.

Finalmente, grafica las tres respuestas de salida del sistema. En este instante el programa pregunta si continúa analizando el sistema para lo cual se dirige a la sub-rutina 2800 que posteriormente detallamos. Después de este paso el programa pregunta si necesita datos, para lo cual utiliza un lazo que permite imprimir en la pantalla un dato de los niveles y el tiempo, cada cinco valores.

* Ver ref. (9)

El diagrama de flujo que representa a la sub-rutina 1000 permite analizar el ciclo abierto: tanto la entrada en el primer tanque como en el segundo tanque.

Este diagrama comienza preguntando la constante KH , luego determina el valor de las constantes: D , $D1$, $D2$ y $D3$ para obtener los correspondientes coeficientes de la matriz característica que faltan. Posteriormente pregunta el programa si la entrada es en el primer o segundo tanque, para determinar los coeficientes de la matriz "B" para cada paso respectivamente.

Una vez conocidos todos los valores se dirige a la sub-rutina 2100, la cual es analizada posteriormente.

El diagrama de flujo que representa a la sub-rutina 1100 permite analizar el sistema con el control proporcional.

Este diagrama comienza preguntando los valores de las constantes KH , KY y KP , luego pregunta si el control es en el primero o segundo tanque para determinar los valores de las constantes: D , $D1$, $D2$, $D3$, y $D4$ para obtener los coeficientes restantes de la matriz característica y los coeficientes de la matriz "B". Posteriormente se dirige a la sub-rutina 2100 cuando la entrada es en el primer tanque,

o a la sub-rutina 2150 cuando la entrada es en el segundo tanque, las que serán analizadas posteriormente.

El diagrama de flujo que representa la sub-rutina 1300 permite analizar el sistema con el control integral.

Este diagrama comienza preguntando las constantes K_H , K_Y y K_I , luego determina el valor de las constantes: D , D_1 , D_2 , D_3 , D_4 , D_5 y D_6 para obtener los valores de los coeficientes de la matriz característica y de la matriz "B". Posteriormente se dirige a la sub-rutina 2100, la cual es analizada más adelante.

El diagrama de flujo que representa a la sub-rutina 1400 permite analizar el sistema con el control derivativo-proporcional.

Este diagrama comienza preguntando los valores de las constantes K_H , K_Y , K , K_D ; luego representa los valores de los coeficientes de la matriz característica que son constantes. Posteriormente determina los valores de las constantes: D , D_1 , D_2 , D_3 , D_4 , D_5 , D_6 , D_7 , D_8 y D_9 para obtener los coeficientes restantes de la matriz característica y los coeficientes de la matriz "B", luego este diagrama se dirige a la sub-rutina 2100, la cual es analizada poste-

riormente.

El diagrama de flujo que representa a la sub-rutina 1500 permite determinar los valores de la matriz P y Q para un valor de "M" mayor que 1.

El diagrama de flujo que representa la sub-rutina 2100 permite determinar los coeficientes de la matriz que relaciona las variables de los niveles con las variables de estado. Además, permite determinar los coeficientes de la matriz que relaciona las condiciones iniciales de estado con las condiciones iniciales de los niveles, cuando la entrada es en el primer tanque.

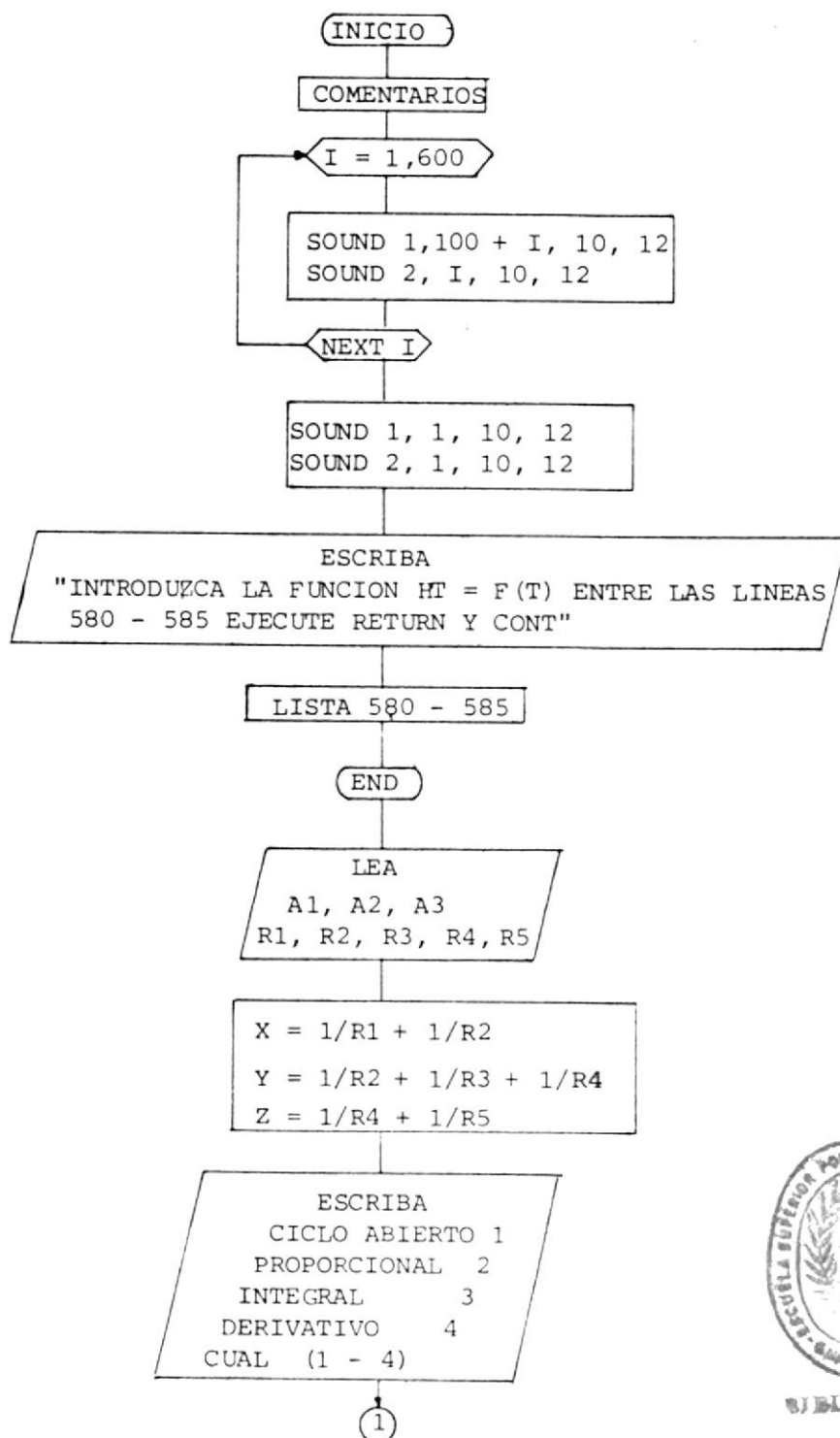
El diagrama de flujo que representa la sub-rutina 2150 permite determinar los coeficientes de la matriz que relaciona las variables de los niveles con las variables de estado, además permite determinar los coeficientes de la matriz que relaciona las condiciones iniciales de estado con las condiciones iniciales de los niveles, cuando la entrada es en el segundo tanque.

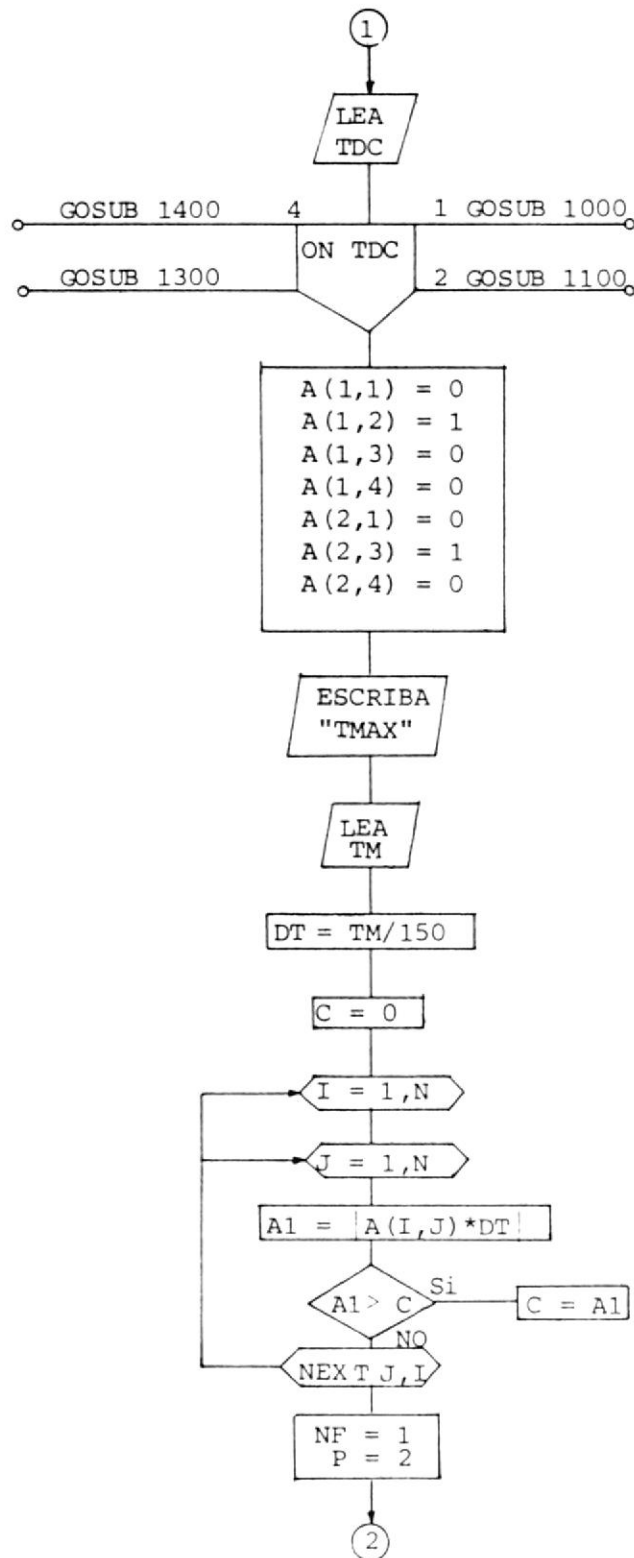
El diagrama de flujo que representa la sub-rutina 2800 comienza preguntando los valores de los niveles, luego grafica los ejes de los tanques, para observar las varia-

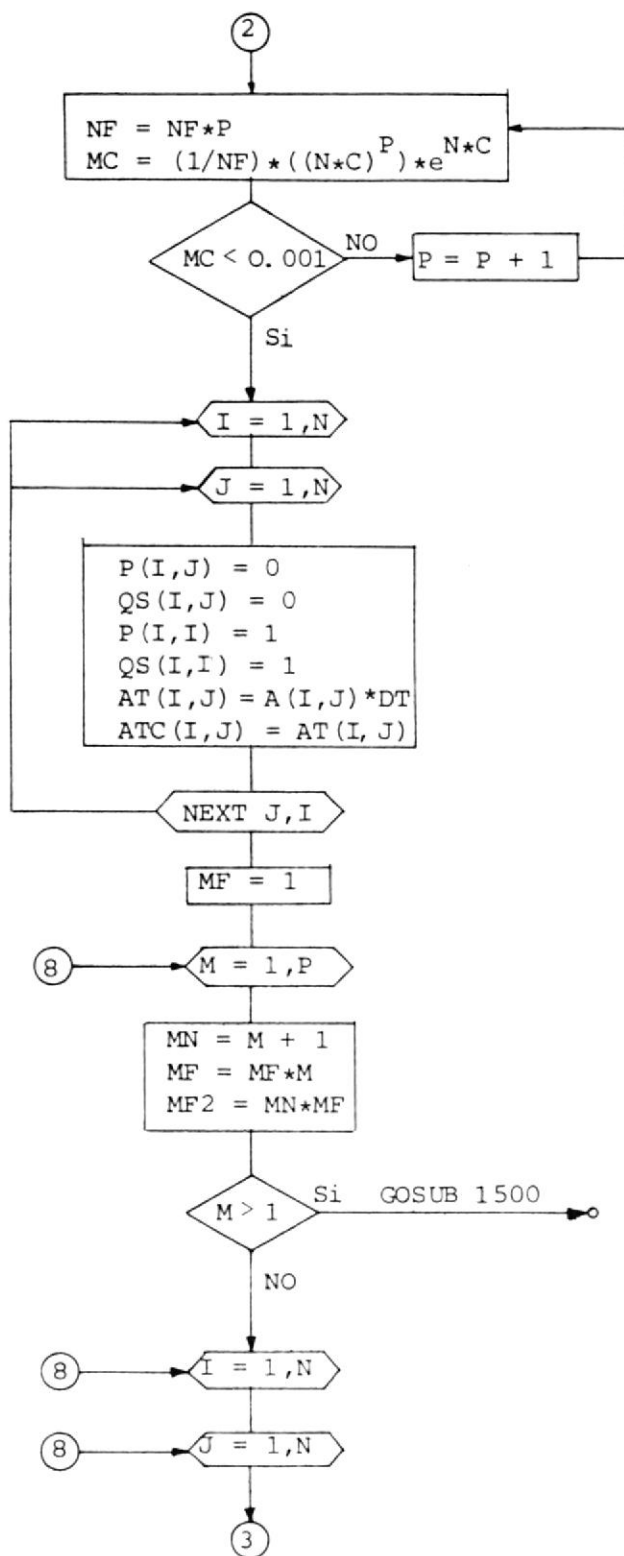
ciones de los niveles en cada tanque. Posteriormente grafica un determinado nivel de estado estable como referencia y finalmente grafica las variaciones que ocurren en cada tanque.

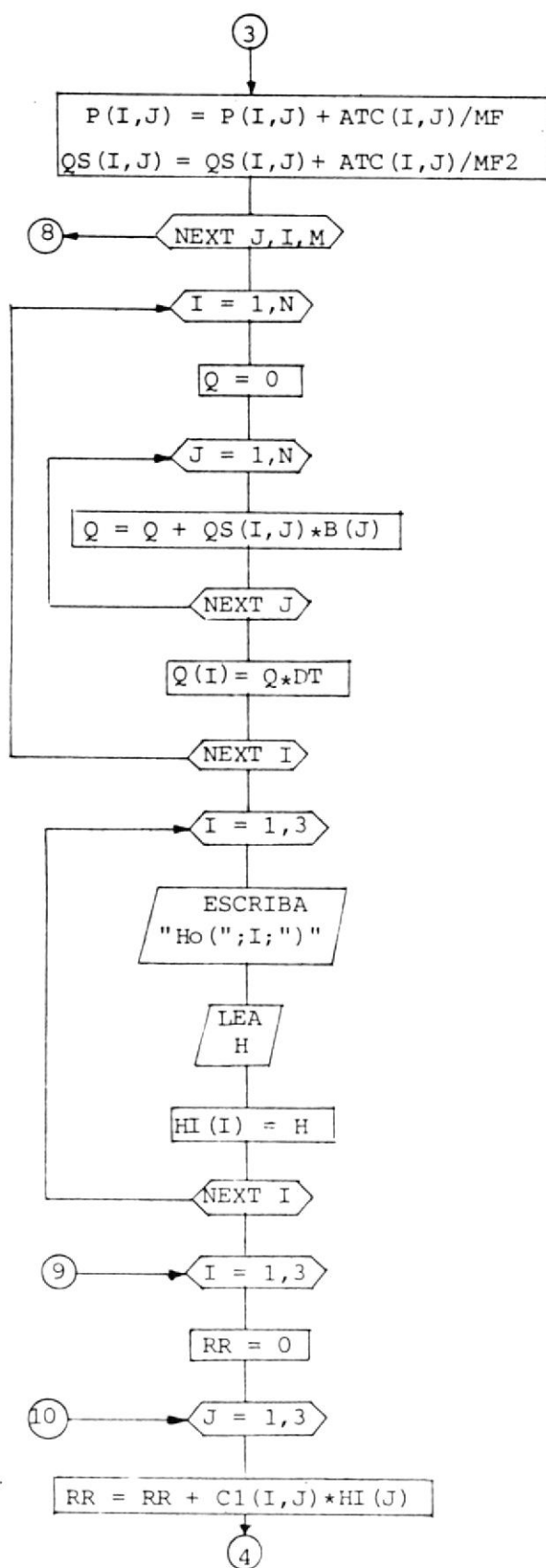
Cabe indicar que las sub-rutinas mencionadas anteriormente tienen su retorno al diagrama de flujo del programa principal.

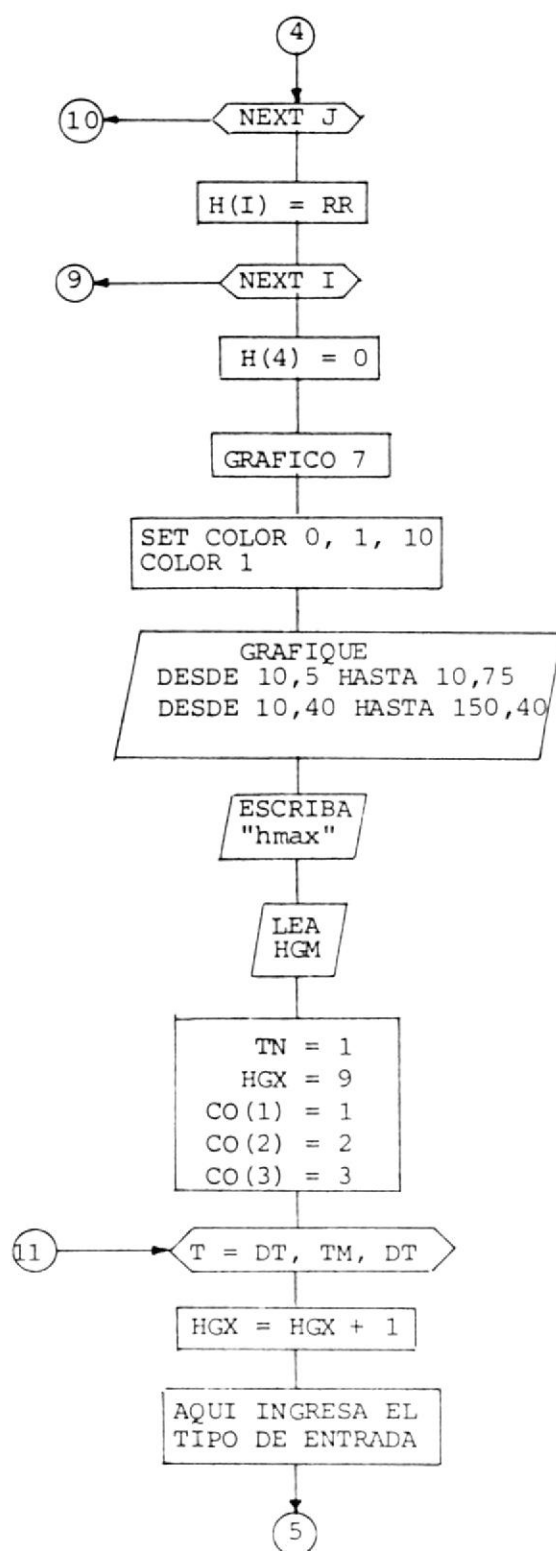
En las páginas siguientes se muestra el diagrama de flujo en forma esquemática para una más clara comprensión del funcionamiento del programa de simulación:

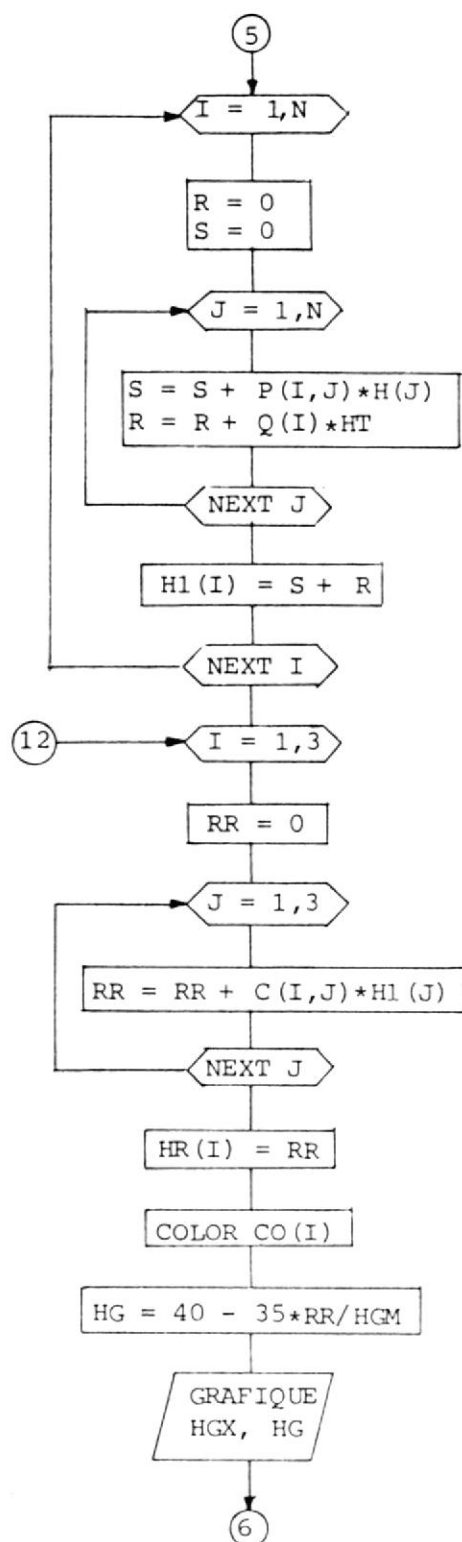
PROGRAMA PRINCIPAL

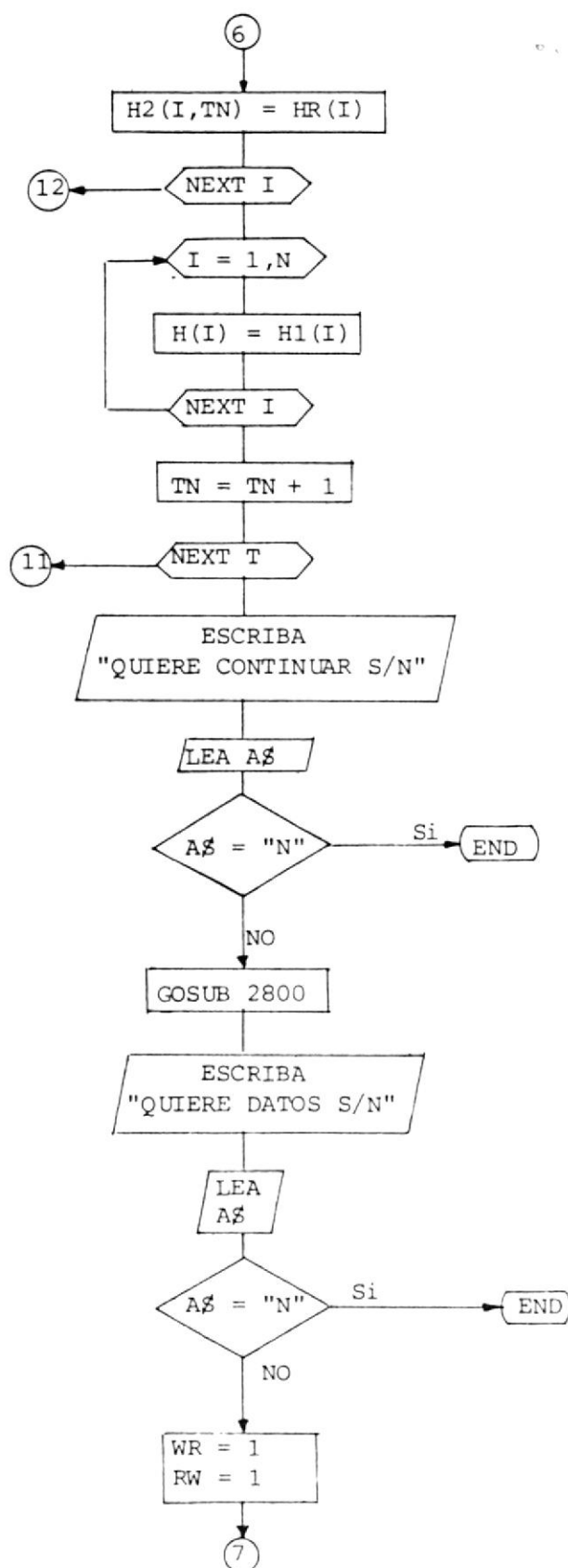


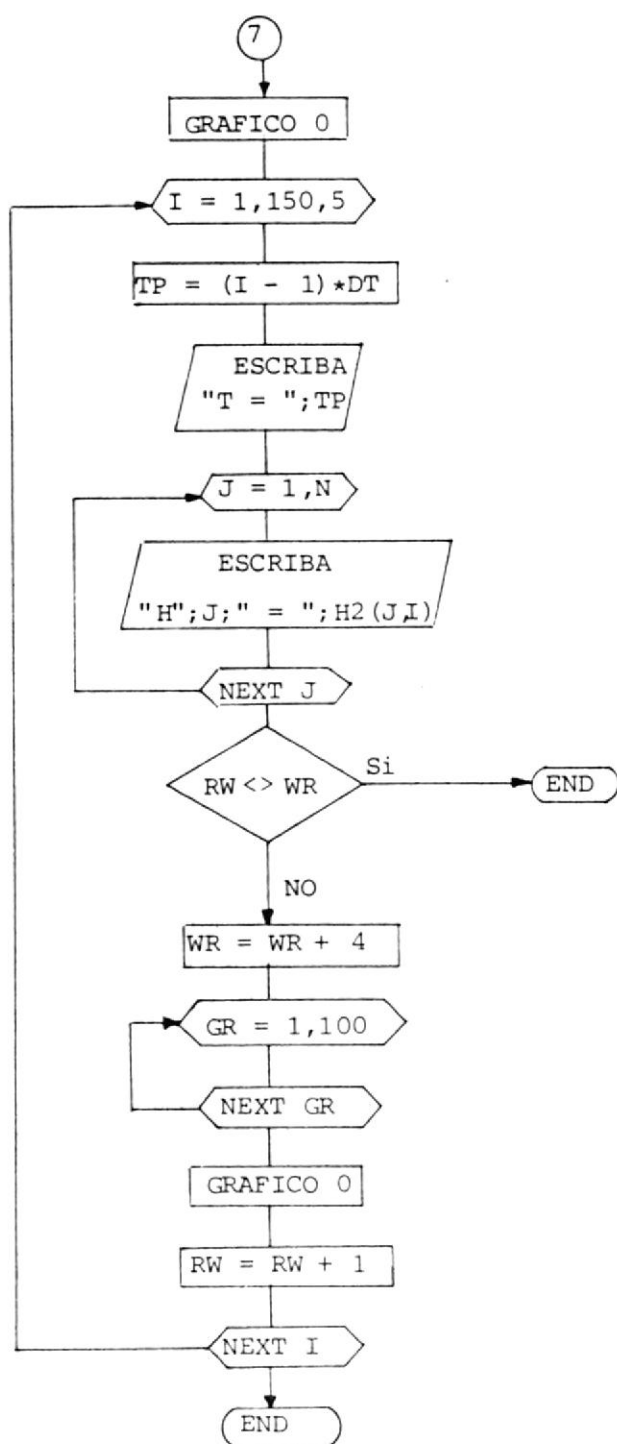




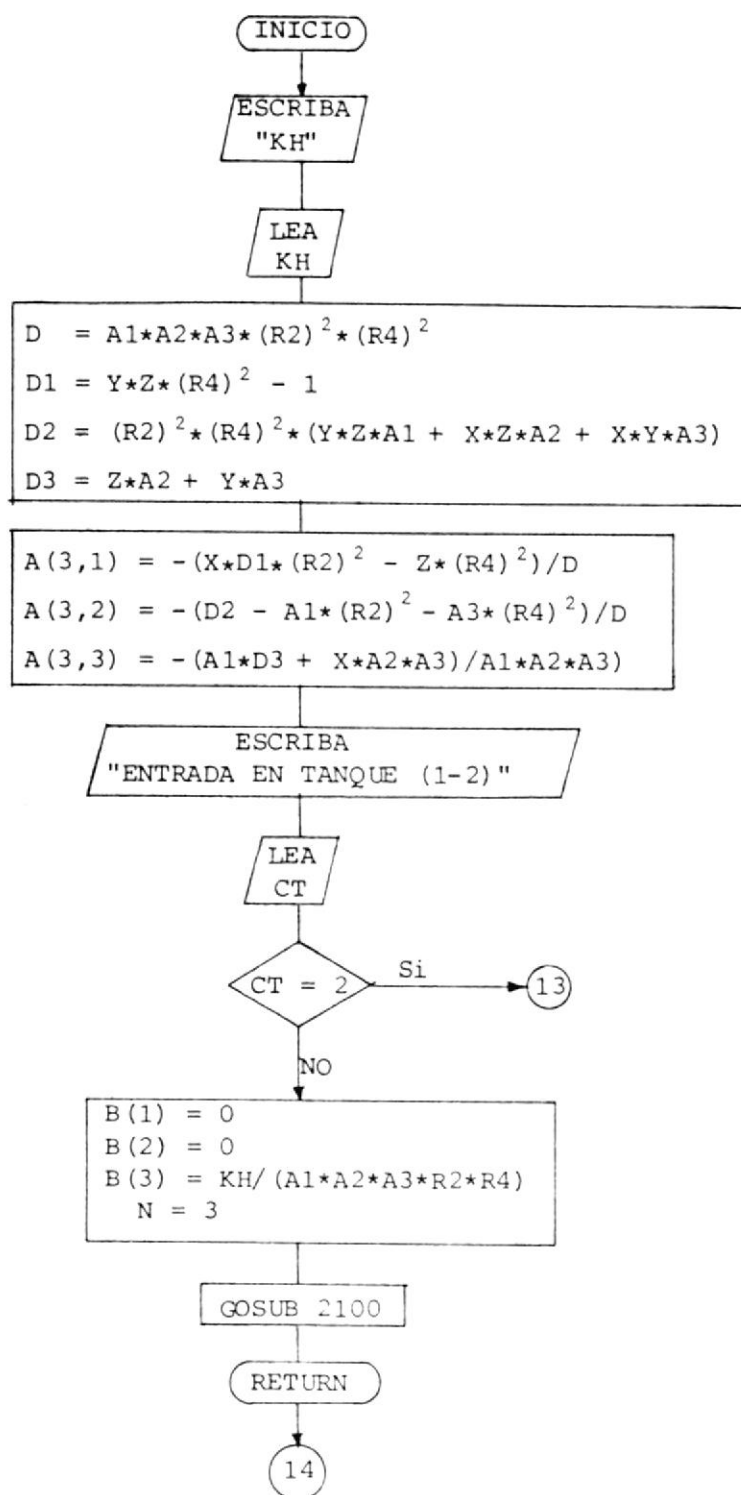


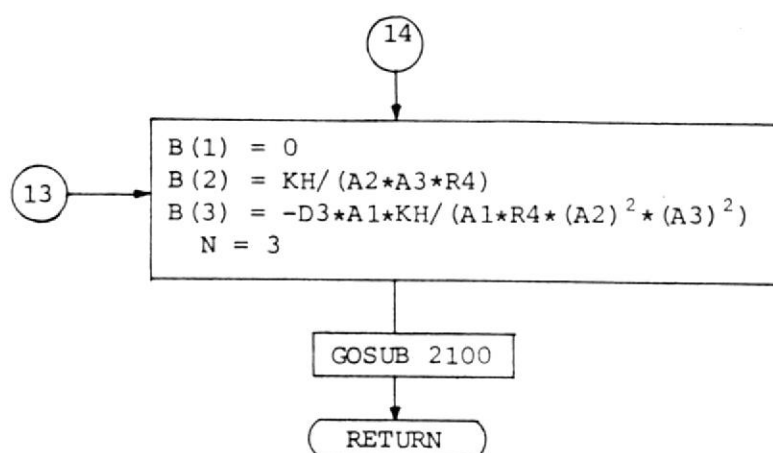




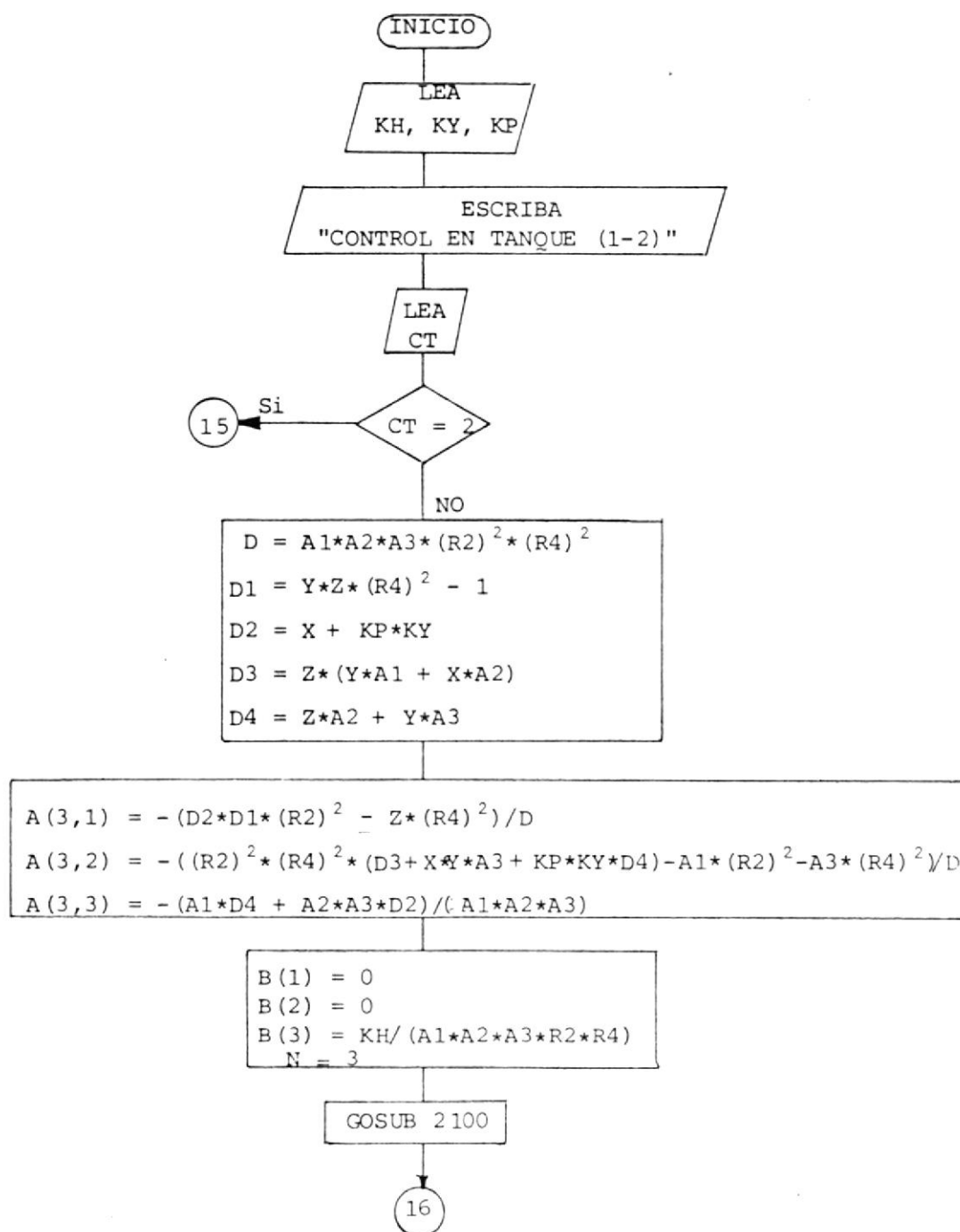


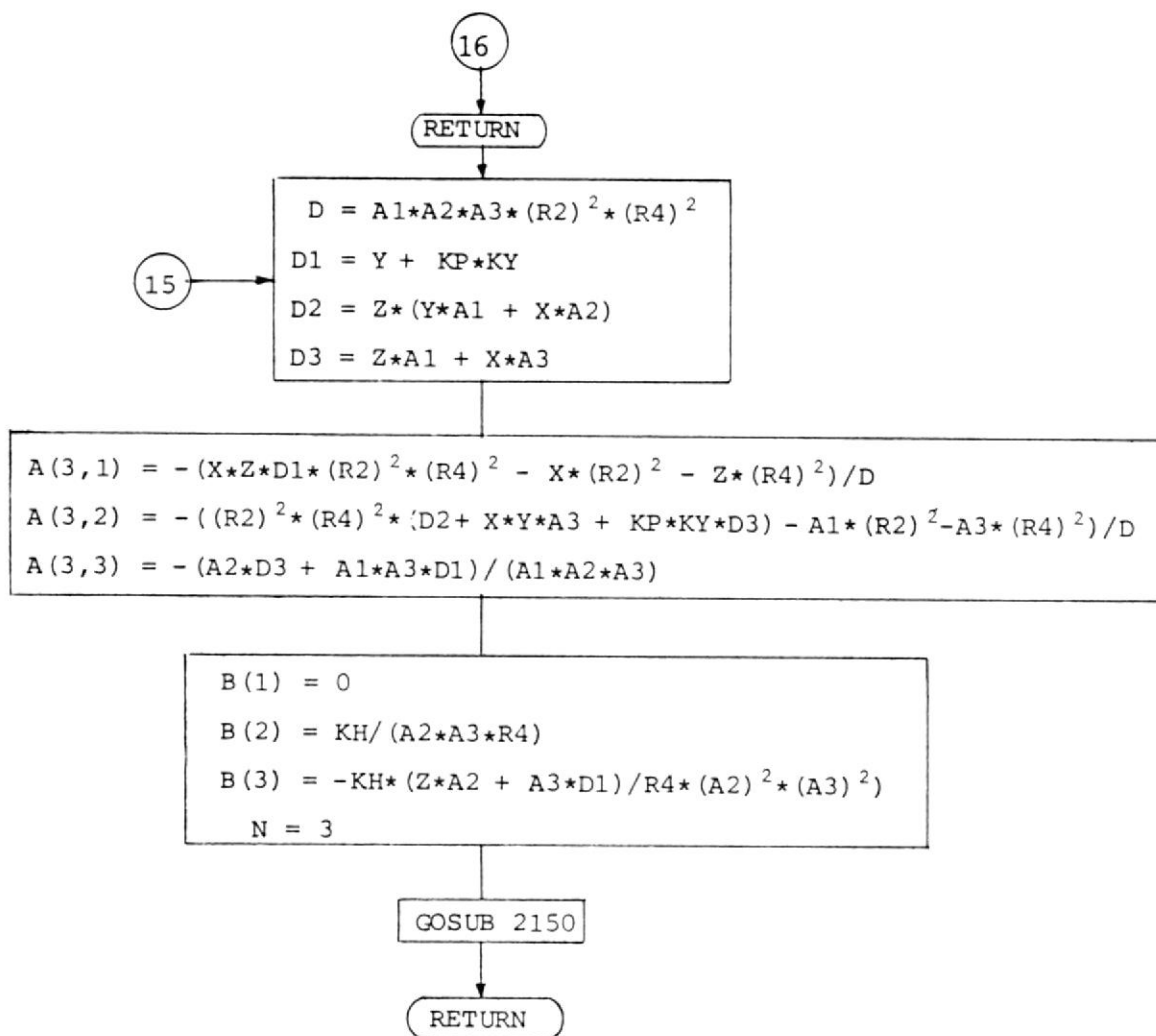
SUB-RUTINA 1000



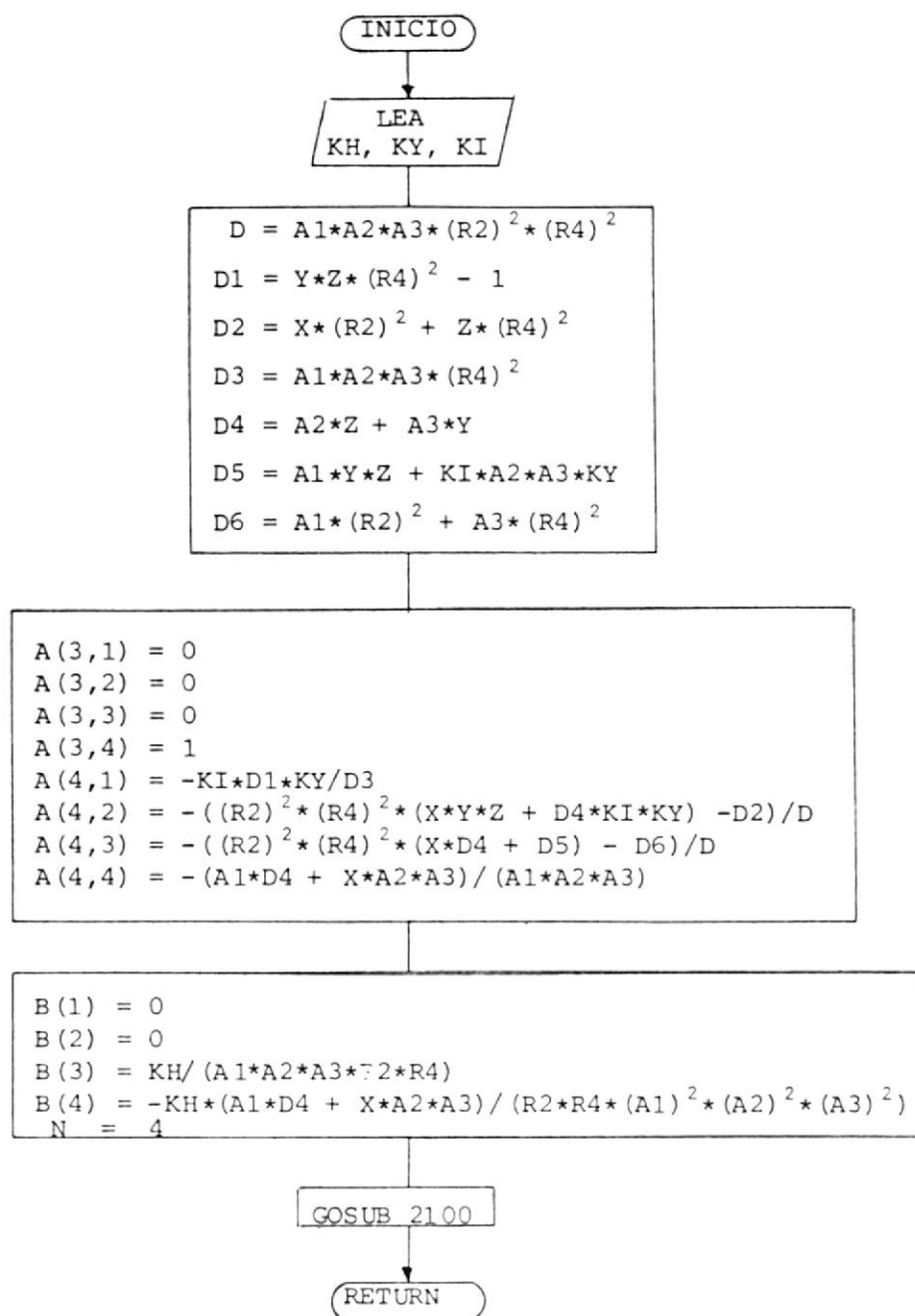


SUB-RUTINA 1100

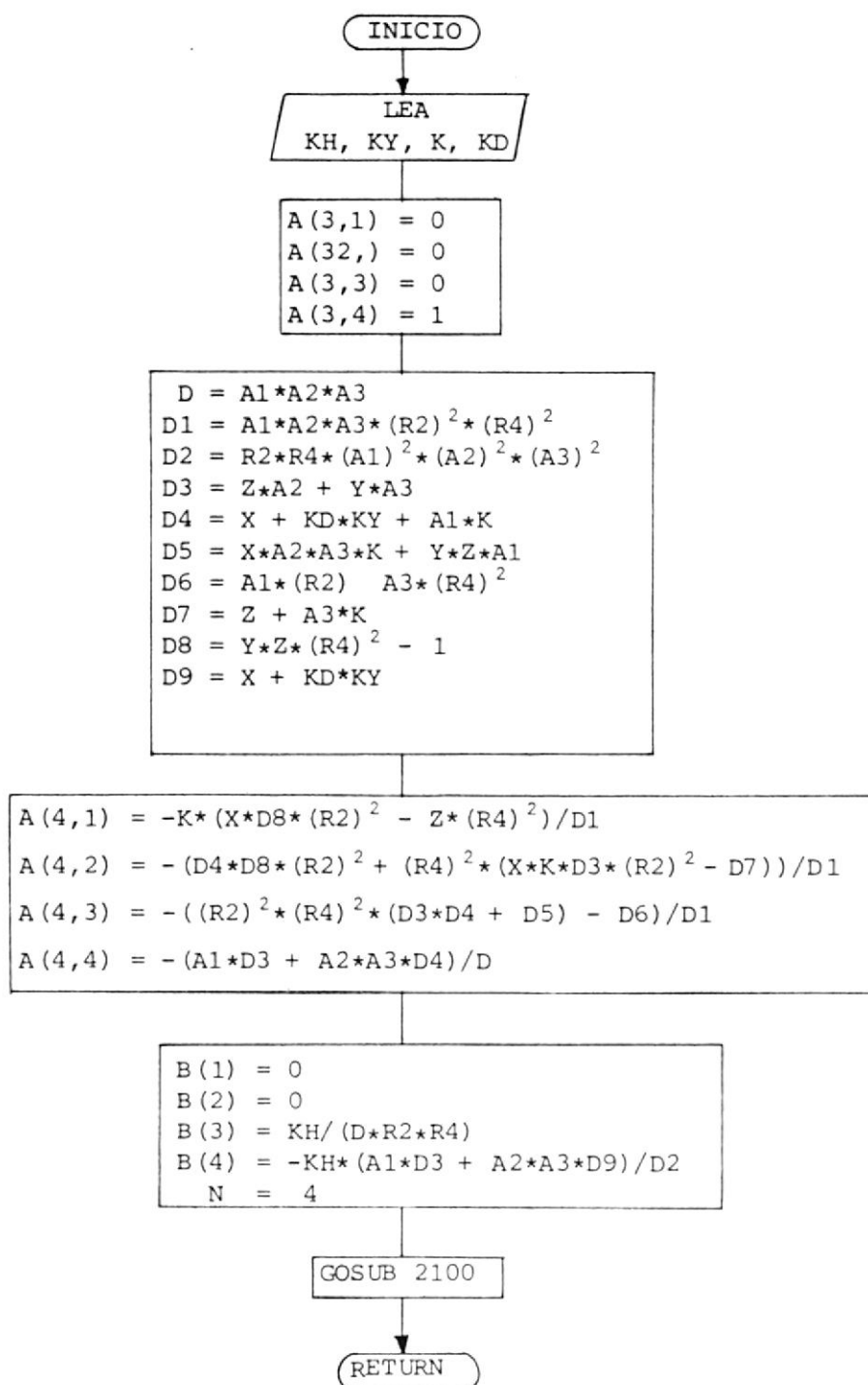


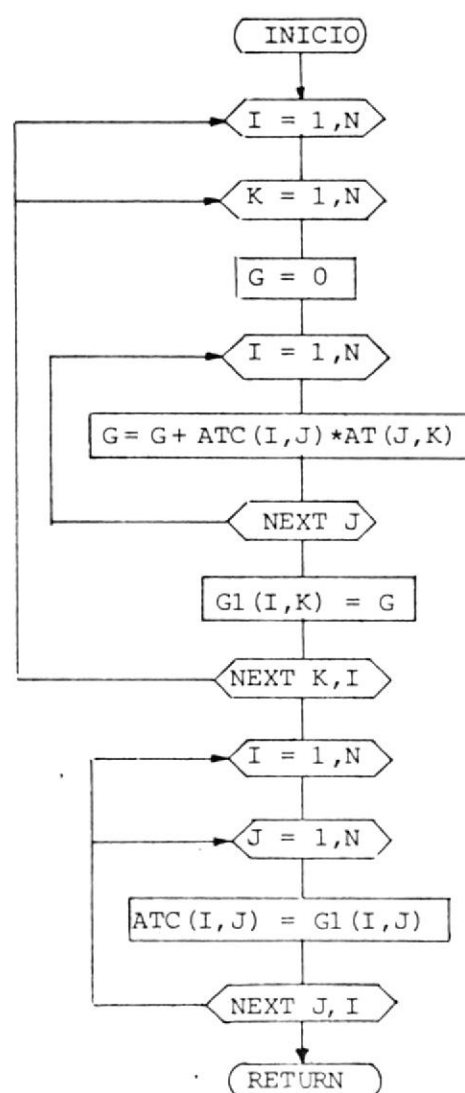


SUB-RUTINA 1300

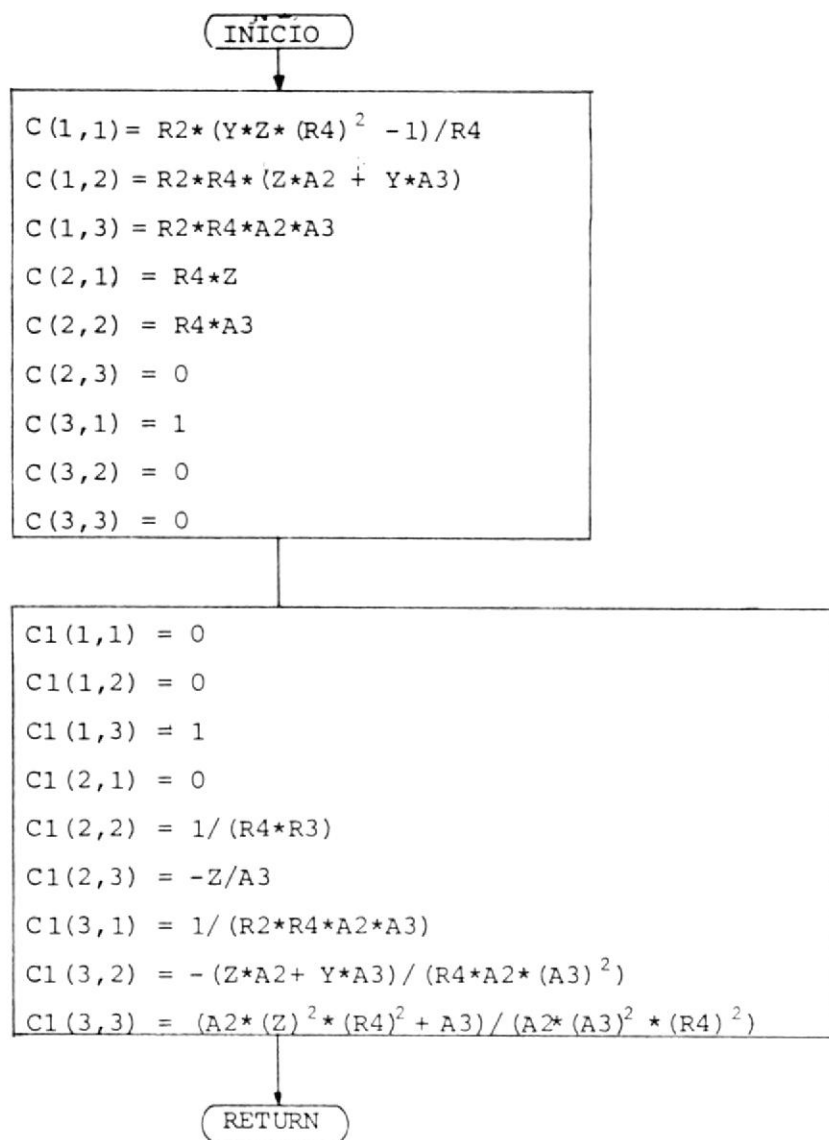


SUB-RUTINA 1400



SUB-RUTINA 1500

SUB-ROUTINA 2100



SUB-RUTINA 2150

INICIO

```

C(1,1) = (Z*D1*R2*(R4)2 - R2)/R4
C(1,2) = A3*R2*R4*D1 + A2*Z*R2*R4
C(1,3) = R2*R4*A2*A3
C(2,1) = R4*Z
C(2,2) = R4*A3
C(2,3) = 0
C(3,1) = 1
C(3,2) = 0
C(3,3) = 0

```

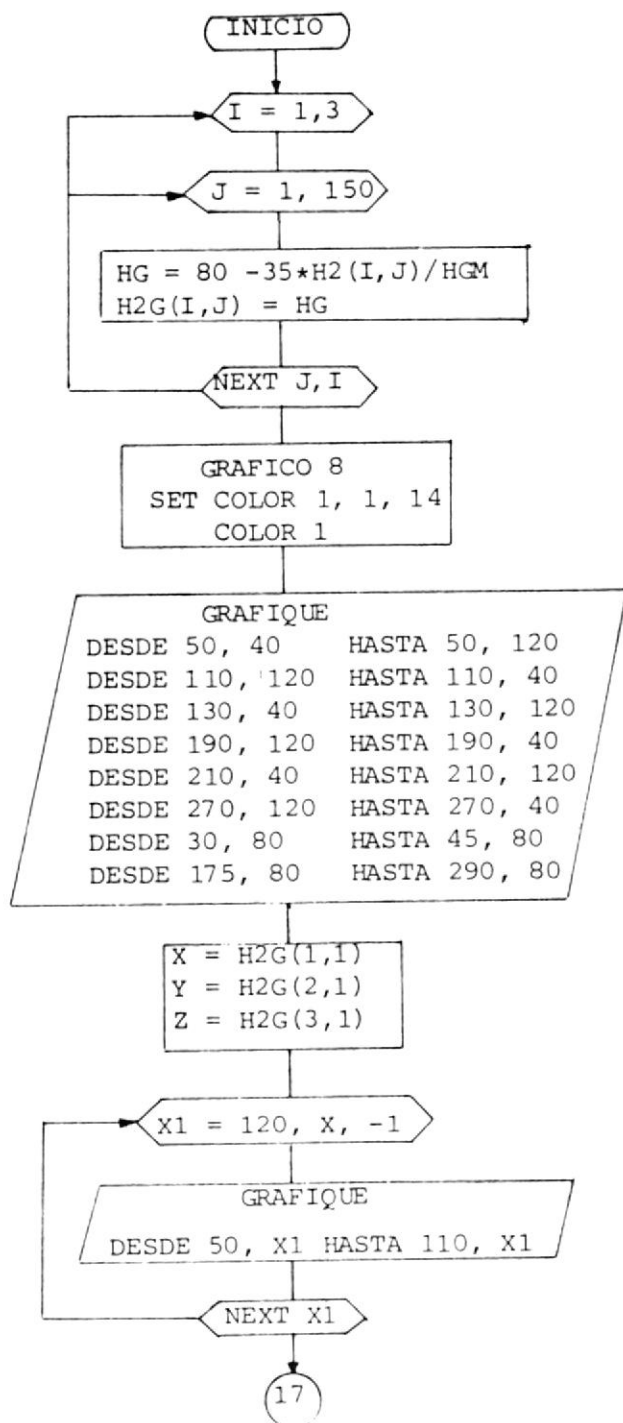
```

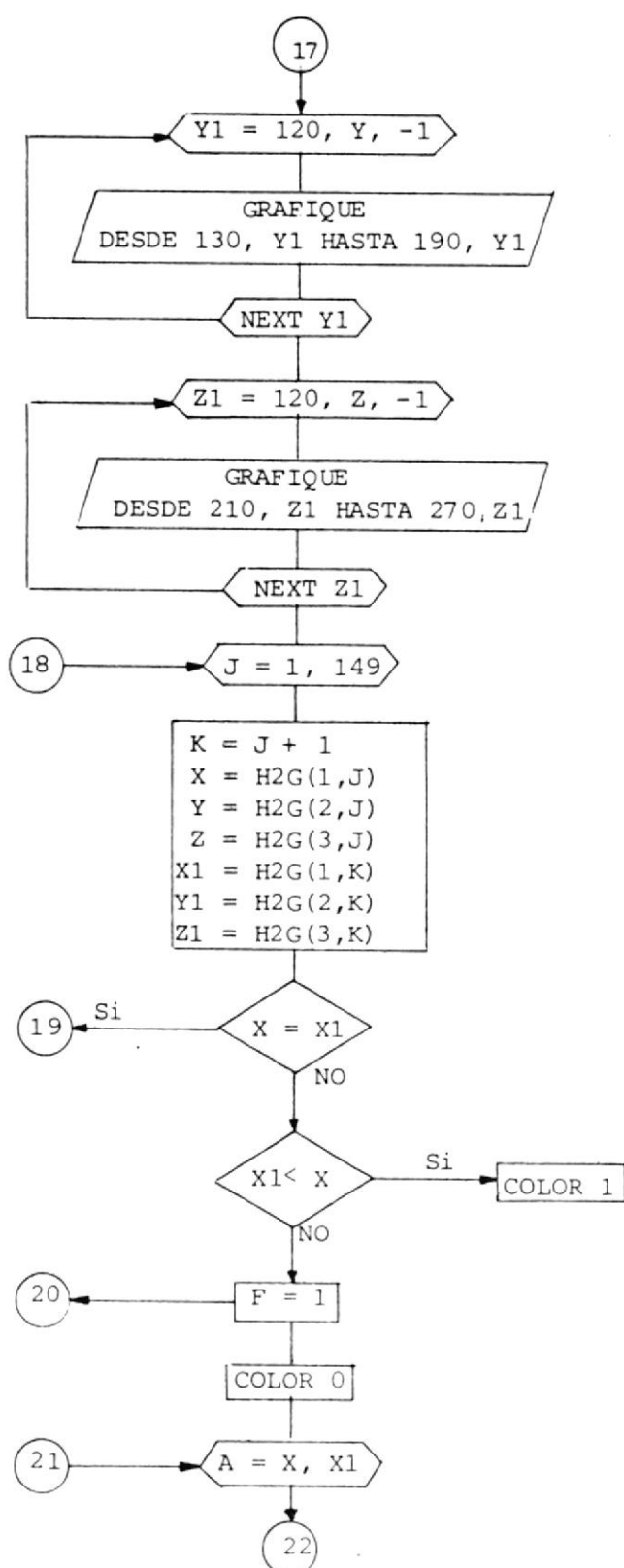
C1(1,1) = 0
C1(1,2) = 0
C1(1,3) = 1
C1(2,1) = 0
C1(2,2) = 1/(A3*R4)
C1(2,3) = -Z/A3
C1(3,1) = 1/(A2*A3*R2*R4)
C1(3,2) = -(A3*D1 + Z*A2)/R4*A2*(A3)2
C1(3,3) = (A2*(Z)2*(R4)2 + A3)/(A2*(A3)2*(R4)2

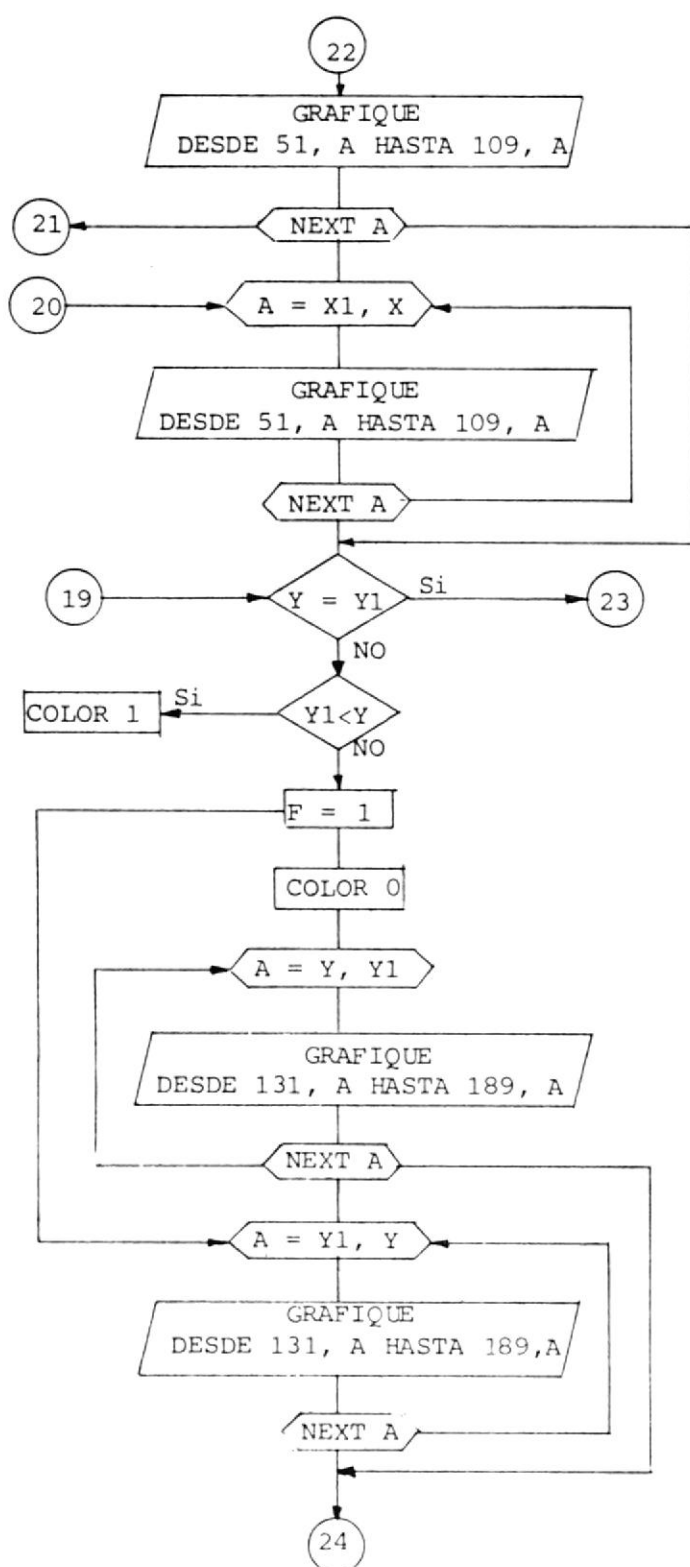
```

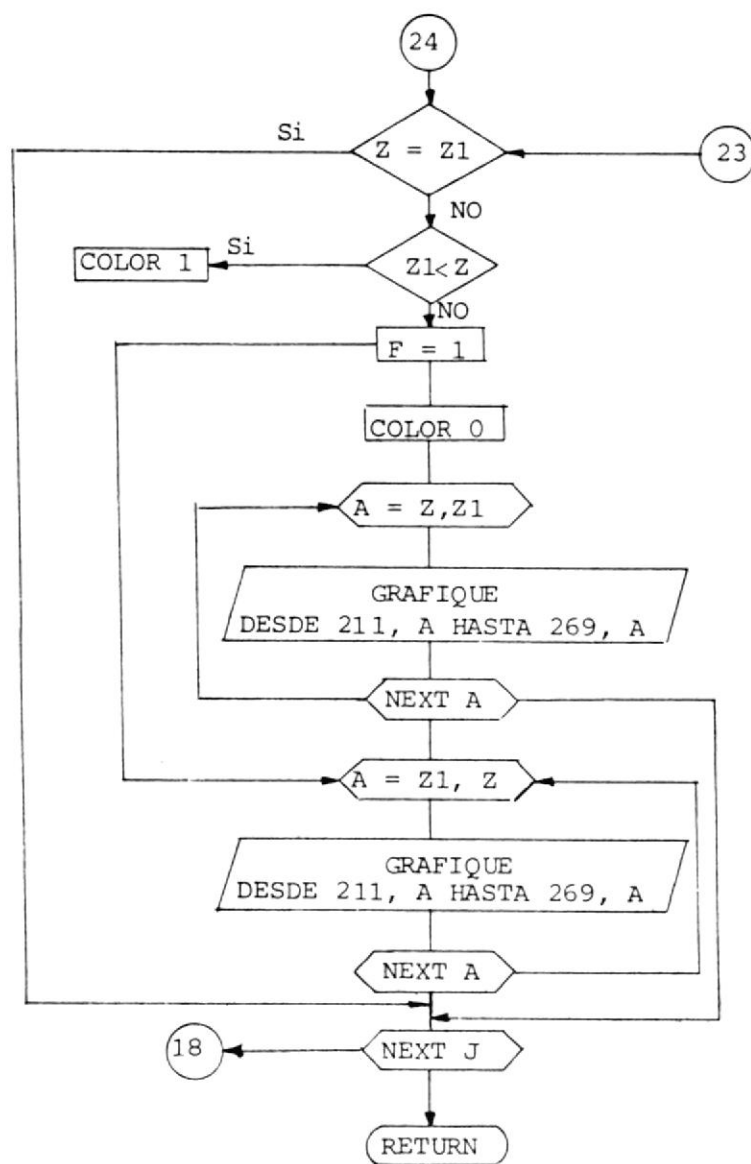
RETURN

SUB-RUTINA 2800









Programa de Computadora

Este programa es denominado "DESAST" el cual nos permite simular un sistema de control de nivel de tres tanques en serie, estando escrito en el lenguaje Basic y digitado en una computadora ATARI 800.

El desarrollo de este programa se muestra a continuación obtenido directamente de la impresora de la computadora:

```

1 GRAPHICS 0:CLR
2 DIM A$(1),Q$(3),H2G(4,150)
3 DIM B(4),Q(4),HI(4),HR(4),H(4),H1(4),G1(4,4),H2(4,150)
4 DIM A(4,4),AT(4,4),F(4,4),QS(4,4),ATC(1,4),C(4,4),C1(4,4)
5 GRAPHICS 2+16:2 46:2 46:2 46
10 ? 46:" ESTE PROGRAMA "
11 ? 46:" PERMITE SIMULAR UN "
12 ? 46:" SISTEMA DE CONTROL "
13 ? 46:" DE NIVEL DE TRES "
14 ? 46:" TANQUES EN SERIE "
20 FOR I=1 TO 600: SOUND 1,100*I,10,12: SOUND 2,I,10,12: NEXT I: SOUND 1,1,10,12: SOUND 2,1,10,12
100 ? "INTRODUZCA LA FUNCION HT=F(T) ENTRE LAS LINEAS 500-585 EJECUTE RETURN Y CONTINUAR": LIST 500,585: END
105 ? "A1:" : INPUT A1: ? "A2:" : INPUT A2: ? "A3:" : INPUT A3: ? "R1:" : INPUT R1: ? "R2:" : INPUT R2: ? "R3:" : INPUT R3
110 ? "R4:" : INPUT R4: ? "R5:" : INPUT R5
114 X=1/R1+1/R2+1/R3+1/R4+1/R5
115 ? "CICLO ABIERTO 1." : ? "PROPORCIONAL -2." : ? "INTEGRAL -3." : ? "DERIVATIVO 4."
120 ? "REAL (1-4)": INPUT TDC: ON TDC GOSUB 1000,1100,1300,1400
130 A(1,1)=0: A(1,2)=1: A(1,3)=0: A(1,4)=0: A(2,1)=0: A(2,2)=0: A(2,3)=1: A(2,4)=0
140 ? "MAX": INPUT TH: DT=TH/100
200 C=0: FOR I=1 TO N: FOR J=1 TO N
210 AT=ATC(I,J)+C: DI=1: IF A(I,J) THEN G=AT
212 NEXT J: NEXT I
215 H=H1+G
220 IF H>H2G(4,150) THEN G=H2G(4,150)-H: H=H1+G: IF H<0 THEN G=0: H=H1+G
230 F=F+H: GO TO 220
240 FOR I=1 TO N: FOR J=1 TO N: H1(1,J)=Q(1,J)+H1(1,J)-H1(1,J)*DT
263 AT(I,J)=A(I,J)*DT
264 ATC(I,J)=AT(I,J)
266 NEXT J
270 NEXT I
275 H=H1
280 FOR H=1 TO F
285 H=H+1
290 H=H+1
295 H=H+1
300 IF H=1 THEN GOSUB 1000
310 FOR I=1 TO N
320 FOR J=1 TO N
330 F(I,J)=F(I,J)+ATC(I,J)/H
340 QS(1,J)=Q(1,J)+H1(1,J)/H
350 NEXT J

```

```

310 FOR J=1 TO N
320 FOR U=1 TO M
330 F(I,J)=P(I,J)+ATC(I,J)/MF
340 QS(I,J)=QS(I,J)+ATC(I,J)/MF2
350 NEXT J
360 NEXT I
370 NEXT M
400 FOR I=1 TO N
430 Q=0
440 FOR J=1 TO N
450 Q=Q+QS(I,J)*F(J)
460 NEXT J
470 Q(I)=Q*DT
480 NEXT I
520 FOR I=1 TO 3
530 PRINT "Ho("";I); ";
540 INPUT H
550 HI(I)=H
560 NEXT I
561 FOR I=1 TO 3:RR=R:FOR J=1 TO 3:RR=RR+C1(I,J)*HI(J):NEXT J:H(I)=RR:NEXT I:H(I)
)=0
562 GRAPHICS 7:SETCOLOR 0,1,10:COLOR 1:PLOT 10,5:DRAWTO 10,75:PLOT 10,40:DRAWTO
150,40
565 ? "HELLO";:INPUT H
565 TN=1:HGX=9:CO(1)=1:CO(2)=2:CO(3)=3
570 FOR T=DT TO TM STEP DT:HGX=HGx+1
580 HT=10
590 FOR I=1 TO N
600 R=0
610 S=0
620 FOR J=1 TO N
630 S=S+F(I,J)*H(J)
640 R=R+Q(I)*HT
650 NEXT J
660 HI(I)=S+R
680 NEXT I
681 FOR I=1 TO 3:RR=R:FOR J=1 TO 3:RR=RR+C1(I,J)*HI(J):NEXT J:HR(I)=RR
692 COLOR CO(I):HG=40+35*RR/HGX:PLOT HG,HG:IN2(I,TN)=HR(I):NEXT I
690 FOR I=1 TO N
700 HI(I)=HI(I):NEXT I:TN=TN+1:NEXT I
805 ? "QUIERE CONTINUAR S/N?":INPUT A:IF A$="N" THEN END
804 GOTO 2800
807 ? "QUIERE DATOS S/N?":INPUT A:IF A$="N" THEN END
810 NEXT

```

```

805 ? "QUIERE CONTINUAR S/N?":INPUT A$:IF A$="N" THEN END
806 GOSUB 2000
807 ? "QUIERE DATOS S/N?":INPUT A$:IF A$="N" THEN END
810 WR=1
811 RH=1:GRAPHICS 0:FOR I=1 TO 150 STEP 5:TP=(I-1)*DT:PRINT "T=";TP:FOR J=1 TO N
12 "H";J;"=";H2(J,I):NEXT J:
812 IF RH=WR THEN 814
813 WR=WR+4:FOR GR=1 TO 100:NEXT GR:GRAPHICS 0
814 RH=RH+1:NEXT I
815 END
1000 ? "KH?":INPUT KH
1002 D=A1*A2*A3*R2^2*R4^2:D1=Y*Z*R4^2-1:D2=R2^2*R4^2*(Y*Z*A1+X*Z*A2+X*Y*A3):D3=Z
*A2*Y*A3
1005 A(3,1)=-(X*D1*R2^2-Z*R4^2)/D:A(3,2)=-(D2-A1*R2^2-A3*R4^2)/D:A(3,3)=-(A1*D3+
X*A2*A3)/(A1*A2*A3)
1006 ? "ENTRADA EN TANQUE (1-2)":INPUT CT
1007 IF CT=2 THEN 1020
1010 B(1)=0:B(2)=0:B(3)=KH/(A1*A2*A3*R2*R4):N=3:GOSUB 2100
1015 RETURN
1020 B(1)=0:B(2)=KH/(A2*A3*R4):B(3)=D3*A1*KH/(A1*R4*A2^2*A3^2):N=3:GOSUB 2100
1025 RETURN
1100 ? "KH?":INPUT KH:"KY?":INPUT KY:"KP?":INPUT KP:"CONTROL EN TANQUE (1-
2)":INPUT CT
1102 IF CT=2 THEN 1170
1104 D=A1*A2*A3*R2^2*R4^2:D1=Y*Z*R4^2-1:D2=X*KP*KY:D3=Z*(Y*A1+X*A2):D4=Z*A2+X*A3
1105 A(3,1)=-(D2*D1*R2^2-Z*K4^2)/D:A(3,2)=-(R2^2*R4^2*(D3+X*Y*A3+KX*KY*D4)-A1*R2
^2-A3*R4^2)/D
1110 A(3,3)=-(A1*D4+A2*A3*D2)/(A1*A2*A3)
1115 B(1)=0:B(2)=0:B(3)=KH/(A1*A2*A3*R2*R4):N=3:GOSUB 2100
1120 RETURN
1150 D=A1*A2*A3*R2^2*R4^2:D1=Y*KP*KY:D2=Z*(Y*A1+X*A2):D3=Z*A1+X*A3
1160 A(3,1)=-(Y*Z*D1*R2^2*R4^2-X*R2^2-Z*R4^2)/D:A(3,2)=-(R2^2*R4^2*(D2+X*Y*A3+KX
*KY*D3)-A1*R2^2-A3*R4^2)/D
1170 A(3,3)=-(A2*D3+A1*A3*D1)/(A1*A2*A3)
1180 B(1)=0:B(2)=KH/(A2*A3*R4):B(3)=KH*(Z*A2+A3*D1)/(R4*A2^2*A3^2):N=3:GOSUB 21
50
1200 RETURN
1300 ? "KH?":INPUT KH:"KY?":INPUT KY:"KI?":INPUT KI
1305 D=A1*A2*A3*R2^2*R4^2:D1=Y*Z*R4^2-1:D2=X*KI^2+Z*KI^2:D3=A1*A2*A3*R4^2
1310 D4=A2*Z+A3*Y:D5=A1*Y*Z+K1*A2*A3*KY:D6=A1*R2^2+A3*R4^2
1315 A(3,1)=0:A(3,2)=0:A(3,3)=0:A(3,4)=1
1320 H=1:TP=0:FOR I=1 TO 100 STEP 10:TP=TP+DT:PRINT "T=";TP:FOR J=1 TO N
1330 A(3,1)=-(R2^2*R4^2*(X*D4+D5)-D6)/D:A(3,2)=-(A1*D4+X*A2*A3)/(A1*A2*A3)
1340 B(1)=0:B(2)=0:B(3)=KH/(A1*A2*A3*R2*R4):B(4)=KH*(A1*D4+X*A2*A3)/(R2*R4*A1^2
*A2^2*A3^2):N=4:GOSUB 2100
1350 RETURN

```

```

1320 A(4,1)=-KI*D1*KY/D3:A(4,2)=-((R2^2*R4^2*(X*Y*Z+D4*KI*KY)-D2)/D
1330 A(4,3)=-((R2^2*R4^2*(X*D4+D5)-D6)/D1:A(4,4)=-((A1*D4+X*A2*A3)/(A1*A2*A3)
1340 B(1)=0:B(2)=0:B(3)=0:B(4)=0:K1/(A1*A2*A3*D2*R4):B(4)=-K1/(A1*D4+X*A2*A3)/(R2*R4*A1^2
1350 RETURN
1400 ? "KH":INPUT KH? "KY":INPUT KY? "K":INPUT K? "KD":INPUT KD
1410 A(3,1)=0:A(3,2)=0:A(3,3)=0:A(3,4)=1
1420 D=A1*A2*A3:D1=A1*A2*A3*R2^2*R4^2:D2=R2*R4*A1^2*A2^2*A3^2:D3=Z*A2+Y*A3:D4=X+
1430 KD*KY+A1*K
1440 D5=Y*A2*A3*K+Y*Z^4:D6=A1*R2^2+A3*R4^2:D7=Z+A3*K:D8=Y*Z*R4^2-1:D9=X+KD*KY
1450 A(4,1)=-K*(X*D8*R2^2-Z*R4^2)/D1:A(4,2)=-((D4*D8*R2^2+R4^2*(X*K*D3*R2^2-D7))/
1460 D1
1470 A(4,3)=-((R2^2*R4^2*(D3*D4+D5)-D6)/D1:A(4,4)=-((A1*D3+A2*A3*D4)/D
1480 B(1)=0:B(2)=0:B(3)=KH/(D=R2*R4):B(4)=-K1/(A1*D3+A2*A3*D9)/D2:N=4:GOSUB 2100
1490 RETURN
1500 FOR I=1 TO N
1510 FOR K=1 TO N
1520 G=0
1530 FOR J=1 TO N
1540 G=G+ATC(I,J)*AT(J,K)
1550 NEXT J
1560 G1(I,K)=G
1570 NEXT K
1580 NEXT I
1590 FOR I=1 TO N
1600 FOR J=1 TO N
1610 ATC(I,J)=G1(I,J)
1620 NEXT J
1630 NEXT I
1640 RETURN
2100 C(1,1)=R2*(Y^2*R4^2-1)/R4:C(1,2)=R2*R4*(Z*A2+Y*A3):C(1,3)=R2*R4*A2*A3:C(2,1)
2110 =R4*Z16(2,2)/R4*A3
2120 C(2,3)=0:C(3,1)=1:C(3,2)=0:C(3,3)=0
2130 C1(1,1)=0:C1(1,2)=0:C1(1,3)=1:C1(2,1)=0:C1(2,2)=1/(R4*A3):C1(2,3)=-Z/A3
2140 C1(3,1)=1/(R2*R4*A2*A3):C1(3,2)=-((Z*A2+Y*A3)/(R4*A2*A3^2):C1(3,3)=(A2*D4^2*
2150 Z^2+A3)/(A2*A3^2*R4^2)
2160 RETURN
2170 C(1,1)=((Z*D1*R2^2*R4^2-R3)/R4):C(1,2)=A3*R2*R4^2*D1+A2*Z/R2*R4:C(1,3)=KY*K1*A2*A3
2180 C(2,1)=R4*Z16(2,2)+R4*A316(2,3)=0:C(3,1)=16(3,2)=0:C(3,3)=0
2190 C1(1,1)=0:C1(1,2)=0:C1(1,3)=1:C1(2,1)=0:C1(2,2)=1/(A2*R4):C1(2,3)=-Z/A3
2200 C1(3,1)=1/(A2*A3*R2*R4):C1(3,2)=-((A3*D1+Z*A2)/(R4*A2*A3^2):C1(3,3)=(A2*Z^2*
R4^2+A3)/(A2*A3^2*R4^2)

```

```

2160 C(2,1)=R4*Z:C(2,2)=R4*A3:C(2,3)=0:C(3,1)=1:C(3,2)=0:C(3,3)=0
2170 C1(1,1)=0:C1(1,2)=0:C1(1,3)=1:C1(2,1)=0:C1(2,2)=1/(A3*R4):C1(2,3)=-Z/A3
2180 C1(3,1)=1/(A2*A3*R2*R4):C1(3,2)=-(A3*A1+Z*A2)/(R4*A2*A3^2):C1(3,3)=(A2*A3^2*
R4^2+A3)/(A2*A3^2*R4^2)
2200 RETURN
2800 FOR I=1 TO 3:FOR J=1 TO 150:HG=80-35*H2(I,J)/HCM:H2G(I,J)=HG:NEXT J:NEXT I
3000 GRAPHICS 9:SETCOLOR 1,1,14:COLOR 1
3010 PLOT 50,40:DRAWTO 50,120:PLOT 110,120:DRAWTO 110,40:PLOT 130,40:DRAWTO 130,
120:PLOT 190,120:DRAWTO 190,40
3015 PLOT 210,40:DRAWTO 210,120:PLOT 270,120:DRAWTO 270,40
3017 PLOT 30,80:DRAWTO 40,80:PLOT 275,80:DRAWTO 290,80
3020 X=H2G(1,1):Y=H2G(2,1):Z=H2G(3,1)
3022 FOR X1=120 TO X STEP -1:PLOT 50,X1:DRAWTO 110,Y1:NEXT X1
3023 FOR Y1=120 TO Y STEP -1:PLOT 130,Y1:DRAWTO 190,Y1:NEXT Y1
3024 FOR Z1=120 TO Z STEP -1:PLOT 210,Z1:DRAWTO 270,Z1:NEXT Z1
3030 FOR J=1 TO 149
3035 K=J+1
3040 X=H2G(1,J):Y=H2G(2,J):Z=H2G(3,J)
3041 X1=H2G(1,K):Y1=H2G(2,K):Z1=H2G(3,K)
3045 IF X=X1 THEN GOTO 3059
3051 IF X1<X THEN COLOR 1:F=1:GOTO 3055
3054 COLOR 0:FOR A=X TO X1:PLOT 51,A:DRAWTO 109,A:NEXT A:GOTO 3059
3055 FOR A=X1 TO X:PLOT 51,A:DRAWTO 109,A:NEXT A
3059 IF Y=Y1 THEN GOTO 3069
3060 IF Y1<Y THEN COLOR 1:F=1:GOTO 3065
3064 COLOR 0:FOR A=Y TO Y1:PLOT 131,A:DRAWTO 189,A:NEXT A:GOTO 3069
3065 FOR A=Y1 TO Y:PLOT 131,A:DRAWTO 189,A:NEXT A
3069 IF Z=Z1 THEN GOTO 3075
3070 IF Z1<Z THEN COLOR 1:F=1:GOTO 3073
3074 COLOR 0:FOR A=Z TO Z1:PLOT 211,A:DRAWTO 269,A:NEXT A:GOTO 3080
3075 FOR A=Z1 TO Z:PLOT 211,A:DRAWTO 269,A:NEXT A
3080 NEXT J
3090 RETURN

```

APENDICE B

C U R V A S

Las curvas que se presentan son los resultados teóricos para los diferentes casos, los cuales fueron obtenidos en la computadora digital, para lo cual se consideraron los valores de las resistencias y áreas del modelo experimental:

$$R1 = 0.095 \text{ min/cm}^2$$

$$A1 = 647.92 \text{ cm}^2$$

$$R2 = 0.008 \text{ min/cm}^2$$

$$A2 = 647.92 \text{ cm}^2$$

$$R3 = 0.09 \text{ min/cm}^2$$

$$A3 = 647.92 \text{ cm}^2$$

$$R4 = 0.0082 \text{ min/cm}^2$$

$$R5 = 0.085 \text{ min/cm}^2$$

Para simular el comportamiento del sistema en estado estable, el nivel del tanque de reservorio variaba como se muestra en la Fig.56.

Las ecuaciones aplicables a este caso son las siguientes:

$$HT = -1.89 T \text{ (cm)}$$

$$T < 4.234 \text{ (min)}$$

$$HT = -8 + 21.45 T \text{ (cm)}$$

$$4.234 < T < 4.98 \text{ (min)}$$

$$\begin{aligned}
 HT &= 8 - 1.89 T \text{ (cm)} & 4.98 < T < 13.45 \text{ (min)} \\
 HT &= -8 + 21.45 T \text{ (cm)} & 13.45 < T < 14.20 \text{ (min)} \\
 HT &= 8 - 1.89 T \text{ (cm)} & 14.20 < T < 18.43 \text{ (min)}
 \end{aligned}$$

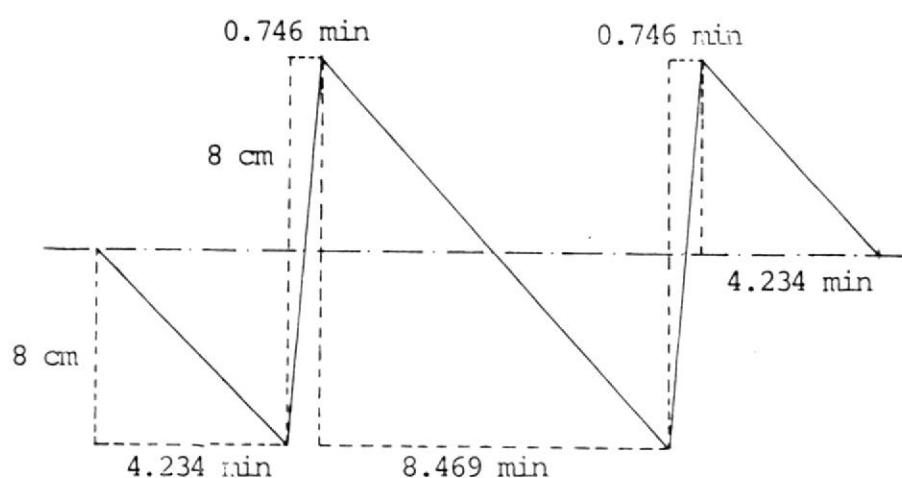


Fig. 56 .- Variación del nivel del tanque de reservorio en estado estable

Luego, al hacer la perturbación del nivel del tanque de reservorio, éste varía como se muestra en la Fig. 57

Las ecuaciones aplicables a este caso, son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 HT &= 8 - 1.89 T \text{ (cm)} & T < 8.47 \text{ (min)} \\
 HT &= -8 + 21.45 T \text{ (cm)} & 8.47 < T < 9.22 \text{ (min)} \\
 HT &= 8 - 2.04 T \text{ (cm)} & 9.22 < T < 32.7 \text{ (min)} \\
 HT &= -40 + 22.21 T \text{ (cm)} & 32.7 < T < 34.87 \text{ (min)} \\
 HT &= 8 - 1.89 T \text{ (cm)} & 34.87 < T < 43.33 \text{ (min)} \\
 HT &= -8 + 21.45 T \text{ (cm)} & 43.33 < T < 44.08 \text{ (min)}
 \end{aligned}$$

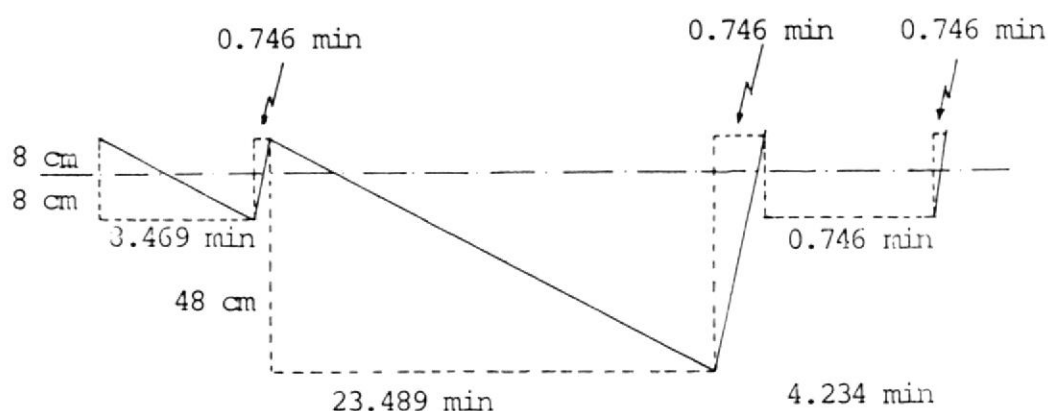


Fig. 57 .- Variación del Nivel del Tanque de reservorio cuando sufre una perturbación de vaciado y llenado (70 - 22 cm).

Para otros tipos de perturbaciones, las ecuaciones correspondientes se indican en cada caso.

Primer Caso: De ciclo abierto con entrada en el primer tanque.

a.- El Sistema en Estado Estable: Para simular este caso consideramos las siguientes ecuaciones de entrada que representan lo que ocurre en el tanque de reservorio y la constante KH que representa el caudal que circula por la válvula debido a la altura del nivel del tanque de reservorio.

$$HT = - 1.89 T \quad (\text{cm}) \quad T < 4.234 \quad (\text{min})$$

$$\begin{aligned}
 HT &= -8 + 21.45 T \quad (\text{cm}) & 4.234 < T < 4.98 \quad (\text{min}) \\
 HT &= 8 - 1.89 T \quad (\text{cm}) & 4.98 < T < 13.45 \quad (\text{min}) \\
 HT &= -8 + 21.45 T \quad (\text{cm}) & 13.45 < T < 14.20 \quad (\text{min}) \\
 HT &= 8 - 1.89 T \quad (\text{cm}) & 14.20 < T < 18.43 \quad (\text{min}) \\
 KH &= 19.164 \text{ cm}^2/\text{min}
 \end{aligned}$$

Observar el Gráfico N° 14.

b.- El sistema en estado estable con perturbación de vaciado y llenado (70 - 22 cm) en el tanque de reservorio.-

Para simular este caso, consideramos las siguientes ecuaciones de entrada que representan lo que ocurre en el tanque de reservorio y la constante KH que representa el caudal que circula por la válvula debido a la altura de nivel del tanque de reservorio

$$\begin{aligned}
 HT &= 8 - 1.89 T \quad (\text{cm}) & T < 8.47 \quad (\text{min}) \\
 HT &= -8 + 21.45 T \quad (\text{cm}) & 8.47 < T < 9.22 \quad (\text{min}) \\
 HT &= 8 - 2.04 T \quad (\text{cm}) & 9.22 < T < 32.7 \quad (\text{min}) \\
 HT &= -40 + 22.21 T \quad (\text{cm}) & 32.7 < T < 34.87 \quad (\text{min}) \\
 HT &= 8 - 1.89 T \quad (\text{cm}) & 34.87 < T < 43.33 \quad (\text{min}) \\
 HT &= -8 + 21.45 T \quad (\text{cm}) & 43.33 < T < 44.08 \quad (\text{min}) \\
 KH &= 19.164 \text{ cm}^2/\text{min}
 \end{aligned}$$

Observar el Gráfico N° 15.

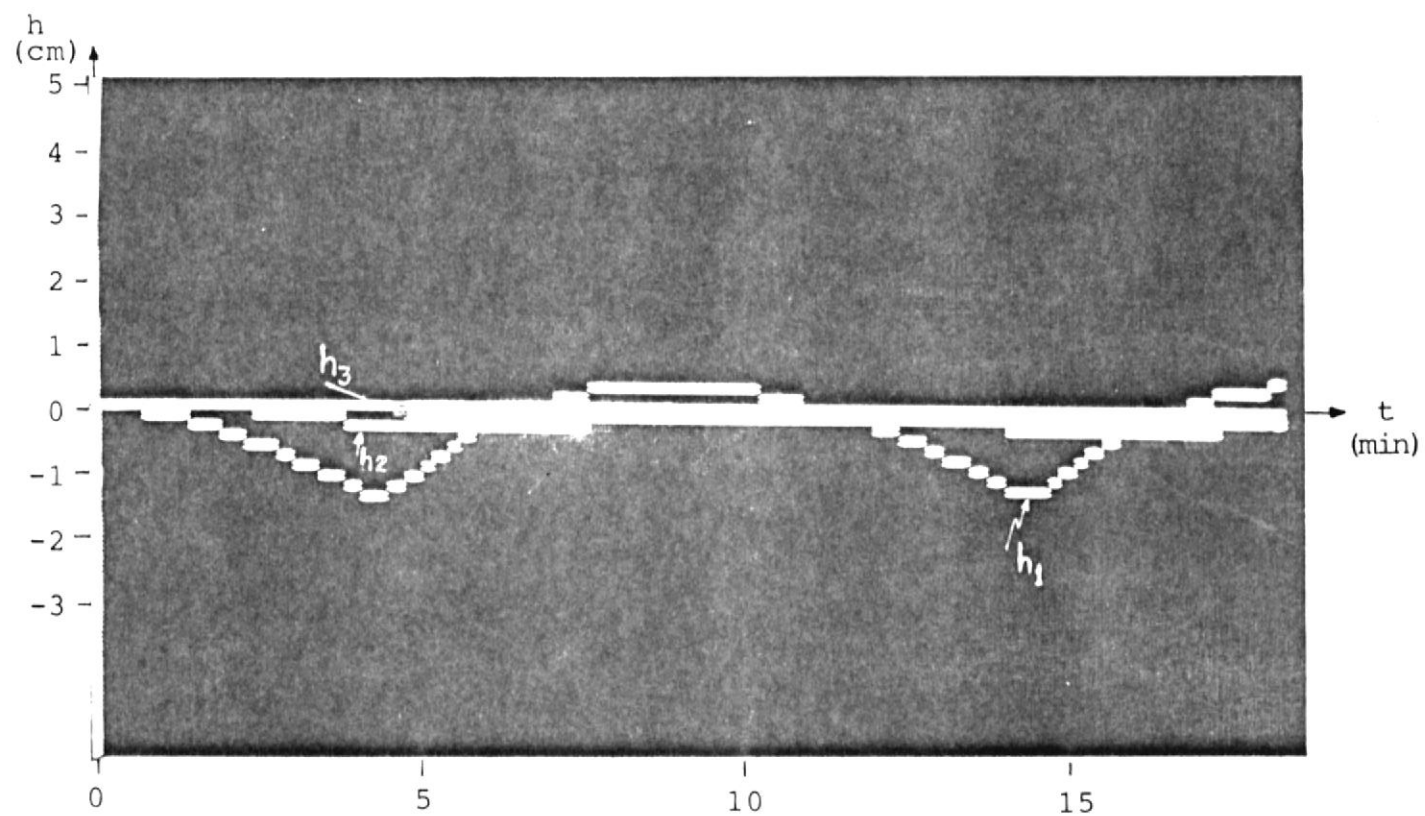


Gráfico N° 14.- El Sistema en Estado Estable

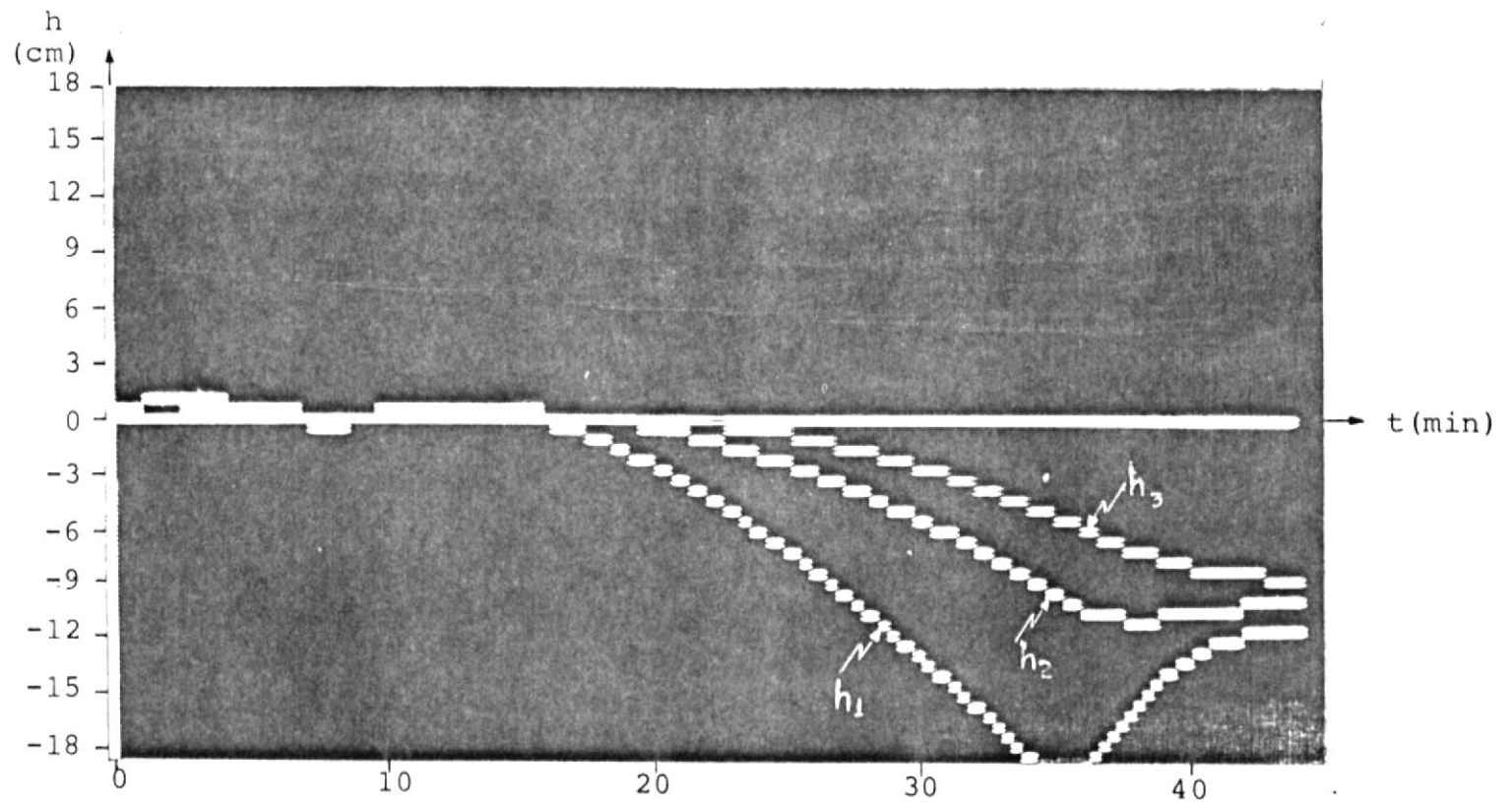


GRAFICO N° 15.- El Sistema en Estado Estable con Perturbación de vaciado y llenado (70-22 cm) en el tanque de reservorio.

- c.- El sistema en estado estable con perturbación de 4.33 cm en el nivel del primer tanque.

Para simular este caso consideramos las ecuaciones de entrada y el KH del caso (a) con $H_1(0) = 4.33$ cm en el primer tanque.

Observar el Gráfico N° 16.

- d.- El sistema en estado estable con perturbación de 4.25 cm en el nivel del segundo tanque.-

Para simular este caso consideramos las ecuaciones de entrada y el KH del caso (a) con $H_2(0) = 4.25$ cm en el segundo tanque.

Observar el Gráfico N° 17.

- e.- El sistema en estado estable con perturbación de 3.75 cm en el nivel del tercer tanque.

Para simular este caso consideramos las ecuaciones de entrada y el KH del caso (a) con $H_3(0) = 3.75$ cm en el tercer tanque.

Observar el Gráfico N° 18.

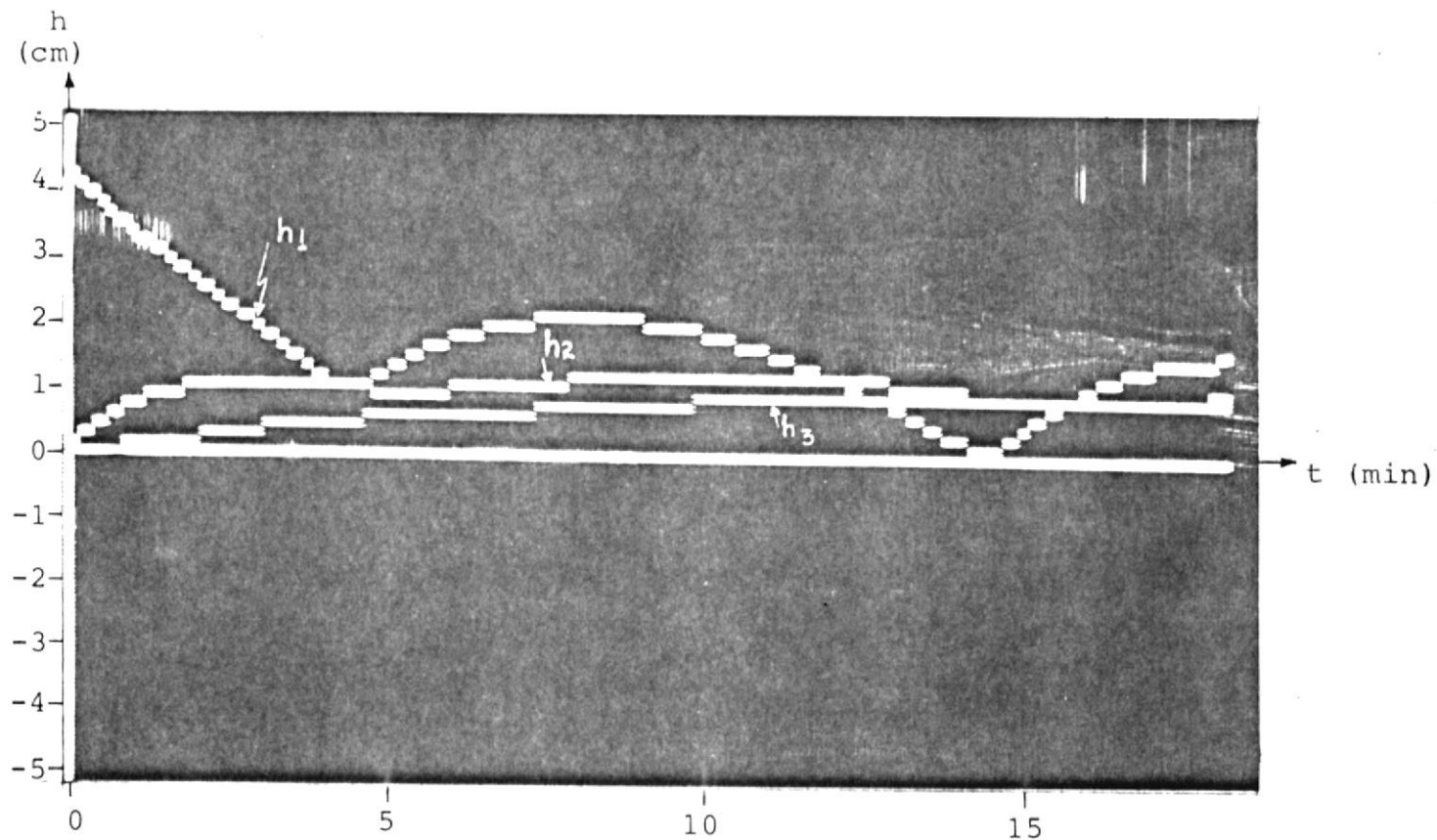


GRAFICO N° 16.- El Sistema en Estado Estable con Perturbación de 4.33 cm en el nivel del primer Tanque.



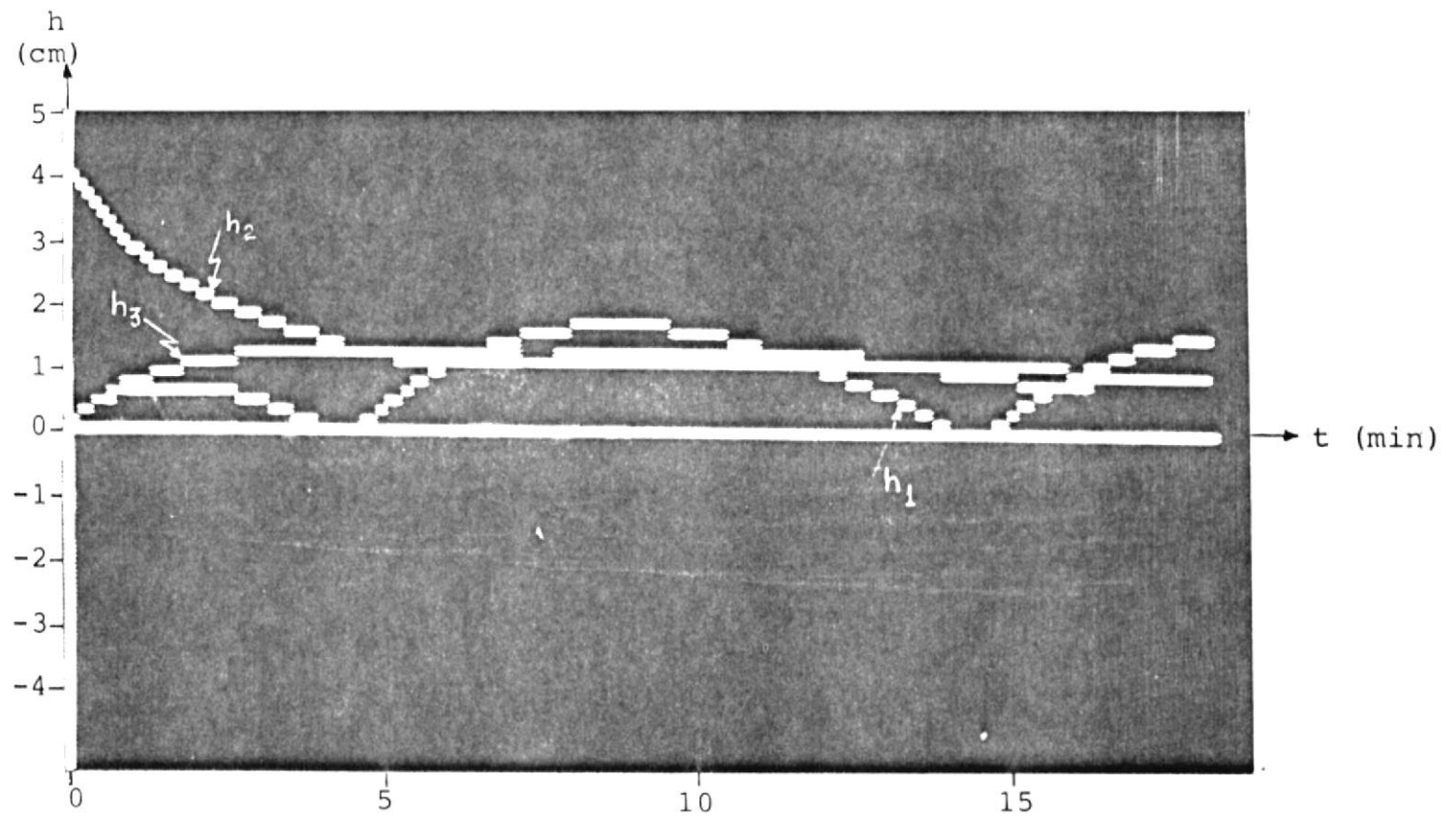


GRAFICO N° 17.- El Sistema en estado estable con perturbación de 4.25 cm en el nivel del segundo tanque.

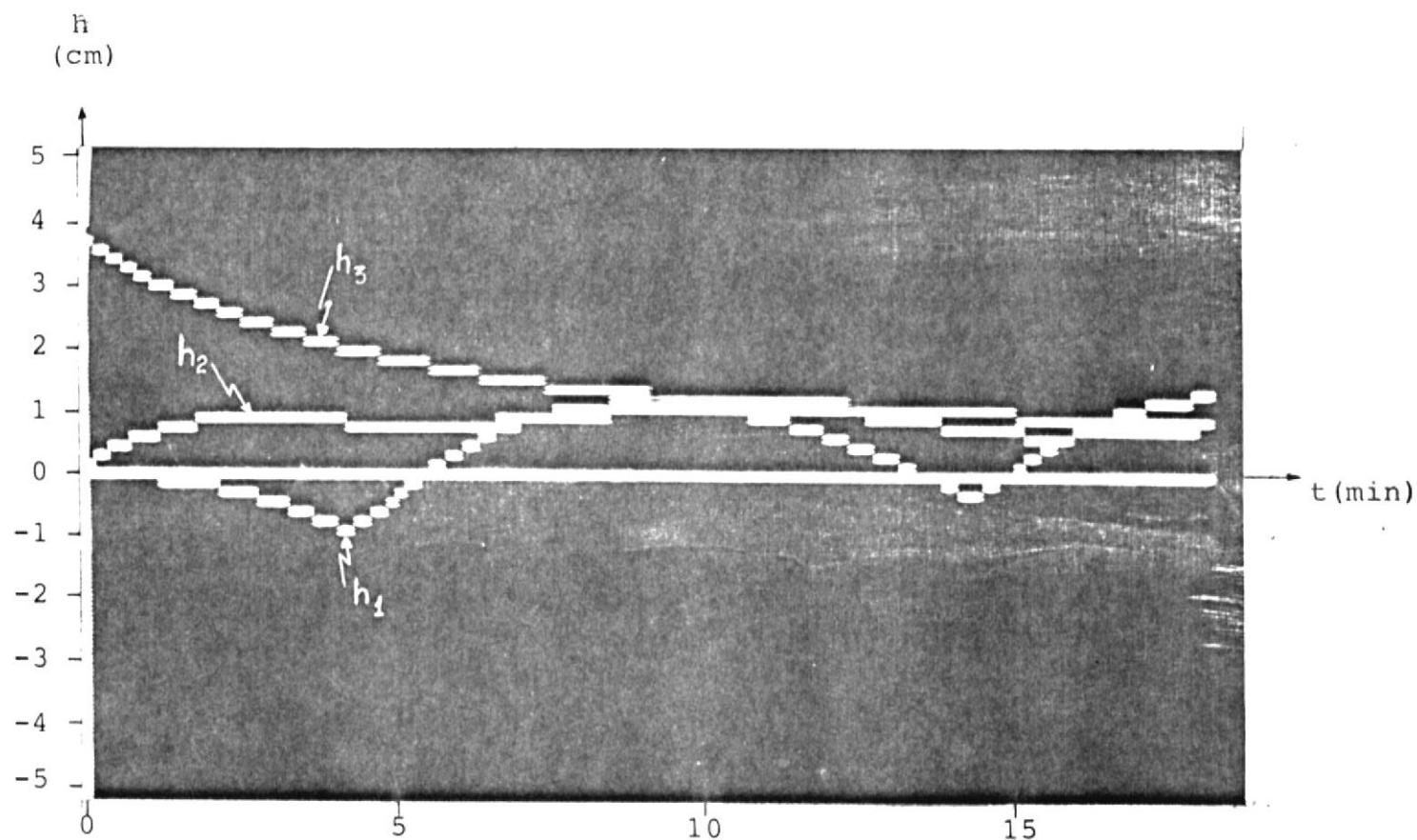


GRAFICO N° 18.- El sistema en estado estable con perturbación de 3.75 cm en el nivel del tercer tanque.

- f.- El Sistema en Estado Estable con una perturbación escalón de 10 cm en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 2.5 min.

Para simular este caso consideramos la siguiente ecuación de entrada que representa lo que ocurre en el tanque de reservorio y la constante KH que representa el caudal que circula por la válvula debido a la altura de nivel del tanque de reservorio.

$$HT = 10 \text{ cm}$$

$$KH = 19.164 \text{ cm}^2/\text{min}$$

$$T = 2.5 \text{ min}$$

Observar el Gráfico N° 19.

- g.- El sistema en estado estable con una perturbación rampa $4T$ en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 2.5 min.

Para simular este caso consideramos la siguiente ecuación de entrada que representa lo que ocurre en el tanque de reservorio y la constante KH que representa el caudal que circula por la válvula debido a la altura de nivel del tanque de reservorio:

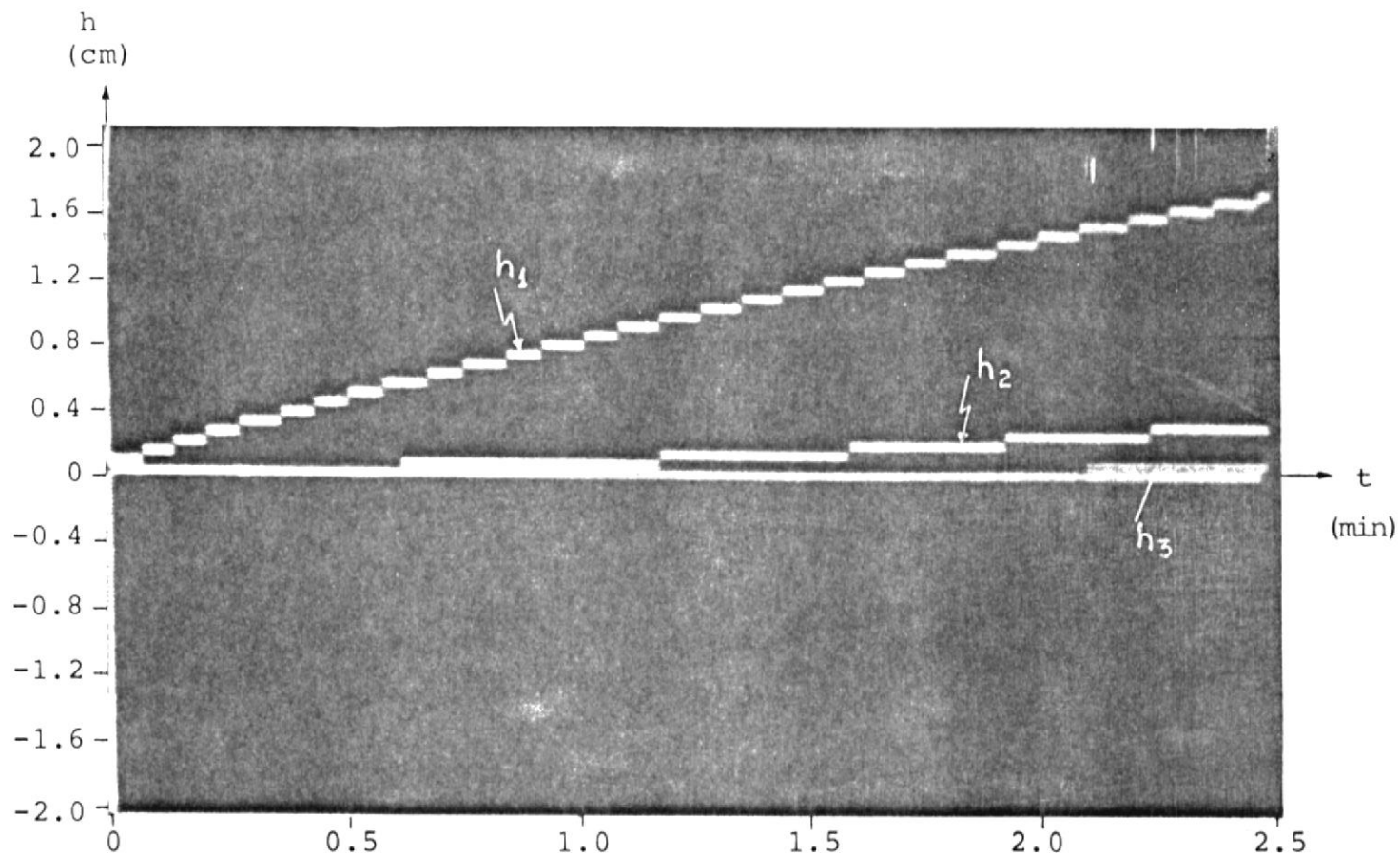


GRAFICO N° 19.- El sistema en estado estable con una perturbación escalón de 10 cm en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 2.5 min.

$$HT = 4T \text{ cm}$$

$$KH = 19.164 \text{ cm}^2/\text{min}$$

$$T = 2.5 \text{ min}$$

Observar el Gráfico N° 20.

Segundo Caso: De Ciclo Abierto con entrada en el segundo tanque.

a.- El sistema en estado estable: Para simular este caso consideramos las siguientes ecuaciones de entrada que representan lo que ocurre en el tanque de reservorio y la constante KH que representa el caudal que circula por la válvula debido a la altura de nivel del tanque de reservorio.

$$HT = -1.89T \quad (\text{cm}) \quad T < 4.234 \text{ (min)}$$

$$HT = -8 + 21.45T \quad (\text{cm}) \quad 4.234 < T < 4.98 \text{ (min)}$$

$$HT = 8 - 1.89T \quad (\text{cm}) \quad 4.98 < T < 13.45 \text{ (min)}$$

$$HT = -8 + 21.45T \quad (\text{cm}) \quad 13.45 < T < 14.20 \text{ (min)}$$

$$HT = 8 - 1.89T \quad (\text{cm}) \quad 14.20 < T < 18.43 \text{ (min)}$$

$$KH = 19.164 \text{ cm}^2/\text{min}$$

Observar el Gráfico N° 21.

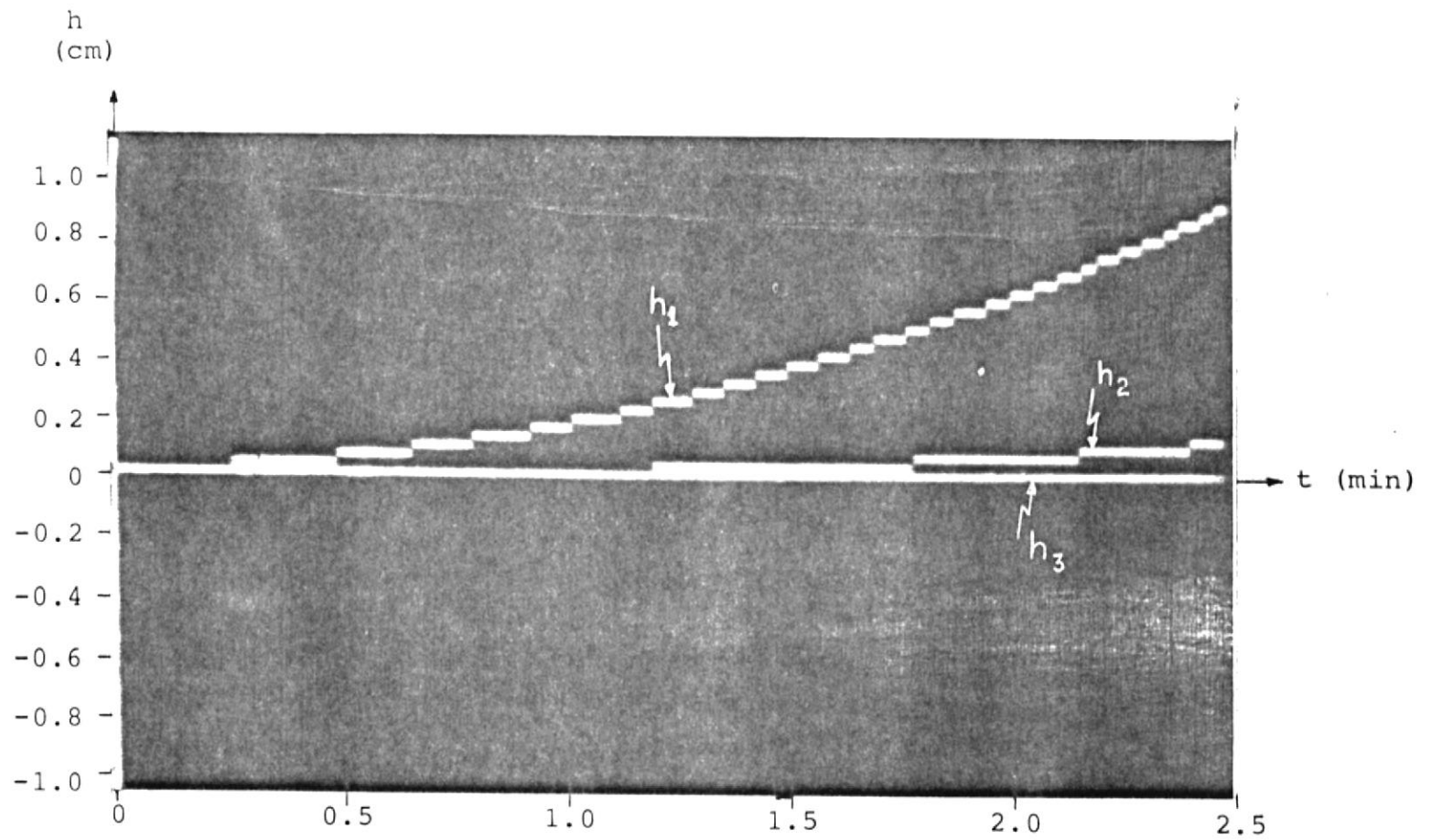


GRAFICO N° 20.- El sistema en estado estable con una perturbación rampa $4T$ en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 2.5 min.

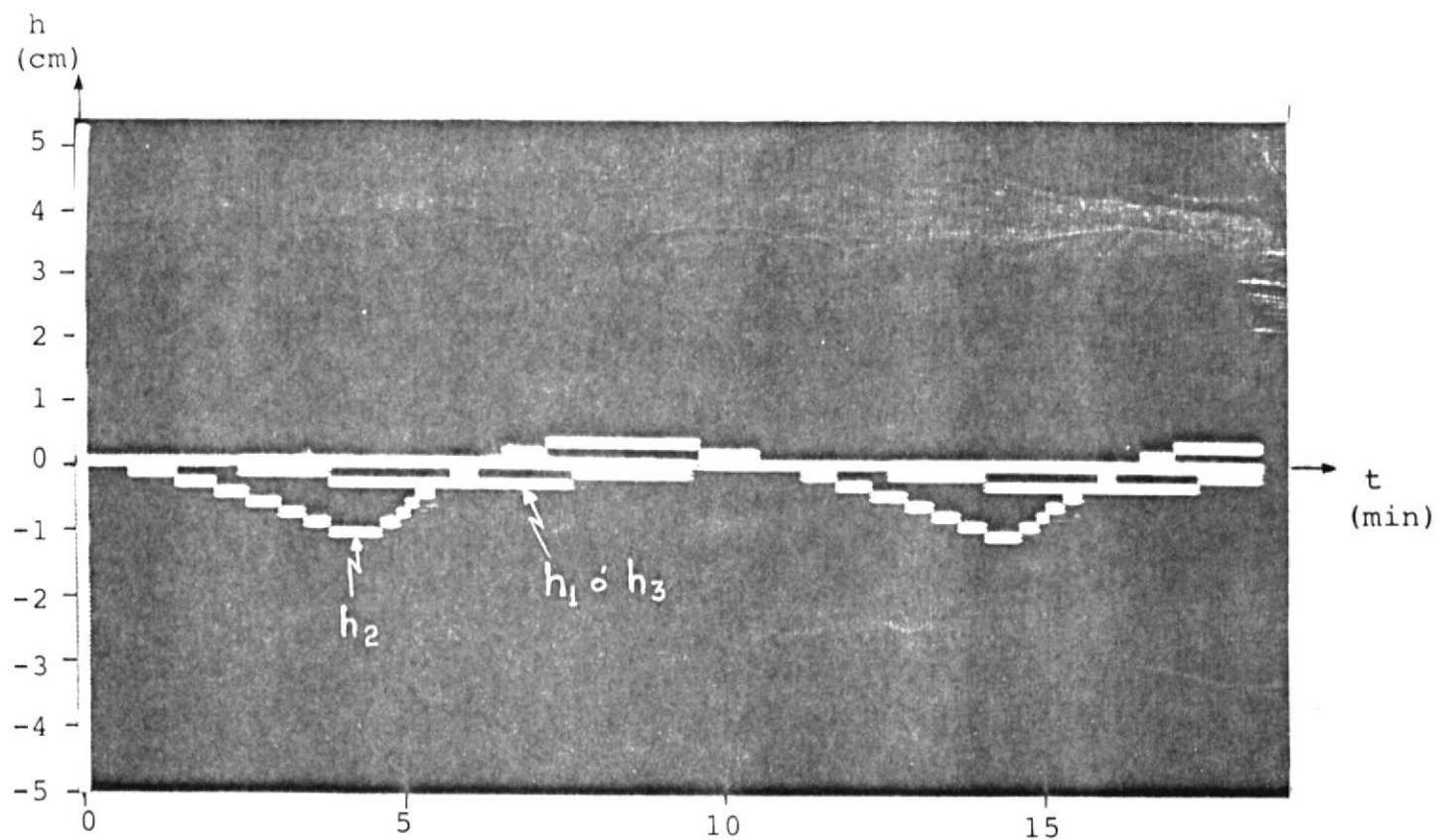


GRAFICO N° 21.- El sistema en estado estable

- b.- El sistema en estado estable con perturbación de vaciado y llenado (70-22cm) en el tanque de reservorio.-

Para simular este caso consideramos las siguientes ecuaciones de entrada que representan lo que ocurre en el tanque de reservorio y la constante KH que representa el caudal que circula por la válvula debido a la altura de nivel del tanque de reservorio.

$$\begin{array}{llll}
 HT = 8 - 1.89T & (\text{cm}) & T < 8.47 & (\text{min}) \\
 HT = -8 + 21.45T & (\text{cm}) & 8.47 < T < 9.22 & (\text{min}) \\
 HT = 8 - 2.04T & (\text{cm}) & 9.22 < T < 32.7 & (\text{min}) \\
 HT = -40 + 22.21T & (\text{cm}) & 32.7 < T < 34.87 & (\text{min}) \\
 HT = 8 - 1.89T & (\text{cm}) & 34.87 < T < 43.33 & (\text{min}) \\
 HT = -8 + 21.45T & (\text{cm}) & 43.33 < T < 44.08 & (\text{min}) \\
 KH = 19.164 \text{ cm}^2/\text{min} & (\text{cm}) & &
 \end{array}$$

Observar el Gráfico N° 22.

- c.- El sistema en estado estable con perturbación de 3.33 cm en el nivel del primer o tercer tanque.

Para simular este caso consideramos las ecuaciones de entrada y la constante KH del caso (a) con $H_1(0) = 3.33 \text{ cm}$ ó $H_3(0) = 3.33 \text{ cm}$ en el primer o tercer tanque

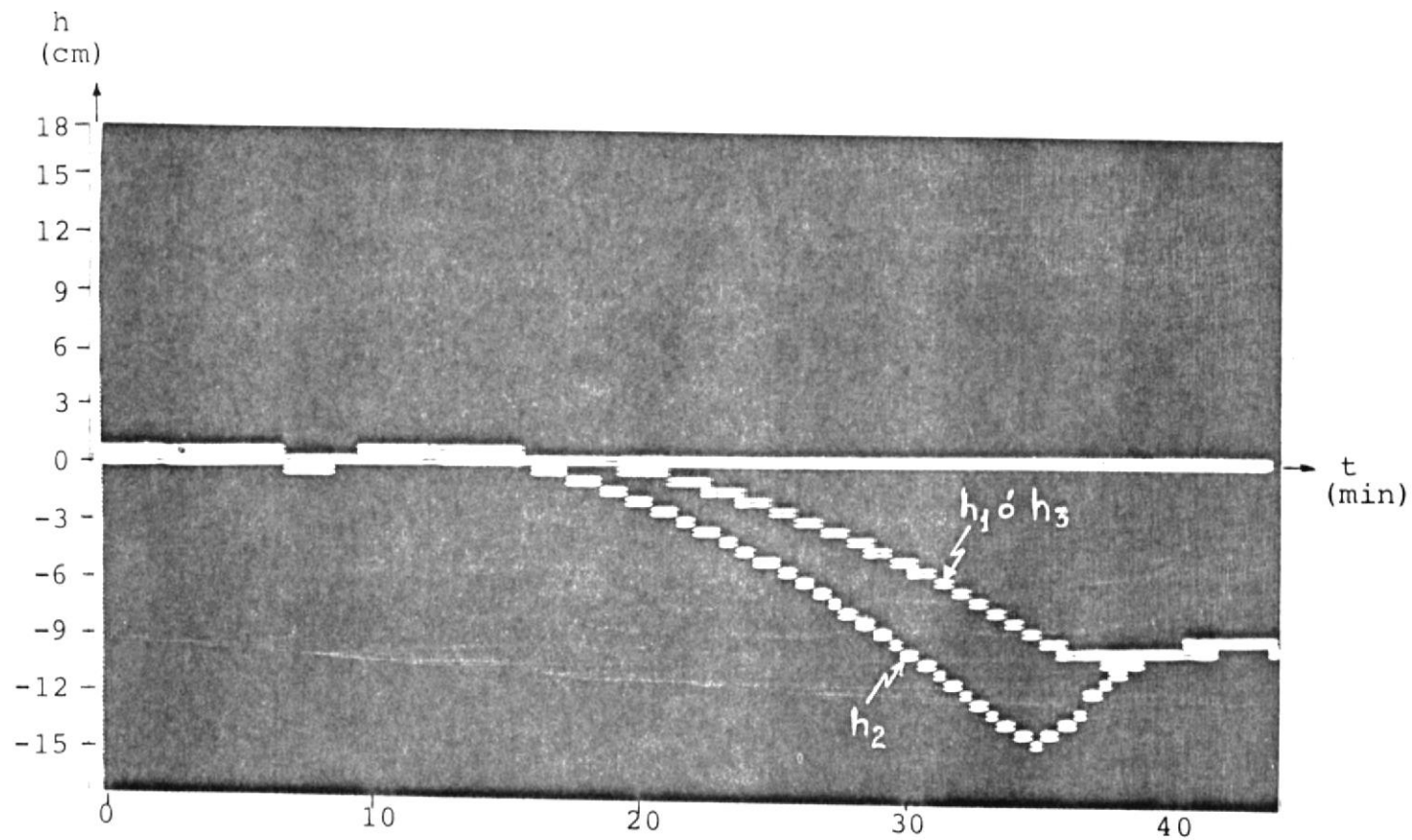


GRAFICO N° 22.- El sistema en estado estable con perturbación de vaciado y llenado (70-22cm) en el tanque de reservorio.

respectivamente.

Observar el Gráfico N° 23.

- d.- El sistema en estado estable con perturbación de 3.33 cm en el nivel del segundo tanque.

Para simular este caso consideramos las ecuaciones de entrada y la constante KH del caso (a) con $H_2(0) = 3.33$ cm en el segundo tanque.

Observar el Gráfico N° 24.

- e.- El sistema en estado estable con perturbación escalón de 10 cm en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 2.5 min.

Para simular este caso consideramos la siguiente ecuación de entrada que representa lo que ocurre en el tanque de reservorio y la constante KH que representa el caudal que circula por la válvula debido a la altura de nivel del tanque de reservorio.

$$HT = 10 \text{ cm}$$

$$KH = 19.164 \text{ cm}^2/\text{min}$$

$$T = 2.5 \text{ min}$$

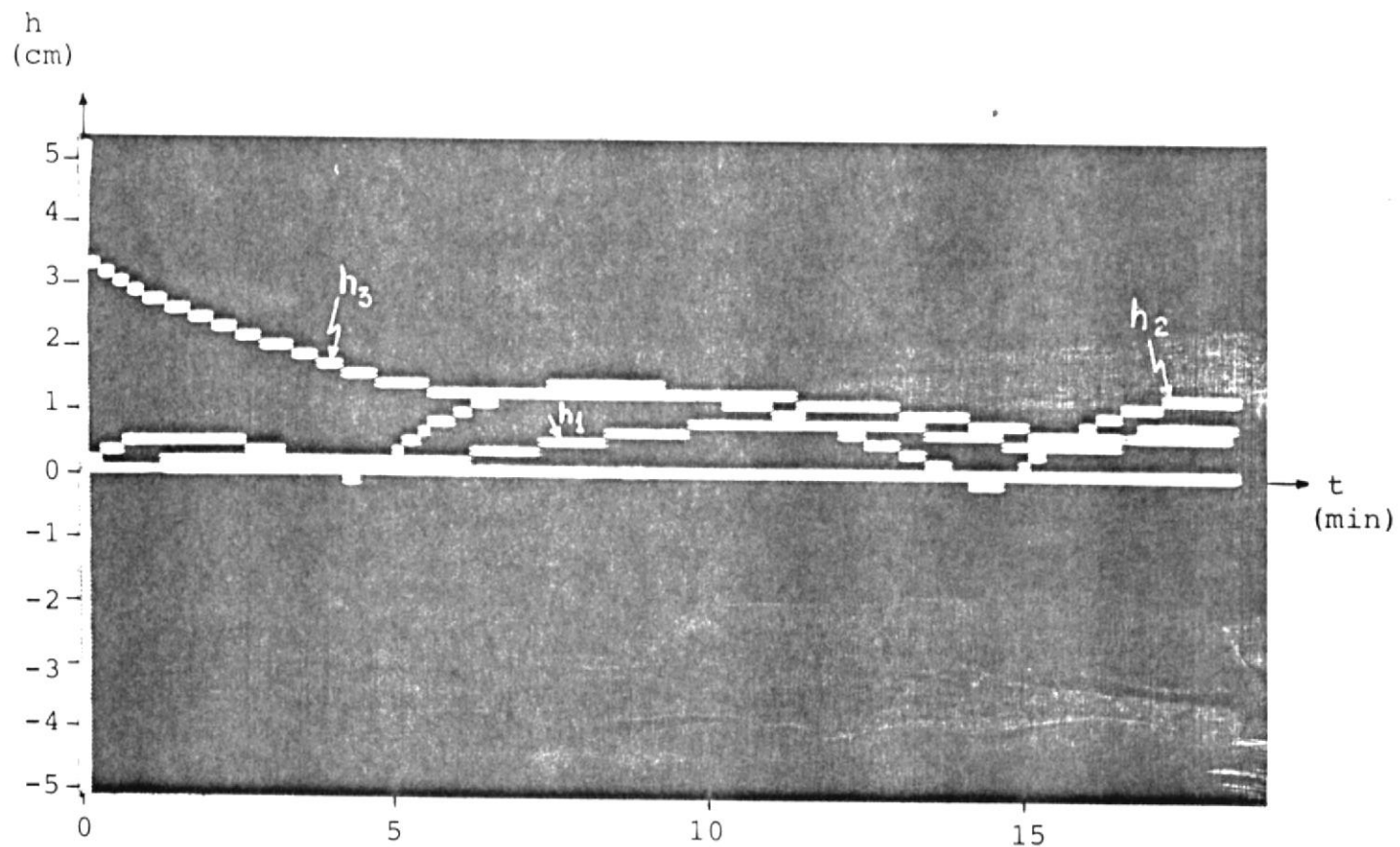


GRAFICO N° 23.- El sistema en estado estable con perturbación de 3.33 cm en el nivel del primer o tercer tanque.

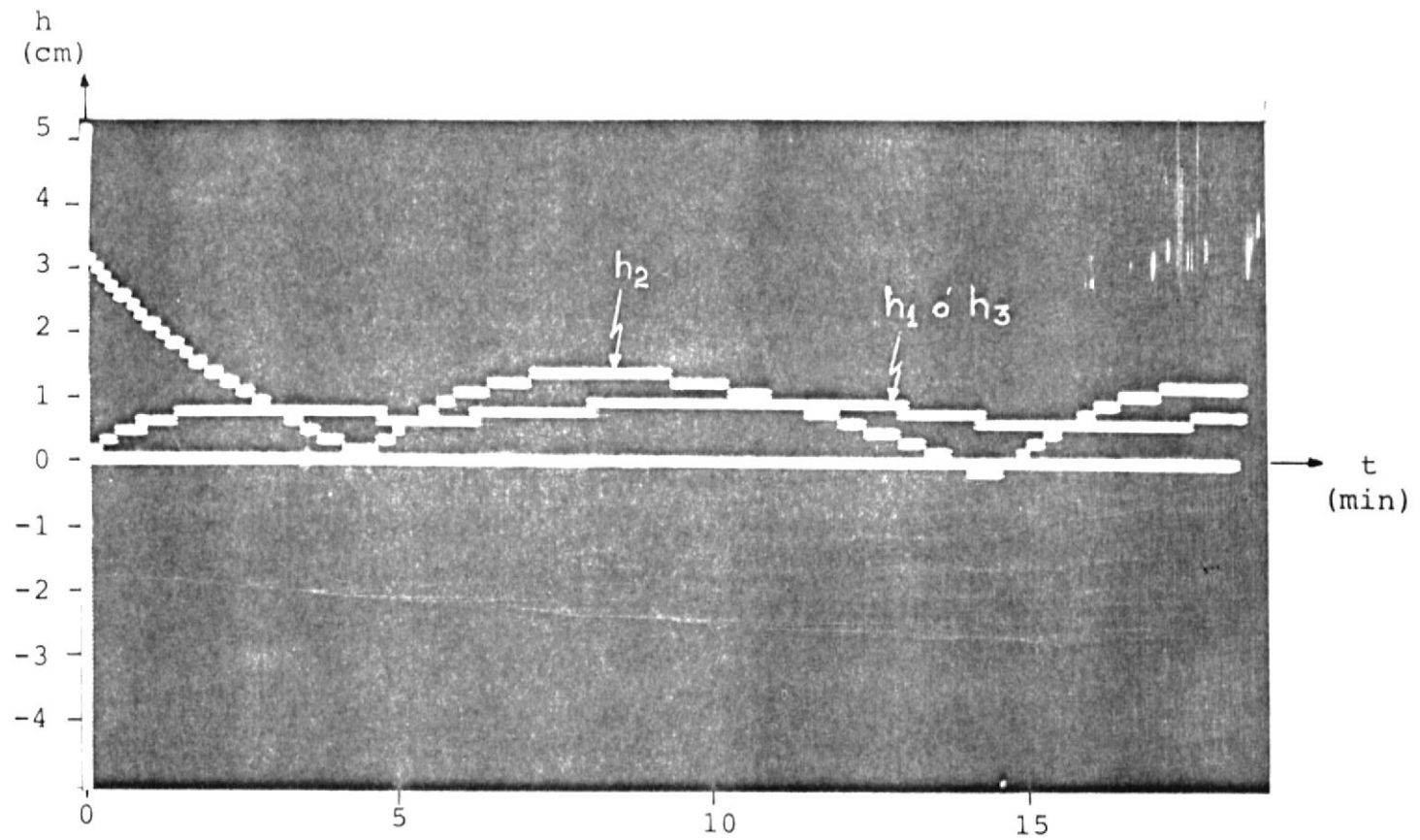


GRAFICO N° 24.- El sistema en estado estable con perturbación de 3.33 cm en el nivel del segundo tanque.

Observar el Gráfico N° 25.

Tercer Caso: De ciclo cerrado con control proporcional y la entrada en el primer tanque.

a.- El sistema en estado estable con una constante de proporcionalidad KP de 0.197.- Para simular este caso consideramos las siguientes ecuaciones de entrada que representan lo que ocurre en el tanque de reservorio, las constantes KH, KY que representa el caudal que circula por la válvula debido a la altura de nivel del tanque de reservorio y a la posición del vástago de la válvula.

$$HT = 1.89T \quad (\text{cm}) \quad T < 4.234 \text{ (min)}$$

$$HT = -8 + 21.45T \quad (\text{cm}) \quad 4.234 < T < 4.98 \text{ (min)}$$

$$HT = 8 - 1.89T \quad (\text{cm}) \quad 4.98 < T < 13.45 \text{ (min)}$$

$$HT = -8 + 21.45T \quad (\text{cm}) \quad 13.45 < T < 14.20 \text{ (min)}$$

$$HT = 8 - 1.89T \quad (\text{cm}) \quad 14.20 < T < 18.43 \text{ (min)}$$

$$KH = 19.164 \text{ cm}^2/\text{min}$$

$$KY = 8518.52 \text{ cm}^2/\text{min}$$

$$KP = 0.197$$

Observar el Gráfico N° 26.

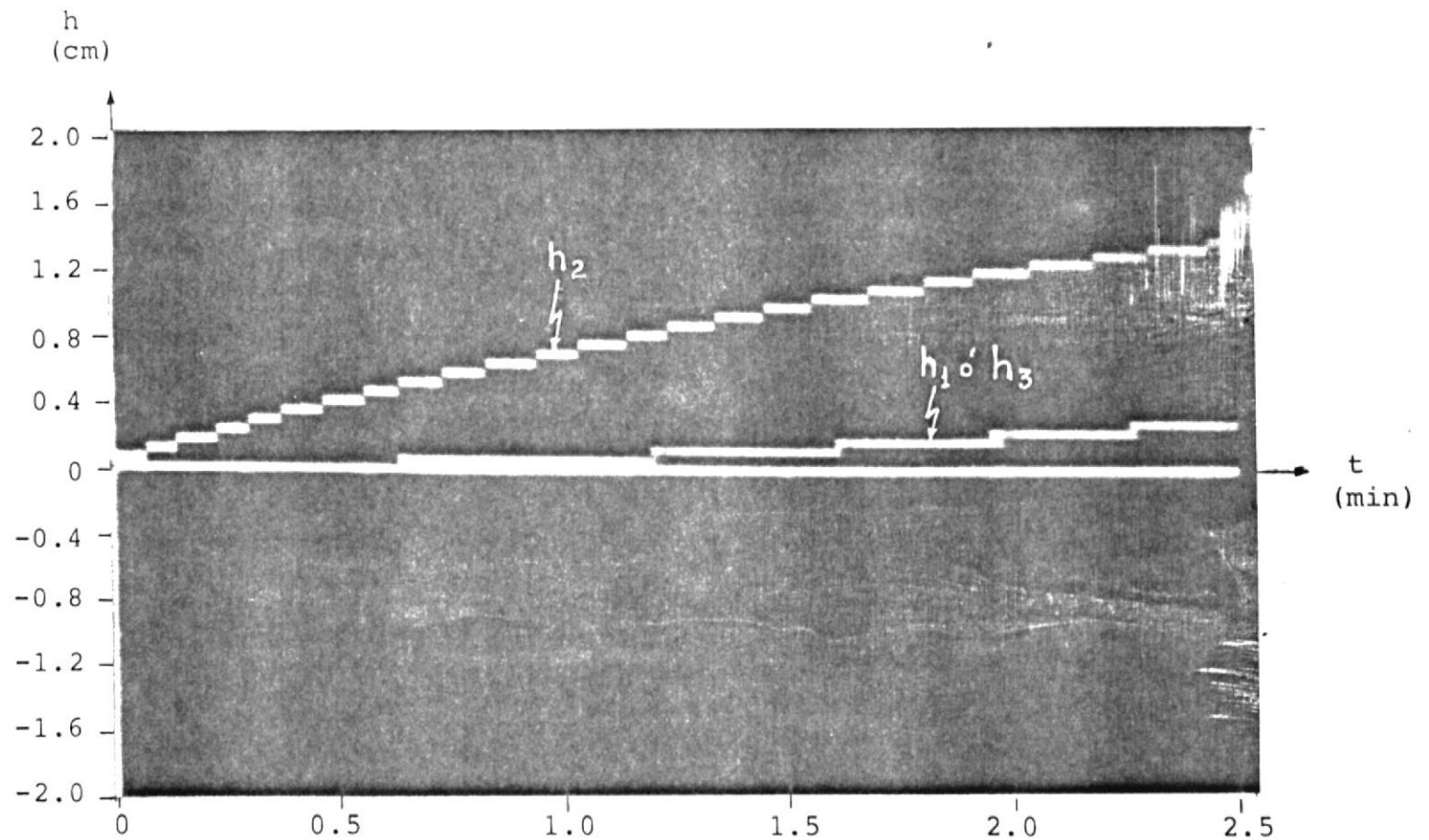


GRAFICO N° 25.- El sistema en estado estable con perturbación escalón de 10 cm en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 2.5 min.

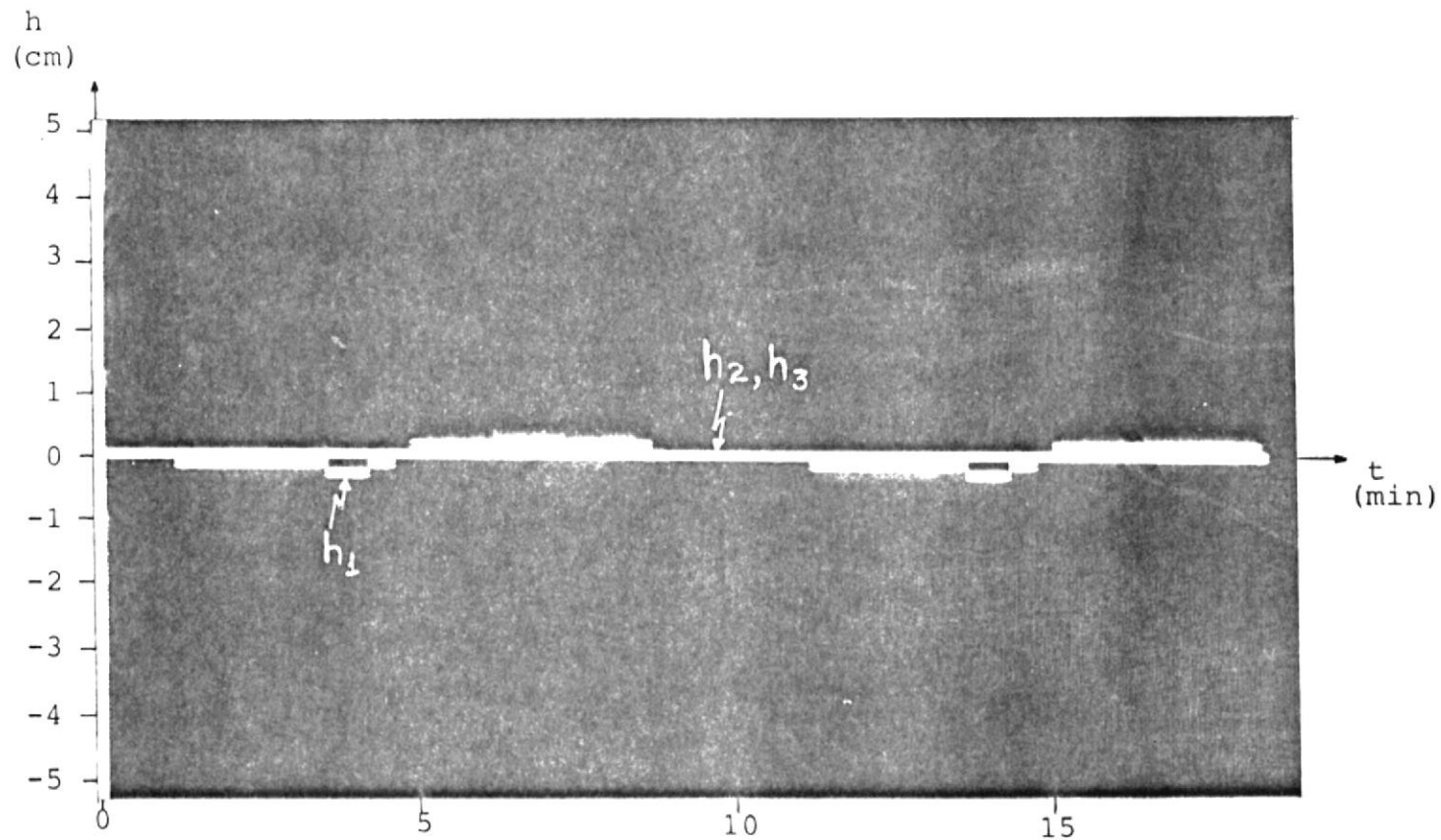


GRAFICO N° 26.- El sistema en estado estable con una constante de proporcionalidad K_P de 0.197.

- b.- El sistema en estado estable con perturbación de vaciado y llenado (70-22 cm) en el tanque de reservorio y una constante de proporcionalidad KP de 0.197.-

Para simular este caso, consideramos las siguientes ecuaciones de entrada que representan lo que ocurre en el tanque de reservorio, las constantes KH, KY que representa el caudal que circular por la válvula debido a la altura de nivel del tanque de reservorio y a la posición del vástago de la válvula.

$HT = 8 - 1.89T$	(cm)	$T < 8.47$	(min)
$HT = -8 + 21.45T$	(cm)	$8.47 < T < 9.22$	(min)
$HT = 8 - 2.04T$	(cm)	$9.22 < T < 32.70$	(min)
$HT = -40 + 22.21T$	(cm)	$32.70 < T < 34.87$	(min)
$HT = 8 - 1.89T$	(cm)	$34.87 < T < 43.33$	(min)
$HT = -8 + 21.45T$	(cm)	$43.33 < T < 44.08$	(min)
$KH = 19.164 \text{ cm}^2/\text{min}$			
$KY = 8518.52 \text{ cm}^2/\text{min}$			
$KP = 0.197$			

Observar el Gráfico N° 27.

- c.- El sistema en estado estable con perturbación de 4.33 cm en el nivel del primer tanque y una constante de

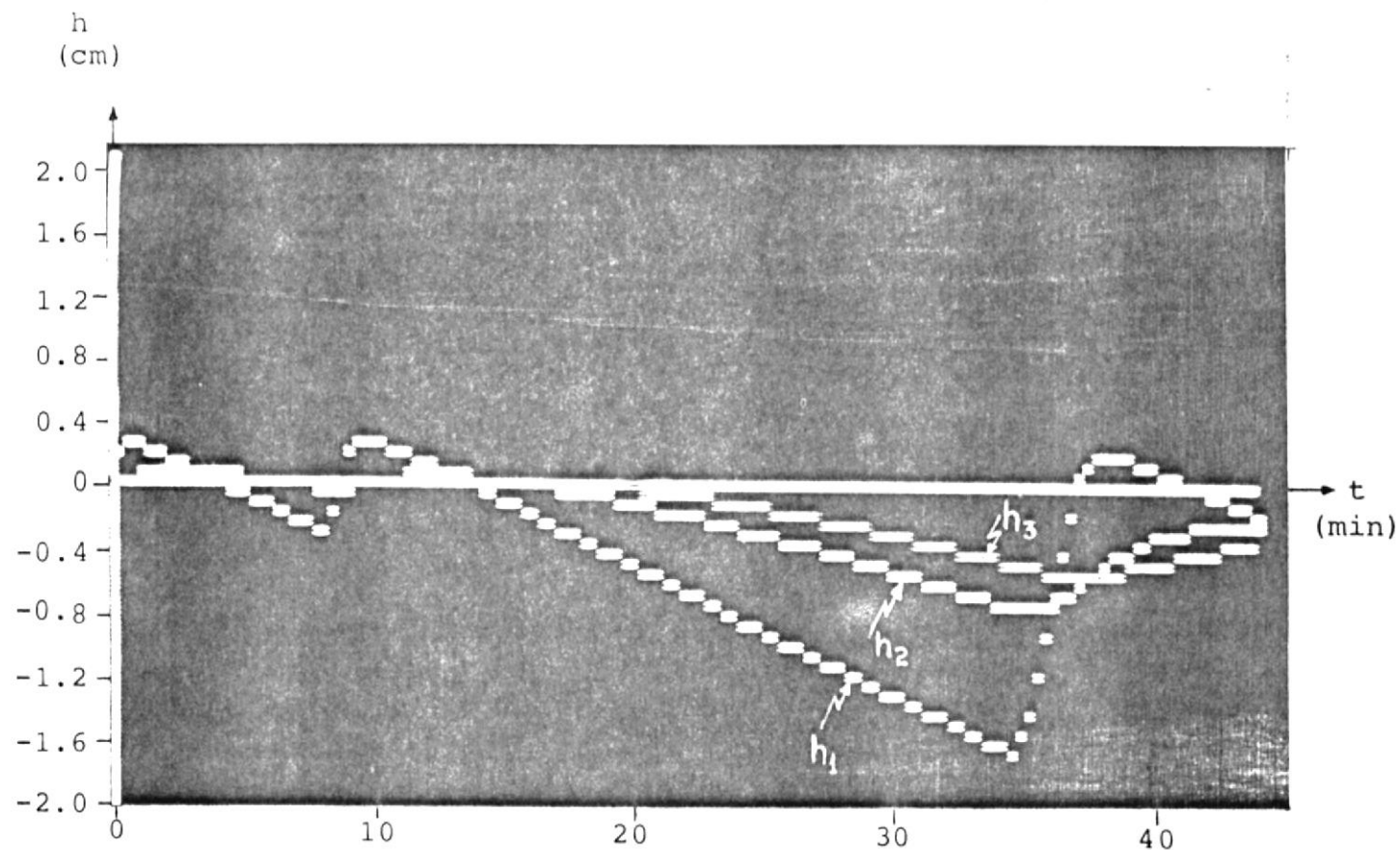


GRAFICO N° 27.- El sistema en estado estable con perturbación de vaciado y llenado (70-22cm) en el tanque de reservorio y una constante de proporcionalidad KP de 0.197.

proporcionalidad K_P de 0.197.

Para simular este caso consideramos las ecuaciones de entrada, las constantes K_H , K_Y y K_P del caso (a) con $H_1(0) = 4.33$ Cm en el primer tanque.

Observar el Gráfico N° 28.

- d.- El sistema en estado estable con perturbación de 4.25 cm en el nivel del segundo tanque y una constante de proporcionalidad K_P de 0.197.

Para simular este caso consideramos las ecuaciones de entrada, las constantes K_H , K_Y y K_P del caso (a) con $H_2(0) = 4.25$ Cm en el segundo tanque.

Observar el Gráfico N° 29.

- e.- El sistema en estado estable con perturbación de 3.75 cm en el nivel del tercer tanque y una constante de proporcionalidad K_P de 0.197.

Para simular este caso consideramos las ecuaciones de entrada y las constantes K_H , K_Y y K_P del caso (a) con $H_3(0) = 3.75$ Cm en el tercer tanque.

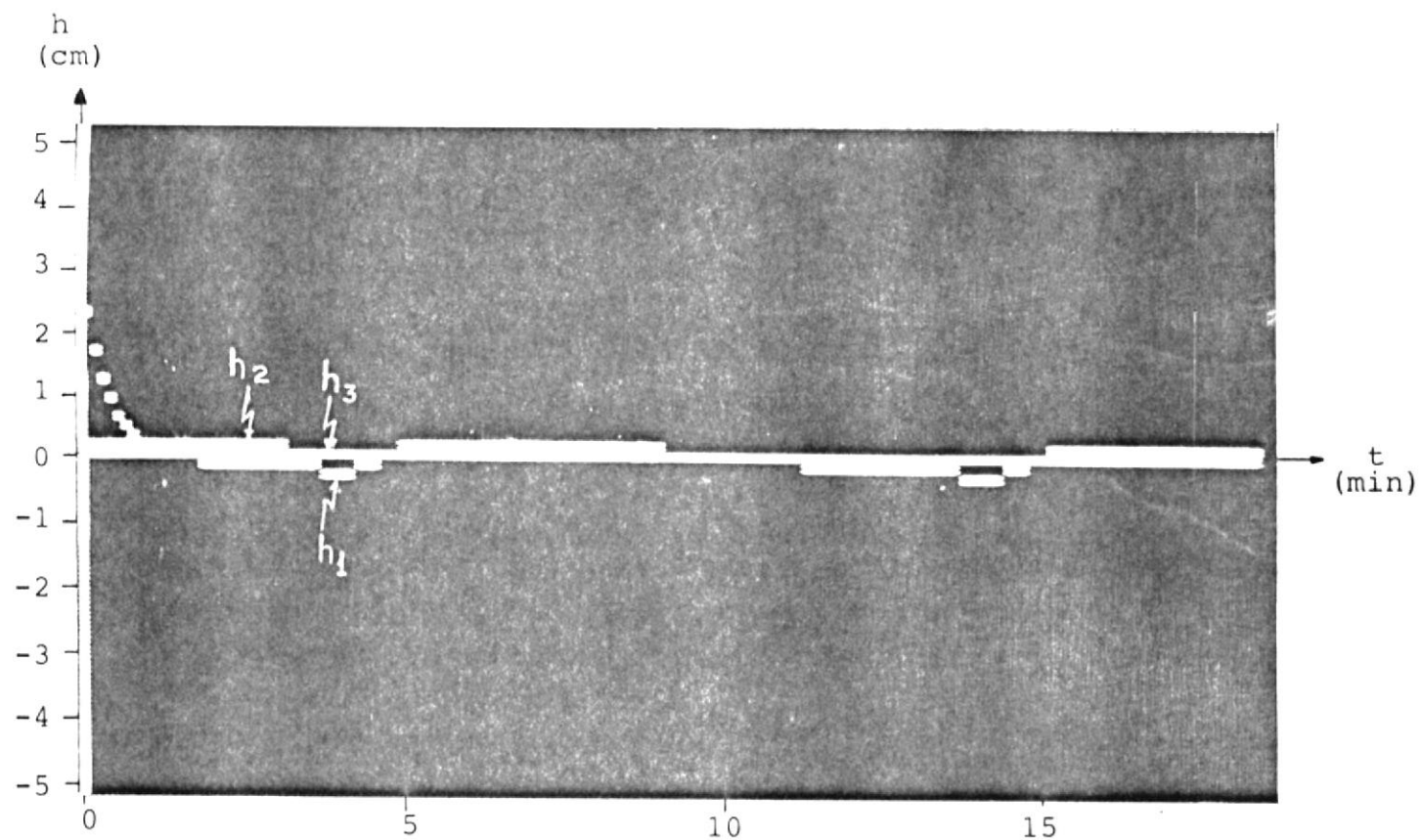


GRAFICO N° 28.- El sistema en estado estable con perturbación de 4.33 cm en el nivel del primer tanque y una constante de proporcionalidad K_P de 0.197.

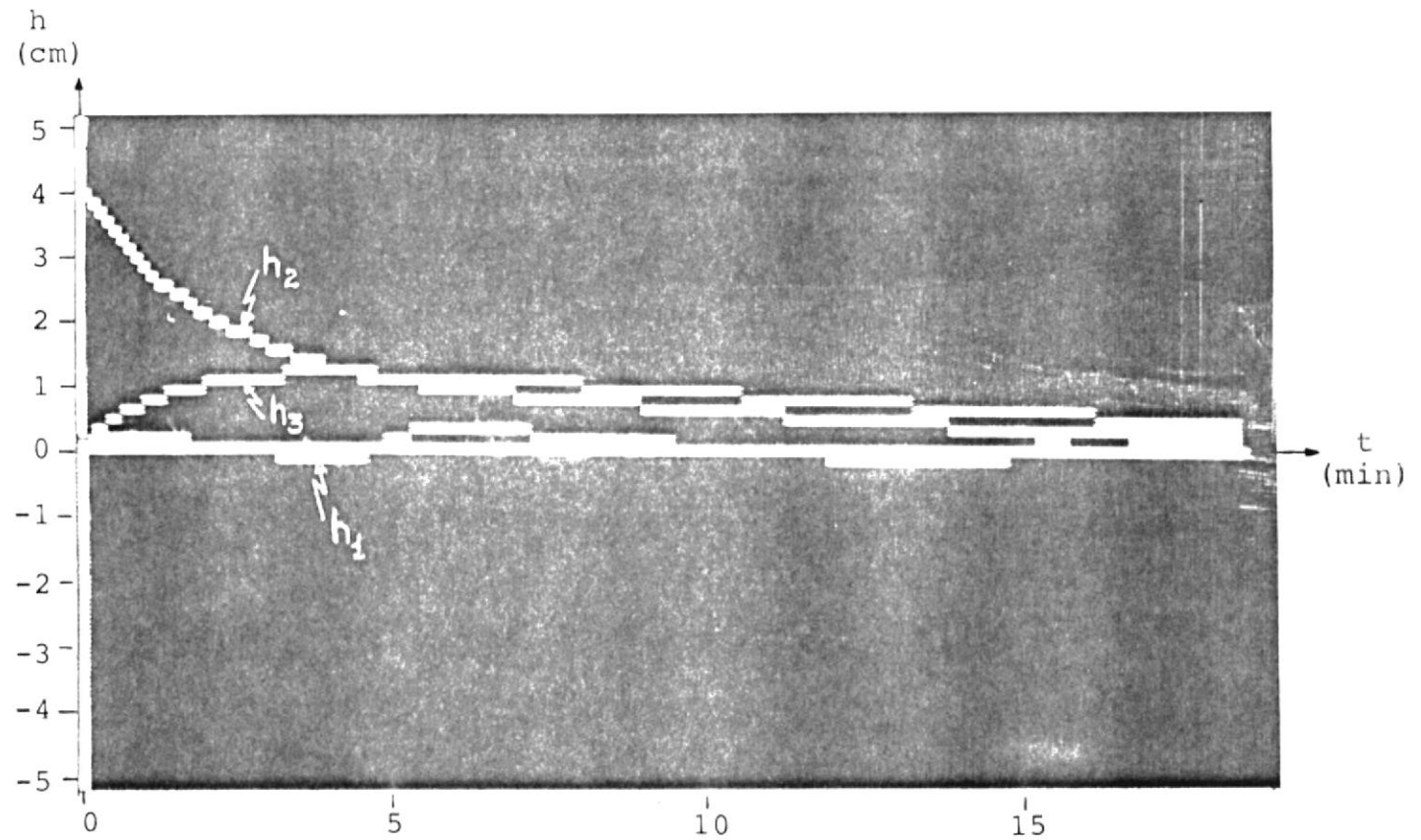


GRAFICO N° 29.- El sistema en estado estable con perturbación de 4.25 cm en el nivel del segundo tanque y una constante de proporcionalidad K_P de 0.197.

Observar el Gráfico N° 30.

- f.- El sistema en estado estable con perturbación de vaciado y llenado (70-22 cm) en el tanque de reservorio y una constante de proporcionalidad K_P de 0.942.

Para simular este caso consideramos las ecuaciones de entrada, las constantes K_Y , K_H del caso (b) con $K_P = 0.942$ en el control.

Observar el Gráfico N° 31.

- g.- El sistema en estado estable con perturbación de vaciado y llenado (70-22 cm) en el tanque de reservorio y una constante de proporcionalidad K_P de 1.45.

Para simular este caso consideramos las ecuaciones de entrada, las constantes K_H y K_Y del caso (b) con $K_P = 1.45$ en el control.

Observar el Gráfico N° 32.

- h.- El sistema en estado estable con una perturbación escalón de 10 cm en el tanque de reservorio de un determinado tiempo de 2.5 min y con una constante de proporcio-

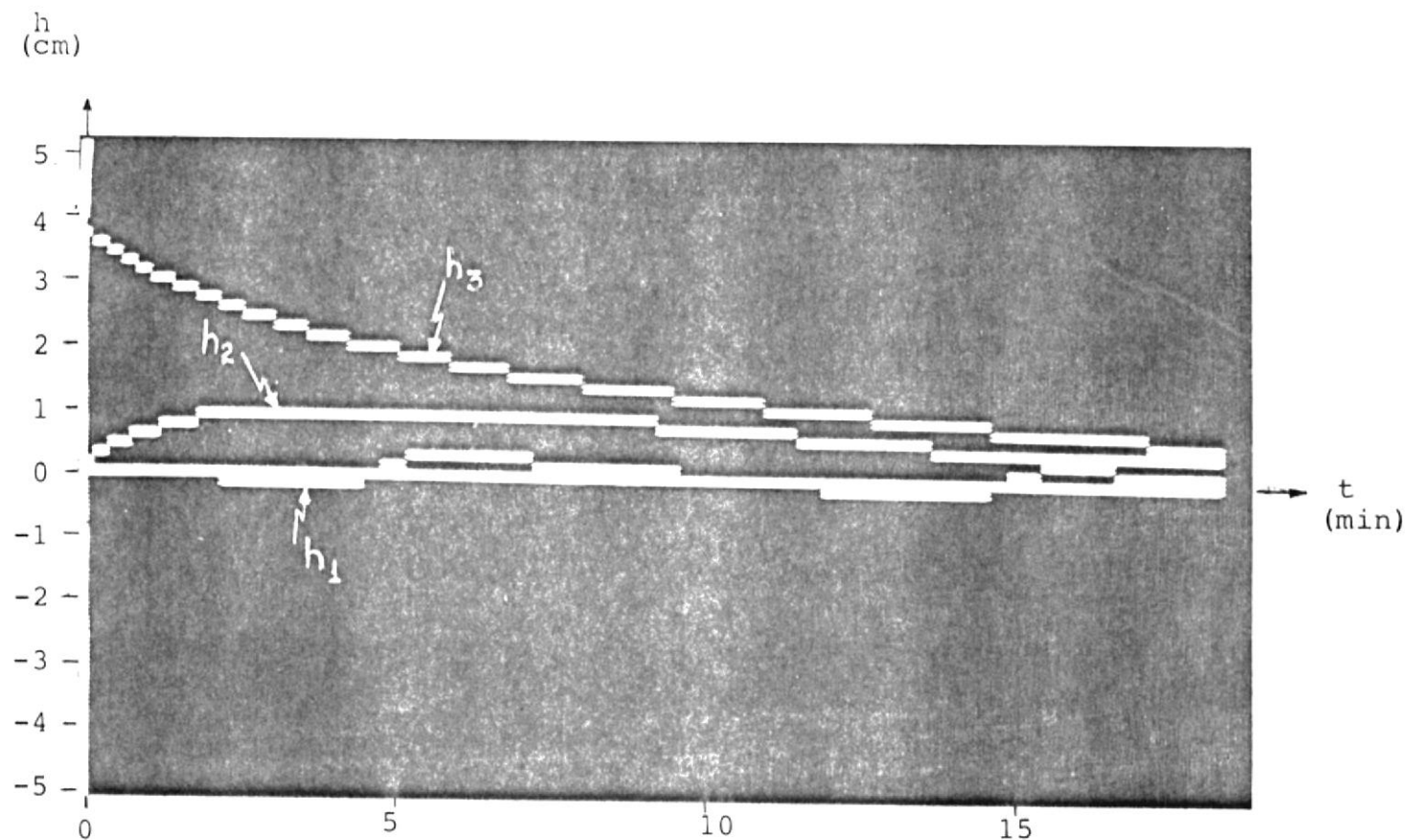


GRAFICO N° 30.- El sistema en estado estable con perturbación de 3.75 cm en el nivel del tercer tanque y una constante de proporcionalidad K_P de 0.197.

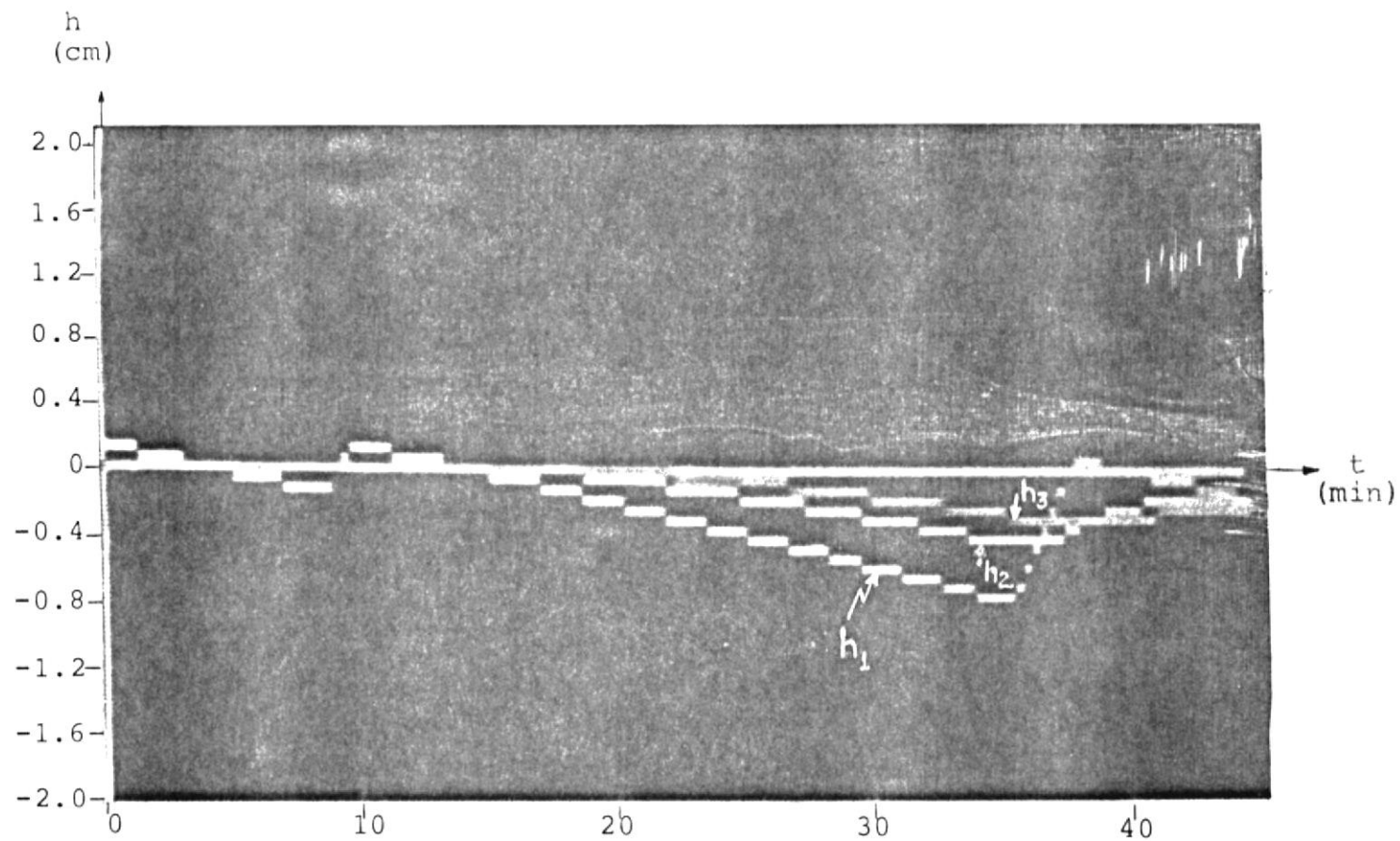


GRAFICO N° 31.- El sistema en estado estable con perturbación de vaciado y llenado (70-22 cm) en el tanque de reservorio y una constante de proporcionalidad K_P de 0.942.

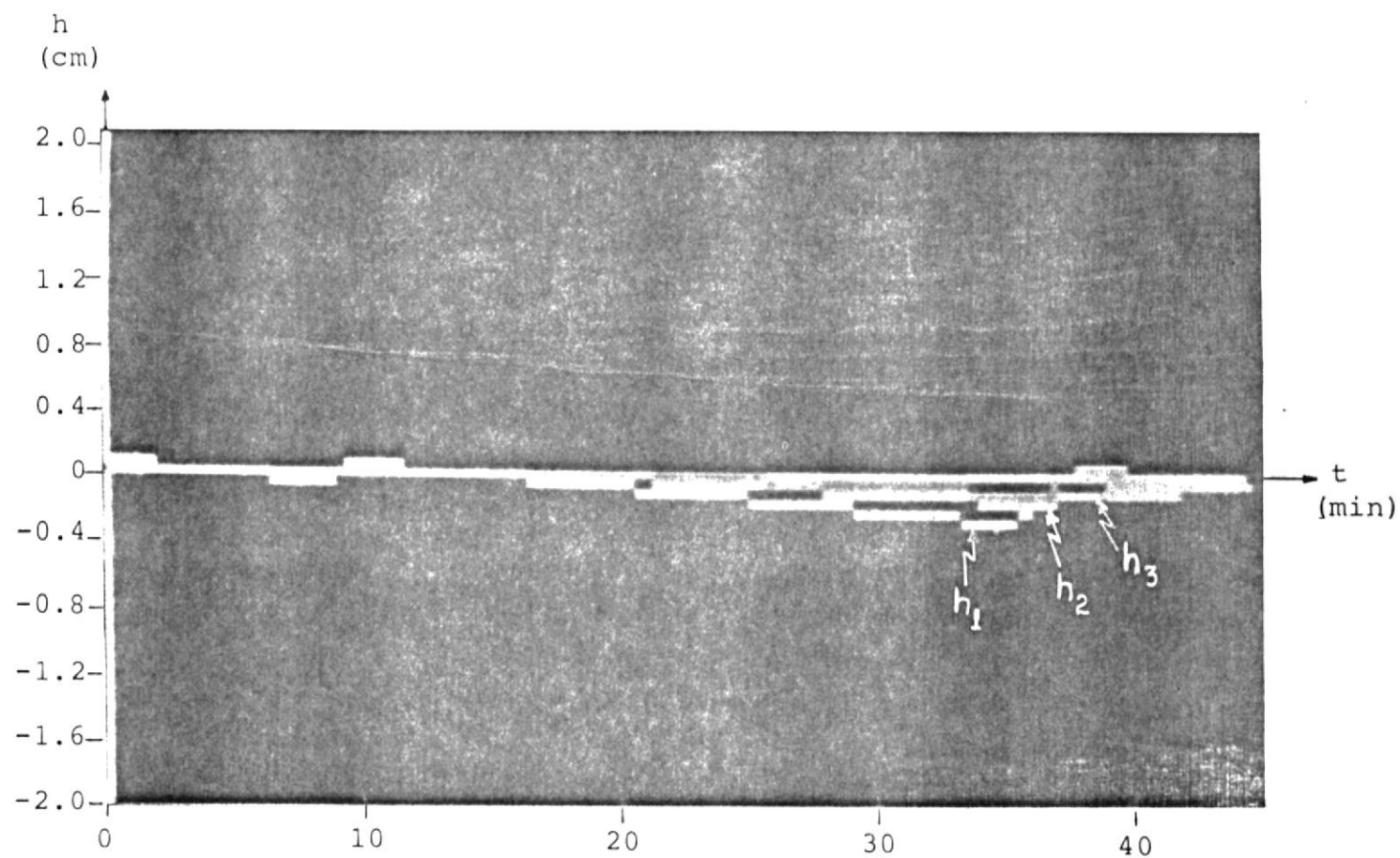


GRAFICO N° 32.- El sistema en estado estable con perturbación de vaciado y llenado (70-22 cm) en el tanque de reservorio y una constante de proporcionalidad KP de 1.45.

nalidad KP de 0.197.

Para simular este caso consideramos la siguiente ecuación de entrada que representa lo que ocurre en el tanque de reservorio y las constantes KH, KY que representa el caudal que circula por la válvula debido a la altura de nivel del tanque de reservorio y a la posición del vástago de la válvula.

$$HT = 10 \text{ cm}$$

$$T = 2.5 \text{ min}$$

$$KH = 19.164 \text{ cm}^2/\text{min}$$

$$KY = 8518.52 \text{ cm}^2/\text{min}$$

$$KP = 0.197$$

Observar el Gráfico N° 33.

- i.- El sistema en estado estable con una perturbación escalón de 10 cm en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 2.5 min y con una constante de proporcionalidad KP de 0.942.

Para simular este caso consideramos la ecuación de entrada y las constantes KY y KH del caso (h) con KP = 0.942 en el control.

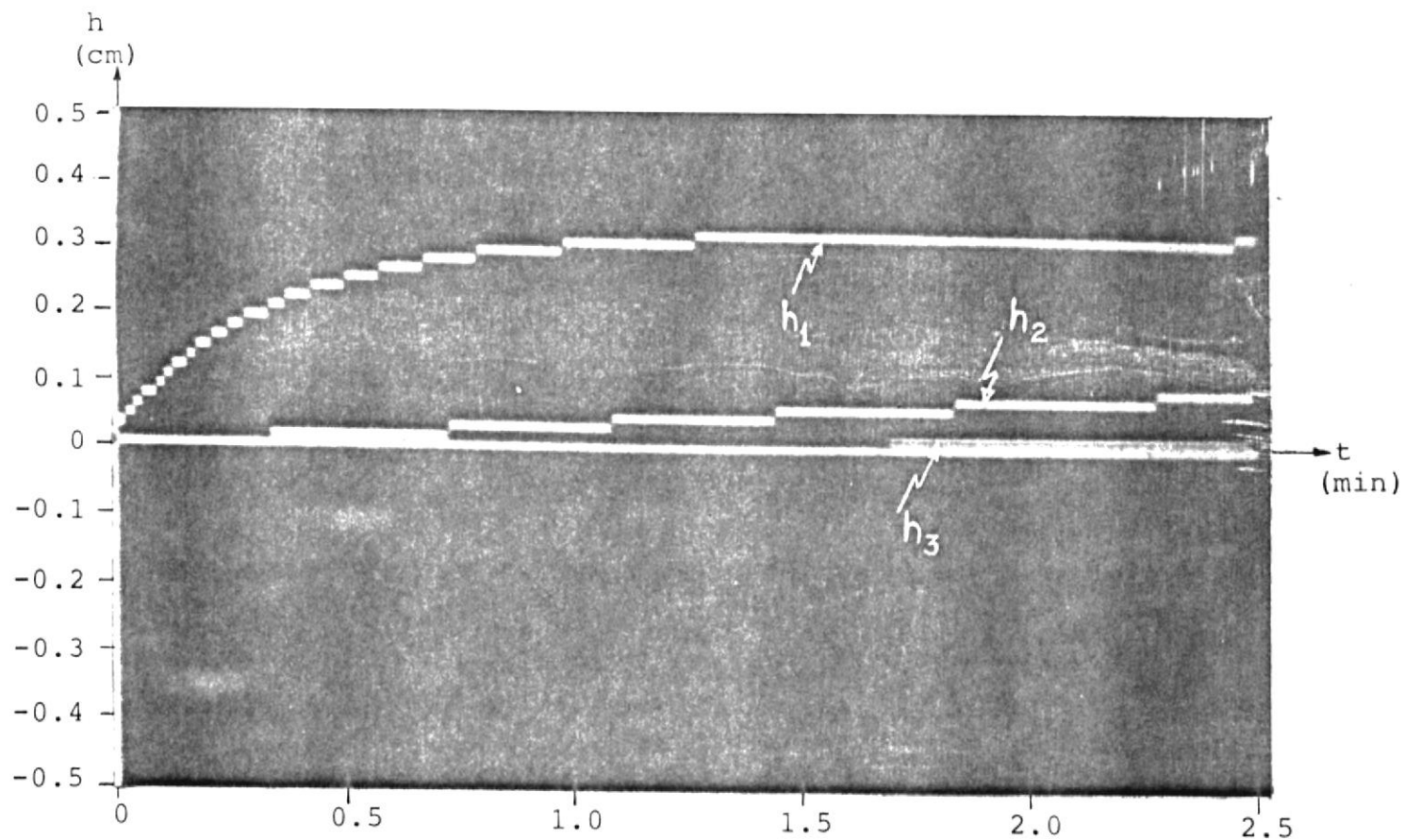


GRAFICO N° 33.- El sistema en estado estable con una perturbación escalón de 10 cm en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 2.5 min y una constante de proporcionalidad K_P de 0.197.

Observar el Gráfico N° 34.

- j.- El sistema en estado estable con una perturbación rampa $4T$ en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 2.5 min y con una constante de proporcionalidad KP de 0.197.

Para simular este caso consideramos la siguiente ecuación de entrada que representa lo que ocurre en el tanque de reservorio y las constantes KH y KY que representa el caudal que circula por la válvula debido a la altura de nivel del tanque de reservorio y a la posición del vástago de la válvula respectivamente.

$$HT = 4T \quad (\text{cm})$$

$$T = 2.5 \quad (\text{min})$$

$$KH = 19.164 \quad (\text{cm}^2/\text{min})$$

$$KY = 8518.52 \quad (\text{cm}^2/\text{min})$$

$$KP = 0.197$$

Observar el Gráfico N° 35.

- k.- El sistema en estado estable con una perturbación rampa $4T$ en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 2.5 min y una constante de proporcionalidad

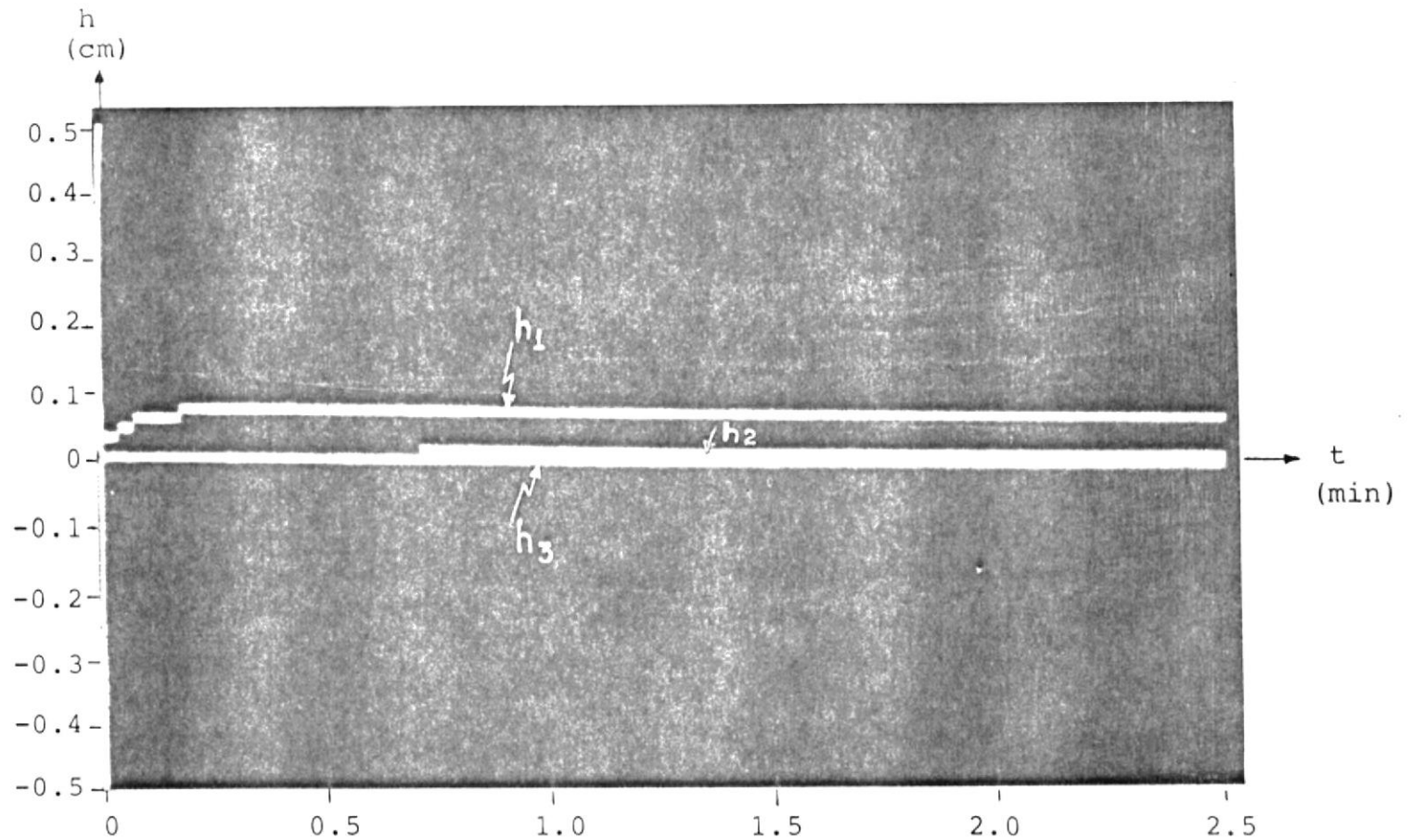


GRAFICO N° 34.- El sistema en estado estable con una perturbación escalón de 10 cm en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 2.5 min y una constante de proporcionalidad K_P de 0.942.

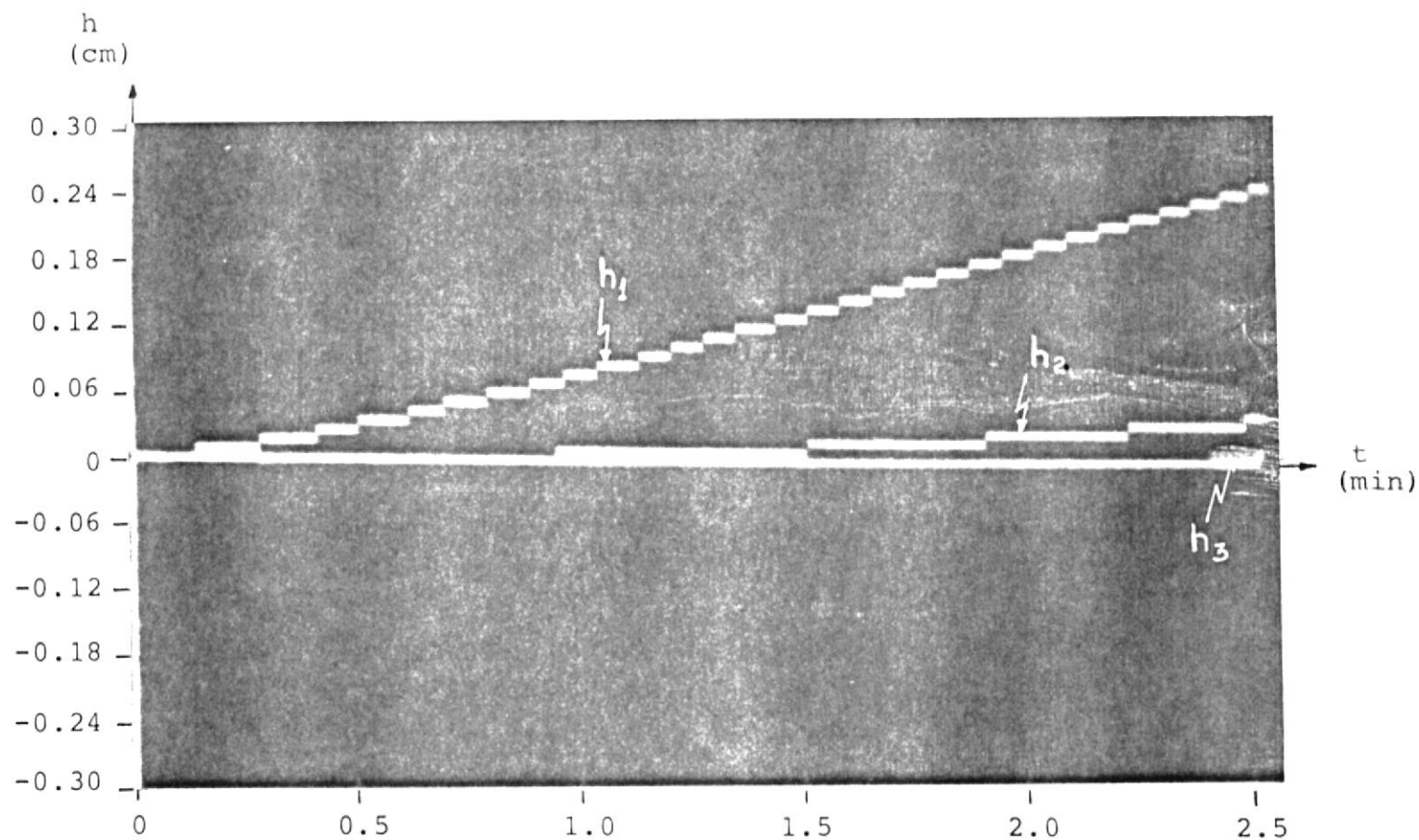


GRAFICO N° 35.- El sistema en estado estable con una perturbación rampa $4T$ en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 2.5 min y una constante de proporcionalidad K_P de 0.197.

KP de 0.942.

Para simular este caso consideramos la ecuación de entrada y las constantes KH y KY del caso (j) con KP = 0.942 en el control.

Observar el Gráfico N° 36.

Cuarto Caso: De ciclo cerrado con control proporcional y la entrada en el segundo tanque.

a.- El sistema en estado estable con una constante de proporcionalidad KP de 0.197.

Para simular este caso consideramos las siguientes ecuaciones de entrada que representan lo que ocurre en el tanque de reservorio, las constantes KH y KY que representa el caudal que circula por la válvula debido a la altura de nivel del tanque de reservorio y a la posición del vástago de la válvula respectivamente.

$HT = -1.89T$	(cm)	$T < 4.234$	(min)
$HT = -8 + 21.45T$	(cm)	$4.234 < T < 4.98$	(min)
$HT = 8 - 1.89T$	(cm)	$4.98 < T < 13.45$	(min)
$HT = -8 + 21.45T$	(cm)	$13.45 < T < 14.20$	(min)

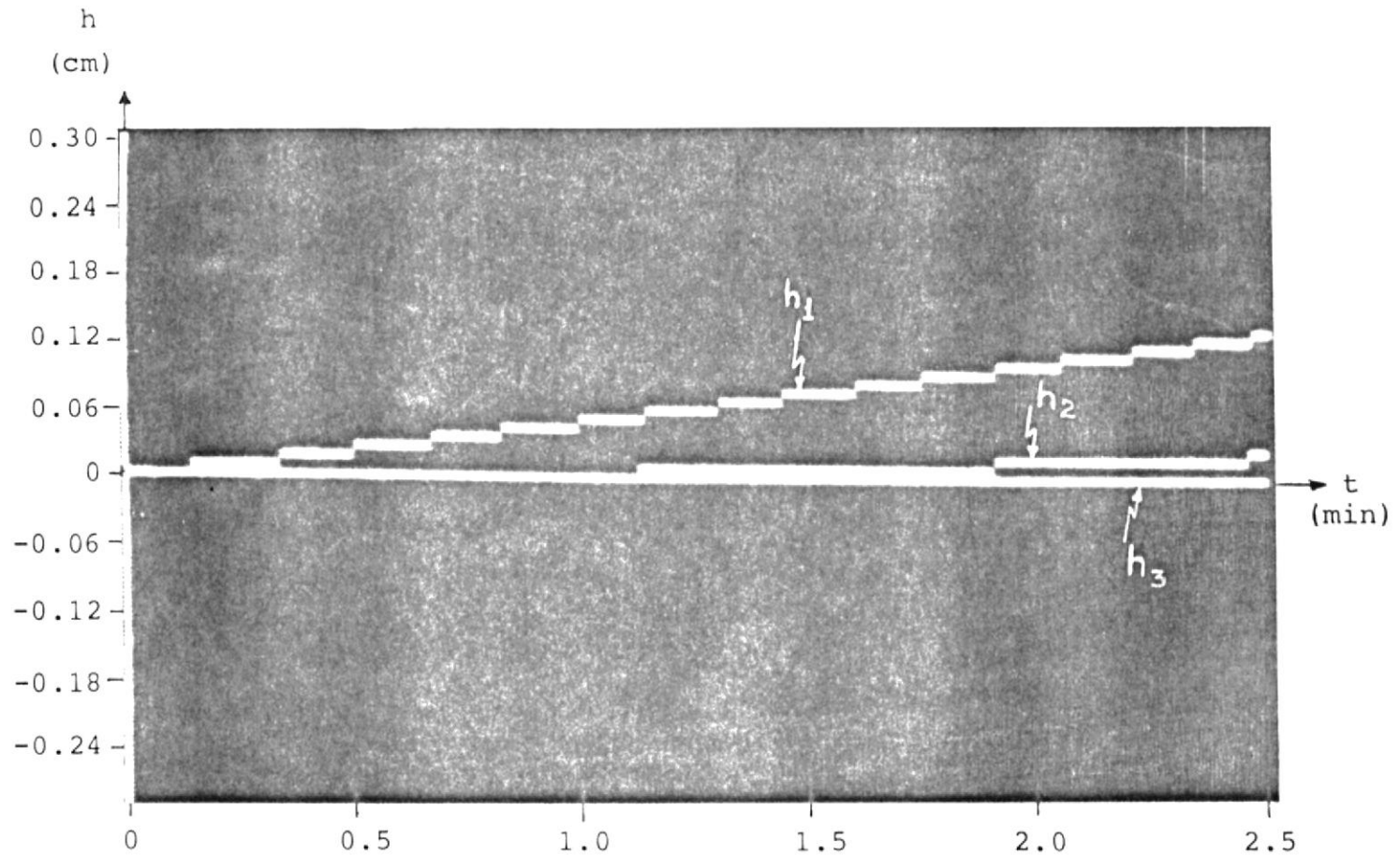


GRAFICO N° 36.- El sistema en estado estable con una perturbación rampa $4T$ en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 2.5 min. y una constante de proporcionalidad K_P de 0.942.

$$HT = 8 - 1.89T \quad (\text{cm}) \quad 14.20 < T < 18.43 \quad (\text{min})$$

$$KH = 19.164 \text{ cm}^2/\text{min}$$

$$KY = 8518.52 \text{ cm}^2/\text{min}$$

$$KP = 0.197$$

Observar el Gráfico N° 37

- b.- El sistema en estado estable con perturbación de vaciado y llenado (70-22 cm) en el tanque de reservorio y una constante de proporcionalidad KP de 0.197.

Para simular este caso consideramos las siguientes ecuaciones de entrada que representan lo que ocurre en el tanque de reservorio, las constantes KH y KY que representa el caudal que circula por la válvula debido a la altura de nivel del tanque de reservorio y a la posición del vástago de la válvula.

$$HT = 8 - 1.89T \quad (\text{cm}) \quad T < 8.47 \quad (\text{min})$$

$$HT = -8 + 21.45T \quad (\text{cm}) \quad 8.47 < T < 9.22 \quad (\text{min})$$

$$HT = 8 - 2.04T \quad (\text{cm}) \quad 9.22 < T < 32.70 \quad (\text{min})$$

$$HT = -40 + 22.21T \quad (\text{cm}) \quad 32.70 < T < 34.87 \quad (\text{min})$$

$$HT = 8 - 1.89T \quad (\text{cm}) \quad 34.87 < T < 43.33 \quad (\text{min})$$

$$HT = -8 + 21.45T \quad (\text{cm}) \quad 43.33 < T < 44.08 \quad (\text{min})$$

$$KH = 19.164 \text{ cm}^2/\text{Min}$$

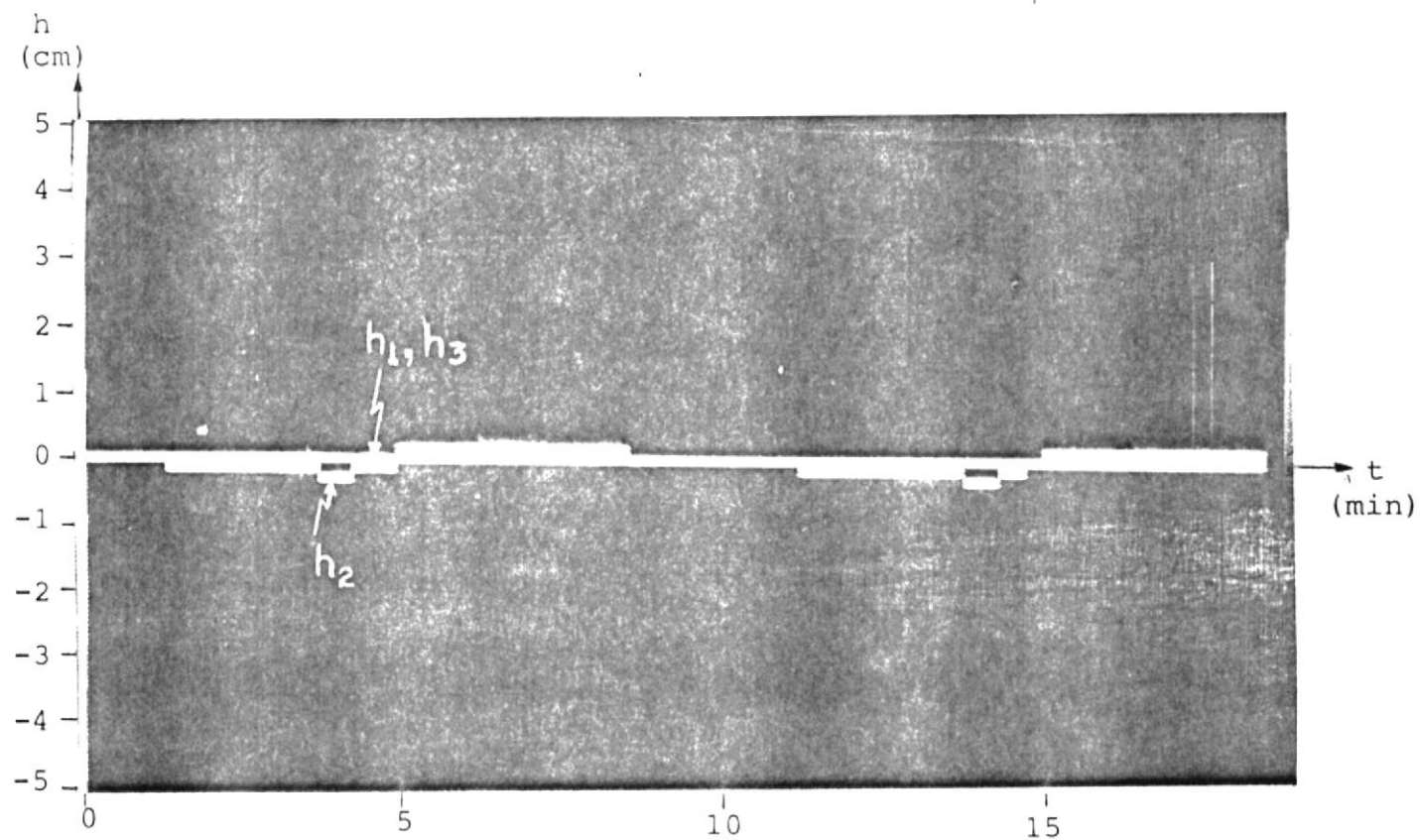


GRAFICO N° 37.- El sistema en estado estable con una constante de proporcionalidad K_P de 0.197.

$$KY = 8518.52 \text{ cm}^2/\text{min}$$

$$KP = 0.197$$

Observar el Gráfico N° 38.

- c.- El sistema en estado estable con perturbación de 3.33 cm. en el nivel del primer o tercer tanque, y una constante de proporcionalidad KP de 0.197.

Para simular este caso consideramos las ecuaciones de entrada, las constantes KH, KY y KP del caso (a) con $H1(0) = 3.33 \text{ cm}$ ó $H3(0) = 3.33 \text{ cm}$ en el primer o tercer tanque.

Observar el Gráfico N° 39.

- d.- El sistema en estado estable con perturbación de 3.33 cm en el nivel del segundo tanque y una constante de proporcionalidad KP de 0.197.

Para simular este caso, consideramos las ecuaciones de entrada, las constantes KH, KY y KP del caso (a) con $H2(0) = 3.33 \text{ cm}$ en el segundo tanque.

Observar el Gráfico N° 40.

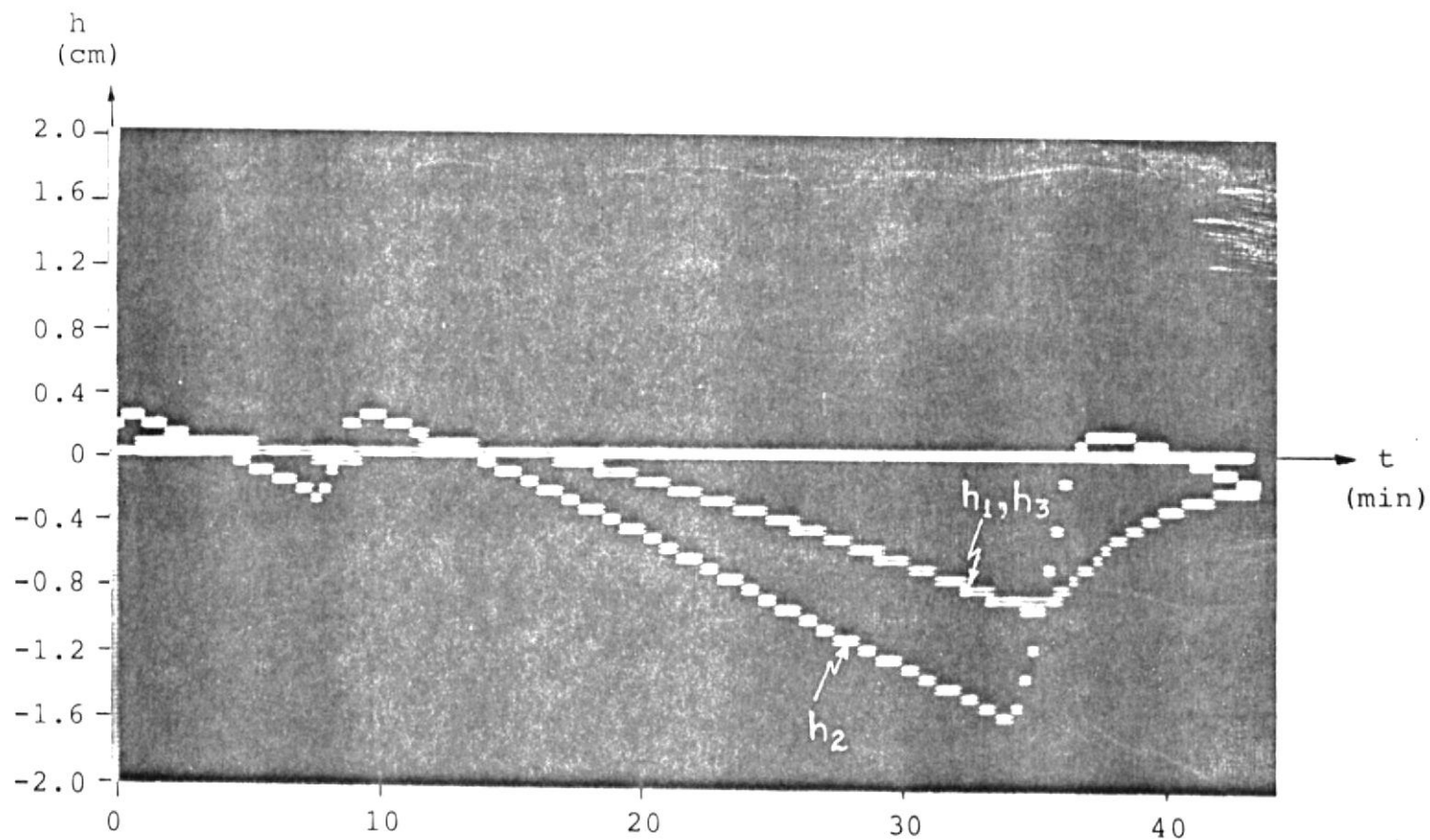


GRAFICO N° 38.- El sistema en estado estable con perturbación de vaciado y llenado (70-22 cm) en el tanque de reservorio y una constante de proporcionalidad K_P de 0.197.

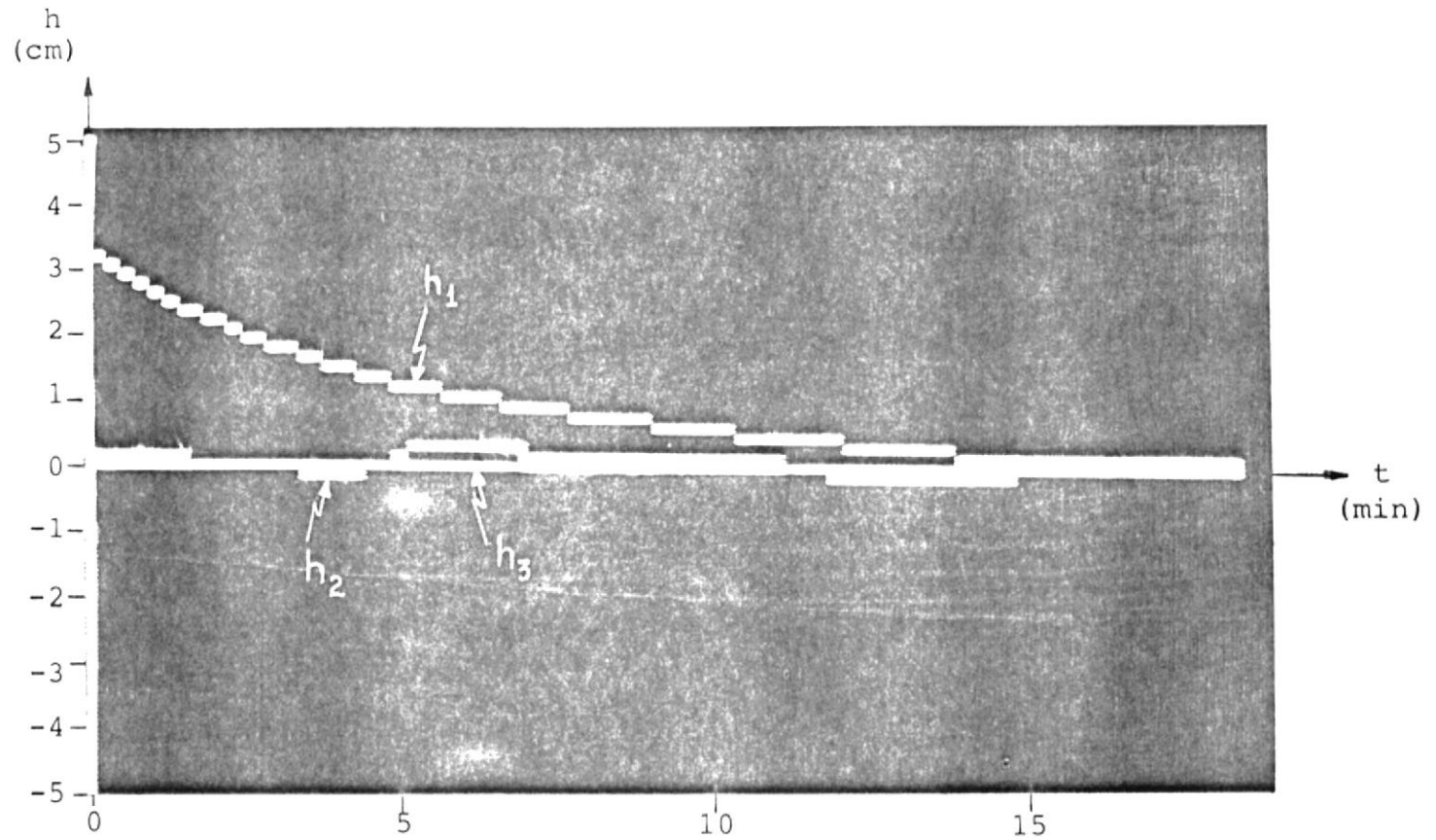


GRAFICO N° 39.- El sistema en estado estable con perturbación de 3.33 cm en el nivel del primer o tercer tanque y una constante de proporcionalidad K_P de 0.197.

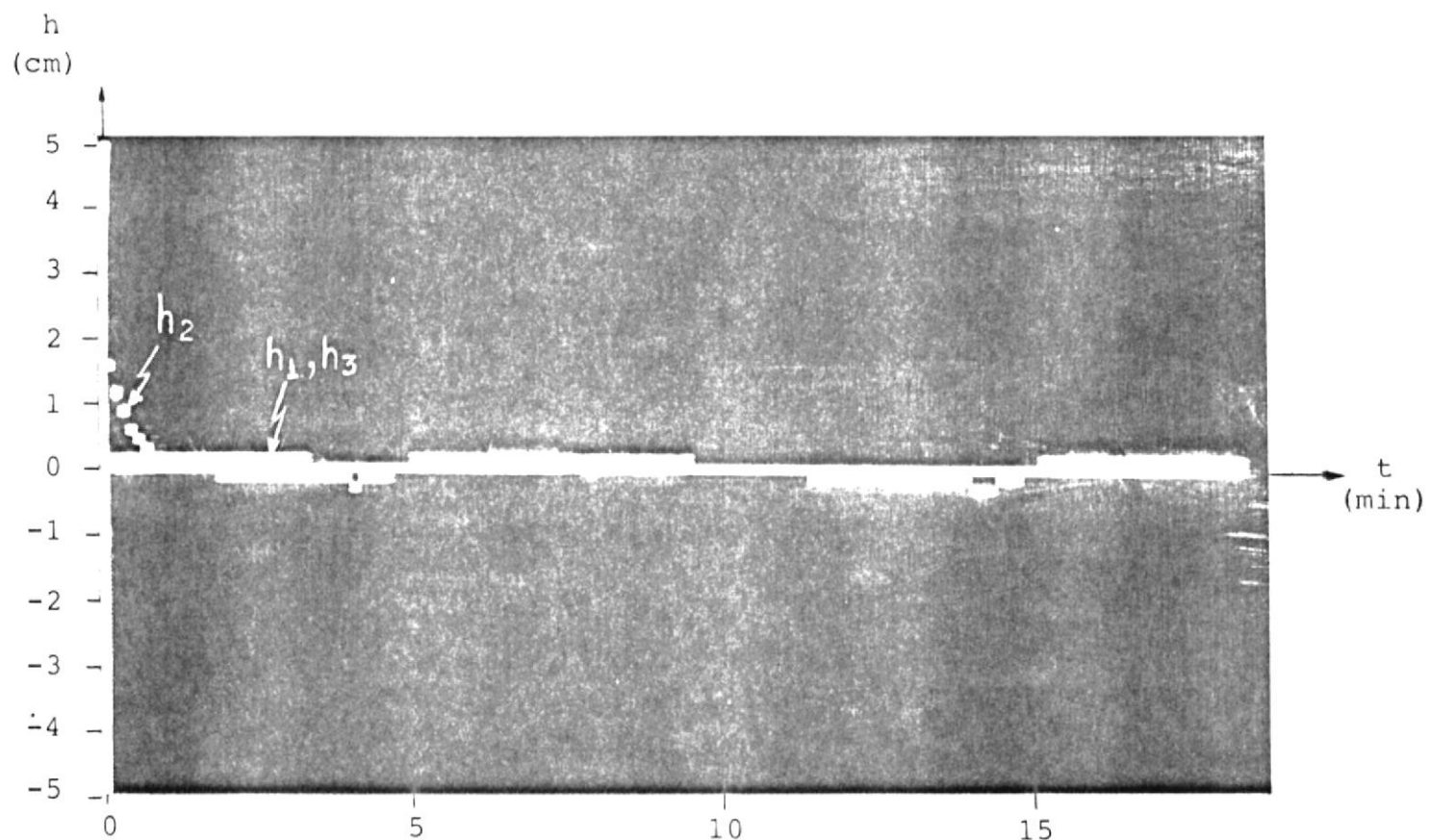


GRAFICO N° 40.- El sistema en estado estable con perturbación de 3.33 cm en el nivel del segundo tanque y una constante de proporcionalidad K_P de 0.197.

- e.- El sistema en estado estable con una perturbación escalón de 10 cm en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 2.5 min y con una constante de proporcionalidad KP de 0.197.

Para simular este caso consideramos la siguiente ecuación de entrada que representa lo que ocurre en el tanque de reservorio y las constantes KH, KY que representa el caudal que circula por la válvula debido a la altura de nivel del tanque de reservorio y a la posición del vástago de la válvula respectivamente.

$$HT = 10 \text{ cm}$$

$$T = 2.5 \text{ min}$$

$$KH = 19.164 \text{ cm}^2/\text{min}$$

$$KY = 8518.52 \text{ cm}^2/\text{min}$$

$$KP = 0.197$$

Observar el Gráfico N° 41.

Quinto Caso: De ciclo cerrado con control integral y la entrada en el primer tanque.

- a.- El sistema en estado estable con perturbación de vaciado y llenado (70-22 cm) en el tanque de reservorio y

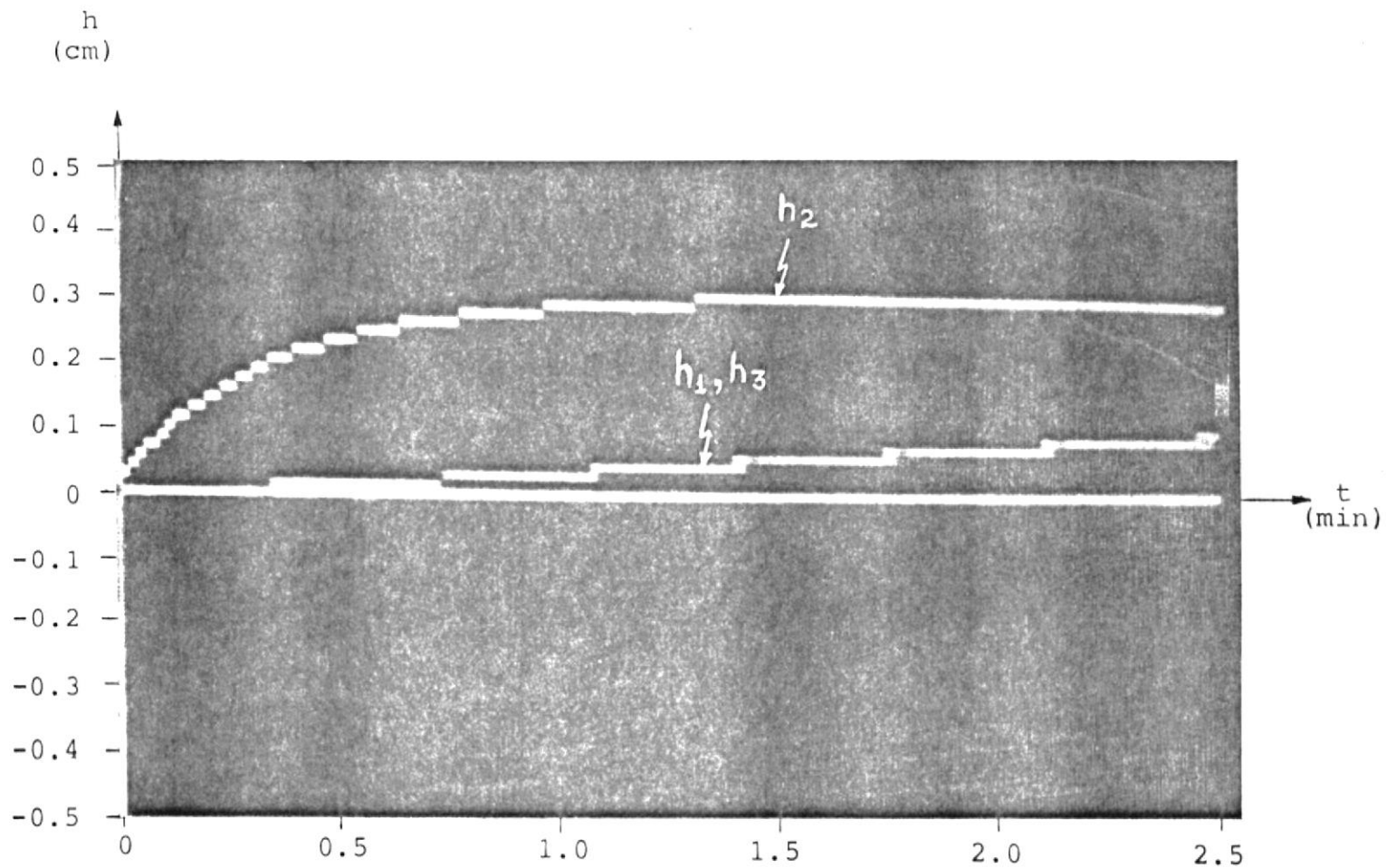


GRAFICO N° 41.- El sistema en estado estable con una perturbación escalón de 10 cm. en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 2.5 min con una constante de proporcionalidad K_P de 0.197.

una constante de integración KI de 0.05.

Para simular este caso consideramos las siguientes ecuaciones de entrada que representan lo que ocurre en el tanque de reservorio, las constantes KH, KY que representa el caudal que circula por la válvula debido a la altura de nivel del tanque de reservorio y a la posición del vástago de la válvula respectivamente.

$$HT = 8 - 1.89T \quad (\text{cm}) \quad T < 8.47 \quad (\text{min})$$

$$HT = -8 + 21.45T \quad (\text{cm}) \quad 8.47 < T < 9.22 \quad (\text{min})$$

$$HT = 8 - 2.04T \quad (\text{cm}) \quad 9.22 < T < 32.70 \quad (\text{min})$$

$$HT = -40 + 22.21T \quad (\text{cm}) \quad 32.70 < T < 34.87 \quad (\text{min})$$

$$HT = 8 - 1.89T \quad (\text{cm}) \quad 34.87 < T < 43.33 \quad (\text{min})$$

$$HT = -8 + 21.45T \quad (\text{cm}) \quad 43.33 < T < 44.08 \quad (\text{min})$$

$$KH = 19.164 \text{ cm}^2/\text{min}$$

$$KY = 8518.52 \text{ cm}^2/\text{min}$$

$$KI = 0.05$$

Observar el Gráfico N° 42.

- b.- El sistema en estado estable con perturbación de vaciado y llenado (70-22 cm) en el tanque de reservorio y una constante de integración KI = 0.2.

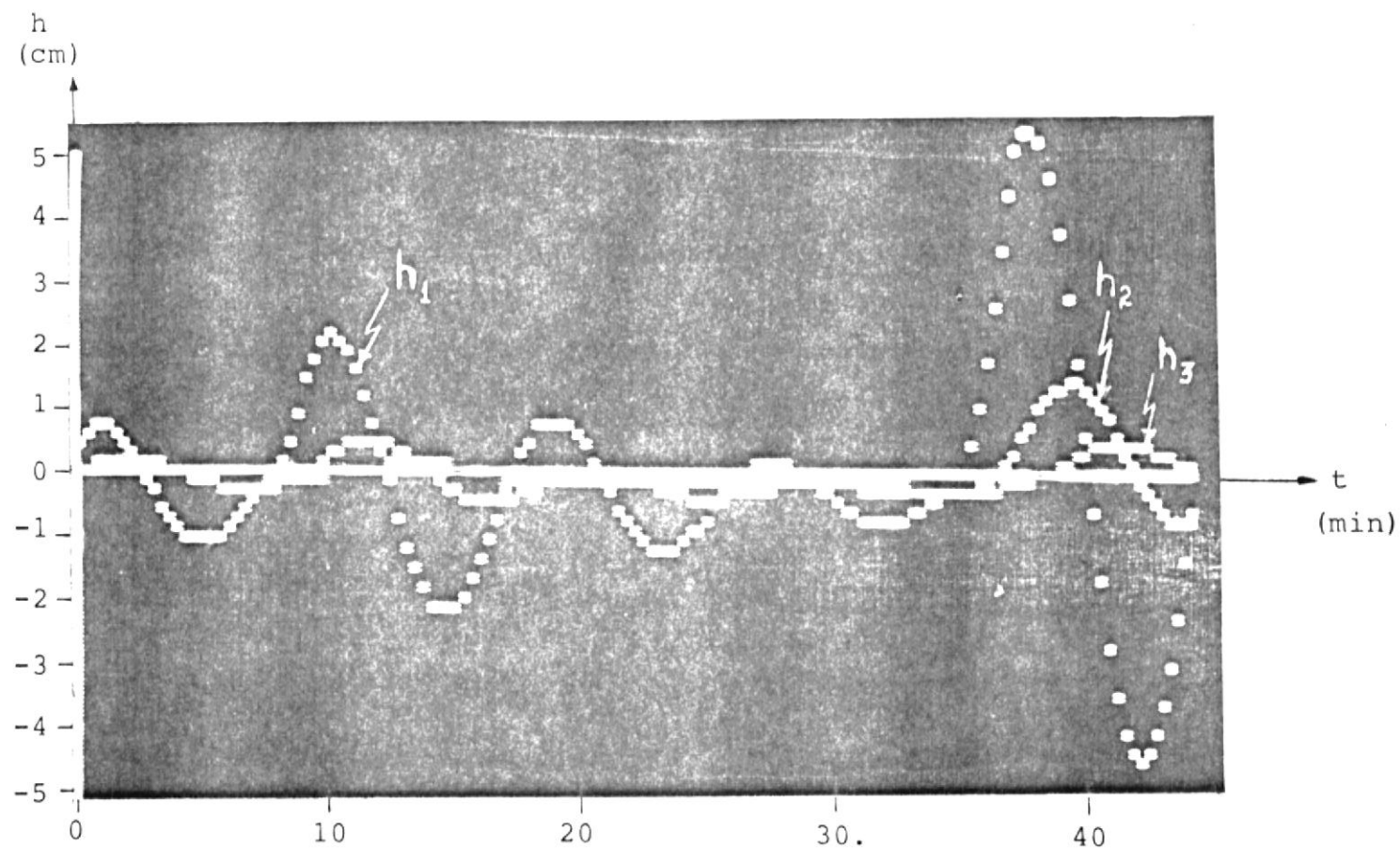


GRAFICO N° 42.- El sistema en estado estable con perturbación de vaciado y llenado (70 - 22cm) en el tanque de reservorio y una constante de integración K_I de 0.05.

Para simular este caso consideramos las ecuaciones de entrada y las constantes K_H y K_Y del caso (a) con una constante de integración $K_I = 0.2$.

Observar el Gráfico N° 43.

- c.- El sistema en estado estable con perturbación escalón de 10 cm en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 10 min y con una constante de integración $K_I = 0.05$.

Para simular este caso consideramos la siguiente ecuación de entrada que representa lo que ocurre en el tanque de reservorio y las constantes K_H , K_Y que representa el caudal que circula por la válvula debido a la altura de nivel del tanque de reservorio y a la posición del vástago de la válvula respectivamente.

$$H_T = 10 \text{ cm}$$

$$T = 10 \text{ min}$$

$$K_H = 19.164 \text{ cm}^2/\text{min}$$

$$K_Y = 8518.52 \text{ cm}^2/\text{min}$$

$$K_I = 0.05$$

Observar el Gráfico N° 44.

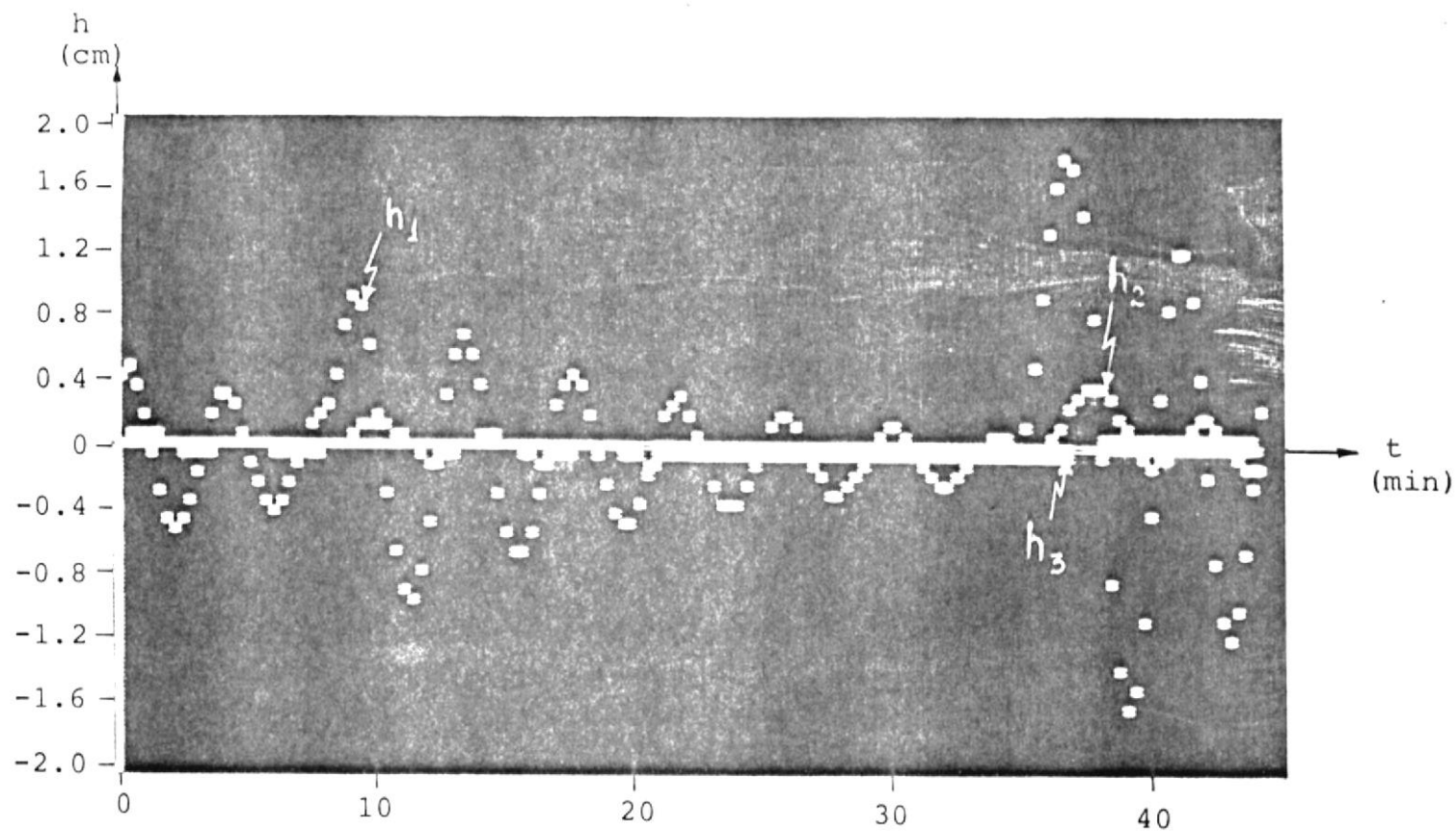


GRAFICO N° 43.- El sistema en estado estable con perturbación de vaciado y llenado (70 - 22 cm) en el tanque de reservorio y una constante de integración KI de 0.2.

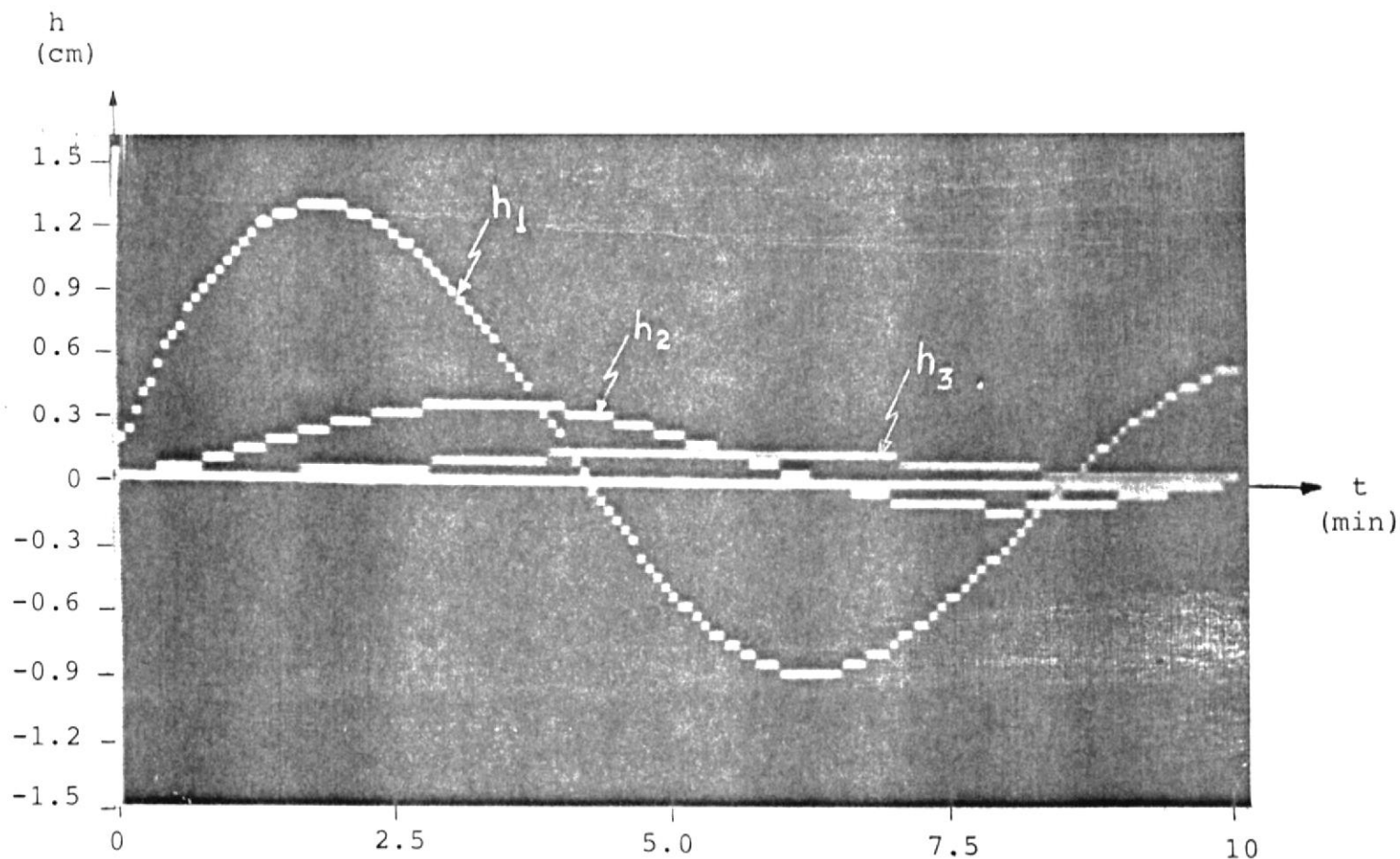


GRAFICO N° 44.- El sistema en estado estable con perturbación escalón de 10 cm en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 10 min y una constante de integración K_I de 0.05.

- d.- El sistema en estado estable con perturbación escalón de 10 cm en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 10 min y con una constante de integración $KI = 1$.

Para simular este caso consideramos la ecuación de entrada y las constantes KH y KY del caso (c) con una constante de integración $KI = 1$.

Observar el Gráfico N° 45.

- e.- El sistema en estado estable con perturbación rampa T en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 10 min y con una constante de integración $KI = 0.05$.

Para simular este caso consideramos la siguiente ecuación de entrada que representa lo que ocurre en el tanque de reservorio y las constantes KH , KY que representan el caudal que circula por la válvula debido a la altura de nivel del tanque de reservorio y a la posición del vástago de la válvula respectivamente.

$$HT = T \text{ (cm)}$$

$$T = 10 \text{ (min)}$$

$$KH = 19.164 \text{ cm}^2/\text{min}$$

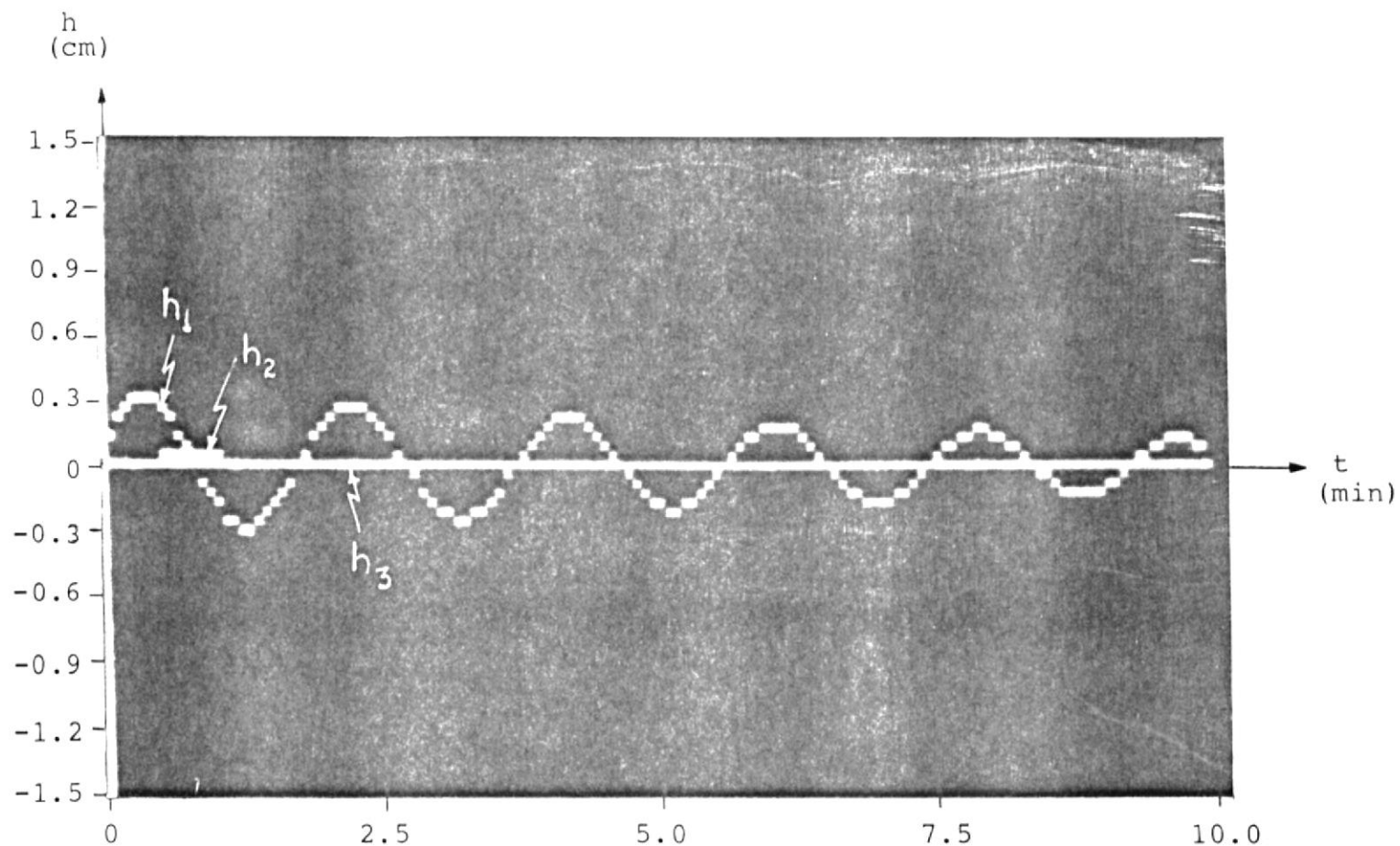


GRAFICO N° 45.- El sistema en estado estable con perturbación escalón de 10 cm en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 10 min y una constante de integración KI de 1.

$$KY = 8518.52 \text{ cm}^2/\text{min}$$

$$KI = 0.05$$

Observar el Gráfico N° 46.

f.- El sistema en estado estable con perturbación rampa T en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 10 min y con una constante de integración KI de 1.

Para simular este caso consideramos la ecuación de entrada y las constantes KH, y KY del caso (e) con una constante de integración KI = 1.

Observar el Gráfico N° 47.

Sexto Caso: De ciclo cerrado con control derivativo-proporcional y la entrada en el primer tanque.

a.- El sistema en estado estable con perturbación de vaciado y llenado (70-22 cm) en el tanque de reservorio y una constante de proporcionalidad KP de 0.5 y una constante K de 0.1.

Para simular este caso consideramos las siguientes ecuaciones de entrada que representa lo que ocurre en el

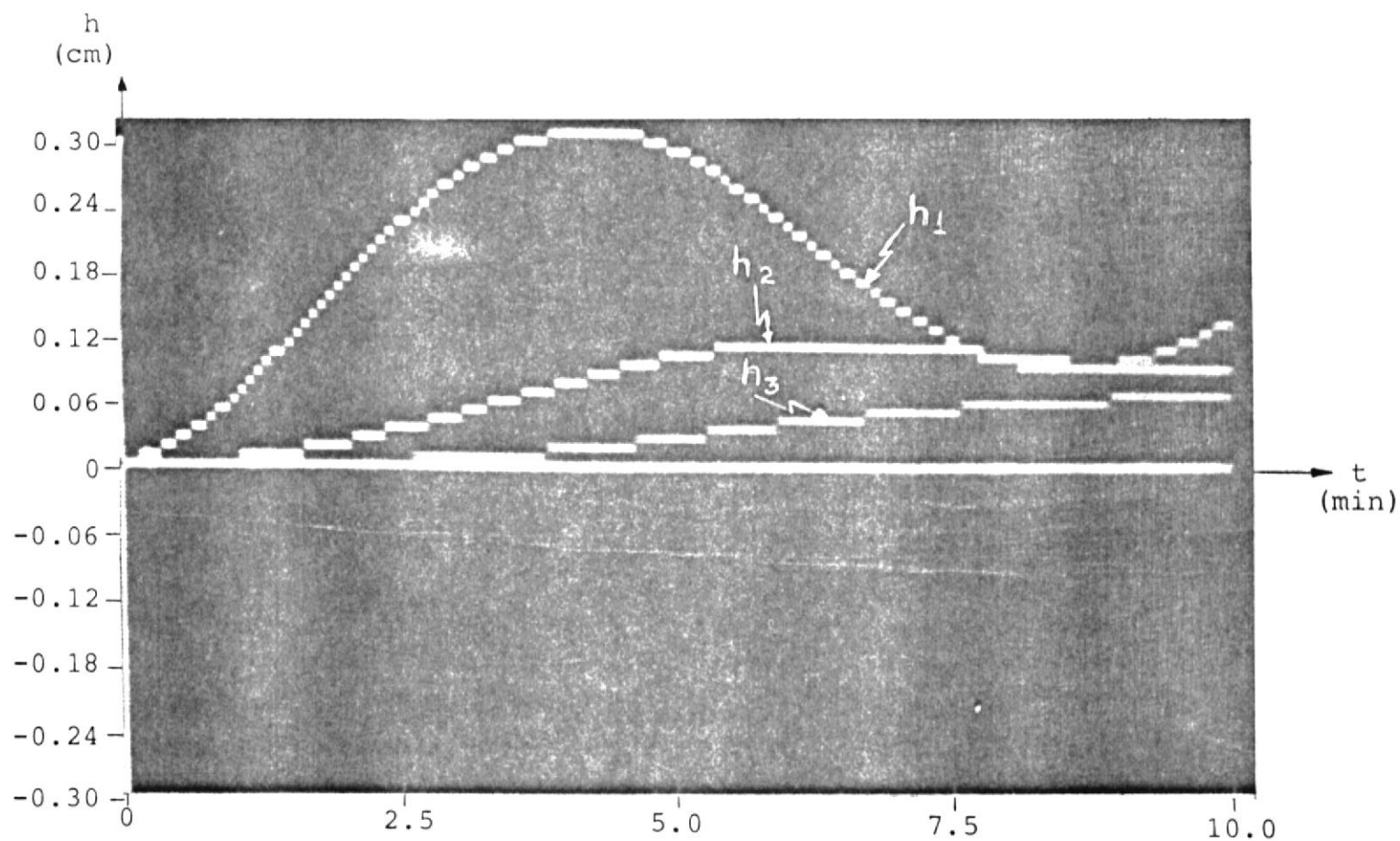


GRAFICO N° 46.- El sistema en estado estable con perturbación rampa T en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 10 min y una constante de integración KI de 0.05.

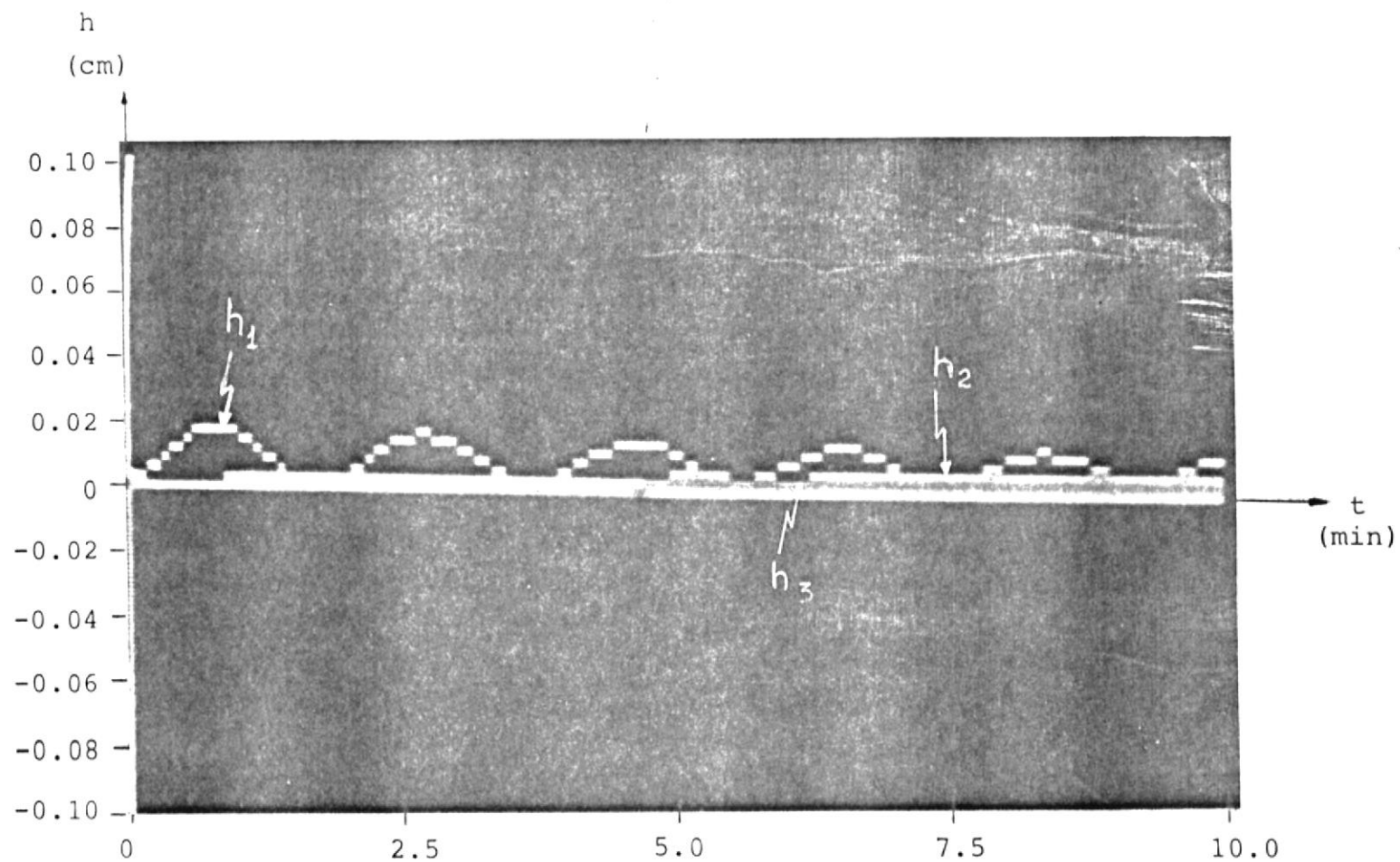


GRAFICO N° 47.- El sistema en estado estable con perturbación rampa T en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 10 min y una constante de Integración $KI = 1$.

tanque de reservorio, las constantes K_H , K_Y que representan el caudal que circula por la válvula debido a la altura de nivel del tanque de reservorio y a la posición del vástago de la válvula, respectivamente, además la constante K que representa un retraso de tiempo.

$$HT = 8 - 1.89T \quad (\text{cm}) \quad T < 8.47 \quad (\text{min})$$

$$HT = -8 + 21.45T \quad (\text{cm}) \quad 8.47 < T < 9.22 \quad (\text{min})$$

$$HT = 8 - 2.04T \quad (\text{cm}) \quad 9.22 < T < 32.70 \quad (\text{min})$$

$$HT = -40 + 22.21T \quad (\text{cm}) \quad 32.70 < T < 34.87 \quad (\text{min})$$

$$HT = 8 - 1.89T \quad (\text{cm}) \quad 34.87 < T < 43.33 \quad (\text{min})$$

$$HT = -8 + 21.45T \quad (\text{cm}) \quad 43.33 < T < 44.08 \quad (\text{min})$$

$$K_H = 19.164 \text{ cm}^2/\text{min}$$

$$K_Y = 8518.52 \text{ cm}^2/\text{min}$$

$$K = 0.1$$

$$K_P = 0.5$$

Observar el Gráfico N° 48

- b.- El sistema en estado estable con perturbación de vaciado y llenado (70-22cm) en el tanque de reservorio, una constante de proporcionalidad K_P de 0.197 y una constante K de 0.01.

Para simular este caso consideramos las ecuaciones de

entrada y las constantes K_H y K_Y del caso (a) con una constante de retardo de tiempo $K = 0.01$ y una constante de proporcionalidad $K_P = 0.197$.

Observar el Gráfico N° 49.

- c.- El sistema en estado estable con una perturbación escalón de 10 cm en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 2.5 min con una constante de proporcionalidad K_P de 0.197 y una constante K de 0.01.

Para simular este caso consideramos la siguiente ecuación de entrada que representa lo que ocurre en el tanque de reservorio y las constantes K_H y K_Y que representa el caudal que circula por la válvula debido a la altura de nivel del tanque de reservorio y a la posición del vástago de la válvula respectivamente, además una constante de retraso de tiempo K .

$$H_T = 10 \text{ cm}$$

$$T = 2.5 \text{ min}$$

$$K_H = 19.164 \text{ cm}^2/\text{min}$$

$$K_Y = 8518.52 \text{ cm}^2/\text{min}$$

$$K = 0.01$$

$$K_P = 0.197$$

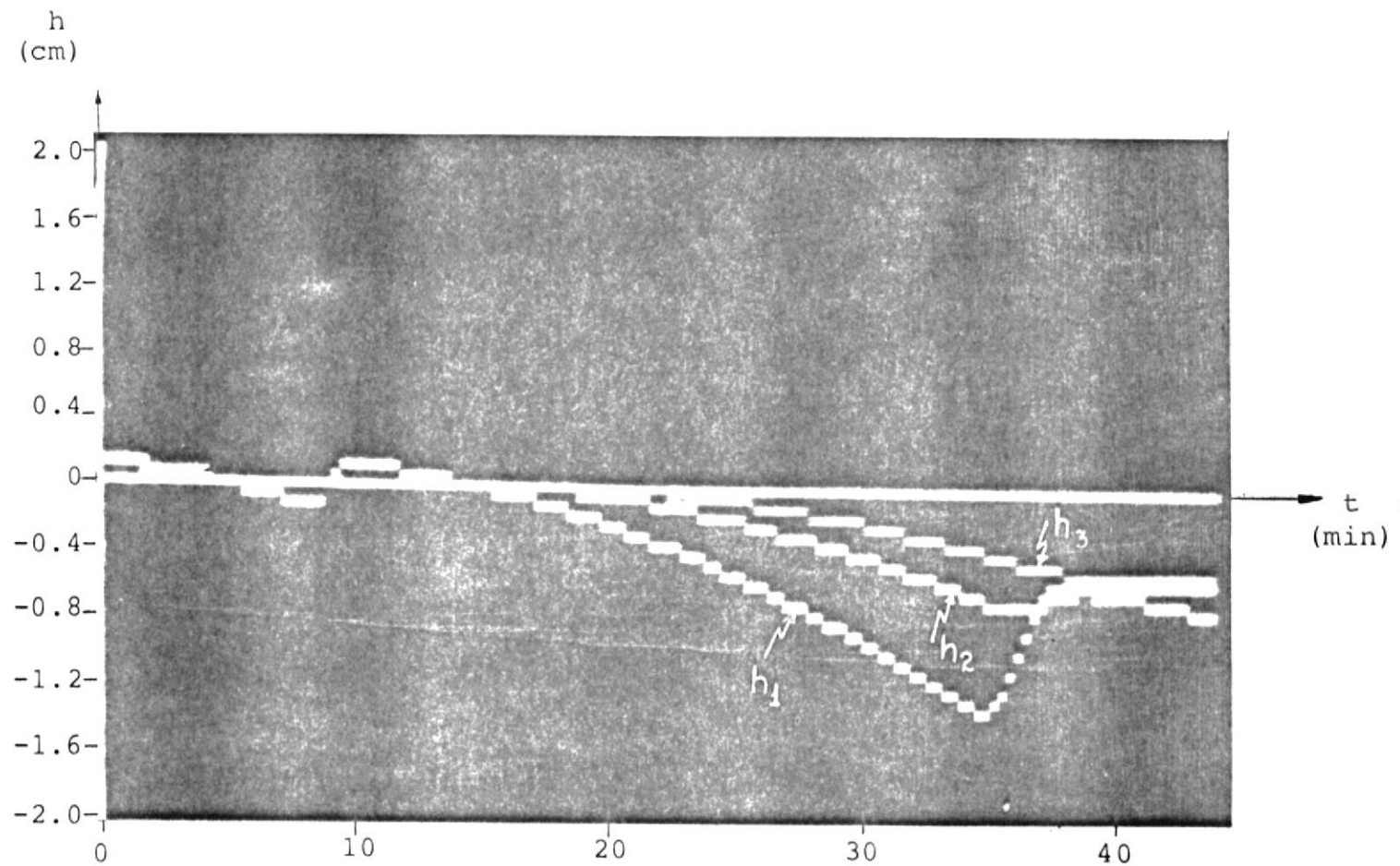


GRAFICO N° 48.- El sistema en estado estable con perturbación de vaciado y llenado (70-22 cm) en el tanque de reservorio, y una constante de proporcionalidad K_P de 0.5 y una constante K de 0.1.

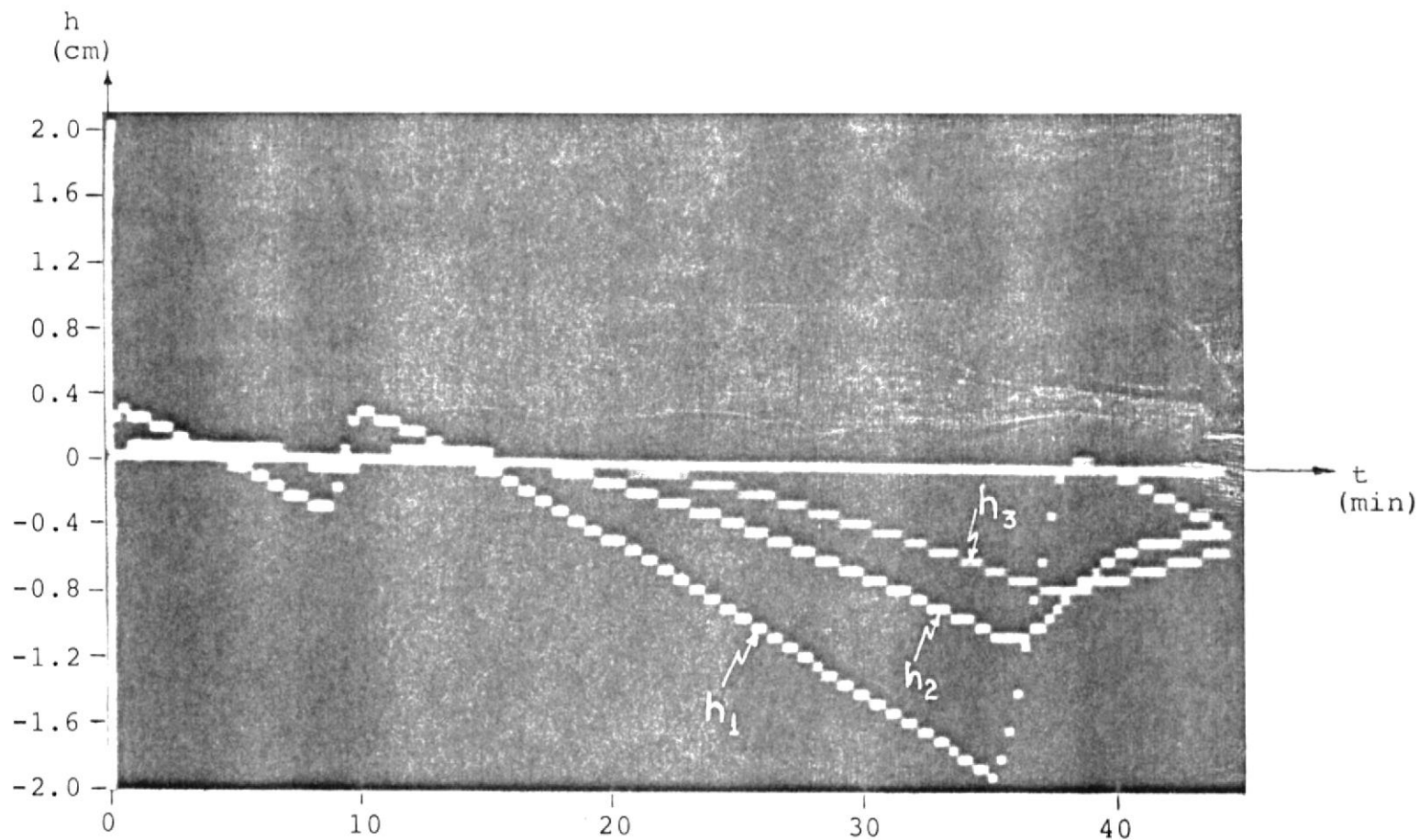


GRAFICO N° 49.- El sistema en estado estable con perturbación de vaciado y llenado (70-22 cm) en el tanque de reservorio, una constante de proporcionalidad K_P de 0.197 y una constante K de 0.01.

Observar el Gráfico N° 50.

- d.- El sistema en estado estable con una perturbación escalón de 10 cm en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 2.5 min con una constante de proporcionalidad K_P de 0.5 y una constante K de 0.01.

Para simular este caso consideramos la ecuación de entrada, las constantes K_H y K_Y del caso c) con una constante de retraso de tiempo $K = 0.01$ y una constante de proporcionalidad $K_P = 0.5$.

Observar el Gráfico N° 51.

- e.- El sistema en estado estable con una perturbación escalón de 10 cm en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 2.5 min con una constante de proporcionalidad K_P de 0.5 y una constante K de 0.6.

Para simular este caso consideramos la ecuación de entrada y las constantes K_H , K_Y del caso c) con una constante de retraso de tiempo $K = 0.6$ y una constante de proporcionalidad $K_P = 0.5$.

Observar el Gráfico N° 52.

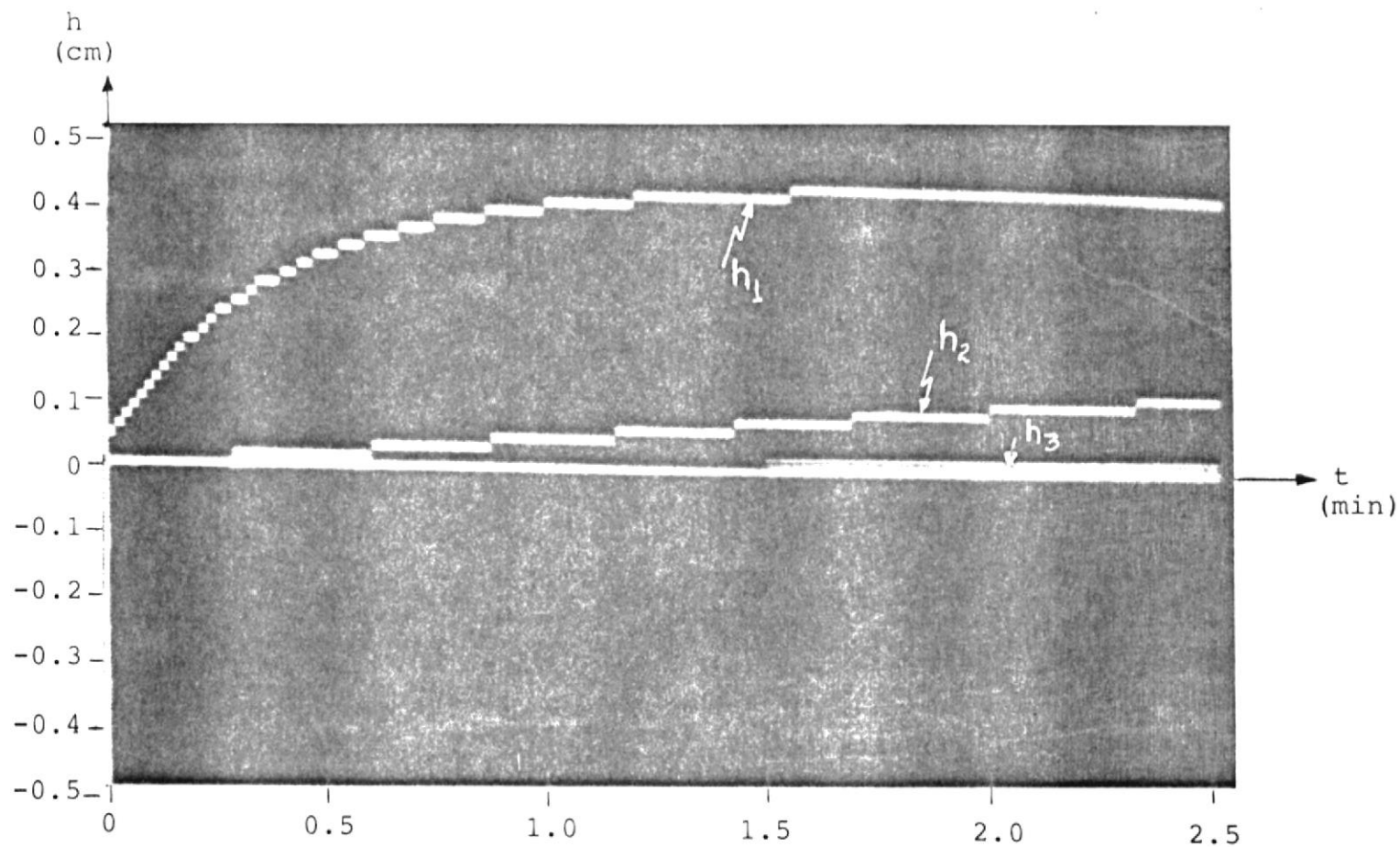


GRAFICO N° 50.- El sistema en estado estable con perturbación escalón de 10 cm en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 2.5 min; una constante de proporcionalidad K_P de 0.197 y una constante K de 0.01.

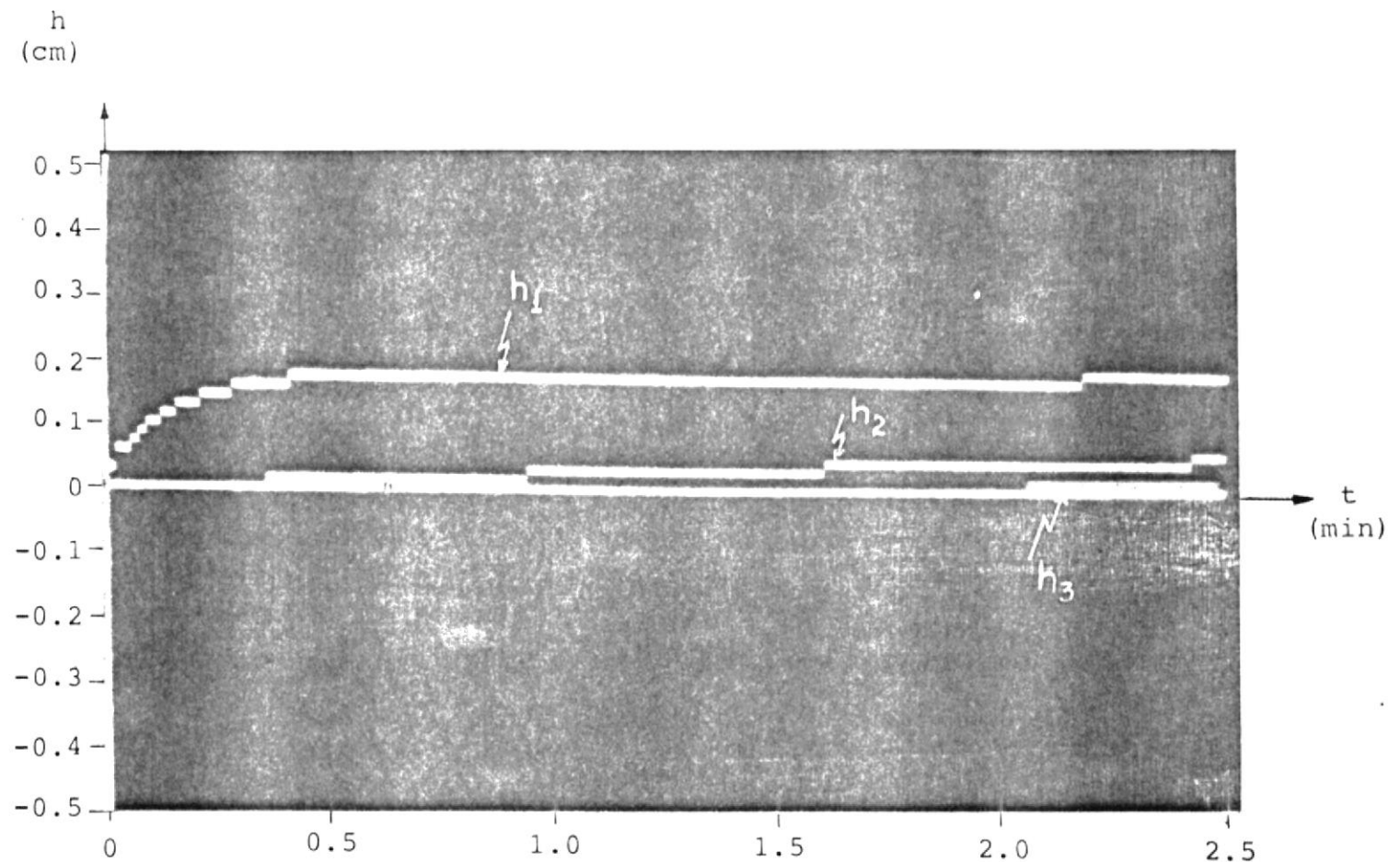


GRAFICO N° 51.- El sistema en estado estable con una perturbación escalón de 10 cm en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 2.5 min, una constante de proporcionalidad K_P de 0.5 y una constante K de 0.01.

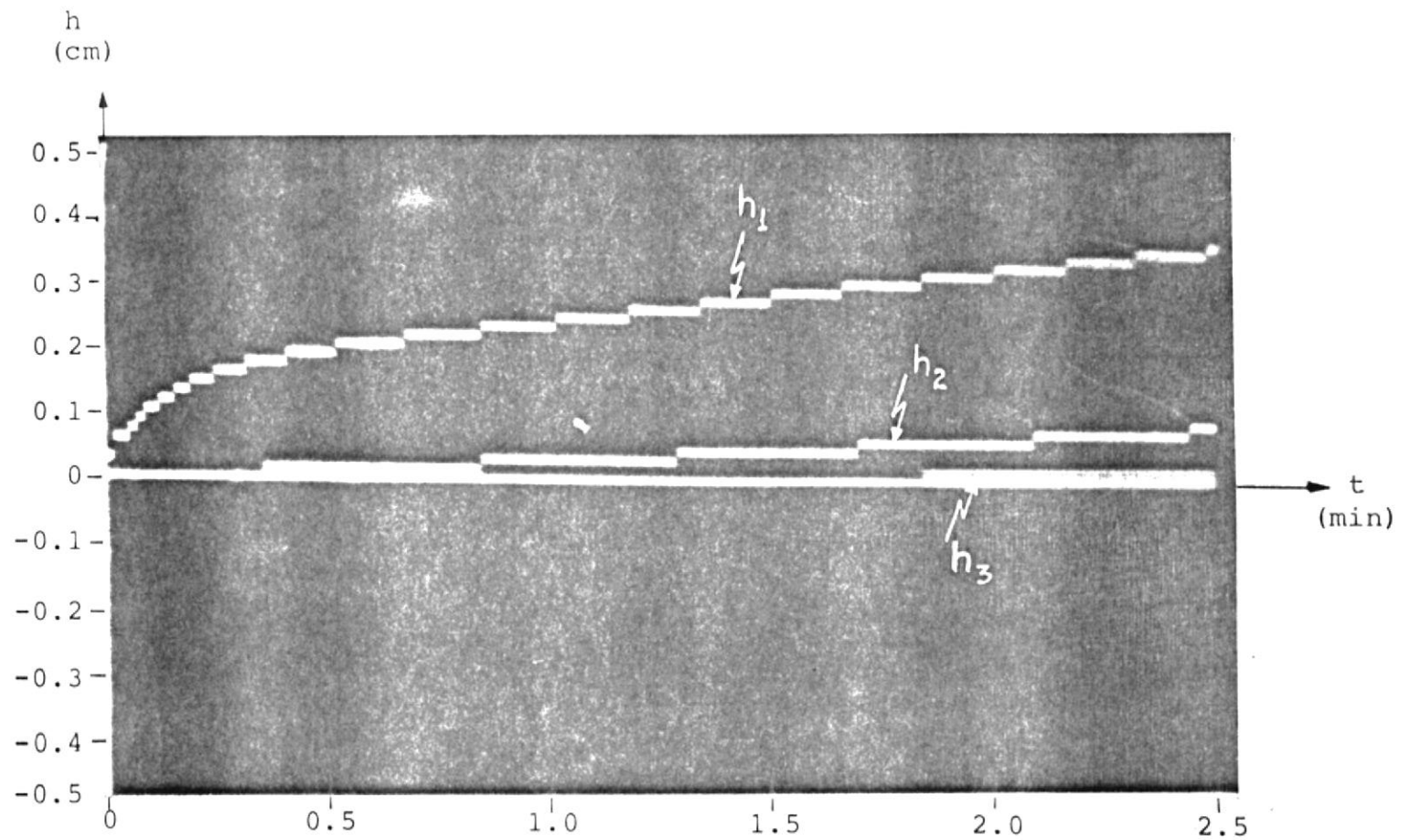


GRAFICO N° 52.- El sistema en estado estable con una perturbación escalón de 10 cm en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 2.5 min, una constante de proporcionalidad K_P de 0.5 y una constante K de 0.6

- f.- El sistema en estado estable con perturbación rampa $4T$ en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 2.5 min, con una constante de proporcionalidad K_P de 0.197 y una constante K de 0.01.

Para simular este caso consideramos la siguiente ecuación de entrada que representa lo que ocurre en el tanque de reservorio, las constantes K_H y K_Y que representa el caudal que circula por la válvula debido a la altura de nivel del tanque de reservorio y a la posición del vástago de la válvula respectivamente, además una constante de retraso de tiempo K .

$$HT = 4T \text{ cm}$$

$$T = 2.5 \text{ min}$$

$$K_H = 19.164 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$K_Y = 8518.52 \text{ cm}^2/\text{min}$$

$$K = 0.01$$

$$K_P = 0.197$$

Observar el Gráfico N° 53.

- g.- El sistema en estado estable con perturbación rampa $4T$ en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 2.5 min, con una constante de proporcionalidad K_P

de 0.5 y una constante K de 0.01.

Para simular este caso consideramos la ecuación de entrada y las constantes K_H , K_Y del caso f) con una constante de retraso de tiempo $K = 0.01$ y una constante de proporcionalidad $K_P = 0.5$.

Observar el Gráfico N° 54.

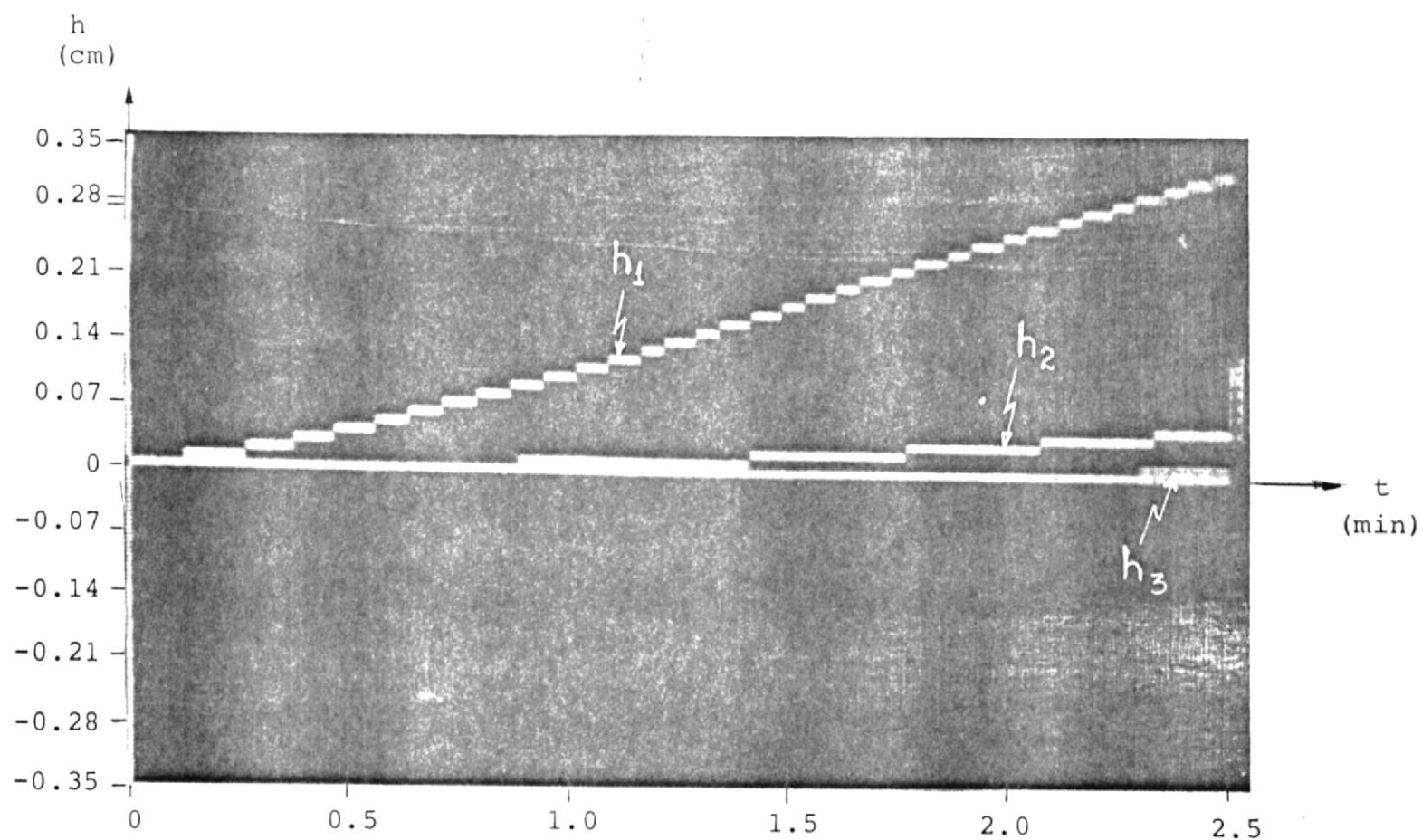


GRAFICO N° 53.- El sistema en estado estable con perturbación rampa $4T$ en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 2.5 min, con una constante de proporcionalidad K_P de 0.197 y una constante K de 0.01

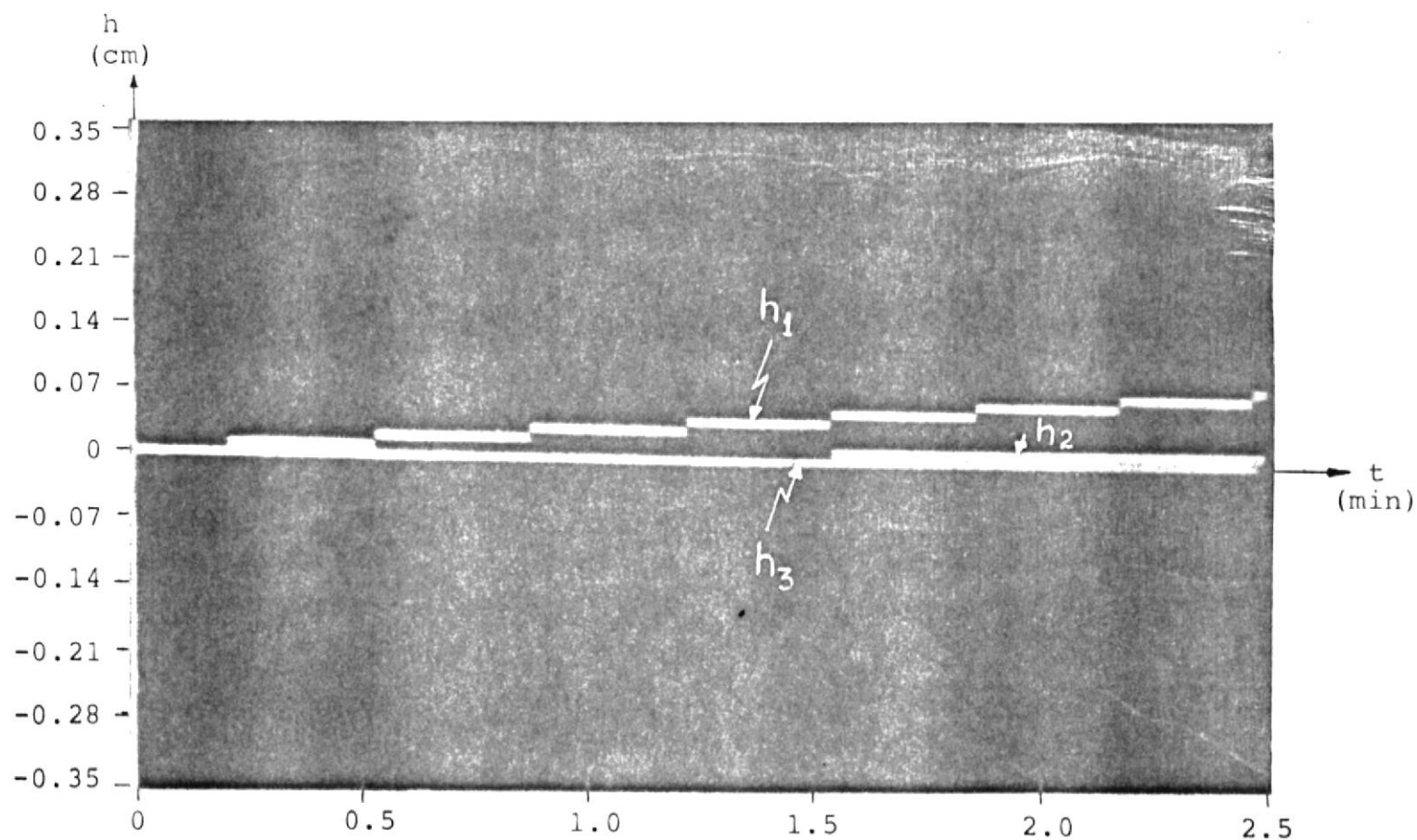


GRAFICO N° 54.- El sistema en estado estable con perturbación rampa $4T$ en el tanque de reservorio en un determinado tiempo de 2.5 min', con una constante de proporcionalidad K_P de 0.5 y una constante K de 0.01.

B I B L I O G R A F I A

- 1.- Canales Ruiz R. y Barrera Rivera R., Análisis de Sistemas Dinámicos y Control Automático, México 1, D.F., Limusa S.A., 1977.
- 2.- Deruso P.M., Roy R. J. y Close Ch. M., State Variables for Engineers, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1965.
- 3.- Dorf R.C., Sistemas Automáticos de Control, Teoría y Práctica, México 20, D.F., Fondo Educativo Interamericano S.A., 1977.
- 4.- Harrison L.H. y Bollinger J.G., Controles Automáticos, México 1, D.F., Trillas F., S.A., 1969.
- 5.- Kuo C.B., Automatic Control Systems, Englewood Cliffs N.J., Prentice Hall, Inc. Tercera Edición, 1975.
- 6.- Ogata G., Ingeniería de Control Moderna, Madrid, Prentice Hall Internacional, 1973.
- 7.- Ogata K., State Space Analysis of Control Systems, En-

glewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, Inc. 1967.

- 8.- Raven H.F., Automatic Control Engineering, Estados Unidos, McGraw-Hill Book Company, Segunda Edición, 1968.
- 9.- Takahashi Y. y Rabins M.J. y Auslander D.M., Control and Dynamic Systems, Estados Unidos, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Segunda Edición, 1972.
- 10.- Zadeh L.A. y Desde Ch.A. Lineal System Theory, California, McGraw-Hill Book Company, 1963.