

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL

Facultad de Ingeniería en Ciencias de la Tierra

Análisis de la interacción humano-estructura en el diseño de puentes peatonales modulares con sección trapezoidal en acero plegado en frío.

PROYECTO DE GRADUACIÓN

Previo la obtención del Título de:

Magister en Estructuras Civiles Sismorresistentes

Presentado por:

Ronnie Atair Arteaga Flores

GUAYAQUIL - ECUADOR

Año: 2025

DEDICATORIA

A Dios y a mi madre hermosa Ninfa
Beatriz Flores Farfán.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco en primer lugar a Dios por que en sus divinos planes estaba que regrese a mi casa amada ESPOL para poder realizar este paso en mi vida profesional, también agradezco a mis tutores, Natividad Leonor García-Troncoso Ph.D. y Juan Pablo Molina MSc por darme la confianza y extenderme su mano para continuar con este proyecto, a mi querida madre Ninfa Beatriz Flores Farfán por seguir creyendo en mi y seguir orando por mi y por mis estudios.

DECLARACIÓN EXPRESA

“Los derechos de titularidad y explotación, me corresponde conforme al reglamento de propiedad intelectual de la institución; Ronnie Atair Arteaga Flores y doy mi consentimiento para que la ESPOL realice la comunicación pública de la obra por cualquier medio con el fin de promover la consulta, difusión y uso público de la producción intelectual”

.....

Ronnie Arteaga

EVALUADORES

.....

Nadia Quijano MSc

PROFESOR DE LA MATERIA

.....

Samantha Hidalgo MSc

PROFESOR DE LA MATERIA

.....

Natividad García Ph.D.

PROFESOR TUTOR

.....

Juan Molina MSc

PROFESOR TUTOR

RESUMEN

En el último siglo, a medida que la sociedad avanza a pasos gigantes, las estructuras avanzan de acuerdo con las necesidades de la sociedad, entre estas estructuras, muchas obras civiles han presentado problemas con exceso de vibraciones, como escaleras, pasarelas, graderíos para estados, puentes peatonales, etc. Estas estructuras muchas veces presentan mucha flexibilidad y poco amortiguamiento aumentando potencialmente fallas por vibraciones exageradas sobre todo por el fenómeno de la interacción humano-estructura.

El fenómeno de la interacción se origina a partir del acoplamiento de dos subsistemas, entre la locomoción humana y la respuesta del puente ante esta excitación pudiendo generar resonancia cuando la frecuencia del puente es igual o se aproxima a la frecuencia de los pasos humanos.

Si bien la mayoría de los puentes peatonales se diseñan conforme a las normativas vigentes, aún se tiene mucha incertidumbre sobre el comportamiento de estas estructuras ante cargas dinámicas como la de los peatones que pueden coincidir en comportamientos no deseables, que terminan generando fallas estructurales o fallas por servicio ante vibraciones excesivas.

Este estudio tiene como centro el análisis de puentes peatonales de sección compuesta conformado por una viga de acero plegada en frío con geometría trapezoidal y la losa de hormigón armado prefabricado.

Dicho estudio desarrolló mediante el software Octave un modelo numérico acoplado entre el peatón y el puente en el cual el peatón se presenta como un subsistema dinámico biodinámico y la estructura del puente como un subsistema de elementos finitos, de tal manera que se permita evaluar de manera explícita la interacción bidireccional entre estos subsistemas.

Se analizaron 3 secciones transversales de puentes y 2 longitudes típicas de vanos de puentes (13 y 20 m), evaluando sus frecuencias naturales y las aceleraciones máximas inducidas por el paso de un peatón representativo, estos valores evidencian que la frecuencia natural fundamental del puente, es el parámetro dominante que gobierna la respuesta vibratoria del puente, además se determinó que las estructuras con frecuencias inferiores a 3.5 Hz presentan aceleraciones elevadas que superan los

límites de confort establecidos por los diferentes códigos internacionales como la AASHTO LRFD, generando condiciones de servicio inaceptables.

También se evidenció que, para secciones con frecuencias altas, las respuestas dinámicas son estables, esto quiere decir, que las aceleraciones obtenidas son imperceptibles para los peatones.

El presente proyecto de titulación analiza el fenómeno de la interacción humano-estructura en puentes peatonales modulares en los cuales, considera su influencia de manera directa en el comportamiento dinámico, el confort de los usuarios y del desempeño estructural con el objetivo de cuantificar sus aceleraciones máximas y poder determinar el nivel de confort en cada puente, dado que las normas actuales no obligan a realizar un análisis dinámico por servicios y vibraciones en los puentes peatonales y no establecen parámetros de control para evitar fallas por la interacción humano-estructura.

Palabras Clave: Resonancia, vibración, subsistema, confort y acoplamiento.

ABSTRACT

Over the last century, as society has advanced at an accelerated pace, structural systems have evolved in response to societal needs. Among these structures, numerous civil engineering works—such as stairways, footbridges, grandstands, and pedestrian bridges—have exhibited problems related to excessive vibrations. These structures often present high flexibility and low damping, which significantly increases their susceptibility to vibration-related issues, particularly due to the phenomenon known as human–structure interaction.

This phenomenon originates from the coupling of two subsystems: human locomotion and the structural response of the bridge to dynamic excitation. Resonance may occur when the natural frequency of the structure coincides with or approaches the frequency associated with human walking.

Although most pedestrian bridges are designed in accordance with current design codes, considerable uncertainty remains regarding their behavior under dynamic loads induced by pedestrians. Such loads may lead to undesirable responses, potentially resulting in structural deficiencies or serviceability failures due to excessive vibrations. This study focuses on the analysis of pedestrian bridges with composite sections, consisting of a cold-formed trapezoidal steel girder and a prefabricated reinforced concrete deck slab. A numerically coupled pedestrian–bridge model was developed using Octave, in which the pedestrian is represented as a biodynamic subsystem and the bridge structure is modeled as a finite element subsystem. This approach allows for the explicit evaluation of the bidirectional interaction between both subsystems.

Three different bridge cross-sections and two typical span lengths (13 m and 20 m) were analyzed. The corresponding natural frequencies and maximum accelerations induced by a representative pedestrian were evaluated. The results demonstrate that the fundamental natural frequency of the bridge is the dominant parameter governing its vibratory response. Furthermore, it was determined that structures with natural frequencies below 3.5 Hz exhibit high acceleration levels that exceed the comfort limits established by international design codes such as AASHTO LRFD, leading to unacceptable serviceability conditions.

Conversely, bridge sections with higher natural frequencies exhibit stable dynamic responses, characterized by acceleration levels that are imperceptible to pedestrians. This graduation project investigates the phenomenon of human–structure interaction in modular pedestrian bridges, considering its direct influence on dynamic behavior, user comfort, and structural performance. The primary objective is to quantify maximum acceleration levels and assess the comfort performance of each bridge configuration, particularly in light of the fact that current design codes do not mandate dynamic serviceability analyses for pedestrian bridges nor establish explicit control parameters to prevent failures associated with human–structure interaction.

Keywords: *Resonance, vibration, subsystem, comfort, coupling.*

ÍNDICE GENERAL

EVALUADORES.....	5
RESUMEN.....	I
<i>ABSTRACT</i>	III
ÍNDICE GENERAL.....	V
ABREVIATURAS.....	VIII
SIMBOLOGÍA.....	IX
ÍNDICE DE FIGURAS.....	XI
ÍNDICE DE TABLAS.....	XIII
CAPÍTULO 1.....	14
1 INTRODUCCIÓN.....	14
1.1 Introducción del proyecto de graduación.....	14
1.2 Antecedentes.....	15
1.3 Problemática a resolver.....	17
1.4 Justificación.....	18
1.5 Objetivos.....	18
1.5.1 Objetivo General.....	18
1.5.2 Objetivos Específicos.....	18
CAPÍTULO 2.....	20
2 Desarrollo del proyecto.....	20
2.1 Marco conceptual.....	20
2.1.1 Comportamiento dinámico del puente peatonal.....	21
2.1.2 Interacción Humano estructura.....	22
2.1.3 Locomoción Humana.....	22
2.1.4 Resonancia en puentes.....	23

2.1.5	Confort y servicio (AASHTO LRDF).....	23
2.1.6	Concepto de amortiguador de masa sintonizada.....	24
2.1.7	Importancia del diseño integrado del TMD	24
2.2	Marco metodológico.....	25
2.2.1	Definición de las propiedades dinámicas y modelación del puente.....	26
2.2.2	Modelación dinámica del peatón	27
2.2.3	Condiciones iniciales del análisis dinámico.....	28
2.2.4	Definición de nodos y orden del desplazamiento del peatón	29
2.2.5	Resolución de subsistemas acoplados	29
2.2.6	Frecuencias y aceleraciones del puente peatonal	29
2.2.7	Análisis de resultados	29
2.2.8	Comparativas con normas vigentes.....	29
2.2.9	Amortiguador de masa sintonizada usando el método óptimo de ASAMI	30
2.2.10	Frecuencia óptima de la sintonización (Asami).....	30
2.2.11	Amortiguamiento óptimo del TMD.....	30
2.2.12	Cálculo directo de los parámetros del TMD.....	31
2.2.13	Presentación de los resultados dinámicos.....	31
2.2.14	Solución a diseñar	31
CAPÍTULO 3.....		33
3	RESULTADOS Y DISCUSIÓN	33
3.1	Resultados	33
3.1.1	Resultados.....	38
3.1.2	Análisis de resultados	40
3.1.3	Discusión de resultados.....	44
3.1.4	Implicaciones en el diseño estructural de puentes peatonales	48

3.1.5	Análisis del prediseño del TDM para control de vibraciones	48
3.1.6	Síntesis de la discusión.....	50
CAPÍTULO 4	52
4	Conclusiones Y Recomendaciones	52
4.1	Conclusiones	52
4.1.1	Caracterización de las propiedades dinámicas del sistema estructural puente - peatón	52
4.1.2	Sensibilidad dinámica del puente peatonal ante los cambios geométricos.....	52
4.1.3	Interacción humano – estructura y evaluación del confort del peatón. 53	
4.1.4	Aplicación del amortiguador de masa sintonizada en el puente peatonal.....	54
4.1.5	Implicaciones para el diseño estructural de los puentes peatonales. 54	
4.1.6	Conclusión general.....	55
4.2	Recomendaciones	55
BIBLIOGRAFÍA	58
ANEXOS	62

ABREVIATURAS

ESPOL	Escuela Superior Politécnica del Litoral
AASHTO	American Association of State Highway
NEC	Norma Ecuatoriana de la Construcción
FHWA	Federal Highway Administration
HIVOSS	Human Induced Vibrations of Steel Structures
LRFD	Load and Resistance Factor Design
ISO	International Organization for Standardization
TMD	Tuned Mass Damper – Amortiguador de masa Sintonizada
SDOF	Single Degree of Freedom – Sistema de un grado de libertad
MSDO	Multiple Degrees of Freedom – Sistema de multiples grados de libertad

SIMBOLOGÍA

Hz	Hertz
ton	Tonelada Fuerza
kg	Kilogramos Fuerza
m	Metros
s	Segundos
N	Newtons
m	Masa modal equivalente
k	Rigidez equivalente
c	Coefficiente de amortiguamiento
ω_n	Frecuencia natural circular
f_n	Frecuencia natural
ξ	Razón de amortiguamiento estructural
$y(t)$	Desplazamiento del puente en función del tiempo
$\dot{y}(t)$	Velocidad del puente en función del tiempo
$\ddot{y}(t)$	Aceleración del puente en función del tiempo
m_d	Masa del TMD
k_d	Rigidez del TMD
c_d	Amortiguamiento del TMD
ω_d	Frecuencia natural circular del TMD
f_d	Frecuencia del TMD
ξ_d	Razón de amortiguamiento del TMD
μ	Relación de masas
f_{opt}	Relación óptima de frecuencias
$\xi_{d,opt}$	Amortiguamiento óptimo del TMD
M	Matriz de masa
C	Matriz de amortiguamiento
K	Matriz de rigidez
$F_i^{con}(t)$	Matriz Fuerza de contacto del peatón
$\dot{q}(t)$	Velocidad del centro de masa del peatón

$q(t)$	Desplazamiento del centro de masa del peatón
a_{max}	Aceleración máxima
a_{lim}	Aceleración limite de confort peatonal

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 Interacción humano – estructura.	14
Figura 2: Puente Solférino – París.	16
Figura 3: Puente Millennium Bridge – Londres.	16
Figura 4 .- Puente modular conformado por viga de acero plegada en frío y losa de hormigón armado.	21
Figura 5 Modelo del sistema dinámico humano – estructura.	22
Figura 6.- Esquema de la metodología en el proyecto.	25
Figura 7.- Algoritmo para resolución de sistemas acoplados para puentes peatonales	34
Figura 8.- Código ensamble de la matriz de rigidez.	35
Figura 9.- Código para determinar las frecuencias naturales de los puentes peatonales.	35
Figura 10.- Modelo estructural del puente peatonal realizado en SAP2000.	36
Figura 11.- Subestructura del peatón.	37
Figura 12.- Representación del puente por bloques.	37
Figura 13.- Sección transversal 1 correspondiente al puente peatonal tipo 1.	38
Figura 14.- Sección transversal 2 correspondiente al puente peatonal tipo 2.	38
Figura 15.- Sección transversal 3 correspondiente al puente peatonal tipo 3.	39
Figura 16.- Aceleraciones relativas correspondientes a la interacción del peatón con el puente peatonal de sección 1 y longitud 13 m.	40
Figura 17.- Aceleraciones relativas correspondientes a la interacción del peatón con el puente peatonal de sección 1 y longitud 20 m.	41
Figura 18.- Aceleraciones relativas correspondientes a la interacción del peatón con el puente peatonal de sección 2 y longitud 13 m.	42
Figura 19.- Aceleraciones relativas correspondientes a la interacción del peatón con el puente peatonal de sección 2 y longitud 20 m.	43
Figura 20.- Aceleraciones relativas correspondientes a la interacción del peatón con el puente peatonal de sección 3 y longitud 13 m.	43

Figura 21.- Aceleraciones relativas correspondientes a la interacción del peatón con el puente peatonal de sección 3 y longitud 20 m.....	44
Figura 22.- Frecuencias de las 3 secciones en la longitud del vano de 13 m.....	45
Figura 23.- Frecuencias de las 3 secciones en la longitud del vano de 20 m.....	45
Figura 24.- Aceleraciones máximas para las 3 secciones en el vano de 13 m.....	46
Figura 25.- Aceleraciones máximas para las 3 secciones en el vano de 20 m.....	46
Figura 26.- Grafica de aceleraciones en el centro del vano sin amortiguador y con amortiguador.....	49

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 Límites recomendados de frecuencias y aceleraciones para evaluar el confort y la funcionalidad de puentes frente a vibraciones verticales.....	24
Tabla 2.- Tipología de puentes peatonales.....	34
Tabla 3.- Cálculo de cargas muertas sobre la estructura.....	35
Tabla 4.- Características y frecuencias de 3 secciones analizadas	40
Tabla 5.- Criterio de aceleraciones en puentes peatonales para clasificar el confort	41
Tabla 6.- Resumen de las secciones analizadas con sus frecuencias naturales y sus aceleraciones máximas.	45

CAPÍTULO 1

1 INTRODUCCIÓN

1.1 Introducción del proyecto de graduación

La ingeniería civil, es una ciencia que ha dotado con herramientas esenciales para la sociedad y para su desarrollo, desde infraestructuras debajo del suelo hasta rascacielos, también ha brindado soluciones a problemas cotidianos como el simple hecho de cruzar una calle muy transitada por vehículos.

El uso de pasos peatonales ha resuelto una problemática muy simple, evitar riesgos fatales e inseguridad al cruzar de un extremo de una vía a la otra, pero estas estructuras no se encuentran libres de fenómenos que las afectan.

Todos los pasos peatonales desde que se construyeron se ven afectados por un fenómeno llamado interacción humano – estructura, si bien, todo elemento esbelto, como losas de gran longitud, vigas con alta esbeltez, graderíos de estados, etc [1]. Los pasos peatonales por su uso diario se exponen a este fenómeno [2].

La interacción humano – estructura, es el fenómeno dinámico en el cuál el movimiento de las personas y la respuesta de la estructura se influyen la una con la otra, esto es, generando respuestas bidireccional entre los sistemas, el humano aplica fuerzas por los pies a la estructura y la estructura responde alterando el caminar del humano, así la acción y reacción de ambas estructuras se afectan durante la marcha del peatón como se aprecia en la figura 1 [3], este fenómeno se origina cuando el movimiento de los peatones y la respuesta dinámica del puente se acoplan dando como resultado grandes oscilaciones estructurales [4].

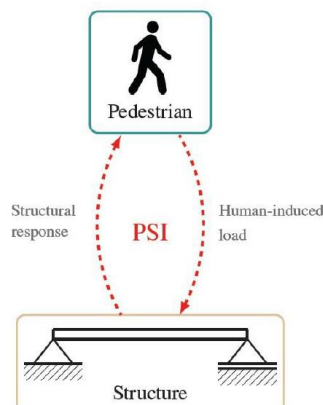


Figura 1 Interacción humano – estructura.

Si bien el diseño de puentes peatonales de acuerdo con las diferentes normativas alrededor del mundo, consideran las cargas peatonales como cargas estáticas. Sin embargo, muchos investigadores estudiaron este fenómeno y han demostrado que el movimiento humano produce fuerzas variables en el tiempo de forma periódica que excitan los modales naturales de las estructuras y cuando estas frecuencias coinciden con el paso de las personas, se produce el fenómeno de la resonancia aumentando notablemente las aceleraciones y desplazamientos que afectan la confortabilidad y la seguridad del usuario [5].

Por lo tanto, el diseñador estructural debe emplear un modelo más refinado en donde considere la interacción en las componentes principales del paso peatonal para que se pueda representar los efectos en la respuesta estructural. Aunque, se ha mostrado por parte de la sociedad de diseñadores estructurales un interés notable, se han actualizado algunas guías para el diseño, donde ofrecen descripciones de forma práctica, resultan ser insuficientes para abordar el tema con mas detalle en donde se hace difícil estimar las respuestas de las aceleraciones y los desplazamientos en estos pasos peatonales [6].

El presente proyecto de graduación tiene como objetivo principal, presentar el diseño dinámico de un puente peatonal de un sistema compuesto, donde la viga consiste en una sección trapezoidal plegada en frío y la losa comprende de hormigón armado sin presforzar, prefabricada, describiendo su comportamiento dinámico y sus modales, prediciendo su comportamiento y evitando altas vibraciones para el confort del usuario [7].

1.2 Antecedentes

Durante la últimas décadas, el comportamiento dinámico de las estructuras en especial de los puentes peatonales, ha sido objeto de creciente interés dado por los incidentes que han presentado por la locomoción de los peatones y las altas vibraciones que dan lugar a altos desplazamientos, entre los ejemplos más recientes en donde las cargas inducidas por el ser humano, ocurrieron cuando se produjo vibraciones laterales inesperadas en dos puentes muy conocidos: El puente Solférino en París (Ver figura 2) y el puente Millennium Bridge en Londres (Ver figura 3).



Figura 2: Puente Solférino – París.



Figura 3: Puente Millennium Bridge – Londres.

Estos puentes Presentaron vibraciones laterales muy excesivas inducidas por el tránsito humano, dado que la frecuencias naturales de estos puentes en la dirección lateral eran de 0.95 Hz [8], sufrió una gran respuesta vertical vibratoria que puso en alerta a los peatones.

Entre todos los ejemplos existentes alrededor del mundo, esta problemática puso en evidencia que los efectos de la locomoción de los peatones y sus actividades, tales como correr, saltar, bailar, etc, sobre las estructuras no se comprenden plenamente en su totalidad. Aunque estos problemas en los puentes Solférino y Millennium fueron en un caso muy inusual y visible, no es único de estas estructuras, por lo tanto, las guías y códigos de construcción, presentan limitaciones muy serias para analizar y predecir estos comportamientos cuando las frecuencias de los puentes son muy bajas y generan grandes amplitudes de las respuestas estructurales por la marcha de los humanos [9].

1.3 Problemática a resolver

Los puentes peatonales modulares son una solución estructural rápida, eficiente, y técnica para poder cruzar de un lado de la carretera a otro, no obstante, estos puentes tienen poca rigidez y alta esbeltez que hace que su frecuencia natural sea muy baja, que coincida con el caminar de los peatones, generando resonancia cuando las personas caminan sobre la misma.

En condiciones normales, entendiéndose como que las cargas del peatón sea cargas estacionarias, esto no sería un inconveniente para la estructura, sin embargo, estas estructuras al ser livianas, el paso rítmico de los peatones, pueden generar fuerzas dinámicas periódicas, dando paso a resonancias verticales o laterales.

Si no se controla estos factores importantes en el puente, las vibraciones pueden alcanzar niveles que afecten el confort de los usuarios, y ese confort también afecta en la seguridad perceptual o en la fatiga prematura en especial en las conexiones de la viga plegada en frío, y en sus uniones modulares.

Analizar la interacción humano – estructura modifica la marcha del peatón, por lo que el mismo peatón ajusta su marcha de tal forma que se sincroniza con el movimiento del puente, este acoplamiento bidireccional provoca la sincronización involuntaria entre el humano y el movimiento oscilatorio del puente, incrementando las amplitudes de vibración [10].

Por lo tanto, la problemática consiste en que estos puentes, son altamente susceptibles a los efectos dinámicos, lo que plantea la necesidad de modelar y evaluar de forma numérica con mayor detalle desde un enfoque dinámico y no estático, comparando los resultados con lo que dicen las normas como la AASHTO LRFD (2024), en especial esta sección propuesta con forma trapezoidal y tablero de hormigón, fundido en taller, como una sección prefabricada.

Muchos estudios en puentes con excesos de vibraciones que se han realizado en la actualidad tratan de mitigar los efectos de las vibraciones mediante dispositivos de control, como amortiguadores suplementarios en estructuras existentes, y en algunos casos inmediatamente después de su inauguración [11]. El sistema de amortiguamiento se incorpora después de su funcionamiento, es decir, cuando se culminó con su construcción y se inauguró, no se tiene en cuenta el análisis de estos dispositivos para control, y no se considera un espacio físico para la

colocación de los mismos, esto resulta limitado para la instalación de los dispositivos y lleva a la estructura a requerir un mecanismo especial para mitigar vibraciones [12].

1.4 Justificación

Es importante realizar el análisis detallado de la interacción humano – estructura sobre todo en estos tipos de puentes peatonales, para poder determinar los efectos ante las cargas dinámicas de los peatones y determinar como se afectan los elementos estructurales y como altera la marcha humana, así también para garantizar la seguridad, funcionalidad y el confort de las personas que lo utilizan día a día, además de ayudar con un enfoque más profundo del diseño de estos elementos para ser considerados en nuevos proyectos. Si bien estos elementos estructurales, suelen presentar alta resistencia a cargas estáticas, no es lo mismo que las cargas periódicas o dinámicas, que pueden inducir fácilmente la fatiga a los elementos estructurales y altas vibraciones excesivas que pueden comprometer la capacidad resistente del mismo.

Este estudio engloba parte de los objetivos de desarrollo sostenible aportando en el objetivo número 9; Industria Innovación e infraestructura, al considerar el puente pre fabricado, se ahorra tiempo y se facilita el trabajo desde la planta hasta el lugar donde será colocado el puente.

1.5 Objetivos

1.5.1 Objetivo General

Crear un modelo numérico acoplado de la interacción humano–estructura de un puente de vigas de forma trapezoidal, mediante simulaciones que representen simultáneamente la locomoción del peatón y la respuesta dinámica del puente, con el fin de determinar su influencia en el confort y el desempeño estructural.

1.5.2 Objetivos Específicos

- Caracterizar las propiedades dinámicas del sistema estructural, incluyendo la sección compuesta entre la viga de forma trapezoidal y la carpeta de hormigón

armado, con el fin de establecer los parámetros fundamentales que gobiernan su comportamiento dinámico.

- Analizar la respuesta vibratoria del puente peatonal para las diferentes configuraciones, con el propósito de identificar la sensibilidad del sistema ante variaciones geométricas, mediante el análisis modal que permitan determinar frecuencias naturales.
- Modelar la locomoción del peatón y su acción dinámica en el modelo estructural, con el objetivo de cuantificar la interacción humano – estructura y su efecto en el confort del peatón.
- Analizar la incorporación de un amortiguador de masa sintonizada (TMD) en un puente peatonal desde la etapa de diseño estructural, mediante la modelación dinámica y la evaluación de la respuesta del sistema puente–TMD frente a cargas inducidas por peatones, con el fin de controlar las vibraciones verticales y/o laterales y asegurar, desde el proyecto, el cumplimiento de los criterios de confort y servicio establecidos por la normativa vigente.

CAPÍTULO 2

2 Desarrollo del proyecto

2.1 Marco conceptual

En este capítulo, el presente marco conceptual, reúne los principales conceptos y define las teorías y fundamentos que sea necesario para comprender el fenómeno dinámico que ocurre en los puentes peatonales, en especial para comprender el análisis de los puentes peatonales modulares en especial de sección compuesta, y su relación con la interacción humano – estructura en donde este fenómeno juega un rol determinante en la seguridad estructural y en el confort del peatón al utilizar el puente. Estos conceptos se desarrollan en función de sus propiedades mecánicas de la sección trapezoidal compuesta por acero – hormigón y sus respuestas dinámicas ante la excitación del caminar del peatón [13].

Los puentes peatonales modulares son estructuras que se prefabrican para conseguir una rápida instalación, además que su peso se reduce comparado con un puente construido en sitio, estos puentes se fabrican y se ensamblan de dos elementos estructurales, el alma de acero estructural y la losa, en hormigón armado, como se muestra en la figura 4[14], estos puentes gracias a su alta esbeltez, baja rigidez y masa estructural reducida, tienden a presentar respuestas dinámicas muy bajas, como sus frecuencias naturales, capaces de coincidir con las frecuencias de los pasos de los peatones cuando transitan por su tablero [15].

Realizar sistemas modulares presentan ventajas significativas para la construcción, entre ellas, la rapidez de construcción, mejor control en el manejo de la calidad de la fabricación en taller, menor interferencias con el tráfico vial al momento del montaje [16]. Respecto a sus desventajas, por la ligereza del mismo puente, es más susceptible a vibraciones verticales, laterales y torsionales, en especial cuando el número de peatones aumenta y su marcha se sincroniza con la respuesta del puente de forma involuntaria [17].

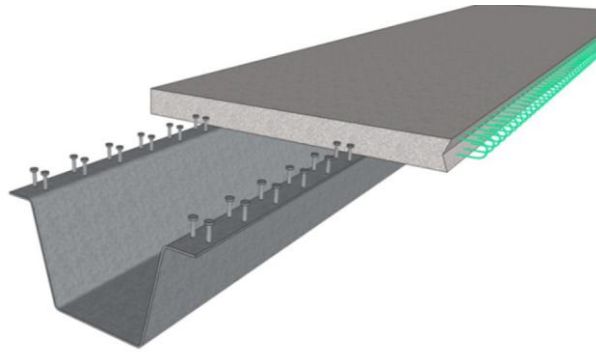


Figura 4 .- Puente modular conformado por viga de acero plegada en frío y losa de hormigón armado.

Una sección compuesta como este caso de estudio, entre acero y hormigón, combina las propiedades de ambos elementos, la resistencia a tracción del acero y la rigidez y la resistencia a la compresión, trabajan como una sola sección, la losa de hormigón armado actúa como tablero y la sección trapezoidal plegada en frío, actúa como viga [18].

2.1.1 Comportamiento dinámico del puente peatonal

El puente modular, funciona como un sistema de masas reducidas y de baja rigidez lo que provoca que sus frecuencias naturales sean bajas, frecuencias entre 1.5 a 5 Hz en su modo vertical [19], también sus modos de vibración son sensibles a cargas periódicas [20], y son altamente probables a tener resonancias inducidas por peatones[21].

Para el estudio de estas secciones de puentes peatonales, es necesario tener en cuenta los siguientes parámetros fundamentales:

- **Frecuencias Naturales (f_n):** Determina si la excitación del peatón coincide con algún modo del puente.
- **Amortiguamiento estructural (ζ):** Determina la capacidad de absorber las vibraciones.
- **Modos de vibración:** Son los movimientos verticales, laterales y torsionales de la estructura de acuerdo a la distribución de la masa y de su rigidez.
- **Máxima Aceleración:** Es el principal indicador de confort para el humano, de acuerdo con AASHTO

2.1.2 Interacción Humano estructura

La interacción humano – estructura es un fenómeno en el cual la marcha del peatón influye en la respuesta dinámica del puente y a su vez la respuesta del puente modifica la marcha del peatón como se muestra en la figura 5. Este acoplamiento es bidireccional, no lineal en donde las respuestas dependen del tiempo.

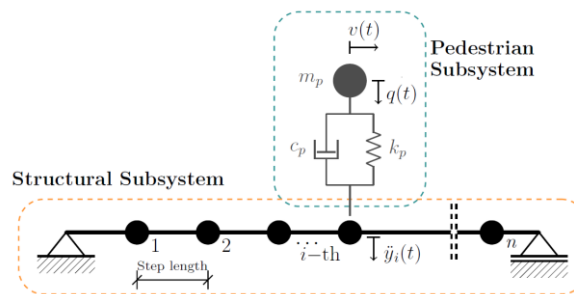


Figura 5 Modelo del sistema dinámico humano – estructura.

Los elementos claves conceptuales son:

El peatón no se analiza como carga estática distribuida a lo largo del puente.

La estructura se ve afectada por la marcha humana y por la posición del peatón.

Existe una sincronización involuntaria entre el peatón con la respuesta del puente.

Aumenta la amplitud de la oscilación cuando coincide el paso del peatón con la frecuencia natural del puente.

Para el análisis de la interacción Humano – estructura se desarrollará un nuevo modelo para predecir la respuesta dinámica vertical de los diferentes tipos de puentes siendo atravesados por un solo peatón, en donde se aplicará el enfoque modular para poder representar el sistema peatón – puente como un subsistema acoplados que interactúan dinámicamente entre sí, de tal forma, los enlaces de retroalimentación se representan mediante la interacción dinámica de ambos subsistemas a medida que el peatón recorre toda la longitud del puente [22].

2.1.3 Locomoción Humana

A medida que el pie humano entra en contacto con el tablero del puente, este genera una fuerza de contacto, la cuál a medida que el humano avanza o se

desplaza, el otro pie genera otra fuerza de contacto y a todo este conjunto de fuerzas se engloban en fuerzas periódicas y armónicas, especialmente a lo largo del eje vertical y en menor medida en el eje lateral, a esto se conoce como locomoción, y la locomoción se modela mediante funciones excitadoras sinusoidales [23], modelos biodinámicos de masa – resorte – amortiguador [24], series de Fourier para cargas repetitivas y modelos acoplados de interacción humano – estructura en función del tiempo [25]

Las frecuencias típicas al caminar registradas son; vertical 1.6 – 2.4 Hz y laterales 0.9 – 1.3 Hz [3]

Cuando estas frecuencias coinciden con las frecuencias naturales del puente, se produce el efecto de la resonancia.

2.1.4 Resonancia en puentes

La resonancia es el efecto que ocurre cuando la frecuencia de dos elementos son iguales, en este caso de estudio, cuando la frecuencia de la fuerza de los pies producida por el caminar del peatón coincide o es igual a la frecuencia natural del puente [26].

En los puentes peatonales, este efecto es muy crítico dado que el puente presenta muy poca masa estructural, rigidez reducida, uniones modulares, lo cuál las frecuencias de estos puentes son muy bajas y la resonancia produce incrementos significativos en las aceleraciones, tanto vertical como lateral, disminuyendo el confort y la percepción de seguridad de los peatones [27].

2.1.5 Confort y servicio (AASHTO LRFD)

La AASHTO LRFD (2024) establece límites, al igual que otras normas Europeas en los cuales establece aceleraciones verticales permisibles, aceleraciones laterales permisibles y frecuencias naturales recomendadas como se aprecia en la tabla 1, donde se presentan los límites de frecuencias y aceleraciones de diferentes normas alrededor del mundo [28]. Dado que el Ecuador tiene como base la NEC2015, dicha norma se sustenta y se guía de las normas Norteamericanas como la ASCE, ACI, etc. Este estudio se realizará en base al AASHTO LRFD quien predomina los diseños estructurales de puentes peatonales en el Ecuador.

Tabla 1 Límites recomendados de frecuencias y aceleraciones para evaluar el confort y la funcionalidad de puentes frente a vibraciones verticales.

Guideline	Frequency, f (Hz)	Acceleration, a ($m \cdot s^{-2}$)
British Standards (BS5400, 1978)	> 5	$a < 0.5\sqrt{f}$
Ontario Guide (ONT95, 1995)	> 3	$a < 0.25f^{0.78}$
Eurocode 1 (EN 1991-2, 2002)	$f > 5$	$a < 0.7$
DIN 2003 (DIN-Fachbericht, 2003)	$\begin{cases} 1.6 > f > 2.4 \\ 3.5 > f > 4.5^h \end{cases}$	$a < 0.5\sqrt{f}$
Eurocode 5 (EN 1995-2, 2004) ^a	$\begin{cases} f \leq 2.5 \\ 2.5 < f \leq 5^h \end{cases}$	$\begin{cases} a < 200 / (M\zeta)^c \\ a < 100 / (M\zeta)^c \end{cases}$
Eurocode 5 (EN 1995-2, 2004) ^b	$\begin{cases} f \leq 2.5 \\ 2.5 < f \leq 5^h \end{cases}$	$\begin{cases} a < 46 \cdot n \cdot k_{vert} / (M\zeta)^d \\ a < 23 \cdot n \cdot k_{vert} / (M\zeta)^d \end{cases}$
Bro-2004 (Bro2004, 2004)	$f > 3.5$	$a_{rms} < 0.5$
Sétra (Sétra, 2006)	$\begin{cases} f \leq 1 \text{ or } f > 5 \text{ (neg.)}^g \\ 1 < f \leq 1.7 \text{ (med.)}^g \\ 1.7 < f \leq 2.1 \text{ (max.)}^g \\ 2.1 < f \leq 2.6 \text{ (med.)}^g \\ 2.6 < f \leq 5 \text{ (min.)}^g \end{cases}$	$\begin{cases} a \leq 0.5 \text{ (max.)}^e \\ 0.5 < a \leq 1 \text{ (med.)}^e \\ 1 < a \leq 2.5 \text{ (min.)}^e \\ a > 2.5 \text{ (Unacc.)}^e \end{cases}$
ISO 10137 (ISO-10137, 2007)	N/A	$a < 60\sqrt{2} \cdot a_{rms}^m$
HIVOSS (Heinemeyer et al., 2007)	$1.25 > f > 4.6$	$\begin{cases} a \leq 0.5 \text{ (max.)}^e \\ 0.5 < a \leq 1 \text{ (med.)}^e \\ 1 < a \leq 2.5 \text{ (min.)}^e \\ a > 2.5 \text{ (Unacc.)}^e \end{cases}$
LRFD Footbridge Guide (AASHTO, 2009)	> 3	N/A

^a For one pedestrian crossing the bridge.

^b For several pedestrians crossing the bridge.

^c M is the total mass of the bridge in kg, ζ is the damping ratio.

^d $n = 13$ for a distinct group of pedestrians, $n = 0.6 \cdot A$ for a continuous stream of pedestrians where A is the area of the bridge deck in m^2 . k_{vert} is defined in Fig. B-1 in EN 1995-2 (2004).

^e Level of comfort: max = maximum, med = medium, min = minimum, unacc = unacceptable.

^g Risk of resonance: max = maximum, med = medium, min = minimum, neg = negligible.

^h Might be excited by the 2nd harmonic of pedestrian loads.

^m a_{rms} is defined in Fig. C-1 (ISO-10137, 2007).

2.1.6 Concepto de amortiguador de masa sintonizada

Un amortiguador de masa sintonizada (TMD) se conoce como un dispositivo pasivo de control de vibraciones en donde su estructura consiste en una masa que se acopla a la estructura del puente mediante un sistema compuesto por rigidez y amortiguamiento, en donde su principal funcionamiento es la transferencia de energía de las vibraciones de la estructura hacia el amortiguador siempre y cuando ambos sistemas se encuentren sintonizados de manera adecuada [29].

2.1.7 Importancia del diseño integrado del TMD

Considerar el amortiguador de masa sintonizada como parte integral del diseño del puente peatonal, permite anticipar los problemas con vibración y dar una solución racional y coherente ante las altas aceleraciones calculadas antes de su servicio, a demás que integrar desde la fase del proyecto, es posible definir su ubicación, la

masa y los parámetros de diseño de tal forma que sea óptima, alineado con las características estructurales que el puente requiere para su servicio [30].

2.2 Marco metodológico

Para el presente proyecto, se realizará a través de la metodología tipo cascada, en la cuál consiste en actividades que se va realizando paulatinamente una después de la finalización de la otra.

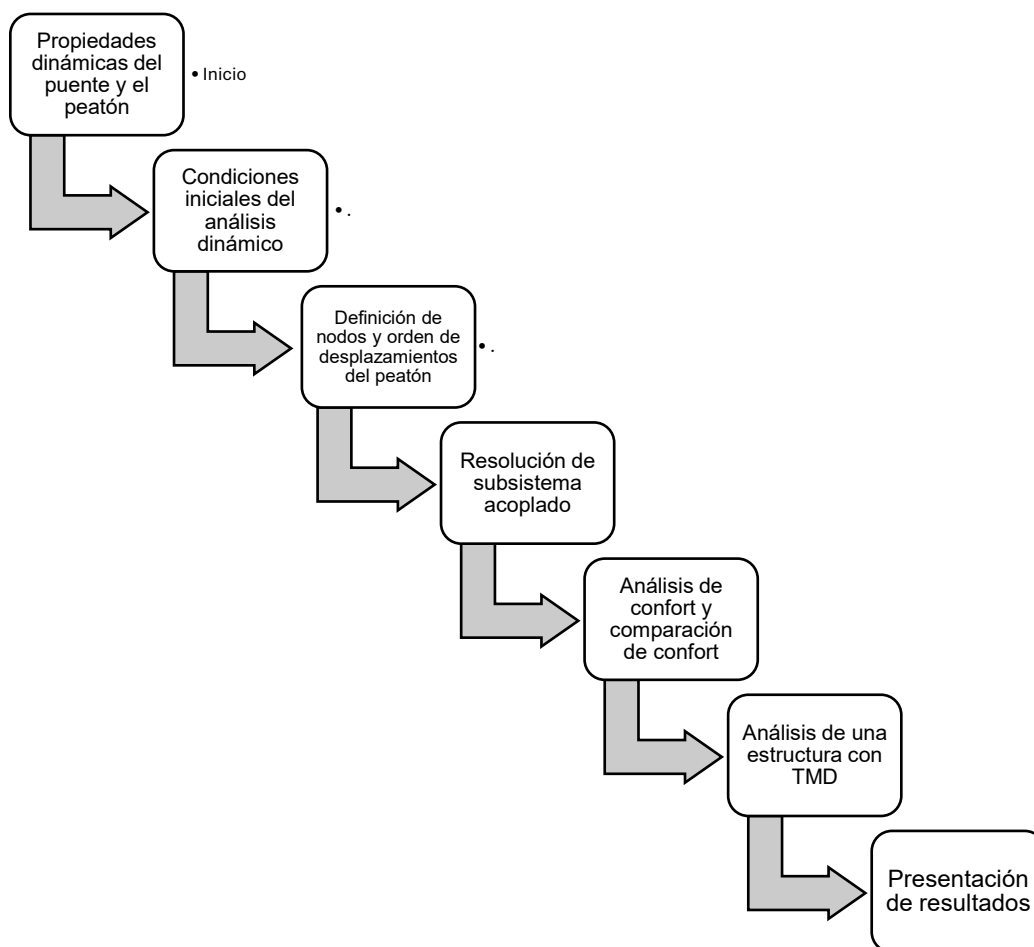


Figura 6.- Esquema de la metodología en el proyecto

En marco metodológico se desarrollará en función del modelo de interacción peatón – estructura para lograr predecir la respuesta dinámica en dirección vertical de un listado de puentes peatonales en los cuales los atravesará un solo peatón. Para esto se utilizará un enfoque modular en donde se representará el sistema peatón – estructura como subsistemas acoplados que actúan dinámicamente entre sí.

2.2.1 Definición de las propiedades dinámicas y modelación del puente

Se desarrollará el modelo en dos direcciones mediante elementos del tipo frame para representar la viga principal compuesta por acero plegado en frío con sección transversal de forma trapezoidal y losa de hormigón.

Un modelo típico de elementos finitos del puente peatonal se representa como el que se muestra en la figura 6, El puente se representará como un modelo EF lineal e invariable en el tiempo, ya sea en 2D o en 3D, discretizando en series de dovelas del puente para este caso particular.

Para demostrar el método de análisis, se considerará únicamente los n grados de libertad (GDL) verticales a las distancias que corresponden la zancada humana, los demás grados de libertad se condensarán. El número y la ubicación de cada nodo, va a depender en función de la longitud aproximada del paso del peatón lo cual será considerado como un parámetro de entrada para el análisis.

La ecuación del movimiento para la subestructura del puente se presentará mediante la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}M_s \ddot{y}(t) + C_s \dot{y}(t) + K_s y(t) &= \Gamma F_i^{con}(t) \\ F_i^{con}(t) &= c_p \dot{q}(t) + k_p q(t) \\ \Gamma &= [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0]^T\end{aligned}$$

En donde M_s , C_s y $K_s \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez de la estructura después de la condensación.

$\Gamma \in \mathbb{R}^n$ es el vector columna que varía respecto al tiempo y se define de acuerdo con la ubicación del peatón a lo largo del puente, este vector estará lleno de ceros con excepción del grado de libertad en donde se ubicará el peatón cuando se desplace sobre la viga.

$F_i^{con}(t)$ representa la fuerza de contacto impartida por el peatón en el i – ésimo punto de contacto. $\ddot{y}(t)$, $\dot{y}(t)$ y $y(t) \in \mathbb{R}^n$ y son vectores que contienen las respuestas nodales de la aceleración, velocidad y desplazamiento del nodo, respectivamente.

Para $\ddot{y}_i(t)$ es la aceleración nodal en el i – ésimo punto que corresponde al punto de contacto del peatón en el puente. Esta salida del subsistema del puente se usará como dato de entrada para la subestructura del peatón.

La única entrada aplicada al subsistema del puente es un vector de distribución Γ que multiplica la fuerza de contacto $F_i^{con}(t)$.

La ecuación para el subsistema del puente puede escribirse como forma de espacio de estados, la entrada de este sistema estará representada por el escalar $F_i^{con}(t)$ y las variables de estado se ensamblan en el vector:

$$x_s = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2nx1}$$

Conocido como vector de estado.

Las salidas del subsistema se seleccionarán para incluir las respuestas del desplazamiento, velocidad y aceleración en los nodos del puente mediante el siguiente vector:

$$\dot{z}_s = [y \ \dot{y} \ \ddot{y} \ \dot{y}_i]^T \in \mathbb{R}^{(3n+1)x1}$$

2.2.2 Modelación dinámica del peatón

El peatón será representado mediante un modelo biomecánico simplificado en:

- Sistema de un grado de libertad masa – resorte – amortiguador.
- Modelo lateral con masa y amortiguamiento propio.

El peatón se modela como un fuerza en movimiento que atraviesa el puente, en cada paso el peatón aplica al puente un perfil de fuerzas basado en las mediciones que el peatón ejerce sobre el piso rígido al caminar, este método no considera completamente la interacciones entre el peatón y la estructura, para poder abordar esta limitación, se utiliza el modelo dinámico de la subestructura del peatón, que consiste en un oscilador de un sólo grado de libertad con una condición inicial distinta de cero como fuente de excitación, en lugar de utilizar la fuerza de reacción del suelo. La energía del sistema acoplado humano – estructura, no se conserva, la energía puede ser añadida por el peatón o puede ser disipada por el peatón como por la misma estructura, por lo tanto, se debe proveer una fuente externa de energía para simular el ingreso de energía del peatón a través de su cuerpo. Se debe incluir una condición de velocidad vertical inicial distinta de cero de la masa del peatón para incorporar el intercambio de energía que ocurre a lo largo de la marcha humana descrita por Winter (2009) y Whittle (2014).

En la marcha humana ocurren dos diferentes fuentes de energías basadas en la aceleración en el periodo de la zancada. La principal fuente de energía ocurre cuando

el talón impacta contra la superficie y la segunda fuente de energía está relacionada con el balanceo de las extremidades durante la marcha. Cuando se incorpora la primera fuente de energía, se puede producir con mayor precisión el movimiento vertical del centro de masa.

La subestructura del peatón, se modela aquí usando las características biodinámicas, así como los parámetros de entrada que han sido estudiado en varios casos [3]. Estos parámetros biodinámicos consisten en una masa concentrada m_p unida a un resorte lineal y un amortiguador viscoso lineal de coeficientes k_p y c_p , respectivamente. El parámetro adicional de entrada es un valor de la condición de frontera, el valor inicial de la velocidad distinta de cero $\dot{q}(t_0)$.

Sea la ecuación:

$$m_p \ddot{q}(t) + c_p \dot{q}(t) + k_p q(t) = -m_p \ddot{y}_i(t)$$

Esta ecuación representa el movimiento del peatón, donde $\ddot{q}(t)$, $\dot{q}(t)$ y $q(t)$ son respectivamente la aceleración vertical, la velocidad vertical y el desplazamiento vertical del centro de masas del peatón relativo al puente. La entrada a la subestructura del peatón es la aceleración vertical del puente $\ddot{y}_i(t)$ en el punto de contacto y la salida, que fue definida como entrada al sistema complementario de la estructura del puente peatonal.

El subsistema del peatón también se escribe en forma de espacios de estados, en este caso, las variables de estado que incluyen el desplazamiento relativo y la velocidad relativa, se ensamblan con el vector de estado:

$$x_p = \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

La entrada está representada por $\ddot{y}_i(t)$.

Las salidas se representan con el vector:

$$\dot{z}_s = [q \ \dot{q} \ \ddot{q} \ F_i^{con}]^T \in \mathbb{R}^4$$

2.2.3 Condiciones iniciales del análisis dinámico

Para el inicio del acoplamiento dinámico de las estructuras, se tendrá en cuenta las siguientes condiciones iniciales tanto del peatón como del puente peatonal:

Peatón:

$$q(0) = 0$$

$$\dot{q}(0) = 0$$

Puente peatonal:

$$y(0) = 0$$

$$\dot{y}(0) = 0$$

$$F_i^{con}(0) = 0$$

2.2.4 Definición de nodos y orden del desplazamiento del peatón

Para el análisis por nodos, tanto la masa como la matriz de rigidez se condensarán a los desplazamientos verticales de los nodos, y los nodos se definirán de acuerdo a la zancada del peatón.

2.2.5 Resolución de subsistemas acoplados

Para la solución de los dos sistemas acoplados, se subdivide a cada elemento como subsistemas, siendo dos subsistemas como el puente y el otro subsistema como el peatón.

2.2.6 Frecuencias y aceleraciones del puente peatonal

Del análisis realizado, se obtienen las aceleraciones en el puente peatonal, las cuales son los puntos de control para medir el confort de los peatones, estas aceleraciones se compararán con los códigos internacionales y se medirá que tanto influye en la respuesta de los pasos del peatón.

2.2.7 Análisis de resultados

Se recopilará los valores de frecuencias y aceleraciones para determinar la influencia máxima del peatón sobre la estructura, la cual se discutirá para obtener datos que permitan llegar a una solución o a un debate técnico.

2.2.8 Comparativas con normas vigentes

Estos resultados si bien no están establecidos en la NEC2015, se utilizarán para establecer parámetros de comparación con la AASHTO o con normas europeas en las cuales dan valores límites de aceleraciones y frecuencias modales en los puentes peatonales.

2.2.9 Amortiguador de masa sintonizada usando el método óptimo de ASAMI

El método Asami et al. es basado en un sistema principal de un grado de libertad (SDOF) al que se le acopla un TMD para formar un sistema de dos grados de libertad (MDOF).

El sistema principal (puente – modo dominante) consiste en la masa modal del puente m , rigidez del puente k , amortiguamiento estructural c y la frecuencia natural del puente $\omega_n = \sqrt{k/m}$.

Para el amortiguador de masa sintonizada:

- Masa del TDM: m_d
- Rigidez del TDM: k_d
- Amortiguamiento del TDM: c_d
- Frecuencia del TDM:

$$\omega_d = \sqrt{\frac{k_d}{m_d}}$$

Relación de masa:

Es el parámetro principal del método Asami.

$$\mu = \frac{m_d}{m}$$

Valores típicos en puentes peatonales:

$$\mu = 0.5\% \text{ a } 3\%$$

El método Asami minimiza la respuesta vibratoria total del sistema lo que lo hace especial para la excitación armónica producida por la locomoción humana.

2.2.10 Frecuencia óptima de la sintonización (Asami)

La relación de la frecuencia óptima entre el TMD y la estructura es:

$$f_{opt} = \frac{\omega_d}{\omega_n} = \sqrt{\frac{1}{1 + \mu}}$$

2.2.11 Amortiguamiento óptimo del TMD

El coeficiente de amortiguamiento óptimo del TMD y la estructura es:

$$\xi_{d,opt} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)}}$$

Donde:

$$\xi_d = \frac{c_d}{2m_d\omega_d}$$

2.2.12 Cálculo directo de los parámetros del TMD

Definido las variables μ , ω_n y m :

- Masa del TMD

$$m_d = \mu m$$

- Frecuencia del TMD

$$\omega_d = f_{opt}\omega_n$$

- Rigidez del TMD

$$k_d = m_d\omega_d^2$$

- Amortiguamiento del TMD

$$c_d = 2\xi_{d,opt}m_d\omega_d$$

2.2.13 Presentación de los resultados dinámicos

Se evaluará diversos puentes a diferentes longitudes y se presentará el resultado de las frecuencias y aceleraciones de estos para poder determinar sus características y límites de uso.

2.2.14 Solución a diseñar

A continuación, se considera las interacciones entre las subestructuras del peatón y del puente que deben acoplarse para establecer el sistema de retroalimentación. Durante el paso del peatón, se excita el al puente a través de la fuerza de contacto debajo del punto de contacto, mientras que el puente únicamente excita al peatón mediante su propio movimiento en ese mismo punto de contacto, esto genera un lazo cerrado en donde se alteran las frecuencias naturales tanto de la estructura como del peatón generando altas aceleraciones en la estructura.

Estas aceleraciones producen altos niveles de fuerzas y estas fuerzas producen altas demandas de esfuerzos, además de incomodar al peatón y alterar su marcha a medida que cruza el puente.

Al realizar este análisis, se pretende solucionar la desconformidad del peatón y disminuir los esfuerzos causados por las fuerzas dinámicas, así como la fatiga de los elementos.

Se realizará el análisis dinámico y se determinarán dichos niveles de aceleraciones para establecer límites de los mismos para evitar el desconfort de los usuarios.

La solución de las ecuaciones planteadas se obtendrá mediante un procedimiento que tiene la ventaja de ser simple, preciso y explícito, produciendo una respuesta global del sistema acoplado.

Cuando estos dos subsistemas se resuelven en conjunto, el modelo acoplado y dependiente del tiempo, es capaz de captar las interacciones entre el humano y la estructura, conforme se desplaza en el tiempo, en otras palabras, los subsistemas lineales e invariantes en el tiempo se acoplan y utilizan un punto de contacto dependiente del tiempo. Así el sistema de lazo cerrado puede clasificarse como un sistema dinámico lineal y variante en el tiempo.

Para resolver la respuesta de este sistema, las ecuaciones del movimiento se resuelven numéricamente para periodos de tiempo $S_t = 1/F_p$ dentro de cada paso del peatón, luego, para simular la respuesta durante el siguiente paso, las condiciones finales del sistema al final de dicho paso se utilizan como condiciones iniciales para la siguiente.

Para comenzar, se fija el tiempo $t_k = 0$, el primer paso del peatón como $i = 1$ y se establece las condiciones iniciales. Se selecciona un incremento de tiempo Δt para la integración numérica.

Típicamente el paso de la integración se elige de modo que corresponda a una frecuencia al menos 10 veces mayor que la frecuencia del modo más alto.

Se presentará adicionalmente el análisis de una sección con el sistema TMD para comparar el efecto en la aceleración y su disminución mediante el amortiguador.

CAPÍTULO 3

3 RESULTADOS Y DISCUSIÓN

3.1 Resultados

El análisis de la interacción humano estructura, consiste en un sistema acoplado, en donde el humano ejerce una fuerza sobre el puente y el puente reacciona generando una aceleración que afecta al peatón, este ciclo cerrado de variables en donde la salida de un subsistema es la entrada para el otro subsistema, se produce a lo largo de cada paso hasta que el valor de n pasos cubre la longitud del puente. Para el algoritmo presentado a continuación, se debe tener las propiedades dinámicas del peatón y las propiedades dinámicas del puente, este es el primer paso para el análisis.

Las condiciones iniciales del análisis consisten en que la velocidad inicial del peatón es cero, así también la fuerza de contacto, la aceleración del puente y el paso inicial es cero.

Cuando el peatón empieza su recorrido en n , inicialmente este genera una fuerza tipo impulso, en donde añade energía al sistema a través de una velocidad en un tiempo corto de contacto, esta es la entrada del subsistema del puente peatonal, durante el contacto del pie con el puente, este genera aceleraciones que terminan siendo gados de entrada para el subsistema del peatón y esto genera el primer lazo hasta que dura el tiempo de contacto, después de esto el peatón se desplaza un valor de $n+1$ representando el nuevo nodo donde se realizará el punto de contacto y el ciclo empieza de nuevo hasta que $n+1$ sea igual a la longitud del puente.

Todo esto se resume en la Figura 7 mostrada a continuación:

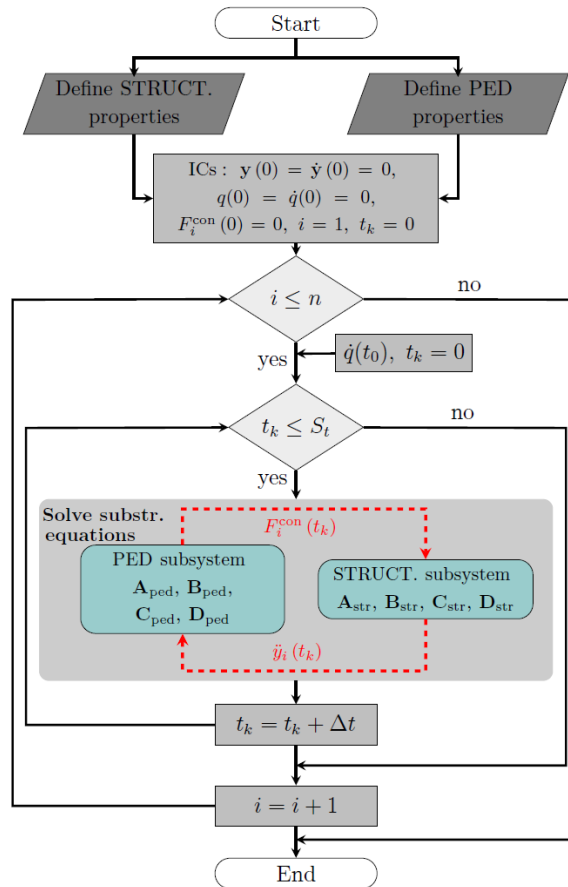


Figura 7.- Algoritmo para resolución de sistemas acoplados para puentes peatonales

Dentro del análisis realizado a las vigas, se desea obtener las frecuencias sincronizadas y las aceleraciones verticales máximas en el puente durante el movimiento del peatón así como las propiedades dinámicas de los puentes, se analizará uno a uno los puentes y con eso se selecciona rangos de valores para determinar si afecta o no afecta en el confort de los peatones.

En la siguiente tabla, se presenta la tipología de puentes peatonales a analizar:

Tabla 2.- Tipología de puentes peatonales.

Sección	Peso (tonf/m)	w (mm)	t(mm)	bbf(mm)	D(mm)	Ix (cm4)
Tipo 1	0,1463868	1524	11,1	480	240	5,64E-04
Tipo 2	0,1463868	1829	11,1	465	349	1,30E-03
Tipo 3	0,1463868	2134	11,1	433	506	2,66E-03

De acuerdo con sus tipologías, se obtiene las cargas muertas sobre los puentes peatonales en función de su longitud:

Tabla 3.- Cálculo de cargas muertas sobre la estructura.

Estimación de carga muerta		
Carga pasamanos	0,025	ton/m
Carga bordillo	0,096	ton/m
Carga enlu	0,053	ton/m ²
Peso losa	0,072	ton/m ²
Peso propio	0,146	ton/m
Peso instalaciones elec	0,030	ton/m ²

Codificación de las matrices de rigidez, de masa y de amortiguamiento para el puente peatonal:

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% ENSAMBLAR LA MATRIZ GLOBAL DE LA ESTRUCTURA
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
KK = zeros(gdl);
KK([27 28 1 13],[27 28 1 13]) = KK([27 28 1 13],[27 28 1 13]) + k141;
KK([1 13 2 14],[1 13 2 14]) = KK([1 13 2 14],[1 13 2 14]) + k12;
KK([2 14 3 15],[2 14 3 15]) = KK([2 14 3 15],[2 14 3 15]) + k23;
KK([3 15 4 16],[3 15 4 16]) = KK([3 15 4 16],[3 15 4 16]) + k34;
KK([4 16 5 17],[4 16 5 17]) = KK([4 16 5 17],[4 16 5 17]) + k45;
KK([5 17 6 18],[5 17 6 18]) = KK([5 17 6 18],[5 17 6 18]) + k56;
KK([6 18 7 19],[6 18 7 19]) = KK([6 18 7 19],[6 18 7 19]) + k67;
KK([7 19 8 20],[7 19 8 20]) = KK([7 19 8 20],[7 19 8 20]) + k78;
KK([8 20 9 21],[8 20 9 21]) = KK([8 20 9 21],[8 20 9 21]) + k89;
KK([9 21 10 22],[9 21 10 22]) = KK([9 21 10 22],[9 21 10 22]) + k910;
KK([10 22 11 23],[10 22 11 23]) = KK([10 22 11 23],[10 22 11 23]) + k1011;
KK([11 23 12 24],[11 23 12 24]) = KK([11 23 12 24],[11 23 12 24]) + k1112;
KK([12 24 25 26],[12 24 25 26]) = KK([12 24 25 26],[12 24 25 26]) + k1213;

% Eliminar los grados que no se va a nalizar
libres = [1:24 26 28];
Kred = KK(libres,libres);

% Matriz Condensada a los grados de libertad traslacional u1 y u2
Ktt = Kred(1:12,1:12);
Kot = Kred(13:26,1:12);
Koo = Kred(13:26,13:26);
Kto = Kred(1:12,13:26);
K = Ktt - Kto*inv(Koo)*Kot;

```

Figura 8.- Código ensamble de la matriz de rigidez.

Código para determinar las frecuencias de los puentes peatonales:

```

% DETERMINAR LAS FRECUENCIAS NATURALES DE LA VIGA
[Vec, Val] = eig(M\K);
[Wn, ind]= sort(sqrt(diag(Val)));
disp('Las frecuencias de vibración [rad/seg] son:');
Wn = diag(round(100*Wn)/100);
disp('Las frecuencias de vibración [Hz] son:');
f = Wn/(2*pi);

```

Figura 9.- Código para determinar las frecuencias naturales de los puentes peatonales.

Mediante la integración de todas las propiedades dinámicas del puente peatonal y las propiedades dinámicas del peatón, se espera como resultado:

Del análisis estructural se obtiene:

- Determinación de las frecuencias naturales y los modos de vibración correspondientes.
- Estimación del amortiguamiento de la estructura.
- Análisis modal para identificar sus modos críticos en la dirección vertical.

- Análisis dinámico de tiempo – historia con la carga dinámica del peatón.
- Aceleraciones máximas en el puente peatonal.
- Aceleraciones máximas en el centro de nada del peatón.

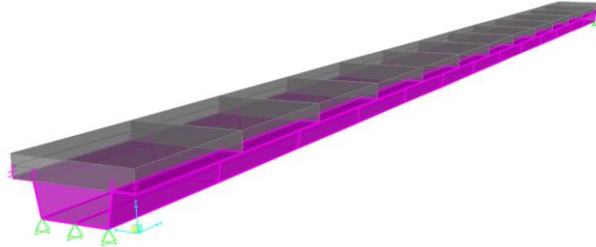


Figura 10.- Modelo estructural del puente peatonal realizado en SAP2000.

Para la resolución del sistema se presenta las siguientes ecuaciones para ser integradas en el sistema de simulación desarrollado en donde:

La aceleración nodal \ddot{y}_i se incluye en el vector de salida para poder ser utilizada directamente como entrada al subsistema del peatón en cada iteración.

La ecuación de espacio de estados resultante es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_s \\ z_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{str} & B_{str} \\ C_{str} & D_{str} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ F_i^{con} \end{bmatrix}$$

Donde:

$$A_{str} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -M_s^{-1}K_s & -M_s^{-1}C_s \end{bmatrix}_{2n \times 2n}$$

$$C_{str} = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -M_s^{-1}K_s & -M_s^{-1}C_s \\ -\Gamma^T M_s^{-1}K_s & -\Gamma^T M_s^{-1}C_s \end{bmatrix}_{(3n+1) \times 2n}$$

$$B_{str} = \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ M_s^{-1}\Gamma \end{bmatrix}_{2n \times 1}$$

$$D_{str} = \begin{bmatrix} 0_{2n \times 1} \\ M_s^{-1}\Gamma \\ \Gamma^T M_s^{-1}\Gamma \end{bmatrix}_{(3n+1) \times 1}$$

n es el número de grados de libertad del modelo de elementos finitos condensados en la estructura.

La forma de espacio de estados del peatón es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ped} & B_{ped} \\ C_{ped} & D_{ped} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ \ddot{y}_i \end{bmatrix}$$

Donde:

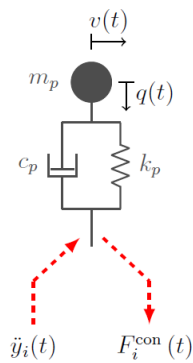


Figura 11.- Subestructura del peatón

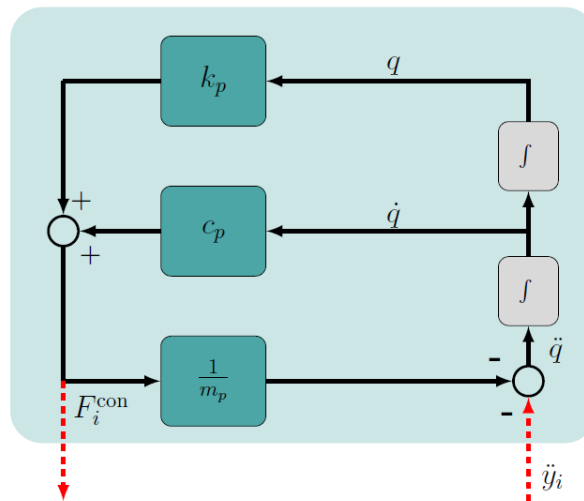


Figura 12.- Representación del puente por bloques.

$$A_{ped} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_p}{m_p} & -\frac{c_p}{m_p} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$B_{ped} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

$$C_{ped} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{k_p}{m_p} & -\frac{c_p}{m_p} \\ k_p & c_p \end{bmatrix}_{4 \times 2}$$

$$D_{ped} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}_{4 \times 1}$$

En esta investigación, se asume que el peatón camina a una velocidad constante la cuál también se incluye en el modelo biodinámico mediante la longitud de paso y la

frecuencia de la zancada. El modelo supone un contacto continuo entre el peatón y la estructura, y no distingue entre las pases simples y dobles de apoyo.

3.1.1 Resultados

Para el análisis de los puentes peatonales, se consideraron 3 secciones transversales, las cuales se evaluó sus propiedades mecánicas y se obtuvieron las frecuencias de estas en dos longitudes que corresponden a la luz del paso peatonal. En las figuras 13 – 14 y 15 se muestra las secciones transversales que fueron evaluadas y que se tratará en adelante como secciones 1, 2 y 3 respectivamente.

SECCIÓN 1

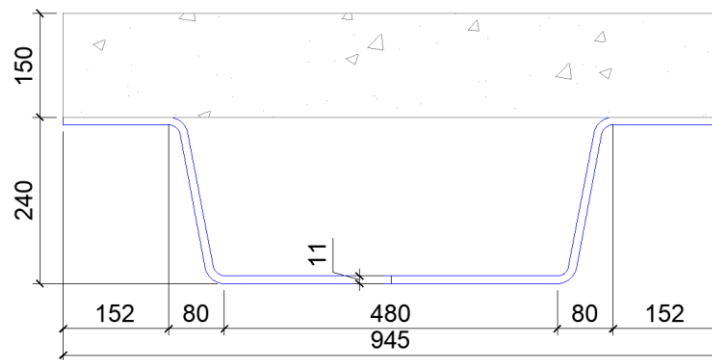


Figura 13.- Sección transversal 1 correspondiente al puente peatonal tipo 1.

SECCIÓN 2

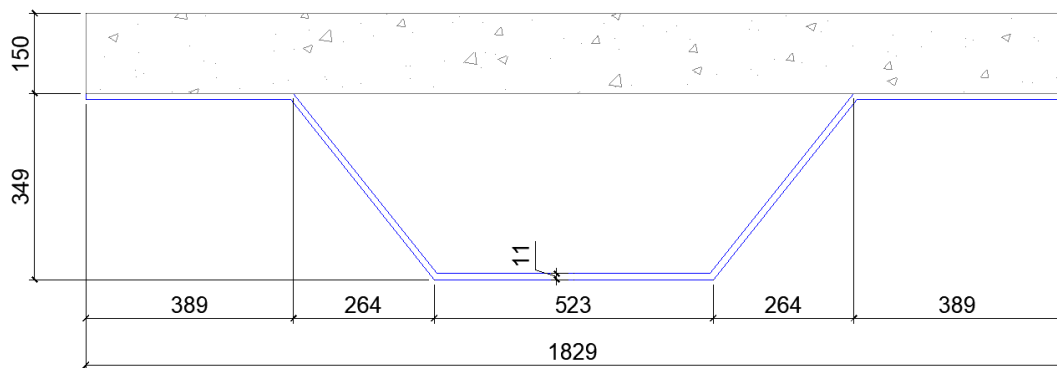


Figura 14.- Sección transversal 2 correspondiente al puente peatonal tipo 2.

SECCIÓN 3

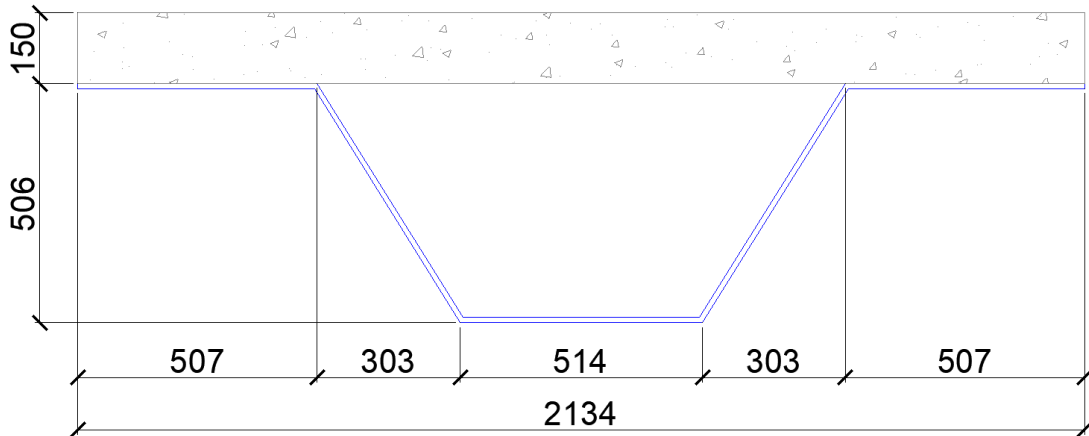


Figura 15.- Sección transversal 3 correspondiente al puente peatonal tipo 3

Para estas secciones, se debe determinar las propiedades dinámicas que es el primer factor que indica que elemento es propenso a sufrir altas aceleraciones dadas por el paso de las personas.

Para estas secciones el problema no es la resistencia estructural, sino la frecuencia natural de la misma. El ser humano camina con una frecuencia aproximada de 1.6 a 2.4 Hz y en una caminata rápida su frecuencia está entre 2.4 a 3.0 Hz, cuando trota, la frecuencia es de 2.5 a 3.5 Hz y al saltar la frecuencia ronda entre 2.0 a 4.0 Hz. Si la frecuencia natural de estos puentes ronda entre estos valores, existe un alto riesgo de aceleraciones excesivas que no permitan un paso armónico al peatón.

De acuerdo con la tabla 1, las normas internacionales, establecen factores de frecuencias naturales mínimas que debe de cumplir los puentes peatonales para que el paso de las personas, no coincidan con la frecuencia natural del puente, los valores que establecen en la tabla, las frecuencias deben ser mayores a 3 Hz o mayores a 5 Hz, en este documento, se tomará como referencia el AASHTO en donde establece que la frecuencia del puente, debe ser mayor a 3 Hz.

Para esto se presenta la tabla 4 en donde se evaluó las 3 secciones mostradas en las figuras 13, 14 y 15 a diferentes luces, siendo 13 m y 20 m las más comunes en Ecuador y se tabulan los resultados.

Tabla 4.- Características y frecuencias de 3 secciones analizadas

Propiedades dinámicas para las secciones analizadas

Tipo	Área (m ²)	Inercia (m ⁴)	Longitud (m)	Frecuencia (Hz)	Masa Modal (kg)
Sección 1	0,0328	5,64E-04	13	4,83	86,96
			20	2,04	84,21
Sección 2	0,0580	1,30E-03	13	3,79	86,96
			20	2,74	86,96
Sección 3	0,0696	2,66E-03	13	24,81	86,96
			20	10,48	84,21

3.1.2 Análisis de resultados

Se realizó la evaluación dinámica y se obtuvieron los valores máximos de aceleración en cada punto donde el peatón entra en contacto con el puente, y se presenta las siguientes gráficas de las aceleraciones máximas a lo largo de la longitud del puente:

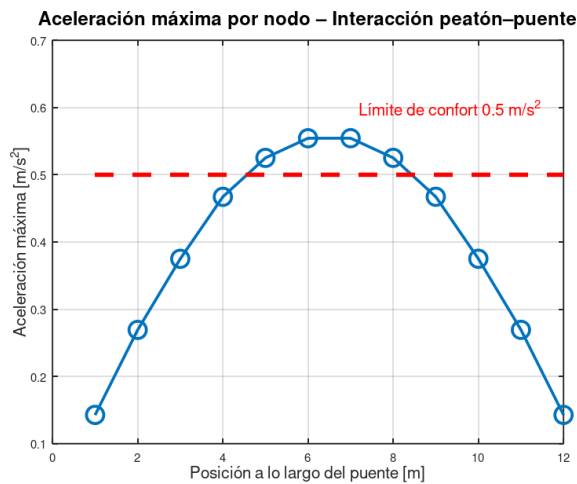


Figura 16.- Aceleraciones relativas correspondientes a la interacción del peatón con el puente peatonal de sección 1 y longitud 13 m.

En la Figura 16 se muestra la aceleración máxima inducida por el paso peatonal a lo largo del puente, como se aprecia, la respuesta es simétrica con altas aceleraciones cuando el peatón cruza el centro del vano, alcanzando valores máximos de 0.56 m/s^2 , estos valores superan el límite de confort recomendado por la AASHTO,

la Tabla 5.- Criterio de aceleraciones en puentes peatonales para clasificar el confort establece los valores de aceleración y los criterios de clasificación de confort:

Tabla 5.- Criterio de aceleraciones en puentes peatonales para clasificar el confort

Criterio de aceleraciones según AASHTO - ISO 10137 - FHWA	
Aceleración Vertical	Evaluación
$\leq 0,3 \text{ m/s}^2$	Confortable
$0,3 - 0,5 \text{ m/s}^2$	Molestias perceptibles
$> 0,5 \text{ m/s}^2$	Inaceptable

Este comportamiento indica la excitación del primer modo vertical del puente y evidencia que existe una interacción entre el peatón y la estructura en el cuál se asocia a la coincidencia entre la frecuencia natural del sistema y la frecuencia de la locomoción del peatón. En consecuencia, el puente presenta condiciones de servicio inaceptables desde el punto de vista del confort de vibraciones.

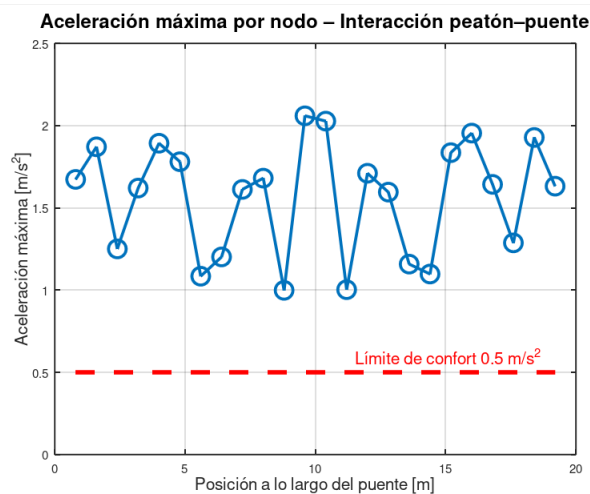


Figura 17.- Aceleraciones relativas correspondientes a la interacción del peatón con el puente peatonal de sección 1 y longitud 20 m.

En la figura 17 se aprecia que el peatón no solo excita al puente, si no que el puente también modifica el paso del peatón amplificando la vibración. La aceleración máxima inducida por el paso peatonal en el puente de sección tipo 1 y longitud de 20 m registra valores entre 1.0 y 2.1 m/s^2 , superando en todos los nodos el límite establecido por la tabla 5, de 0.5 m/s^2 . A diferencia del caso de 13 m, las aceleraciones excedentes no se registran en una única zona del vano, si no que se evidencia la participación de múltiples modos de vibración y también se evidencia la interacción humano-estructura más severa. Estos resultados confirman que el

aumento de la longitud del puente aumenta los efectos de la interacción reduciendo la rigidez y disminuyendo la frecuencia natural del puente, esto conduce a un comportamiento dinámico inaceptable desde el punto de vista del confort de los peatones.

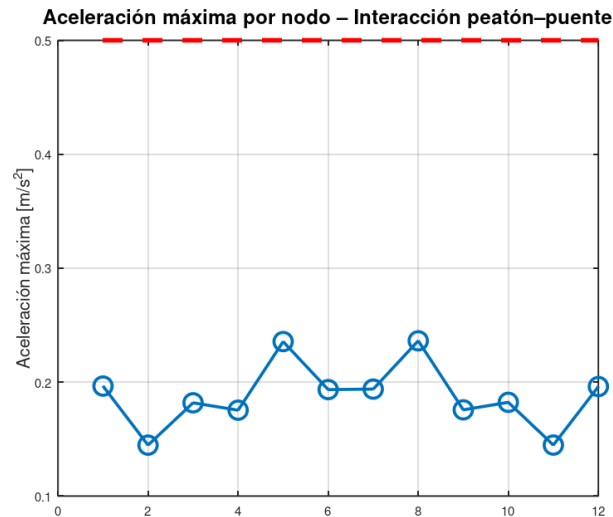


Figura 18.- Aceleraciones relativas correspondientes a la interacción del peatón con el puente peatonal de sección 2 y longitud 13 m.

La figura 18 presenta aceleraciones máximas inducidas por el peatón oscilan entre 0.14 y 0.24 m/s^2 para una frecuencia de 3.79 Hz, estos valores de aceleración se mantienen significativamente por debajo del límite de confort de 0.5 m/s^2 . La ausencia de picos pronunciados en la figura 18 y la distribución uniforme de las aceleraciones a lo largo del puente indican que no existe resonancia y que no se produce el fenómeno peatón-estructura. Con estos resultados se confirma que para frecuencias mayores a 3 Hz los puentes peatonales presentan comportamientos dinámicos adecuados para la locomoción humana.

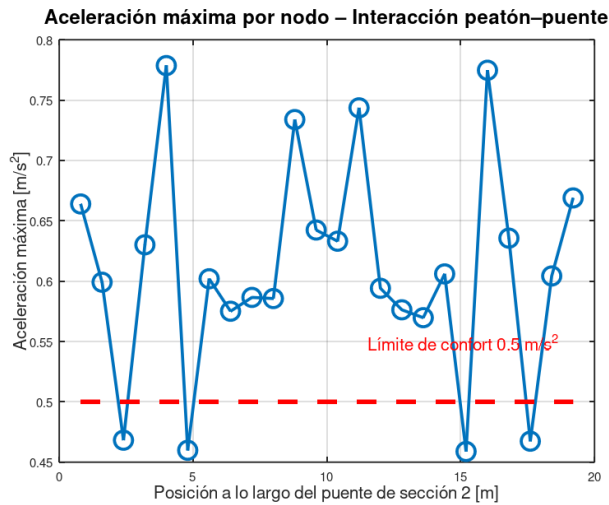


Figura 19.- Aceleraciones relativas correspondientes a la interacción del peatón con el puente peatonal de sección 2 y longitud 20 m.

La figura 19 correspondiente al puente de sección 2 y longitud de 20 m, con frecuencia natural de 2.74 Hz, presenta aceleraciones máximas inducidas por el paso del peatón obteniendo valores entre 0.47 y 0.78 m/s^2 , superando en varios tramos del puente el límite de confort recomendado en la tabla 5 de 0.5 m/s^2 . La gráfica presenta picos localizados e lo largo del tablero, lo que se puede inducir es que la excitación del puente es cercana a la resonancia y a una sincronización parcial entre la frecuencia de la locomoción y la frecuencia natural del sistema. Estos resultados evidencian que para frecuencias menores a 3 Hz, presentan comportamientos dinámicos inadecuados desde el punto de vista del confort del usuario.

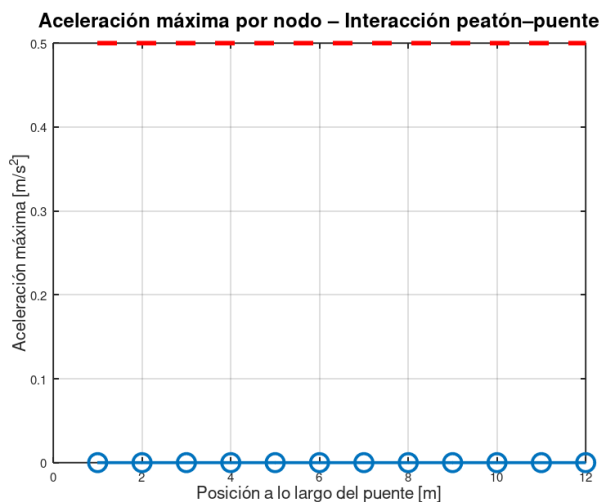


Figura 20.- Aceleraciones relativas correspondientes a la interacción del peatón con el puente peatonal de sección 3 y longitud 13 m.

La Figura 20 correspondiente a la sección 3 con longitud de 13 m y frecuencia natural de 24.81 Hz, presenta aceleraciones máximas inducidas muy muy bajas,

manteniéndose muy por debajo del límite de confort de 0.5 m/s^2 . Este comportamiento confirma que el factor importante para determinar si existirá interacción humano-estructura es la frecuencia natural del puente, una elevada frecuencia natural conduce a aceleraciones despreciables evitando el fenómeno de la resonancia o la sincronización entre el peatón y la estructura. En consecuencia, la sección 3 presenta mejor comportamiento dinámico y óptimo desde el punto de vista del confort del usuario.

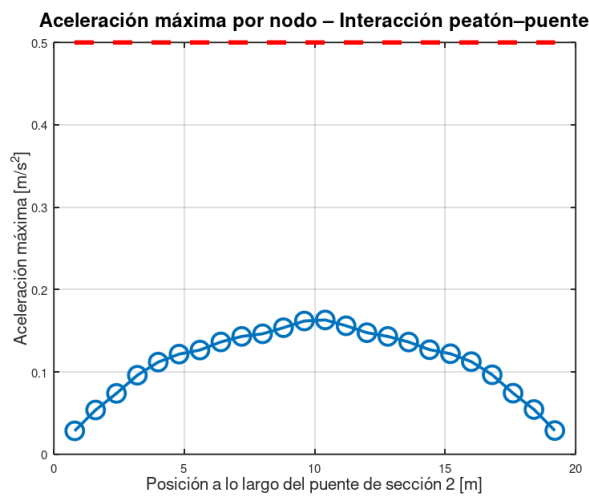


Figura 21.- Aceleraciones relativas correspondientes a la interacción del peatón con el puente peatonal de sección 3 y longitud 20 m.

En la Figura 21 correspondiente al puente peatonal de sección 3 y de frecuencia natural de 10.48 Hz, muestra aceleraciones máximas inducidas por el peatón que varían entre 0.03 a 0.17 m/s^2 , manteniéndose muy por debajo del límite de confort de 0.5 m/s^2 . La respuesta de las aceleraciones presenta comportamiento dinámico estable y sin resonancia. Estos resultados confirman que, para diferentes luces, la frecuencia natural de los puentes peatonales debe estar por arriba de los 3 Hz para garantizar un correcto desempeño dinámico en función al confort del peatón.

3.1.3 Discusión de resultados

Los resultados obtenidos en los 6 casos presentes confirman que la frecuencia natural fundamental del puente peatonal, es el parámetro más influyente para determinar si la respuesta dinámica inducida por el peatón, afecta o no afecta al confort del peatón, en la tabla 6 se resumen el parámetro de análisis y las aceleraciones máximas para evaluar el criterio de confort para los peatones.

Tabla 6.- Resumen de las secciones analizadas con sus frecuencias naturales y sus aceleraciones máximas.

Resumen de frecuencias naturales y de confort vibratorio en los puentes

Caso	Sección	Longitud (m)	Frecuencia Natural (Hz)	Aceleraciones máximas (m/s ²)	Evaluación de Confort
1	Sección 1	13	4,83	0,56	No cumple
2	Sección 1	20	2,04	2,1	Crítico
3	Sección 2	13	3,79	0,24	Cumple
4	Sección 2	20	2,74	0,78	No cumple
5	Sección 3	13	24,81	0,01	Excelente
6	Sección 3	20	10,48	0,17	Excelente

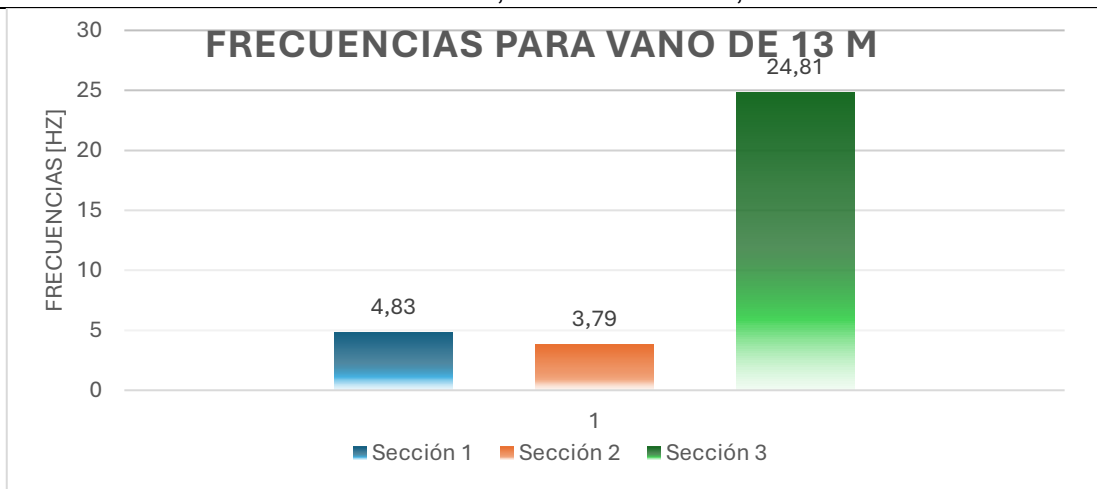


Figura 22.- Frecuencias de las 3 secciones en la longitud del vano de 13 m

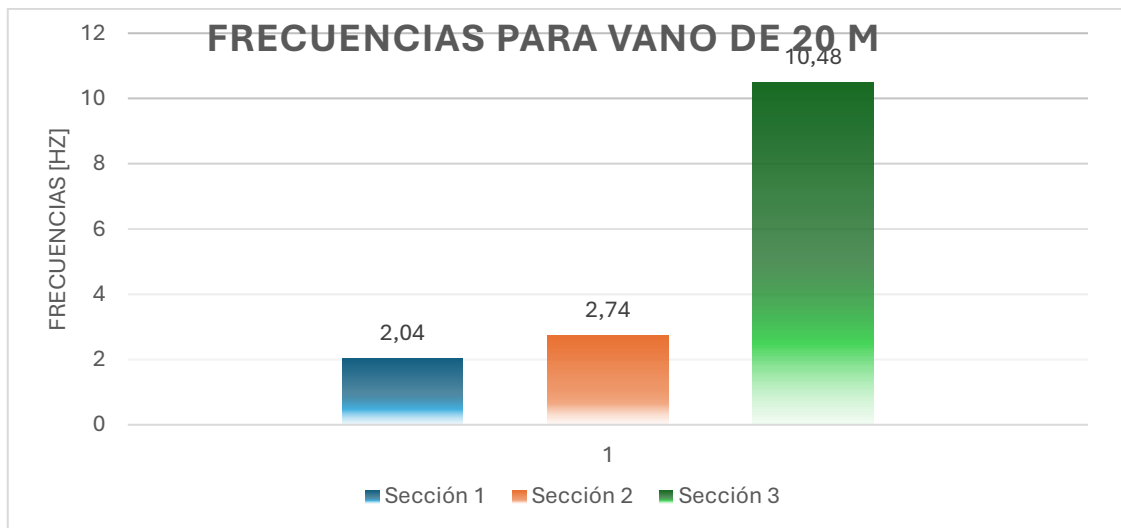


Figura 23.- Frecuencias de las 3 secciones en la longitud del vano de 20 m

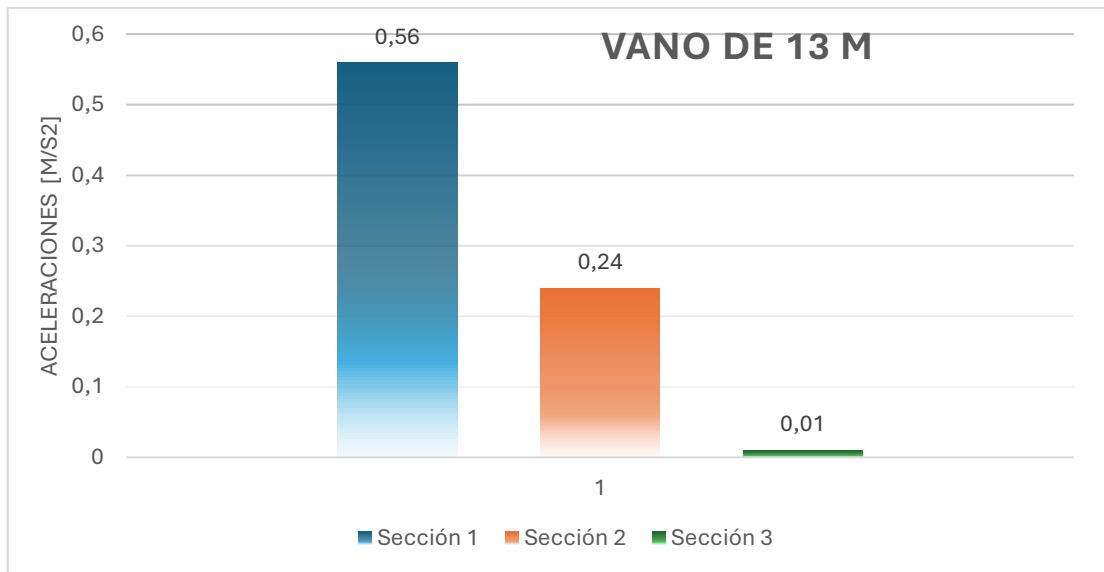


Figura 24.- Aceleraciones máximas para las 3 secciones en el vano de 13 m

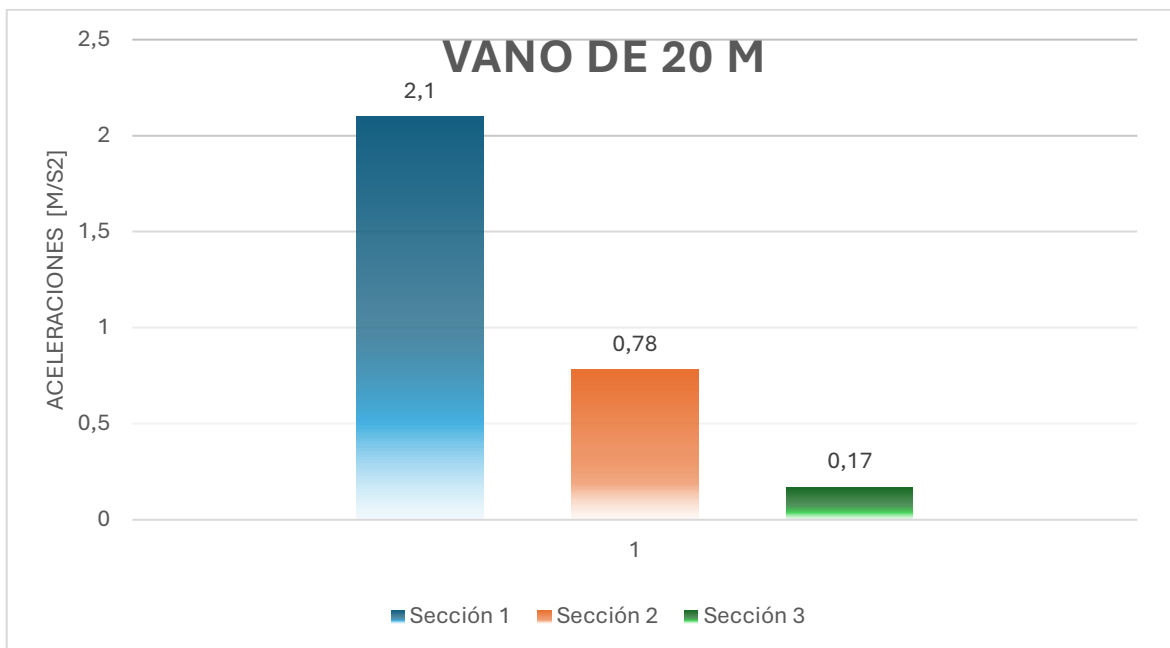


Figura 25.- Aceleraciones máximas para las 3 secciones en el vano de 20 m

En los 6 casos analizados y presentados como resumen en la Tabla 6, se observa que:

- Puentes con frecuencias cercanas a 1.6 y 3.0 Hz presentan aceleraciones elevadas, que en muchos casos incumplen el criterio de confort.
- Puentes con frecuencias superiores a 3.5 y 4.0 Hz muestran mejores respuestas vibratorias o despreciables para la percepción del peatón.

Con este análisis resumido en las siguientes figuras: Figura 22, Figura 23, Figura 24 y Figura 25, se aprecia que existe concordancia con la teoría de la interacción

humano-estructura y que con las recomendaciones reportadas en la literatura de los manuales y normas internacionales, establece que la coincidencia entre la frecuencia de excitación peatonal y la frecuencia natural del sistema conducen a el fenómeno de resonancia o la sincronización parcial entre el paso del peatón y la respuesta del puente.

El incremento de la longitud del vano produce una reducción significativa en la frecuencia natural, por lo que se aprecia en la tabla 6 que aumentando la longitud, se reduce la rigidez y por lo tanto se reduce la frecuencia natural del puente.

Estos resultados demuestra que las secciones transversales estudiadas funcionan adecuadamente para luces cortas y se vuelven inaceptables para luces mayores.

La comparación entre las tres secciones analizadas, permiten identificar tendencias muy claras:

- Sección 1.- Presenta menor rigidez dinámica, lo que la convierte en altamente susceptible a la interacción humano-estructura, en especial cuando el vano aumenta considerablemente.
- Sección 2.- Ésta presenta un comportamiento intermedio, adecuado para luces cortas pero sensible a luces grandes, dejando en el límite de las frecuencias al puente peatonal.
- Sección 3.- En este caso, se presenta un mejor comportamiento dinámico, siendo optimo en todos los casos analizados, teniendo como respuestas aceleraciones muy por debajo del límite de confort, incluso cuando su longitud aumenta.

En el análisis de las aceleraciones, se aprecia dos patrones claramente diferenciados:

1. Respuestas modales regulares
2. Respuestas irregulares con picos localizados.

Este comportamiento sugiere que, en los casos críticos, la interacción humano-estructura no está limitada a un solo modo, si no que involucra a los demás modos en donde su frecuencia coincida o se aproximen a la frecuencia del paso del peatón, involucrando respuestas acopladas mas complejas y esto se refleja en un incremento de la percepción de vibraciones en el peatón.

3.1.4 Implicaciones en el diseño estructural de puentes peatonales

Los resultados permiten analizar implicaciones directas para los diseños estructurales de los diferentes puentes peatonales.

- No se garantiza un comportamiento adecuado en el confort cumpliendo con todos los estados límites de resistencia.
- Para luces medianas o largas en puentes, se debe verificar explícitamente el estado límite de servicio por vibraciones.
- La frecuencia natural del puente peatonal mínima recomendada debe estar en el orden de 3.5 – 4.0 Hz para resultados adecuados que eviten problemas en el confort en la mayoría de los casos analizados.
- Para puentes peatonales con frecuencias menores al valor indicado de 3 Hz, debe considerarse; aumentar la rigidez estructural, aumentar la masa del mismo o incorporar sistemas de control de vibraciones como amortiguadores sintonizados.

3.1.5 Análisis del prediseño del TDM para control de vibraciones

Considerando para este análisis la sección tipo 2 con longitud de 20 m con frecuencia natural de 2.74 Hz, se dimensionó el amortiguador para que se sincronice con el puente en su primer modal, con las siguientes características:

$$\mu = 0.03$$

$$m_{TMD} = 304 \text{ kg}$$

$$f_{TMD} = 2.71 \text{ Hz}$$

$$\xi_{TMD} = 0.105$$

Dando como resultado para la sección 2 con longitud de 20m la siguiente gráfica:

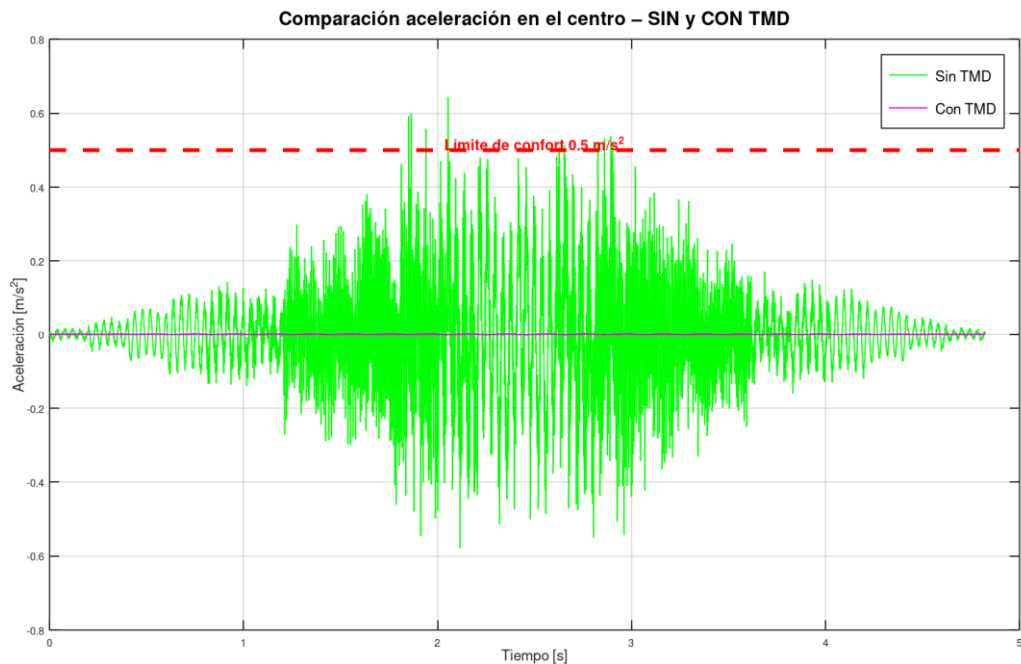


Figura 26.- Grafica de aceleraciones en el centro del vano sin amortiguador y con amortiguador.

En la Figura 26 se aprecia en color verde, las altas aceleraciones del vano central cuando el peatón recorre todo el puente, amplificando su magnitud cuando el mismo camine por el centro, dando aceleraciones mayores al límite de confort.

La gráfica muestra que las aceleraciones pico andan por el orden de $0.60 - 0.64 \text{ m/s}^2$, que se esperaría por su baja frecuencia, y que entre en sincronización con el caminar del peatón, esta aceleración se amplifica progresivamente por la coincidencia entre la frecuencia natural del puente y la frecuencia de paso del peatón, esto indica que no se cumple con el criterio de confort para el peatón dado que las aceleraciones si van a ser perceptibles a los usuarios, modificando su marcha.

Cuando se aplica un sistema TMD (línea magenta), el TMD entra en resonancia fuera de fase con el modo dominante del puente produciendo una transferencia de energía vibratoria desde la viga del puente hacia el TMD, disipando dicha energía para evitar la acumulación en su vano central, mostrando una reducción muy considerada de las aceleraciones a lo largo del puente durante todo el trayecto del peatón.

Esto permite analizar el puente y anticipar a problemas de vibraciones con una solución efectiva desde el diseño y no tener que recurrir a esperar a que las altas aceleraciones se manifiesten cuando el puente entre en servicio y se tenga que clausurar para realizar un pos-análisis y determinar las características del amortiguador y evitar cerrar el puente por un tiempo adicional.

La incorporación del amortiguador de masa sintonizada demuestra ser altamente efectiva en el control de las vibraciones cuando son inducidas por los peatones, sobre todo en su vano central donde se amplifican estos efectos, reduciendo significativamente las aceleraciones como en la Figura 26 bajando su aceleración de 0.64 m/s^2 a 0.007 m/s^2 , esto quiere decir que hubo una reducción del 91% de las vibraciones, garantizando el cumplimiento del confort desde la etapa del diseño estructural.

3.1.6 Síntesis de la discusión

Con los resultados obtenidos, se puede confirmar que la interacción humano-estructura es un fenómeno que está muy ligado a la frecuencia natural del puente peatonal, en donde pequeñas alteraciones en la longitud del vano o en la rigidez del mismo puente, los cambios inducen a respuestas dinámicas significativas, por ejemplo, la sección 3 presenta un alto desempeño dinámico, mientras que las secciones 1 y 2 evidencian la necesidad de aplicar criterios dinámicos explícitos para evitar estar por debajo de los límites de servicio por vibraciones.

Los resultados demuestran que el control de vibraciones por inducción de la locomoción humana, no deben ser considerados como aspecto secundario en el diseño de los puentes peatonales, o ser ignorados por el diseñador, sino mas bien, debe ser un criterio fundamental en donde se condicione la geometría, la rigidez y la viabilidad funcional de la estructura.

En cuanto a la aplicación de TMD para el control de vibraciones, se evidenció con la sección 2, que para puentes con frecuencias entre 1.8 a 3.5 Hz, cuya frecuencia dominante coincida con las frecuencias de los peatones, la incorporación de estos sistemas de amortiguamiento, evidencia claramente la reducción significativa de vibraciones. La comparación entre los dos casos sin TMD o con TMD permite evaluar cuantitativamente la efectividad del dispositivo desde el punto de vista del estado límite.

En el estudio sin TMD, la historia temporal de las aceleraciones muestra una respuesta significativamente amplificada durante el trayecto del peatón por el centro del vano, superando el umbral del confort. Este comportamiento es el principal indicativo del fenómeno de la resonancia asociado a la coincidencia o la cercanía del entre la frecuencia dominante del puente con el paso del peatón. La baja capacidad

del disipación de energía del mismo puente favorece a la acumulación progresiva de vibraciones, que se traducen en altos niveles de aceleración que resultan ser potencialmente perceptibles y molestos para los usuarios de estos puentes.

Desde la perspectiva del desempeño funcional, estos resultados confirman que para las estructuras que cumplan con los estados últimos de resistencia, el comportamiento dinámico sin dispositivos de control, resultan inadecuados en términos de servicio.

Por el contrario, al incorporar el amortiguador de masa sintonizada, se observa una reducción drástica de la amplitud de las aceleraciones registradas en el centro del puente. La respuesta del sistema puente – TMD permanece muy por debajo del límite permitido de confort durante todo el trayecto del peatón, confirmando que el TMD logra absorber y disipar la energía asociada al modo dominante de vibración, evitando el fenómeno de la resonancia.

Esto es de vital importancia porque permite al diseñador prevenir la clausura del puente después de su inauguración, anticipando estos fenómenos de resonancia y evitando un pos-análisis que resulta incómodo para los constructores, desde la ubicación efectiva del TMD hasta su instalación, evitando crear mecanismos de adaptación para estos elementos en la estructura ya construida.

CAPÍTULO 4

4 Conclusiones Y Recomendaciones

4.1 Conclusiones

4.1.1 Caracterización de las propiedades dinámicas del sistema estructural puente - peatón

La caracterización dinámica de todo el sistema estructural permitió establecer el parámetro dominante que gobierna el comportamiento dinámico del puente peatonal ante las cargas que fueron inducidas por la locomoción humana, esta es la frecuencia fundamental del sistema. La incorporación del comportamiento compuesto entre la viga y la carpeta de hormigón armado, influyó directamente con la rigidez del sistema y por lo consiguiente, también influyó en el resultado de las frecuencias naturales obtenidas.

Los resultados obtenidos demuestran que las variaciones en la geometría de la sección transversal, en la rigidez, en las cargas aplicadas o en la longitud del vano, producen cambios significativos para la respuesta dinámica, lo cual permite concluir que la evaluación dinámica no se la puede generalizar únicamente a partir de criterios de resistencia de la estructura.

Como consecuencia, se concluye que es indispensable para realizar una evaluación dinámica realista por desempeño vibratorio en puentes peatonales una correcta caracterización de propiedades dinámicas como primer criterio a cumplir, esperando frecuencias que señalen si es necesario dicho análisis.

4.1.2 Sensibilidad dinámica del puente peatonal ante los cambios geométricos.

En función al análisis modal que se realizó para las diferentes configuraciones, se logró identificar la sensibilidad de las frecuencias fundamentales ante cambios en sus longitudes de vano y en el cambio de las secciones transversales, evidenciando que para secciones dadas, el incremento de la luz del puente causa una alta reducción significativa en las frecuencias naturales, lo que puede llevar a frecuencias que coincidan con las frecuencias de excitación de los peatones.

Se demostró que puentes con frecuencias naturales que estén en el rango de 1.6 a 3.0 Hz presentan respuestas críticas, en las cuales la principal respuesta es la

aceleración excesiva y la activación de múltiples grados de vibración en el puente peatonal. Caso contrario ocurre en los puentes con frecuencias mayores a 3.5 - 4.0 Hz que presentan respuestas vibratorias consideradas estables, esto es, con aceleraciones que se establecen por debajo de los límites del confort establecidos por la AASHTO.

Estos resultados demuestran que realizar el análisis modal es una herramienta fundamental para poder seleccionar y validar puentes peatonales que permitan anticiparse a los comportamientos dinámicos inadecuados antes o después de la etapa constructiva, en especial para puentes de luces medias y grandes.

4.1.3 Interacción humano – estructura y evaluación del confort del peatón.

En la modelación acoplada del sistema peatón – estructura se pudo cuantificar de forma directa el fenómeno de la interacción humano – estructura dejando como evidencia que el peatón no solo se comporta como carga externa si no que, se comporta como un subsistema dinámico en el cuál es capaz de afectar y modificar la respuesta vibratoria del puente.

En los resultados de los cálculos del análisis dinámico, se demostró en la Tabla 6 donde las secciones 1 y 2 con longitudes de 20 m son casos críticos donde se producen una sincronización parcial o la resonancia entre la frecuencia de la locomoción humana y la frecuencia natural del puente, amplificando significativamente las aceleraciones verticales del puente. Estas aceleraciones altas, se manifestaron en estas secciones sobre todo por su baja rigidez y su baja frecuencia, en las cuales las aceleraciones superaron ampliamente el límite del confort de 0.5 m/s^2 .

Caso contrario ocurren en la sección 3 donde las configuraciones de las frecuencias naturales son elevadas, y la interacción humano – estructura resulta en valores despreciables con aceleraciones muy bajas, en donde su efecto no es perceptible a los usuarios. En estos hallazgos se puede confirmar que realizar la evaluación explícita de la interacción humano – estructura es fundamental para garantizar que el puente peatonal cumpla con el confort y la seguridad del peatón.

4.1.4 Aplicación del amortiguador de masa sintonizada en el puente peatonal.

La incorporación del TMD en el diseño del puente peatonal resultó en una estrategia altamente efectiva para controlar las vibraciones inducidas en el puente. Estos resultados encontrados por medio del análisis dinámico permiten evidenciar que en puentes con ausencia de TMD, presentan niveles altos de aceleraciones sobre todo en sus vanos centrales que superan el límite de confort establecidos.

Por el contrario, cuando se implementan los TMD desde el diseño, se reduce significativamente las aceleraciones máximas y la respuesta global del sistema, manteniendo el comportamiento dinámico del puente en niveles imperceptibles para los peatones. Esto permite que el diseñador después de realizado el análisis dinámico entre el peatón y la estructura, anticipe los resultados y resuelva el problema de vibraciones desde oficina, sin esperar a que primero falle por servicio la estructura para luego solucionarlo después de construida la obra.

4.1.5 Implicaciones para el diseño estructural de los puentes peatonales.

Tomando como partida los resultados obtenidos en este proyecto, se concluye que todos los diseños de los puentes peatonales como tal, no se debe limitar a cumplir con los estados últimos en cuanto a límites de resistencias, sino más bien, se debe incorporar de forma obligatoria, el análisis por estado límite de servicio por vibraciones. En este documento se demuestra que los puentes cullo diseño estructural cumpla los límites de seguridad estática, pueden presentar condiciones de servicio inaceptables si no se controla su comportamiento dinámico.

Para diseños futuros de puentes peatonales, se establece como límite mínimo para frecuencias, el valor de 3.5 a 4.0 Hz para proporcionar un margen adecuado de seguridad ante problemas de confort, aumentando el límite establecido de 3 Hz según la norma norteamericana AASHTO. Para puentes que no cumplan con este criterio, es necesario considerar estrategias posteriores como aumento en su rigidez estructural, modificación del sistema de masas o incorporar sistemas de control de vibraciones como puede ser los amortiguadores sintonizados.

4.1.6 Conclusión general.

Se concluye que la interacción humano – estructura es un fenómeno que afecta directamente en el comportamiento dinámico de los puentes peatonales, en los cuales dependen altamente de la frecuencia natural de la estructura y que los resultados en este documento confirma que el control de vibraciones inducidas por la locomoción humana se debe considerar en el diseño integro de todos los puentes peatonales como un diseño fundamental, que sea capaz de condicionar la geometría, la rigidez y la viabilidad funcional de la estructura.

Con este contexto, en este documento, el enfoque metodológico se adapta a proporcionar una herramienta robusta para evaluar el desempeño dinámico de los puentes peatonales, permitiendo identificar las configuraciones estructurales de forma óptimas para garantizar la seguridad estructural y la seguridad de confort junto con la experiencia del usuario.

El empleo de amortiguadores de masa sintonizada constituye una solución viable, efectiva y técnicamente fundamental para garantizar el confort del peatón sobre todo el puentes de baja frecuencia natural, contribuyendo al desarrollo de infraestructuras funcionales sin necesidad de ser aplicado después de su inauguración y sin necesidad de clausurarla y cerrar la obra para luego realizar un pos-análisis y una adaptación de la estructura para implementar estos mecanismos de control.

4.2 Recomendaciones

- Se debe considerar explícitamente la interacción humano-estructura en la etapa preliminar de diseño de los puentes peatonales, se recomienda realizar el análisis dinámico del puente peatonal en donde no se limite únicamente a las verificaciones por análisis estático, si no que también se incorpore desde el pre diseño la evaluación dinámica y la interacción humano – estructura, esto es en especial en puentes donde tengan frecuencias naturales muy bajas en las cuales puedan coincidir con las frecuencias de los peatones.
- Se recomienda verificar las frecuencias naturales para los diferentes vanos en el proyecto, por lo que es recomendable diseñar estructuras con frecuencias naturales que se mantengan fuera del rango de 1.6 a 3.5 Hz para evitar altas

vibraciones verticales. En caso de que no se controle este valor, se debe considerar medidas adicionales para el control de vibraciones.

- Se recomienda evaluar el confort de los usuarios mediante el criterio de la aceleración del puente, además del análisis modal, se debe verificar las aceleraciones a lo largo del puente y compararlas con los límites de confort establecidos en las diferentes normas internacionales, con esta verificación se podrá evaluar de forma más realista y precisa la percepción del usuario ante las aceleraciones del puente.
- Se debe analizar la influencia de la longitud del vano de los puentes y su rigidez final, dado que pequeñas variaciones en la geometría o en la longitud del vano, afecta considerablemente a las propiedades dinámicas del puente, dado a que tienden a disminuir las frecuencias naturales y esto conlleva a aumentar la susceptibilidad a vibraciones.
- Se debe realizar todo cálculo con criterios dinámicos, esto es, optimizar la sección transversal de forma resistente y que genere altas frecuencias, la sección transversal no se debe seleccionar con criterios de la resistencia estática si no que también se debe considerar como la sección influye a la rigidez del sistema en donde se tiene un alto impacto a las vibraciones del puente.
- Para todos los análisis, se debe realizar modelos numéricos representativos del comportamiento de los puentes ante cargas dinámicas, en donde se represente bien las cargas, las variaciones de las velocidades del peatón y el número de peatones, con la intención de identificar cuál es la condición más crítica.
- Se recomienda analizar diferentes escenarios de peatones, en donde se analice, su paso normal, su marcha, y el número de peatones sobre el puente.
- Se debe como punto final, integrar a futuros proyectos los estudios que impulsen a la incorporación de criterios más específicos en la integración humano - estructura tanto en las normativas nacionales como en las internacionales, contribuyendo a diseños más seguros, funcionales y orientados al bienestar del usuario.

- Se recomienda considerar sistemas de control de vibraciones como un TMD como parte integral del diseño de puentes peatonales, especialmente en puentes cuya frecuencia sea menor a 3.5 Hz, la inclusión temprana de estos mecanismos de control permite controlar las vibraciones desde diseño cumpliendo con los criterios de confort y evitando la necesidad de aplicar soluciones correctivas posteriores a la construcción.
- Se recomienda evaluar la respuesta del sistema analizando las posibles variaciones de las propiedades dinámicas del puente, a fin de asegurar la robustez y la efectividad del TMD a lo largo de la vida útil de la estructura.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] D. Gómez, S. Villamizar, and A. Ortiz, “Revista UIS Ingenierías Serviceability analysis for human-induced vertical vibration on pedestrian structures Análisis por condición de servicio causado por vibración vertical inducida por peatones en estructuras,” vol. 21, no. 3, pp. 135–152, 2022, doi: 10.18273/revuin.v21n3.
- [2] T. L. Edirisinghe and J. P. Talbot, “The significance of soil–structure interaction in the response of buildings to ground-borne vibration from underground railways,” *J. Sound Vib.*, vol. 597, Feb. 2025, doi: 10.1016/j.jsv.2024.118812.
- [3] H. V. Dang and S. Živanović, “Experimental characterisation of walking locomotion on rigid level surfaces using motion capture system,” *Eng. Struct.*, vol. 91, pp. 141–154, May 2015, doi: 10.1016/j.engstruct.2015.03.003.
- [4] S. Zhang *et al.*, “A Review on Comfort of Pedestrian Bridges Under Human-Induced Vibrations and Tuned Mass Damper Control Technologies,” 2025. doi: 10.3390/ma18163903.
- [5] F. Tubino, “Human-structure interaction in pedestrian bridges: A probabilistic approach,” in *Procedia Engineering*, Elsevier Ltd, 2017, pp. 2883–2888. doi: 10.1016/j.proeng.2017.09.584.
- [6] Y. Fujino, B. M. Pacheco, S. -I Nakamura, and P. Warnitchai, “Synchronization of human walking observed during lateral vibration of a congested pedestrian bridge,” *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*, vol. 22, no. 9, pp. 741–758, 1993, doi: 10.1002/eqe.4290220902.
- [7] P. Dallard *et al.*, “London Millennium Bridge: Pedestrian-Induced Lateral Vibration,” *Journal of Bridge Engineering*, vol. 6, no. 6, 2001, doi: 10.1061/(asce)1084-0702(2001)6:6(412).
- [8] D. Gómez, “HUMAN-INDUCED VERTICAL VIBRATION ON PEDESTRIAN STRUCTURES: NUMERICAL AND EXPERIMENTAL ASSESSMENT A Dissertation,” 2019.

- [9] J. Yao, Y. Chen, W. Yang, Y. Sun, and Z. Wu, "Pedestrian-Induced Bridge Vibration Driven by Behavioral Preferences," *Buildings*, vol. 15, no. 22, 2025, doi: 10.3390/buildings15224114.
- [10] J. D. Aux, B. Castillo, J. Marulanda, and P. Thomson, "Modelling Human-Structure Interaction in Pedestrian Bridges Using a Three-Dimensional Biomechanical Approach," *Applied Sciences (Switzerland)*, vol. 14, no. 16, Aug. 2024, doi: 10.3390/app14167257.
- [11] Z. Lu, X. Chen, X. Li, and P. Li, "Optimization and application of multiple tuned mass dampers in the vibration control of pedestrian bridges," *Structural Engineering and Mechanics*, vol. 62, no. 1, 2017, doi: 10.12989/sem.2017.62.1.055.
- [12] Z. Wei *et al.*, "Lateral Vibration Control of Long-Span Small-Radius Curved Steel Box Girder Pedestrian Bridge with Distributed Multiple Tuned Mass Dampers," *Sensors*, vol. 22, no. 12, 2022, doi: 10.3390/s22124329.
- [13] Z. Chen *et al.*, "Dynamic Response Analysis and Vibration Reduction of Steel Truss Corridor Pedestrian Bridge Under Pedestrian Load," *Front. Mater.*, vol. 9, 2022, doi: 10.3389/fmats.2022.839265.
- [14] K. E. Barth, G. K. Michaelson, and P. Kozhokin, "DEVELOPMENT AND EXPERIMENTAL TESTING OF PRESS-BRAKE-FORMED STEEL TUB GIRDERS FOR SHORT SPAN BRIDGE APPLICATIONS VOLUME III: EVALUATION OF MODULAR PRESS-BRAKE-FORMED TUB GIRDERS WITH UHPC JOINTS ABSTRACT EVALUATION OF MODULAR PRESS-BRAKE-FORMED TUB GIRDERS WITH UHPC JOINTS."
- [15] K. E. Barth, G. K. Michaelson, and M. G. Barker, "Development and Experimental Validation of Composite Press Brake–Formed Modular Steel Tub Girders for Short-Span Bridges," *Journal of Bridge Engineering*, vol. 20, no. 11, Nov. 2015, doi: 10.1061/(asce)be.1943-5592.0000770.
- [16] N. Golkar, A. Sadeghpour, and J. Divandari, "Drawing inspiration from the spine, designing a pedestrian bridge [spine-inspired design of a pedestrian bridge],"

- Journal of Architecture and Urbanism*, vol. 45, no. 2, 2021, doi: 10.3846/jau.2021.13369.
- [17] J. Li and X. Liu, "Human-Induced Vibration Analysis and Reduction Design for Super Long Span Pedestrian Arch Bridges with Tuned Mass Dampers," *Applied Sciences (Switzerland)*, vol. 13, no. 14, 2023, doi: 10.3390/app13148263.
- [18] M. Klasztorny, K. P. Zajac, and D. B. Nycz, "GFRP composite footbridge series with multi-box cross section – Part 1: Design methodology, conceptual design and global detailed design," *Compos. Struct.*, vol. 238, 2020, doi: 10.1016/j.compstruct.2020.111965.
- [19] F. Liu, G. Qin, M. Ma, Q. Zhang, T. Song, and G. Zhang, "Analysis and test of human induced vibration of pedestrian suspension bridge," *Jianzhu Jiegou Xuebao/Journal of Building Structures*, vol. 44, no. 9, 2023, doi: 10.14006/j.jzjgxb.2022.0371.
- [20] P. Lu, Y. Zhou, Y. Wu, Y. Ding, J. Wang, and Y. Ma, "Comfort Assessment of Human-Induced Vibration of Pedestrian Bridges Based on Stevens Annoyance Rate Model," *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, vol. 22, no. 5, 2022, doi: 10.1142/S0219455422500523.
- [21] W.-J. Cao, C. G. Koh, and I. F. C. Smith, "Vibration Serviceability Assessment for Pedestrian Bridges Based on Model Falsification," *Journal of Bridge Engineering*, vol. 26, no. 3, 2021, doi: 10.1061/(asce)be.1943-5592.0001673.
- [22] D. Colmenares, G. Costa, M. Civera, C. Surace, and R. Karoumi, "Quantification of the human–structure interaction effect through full-scale dynamic testing: The Folke Bernadotte Bridge," *Structures*, vol. 55, 2023, doi: 10.1016/j.istruc.2023.06.133.
- [23] A. Sadhu, K. Dunphy, and C. Zerpa, "Investigation of vibration data-based human load monitoring system," *Struct. Health Monit.*, vol. 20, no. 3, 2021, doi: 10.1177/1475921719836254.
- [24] C. C. Caprani and E. Ahmadi, "Formulation of human–structure interaction system models for vertical vibration," *J. Sound Vib.*, vol. 377, 2016, doi: 10.1016/j.jsv.2016.05.015.

- [25] E. Shahabpoor, A. Pavic, V. Racic, and S. Zivanovic, "Effect of group walking traffic on dynamic properties of pedestrian structures," *J. Sound Vib.*, vol. 387, 2017, doi: 10.1016/j.jsv.2016.10.017.
- [26] S. Yang, J. Yang, and R. Li, "Evaluation of Pedestrian Comfort for a Footbridge with Hinged Piers," *Sustainability (Switzerland)*, vol. 15, no. 13, 2023, doi: 10.3390/su15139851.
- [27] A. N. Blekherman, "Autoparametric Resonance in a Pedestrian Steel Arch Bridge: Solferino Bridge, Paris," *Journal of Bridge Engineering*, vol. 12, no. 6, 2007, doi: 10.1061/(asce)1084-0702(2007)12:6(669).
- [28] P. Feng, Z. Wang, F. Jin, and S. Zhu, "Vibration Serviceability Assessment of Pedestrian Bridges Based on Comfort Level," *Journal of Performance of Constructed Facilities*, vol. 33, no. 5, 2019, doi: 10.1061/(asce)cf.1943-5509.0001316.
- [29] R. F. Song, J. L. Wang, Z. S. Yang, and S. J. Ma, "Optimization Analysis of Vibration Reduction for Large-Span Steel Pedestrian Bridges Based on Tuned Mass Damper Inerter System," *Advances in Civil Engineering*, vol. 2025, no. 1, 2025, doi: 10.1155/adce/6521700.
- [30] N. L. Garcia-Troncoso, "STRUCTURAL RESPONSE AND DESIGN CRITERIA OF FOOTBRIDGES WITH TUNED MASS DAMPERS," 2020.

ANEXOS

A continuación, se presenta el código para la interacción humano – estructura, este código es replicable para las 3 secciones, en donde se debe variar la longitud, matriz de rigidez y la matriz de masa para poder utilizarlo en los demás análisis realizados:

```
1 % VIGA DE SECCIÓN 1
2 % Longitud del puente 20 m
3 # Comparación con SAP2000
4
5 clc; clear; close all;
6 pkg load control;
7 % format bank;
8
9 % Datos de entrada
10 L = 20; % Longitud de la viga [m]
11 Ec = 4.1e10; % Módulo de elasticidad del concreto [N/m2]
12 Es = 1.999e11; % Módulo de elasticidad del acero [N/m2]
13 A = 0.058; % Área total [m2]
14 I = 1.296e-3; % Inercia de la viga [m^4]
15 gdl = 52; % grados de libertad en toda la viga
16 s = 0.8; % Separación de pasos [m]
17 zz = 0.05; % Amortiguamiento
18 % Cálculos de las masas:
19
20 m1 = s*A*7850; % Masa de la viga en 1 m [kg]
21 DC = 235.36/9.8; % Carga muerta Permanente [kg/m]
22 DC = DC*s; % Carga muerta permanente [kg]
23 DW = 490.3325/9.8; % Carga muerta por carpeta de rodadura [kg/m]
24 DW = DW*s; % Carga muerta por carpeta de rodadura [kg]
25
26 m = m1 + DC + DW; % Masa activa [kg]
27
28 % Creando bucle de nodos
29 n = (L/s);
30 i=1;
31 for i = 1:n ;
32 nod(n+1,:) = [0 0]; % último nodos
33 nod(i,:) = [0 i*s];
34 end
35
36 % Longitud de los tramos:
37 E = Es;
38 L261 = sqrt((nod(1,1)-nod(26,1))^2 + (nod(1,2)-nod(26,2))^2); % Longitud del nodo 26 a 1 [m]
39 k261 = RigidezViga(L261,E,I);
40
41 L12 = sqrt((nod(2,1)-nod(1,1))^2 + (nod(2,2)-nod(1,2))^2); % Longitud del nodo 2 a 1 [m]
42 k12 = RigidezViga(L12,E,I);
43
44 L23 = sqrt((nod(3,1)-nod(2,1))^2 + (nod(3,2)-nod(2,2))^2); % Longitud del nodo 3 a 2 [m]
45 k23 = RigidezViga(L23,E,I);
```

```

46
47 L34 = sqrt((nod(4,1)-nod(3,1))^2 + (nod(4,2)-nod(3,2))^2); % Longitud del nodo 4 a 3 [m]
48 k34 = RigidezViga(L34,E,I);
49
50 L45 = sqrt((nod(5,1)-nod(4,1))^2 + (nod(5,2)-nod(4,2))^2); % Longitud del nodo 4 a 5 [m]
51 k45 = RigidezViga(L45,E,I);
52
53 L56 = sqrt((nod(6,1)-nod(5,1))^2 + (nod(6,2)-nod(5,2))^2); % Longitud del nodo 5 a 6 [m]
54 k56 = RigidezViga(L56,E,I);
55
56 L67 = sqrt((nod(7,1)-nod(6,1))^2 + (nod(7,2)-nod(6,2))^2); % Longitud del nodo 6 a 7 [m]
57 k67 = RigidezViga(L67,E,I);
58
59 L78 = sqrt((nod(8,1)-nod(7,1))^2 + (nod(8,2)-nod(7,2))^2); % Longitud del nodo 7 a 8 [m]
60 k78 = RigidezViga(L78,E,I);
61
62 L89 = sqrt((nod(9,1)-nod(8,1))^2 + (nod(9,2)-nod(8,2))^2); % Longitud del nodo 8 a 9 [m]
63 k89 = RigidezViga(L89,E,I);
64
65 L910 = sqrt((nod(10,1)-nod(9,1))^2 + (nod(10,2)-nod(9,2))^2); % Longitud del nodo 9 a 10 [m]
66 k910 = RigidezViga(L910,E,I);
67
68 L1011 = sqrt((nod(11,1)-nod(10,1))^2 + (nod(11,2)-nod(10,2))^2); % Longitud del nodo 10 a 11 [m]
69 k1011 = RigidezViga(L1011,E,I);
70
71 L1112 = sqrt((nod(12,1)-nod(11,1))^2 + (nod(12,2)-nod(11,2))^2); % Longitud del nodo 11 a 12 [m]
72 k1112 = RigidezViga(L1112,E,I);
73
74 L1213 = sqrt((nod(13,1)-nod(12,1))^2 + (nod(13,2)-nod(12,2))^2); % Longitud del nodo 12 a 13 [m]
75 k1213 = RigidezViga(L1213,E,I);
76
77 L1314 = sqrt((nod(14,1)-nod(13,1))^2 + (nod(14,2)-nod(13,2))^2); % Longitud del nodo 13 a 14 [m]
78 k1314 = RigidezViga(L1314,E,I);
79
80 L1415 = sqrt((nod(15,1)-nod(14,1))^2 + (nod(15,2)-nod(14,2))^2); % Longitud del nodo 14 a 15 [m]
81 k1415 = RigidezViga(L1415,E,I);
82
83 L1516 = sqrt((nod(16,1)-nod(15,1))^2 + (nod(16,2)-nod(15,2))^2); % Longitud del nodo 15 a 16 [m]
84 k1516 = RigidezViga(L1516,E,I);
85
86 L1617 = sqrt((nod(17,1)-nod(16,1))^2 + (nod(17,2)-nod(16,2))^2); % Longitud del nodo 16 a 17 [m]
87 k1617 = RigidezViga(L1617,E,I);
88
89 L1718 = sqrt((nod(18,1)-nod(17,1))^2 + (nod(18,2)-nod(17,2))^2); % Longitud del nodo 17 a 18 [m]
90 k1718 = RigidezViga(L1718,E,I);
91
92 L1819 = sqrt((nod(19,1)-nod(18,1))^2 + (nod(19,2)-nod(18,2))^2); % Longitud del nodo 18 a 19 [m]
93 k1819 = RigidezViga(L1819,E,I);
94
95 L1920 = sqrt((nod(20,1)-nod(19,1))^2 + (nod(20,2)-nod(19,2))^2); % Longitud del nodo 19 a 20 [m]
96 k1920 = RigidezViga(L1920,E,I);
97
98 L2021 = sqrt((nod(21,1)-nod(20,1))^2 + (nod(21,2)-nod(20,2))^2); % Longitud del nodo 20 a 21 [m]
99 k2021 = RigidezViga(L2021,E,I);

```

```

100
101 L2122 = sqrt((nod(22,1)-nod(21,1))^2 + (nod(22,2)-nod(21,2))^2); % Longitud del nodo 21 a 22 [m]
102 k2122 = RigidezViga(L2122,E,I);
103
104 L2223 = sqrt((nod(23,1)-nod(22,1))^2 + (nod(23,2)-nod(22,2))^2); % Longitud del nodo 22 a 23 [m]
105 k2223 = RigidezViga(L2223,E,I);
106
107 L2324 = sqrt((nod(24,1)-nod(23,1))^2 + (nod(24,2)-nod(23,2))^2); % Longitud del nodo 23 a 24 [m]
108 k2324 = RigidezViga(L2324,E,I);
109
110 L2425 = sqrt((nod(25,1)-nod(24,1))^2 + (nod(25,2)-nod(24,2))^2); % Longitud del nodo 24 a 25 [m]
111 k2425 = RigidezViga(L2425,E,I);
112
113
%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%
114 % ENSAMBLAR LA MATRIZ GLOBAL DE LA ESTRUCTURA
115
116 KK = zeros(gdl);
117 KK([51 52 1 25],[51 52 1 25]) = KK([51 52 1 25],[51 52 1 25]) + k261;
118 KK([1 25 2 26],[1 25 2 26]) = KK([1 25 2 26],[1 25 2 26]) + k12;
119 KK([2 26 3 27],[2 26 3 27]) = KK([2 26 3 27],[2 26 3 27]) + k23;
120 KK([3 27 4 28],[3 27 4 28]) = KK([3 27 4 28],[3 27 4 28]) + k34;
121 KK([4 28 5 29],[4 28 5 29]) = KK([4 28 5 29],[4 28 5 29]) + k45;
122 KK([5 29 6 30],[5 29 6 30]) = KK([5 29 6 30],[5 29 6 30]) + k56;
123 KK([6 30 7 31],[6 30 7 31]) = KK([6 30 7 31],[6 30 7 31]) + k67;
124 KK([7 31 8 32],[7 31 8 32]) = KK([7 31 8 32],[7 31 8 32]) + k78;
125 KK([8 32 9 33],[8 32 9 33]) = KK([8 32 9 33],[8 32 9 33]) + k89;
126 KK([9 33 10 34],[9 33 10 34]) = KK([9 33 10 34],[9 33 10 34]) + k910;
127 KK([10 34 11 35],[10 34 11 35]) = KK([10 34 11 35],[10 34 11 35]) + k1011;
128 KK([11 35 12 36],[11 35 12 36]) = KK([11 35 12 36],[11 35 12 36]) + k1112;
129 KK([12 36 13 37],[12 36 13 37]) = KK([12 36 13 37],[12 36 13 37]) + k1213;
130 KK([13 37 14 38],[13 37 14 38]) = KK([13 37 14 38],[13 37 14 38]) + k1314;
131 KK([14 38 15 39],[14 38 15 39]) = KK([14 38 15 39],[14 38 15 39]) + k1415;
132 KK([15 39 16 40],[15 39 16 40]) = KK([15 39 16 40],[15 39 16 40]) + k1516;
133 KK([16 40 17 41],[16 40 17 41]) = KK([16 40 17 41],[16 40 17 41]) + k1617;
134 KK([17 41 18 42],[17 41 18 42]) = KK([17 41 18 42],[17 41 18 42]) + k1718;
135 KK([18 42 19 43],[18 42 19 43]) = KK([18 42 19 43],[18 42 19 43]) + k1819;
136 KK([19 43 20 44],[19 43 20 44]) = KK([19 43 20 44],[19 43 20 44]) + k1920;
137 KK([20 44 21 45],[20 44 21 45]) = KK([20 44 21 45],[20 44 21 45]) + k2021;
138 KK([21 45 22 46],[21 45 22 46]) = KK([21 45 22 46],[21 45 22 46]) + k2122;
139 KK([22 46 23 47],[22 46 23 47]) = KK([22 46 23 47],[22 46 23 47]) + k2223;
140 KK([23 47 24 48],[23 47 24 48]) = KK([23 47 24 48],[23 47 24 48]) + k2324;
141 KK([24 48 49 50],[24 48 49 50]) = KK([24 48 49 50],[24 48 49 50]) + k2425;
142
143
144 % Eliminar los grados que no se va a nalizar
145 libres = [1:48 50 52];
146 Kred = KK(libres,libres);
147
148 # Matriz Condensada a los grados de libertad traslacional u1 y u2
149 Ktt = Kred(1:n-1,1:n-1);
150 Kot = Kred(n:50,1:n-1);
151 Koo = Kred(n:50,n:50);

```

```

152 Kto = Kred(1:n-1,n:50);
153 K = Ktt - Kto*inv(Koo)*Kot;
154
155
156
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
157 % MATRIZ DE MASA
158
159 M = diag([m; m; m; m; m; m; m; m; m; m; m; m; m; m; m; m; m; m; m; m; m]);
160
161 % DETERMINAR LAS FRECUENCIAS NATURALES DE LA VIGA
162
163 [Vec, Val] = eig(M\K);
164 [Wn, ind]= sort(sqrt(diag(Val)));
165 disp('Las frecuencias de vibración [rad/seg] son:')
166 Wn = diag(round(100*Wn)/100);
167 W1 = Wn(1,1)
168 disp('Las frecuencias de vibración [Hz] son:')
169 f = Wn/(2*pi);
170 f1 = f(1,1)
171
172
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
173 disp('Los modos de vibración sin normalizar:')
174 V = Vec(:,ind');
175 % Normalización a la masa:
176 disp('Masa normalizada respecto a la masa:')
177 Mn = V'*M*V; % Normalización de los modos con respecto a la masa
178 disp('Los modos de vibración normalizados con la masa:')
179 VV = V/sqrtm(Mn) ; % Formas modales normalizadas con la masa.
180 % Calcular la matriz de amortiguamiento:
181 Mn1 = VV'*M*VV ; % Matriz de Masa*
182 Kn = VV'*K*VV ; % Matriz de Rigidez*
183 disp('Matriz de amortiguamiento diagonal:')
184 Cn = 2*Mn1*Wn*zz ; % Matriz de Amortiguamiento Diagonal*
185
186
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
187 % PARTICIPACIÓN DE MASA MODAL (DIRECCIÓN VERTICAL)
188
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
189
190 r = ones(n-1,1); % vector de influencia vertical
191 Mtot = sum(diag(M)); % masa total del puente
192
193 nmod = size(VV,2); % número de modos
194 Gamma = zeros(nmod,1); % factor de participación
195 M_eff = zeros(nmod,1); % masa modal efectiva
196 M_part = zeros(nmod,1); % porcentaje de masa modal
197

```

```

198 for k = 1:nmod
199 phi_k = VV(:,k);
200
201 Gamma(k) = (phi_k.'*M*r) / (phi_k.'*M*phi_k);
202 M_eff(k) = Gamma(k)^2 * (phi_k.'*M*phi_k);
203 M_part(k) = 100 * M_eff(k) / Mtot;
204 end
205
206 % Mostrar resultados
207 disp('Modo | Frecuencia [Hz] | % Masa modal')
208 for k = 1:min(6,nmod)
209 fprintf('%4d | %12.3f | %10.2f %%\n', ...
210 k, f(k), M_part(k));
211 end
212
213 fprintf('Masa acumulada (6 modos) = %.2f %%\n', sum(M_part(1:6)));
214
215
216 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
217
218 # ANALIZANDO LA INTERACCIÓN
219 % Determinar las propiedades del peatón:
220 mp = 80; % Masa del peatón [kg]
221 kp = 20000; % Rigidez del peatón [N/m]
222 cp = 20/100; % Amortiguamiento
223 dd = 0.5; % Desplazamiento inicial de la masa principal
224
225
226 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
227 % -----
228 % Iteración
229 % -----
230
231 ## Condiciones iniciales
232 y0 = 0 ; % Desplazamiento inicial del puente [m]
233 vy = 0 ; % Velocidad inicial del puente [m/s]
234 q0 = 0 ; % Desplazamiento del cm del peatón [m]
235 vq0 = 0 ; % Velocidad inicial del cm del peatón [m/s]
236 Fcon = 0 ; % Fuerza de contacto [N]
237 tk = 0 ; % tiempo de contacto [s]
238 dt = 0.001 ; % Paso del tiempo [s]
239 St = 0.2 ; % Duración de la pisada [s]
240
241 r = zeros(n-1,1); % vector de influencia
242 nnodos = L/s - 1;
243
244
245 % Iteración de pasos

```

```

246 % -----
247 % INICIALIZACIONES GLOBALES (SOLO UNA VEZ)
248 % -----
249 nd = n-1; % GDL dinámicos
250 u_max = zeros(nd, nnodos); % desplazamientos máximos por nodo
251 a_max = zeros(nd, nnodos); % aceleraciones máximas por nodo
252 x0_puente = zeros(nd*2,1); % estado inicial del puente (nodo 1)
253
254 i = 1;
255
256 % -----
257 % HISTÓRICO COMPLETO DE ACELERACIONES RELATIVAS
258 % -----
259 a_rel_hist = cell(nnodos,1); % cada celda corresponde a una pisada
260 t_hist = cell(nnodos,1); % tiempo asociado a cada pisada
261
262 while i <= nnodos
263
264 % -----
265 % VECTOR DE INFLUENCIA PARA EL NODO i
266 % -----
267 r(:) = 0;
268 r(i) = 1;
269
270 vq = 1000; % impulso del pie
271 tk = 0; % reiniciar tiempo de contacto del peatón
272
273 % Estado temporal del puente DURANTE el nodo i
274 x_tmp = x0_puente;
275 % -----
276 % FUERZA DE CONTACTO (TEMPORAL)
277 % -----
278 tt = 0:dt:St;
279 %Fcon = zeros(length(tt),1);
280 %Fcon(:,1) =(cp * vq);
281
282 Wp = mp * 9.81; % peso del peatón [N]
283 alpha = 0.3; % coeficiente dinámico (ISO / Sétra)
284 Fcon = alpha * Wp * sin(pi*tt/St).';
285 while tk < St
286
287 A2 = [ zeros(nd) eye(nd)
288 -M\K -M\Cn ];
289
290 B2 = [ zeros(nd,1)
291 M\r ];
292
293 C2 = [ eye(nd) zeros(nd)
294 zeros(nd) eye(nd)
295 -M\K -M\Cn
296 -r.*(M\K) -r.*(M\Cn) ];
297
298 D2 = [ zeros(2*nd,1)
299 M\r

```

```

300 r.'*(M\r)];
301
302 % -----
303 % FUERZA DE CONTACTO (TEMPORAL)
304 % -----
305 tt = 0:dt:St;
306 % -----
307 % SISTEMA PUENTE
308 % -----
309 S = ss(A2, B2, C2, D2);
310
311 [Puente, ~, x_puente] = lsim(S, Fcon, tt, x_tmp);
312
313 % Guardar último estado SOLO PARA ESTE NODO
314 x_tmp = x_puente(end,:);
315 x0_puente = x_tmp;
316
317 % -----
318 % RESPUESTAS DEL PUENTE
319 % -----
320 u = Puente(:, 1:nd); % desplazamientos relativos
321 a_rel = Puente(:, 2*nd+1:3*nd); % aceleraciones relativas
322 a_abs = Puente(:, 3*nd + 1); % aceleración absoluta
323 % -----
324 % GUARDAR HISTÓRICO DE ACELERACIONES (pisada i)
325 % -----
326 a_rel_hist{i} = a_rel; % [length(tt) × nd]
327 t_hist{i} = tt(:); % vector de tiempo de la pisada
328
329 % -----
330 % SISTEMA PEATÓN
331 % -----
332 Ap = [ 0 1
333 -kp/mp -cp/mp ];
334
335 Bp = [ 0
336 -1 ];
337
338 Cp = [ 1 0
339 0 1
340 -kp/mp -cp/mp
341 kp cp ];
342
343 Dp = [ 0
344 0
345 -1
346 0 ];
347
348 Sp = ss(Ap, Bp, Cp, Dp);
349 Peaton = lsim(Sp, a_abs, tt, [0; vq0]);
350 Fcon(:,1) = Fcon + Peaton(:,4);
351 tk = tk + dt;
352 % -----
353 % VALORES MÁXIMOS EN EL NODO i

```

```

354 % -----
355 u_max(:, i) = max(abs(u));
356 a_max(:, i) = max(abs(a_rel));
357
358 % -----
359 % CONDICIÓN INICIAL DEL NODO i+1
360 % -----
361 x0_puente = x_tmp;
362 end
363
364 i = i + 1;
365 end
366
367
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
368 % CONCATENAR TODA LA HISTORIA TEMPORAL DEL CRUCE PEATONAL
369
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
370
371 a_rel_all = [];
372 t_all = [];
373
374 t_offset = 0;
375
376 for i = 1:nnodos
377 ti = t_hist{i}; % tiempo de la pisada i
378 ai = a_rel_hist{i}; % aceleraciones (todos los nodos)
379
380 a_rel_all = [a_rel_all; ai];
381 t_all = [t_all; ti + t_offset];
382
383 t_offset = t_offset + ti(end) + dt;
384 end
385 % -----
386 % -----
387 % ACELERACIÓN MÁXIMA POR NODO
388 % -----
389
390 a_nodo_max = max(a_max, [], 2); % [m/s^2]
391 x = (1:nd) * s; % coordenada longitudinal [m]
392
393 figure
394 plot(x, a_nodo_max, '-o', 'LineWidth', 1)
395 grid on
396
397 xlabel('Posición a lo largo del puente de sección 2 [m]', 'FontSize', 14)
398 ylabel('Aceleración máxima [m/s^2]', 'FontSize', 14)
399 title('Aceleración máxima por nodo – Interacción peatón–puente', 'FontSize', 16)
400
401 hold on
402 plot([x(1) x(end)], [0.5 0.5], '--r', 'LineWidth', 1.5)
403 text(x(end)*0.6, 0.55, 'Límite de confort 0.5 m/s^2', 'FontSize', 14, 'Color', 'r')

```

```

404 hold off
405
406 % Graficando la aceleración del centro vs el tiempo
407
408 t = t_all;
409 a_centro = a_rel_all(:,12);
410
411 figure
412 plot(t, a_centro, 'LineWidth', 1.2)
413 grid on
414 xlabel('Tiempo [s]', 'FontSize', 14)
415 ylabel('Aceleración [m/s^2]', 'FontSize', 14)
416 title('Aceleración en el centro del vano', 'FontSize', 16)
417 hold on
418 plot(xlim, [0.5 0.5], '--k', 'LineWidth', 1.5)
419 text(mean(xlim), 0.52, 'Límite de confort 0.5 m/s^2', ...
420 'HorizontalAlignment','center', 'Color','k')
421 grid on
422 xlabel('Tiempo [s]')
423 ylabel('Aceleración [m/s^2]')
424 hold off
425
426
427 % ===== NUEVA RUTINA: PUENTE + TMD (ASAMI) ===== %
428 % NO MODIFICA EL MODELO ORIGINAL
429 % SOLO SE AGREGA PARA COMPARACIÓN
430
431
432 disp('=====')
433 disp('ANÁLISIS ADICIONAL: PUENTE CON TMD (MÉTODO ASAMI)')
434 disp('=====')
435
436 % -----
437 % DEFINICIÓN DE GDL
438 % -----
439
440 ndt = nd + 1; % GDL puente + TMD
441
442 % -----
443 % PARÁMETROS DEL TMD (ASAMI)
444 % -----
445 mu = 0.03; % razón de masa
446 m_tmd = mu * sum(diag(M)); % masa del TMD
447
448 w1 = Wn(1,1); % frecuencia fundamental [rad/s]
449 w_tmd = w1 * sqrt(1/(1+mu)); % frecuencia óptima Asami
450 xi_tmd = sqrt(3*mu/(8*(1+mu))); % amortiguamiento óptimo
451
452 k_tmd = m_tmd * w_tmd^2; % rigidez TMD
453 c_tmd = 2*xi_tmd*m_tmd*w_tmd; % amortiguamiento TMD

```

```

454
455 fprintf('TMD: m = %.1f kg | f = %.2f Hz | xi = %.3f \n', ...
456 m_tmd, w_tmd/(2*pi), xi_tmd);
457
458 %% -----
459 % MATRICES EXTENDIDAS
460 % -----
461 M_ext = blkdiag(M, m_tmd);
462
463 K_ext = zeros(ndt);
464 K_ext(1:nd,1:nd) = K;
465
466 C_ext = zeros(ndt);
467 C_ext(1:nd,1:nd) = Cn;
468
469 j = 12; % nodo de instalación del TMD
470
471 % acoplamiento TMD
472 K_ext(j,j) = K_ext(j,j) + k_tmd;
473 K_ext(ndt,ndt) = k_tmd;
474 K_ext(j,ndt) = -k_tmd;
475 K_ext(ndt,j) = -k_tmd;
476
477 C_ext(j,j) = C_ext(j,j) + c_tmd;
478 C_ext(ndt,ndt) = c_tmd;
479 C_ext(j,ndt) = -c_tmd;
480 C_ext(ndt,j) = -c_tmd;
481
482 %% -----
483 % SISTEMA DINÁMICO PUENTE + TMD
484 % -----
485 A_tmd = [ zeros(ndt) eye(ndt)
486 -M_ext\K_ext -M_ext\C_ext ];
487
488 %% -----
489 % INICIALIZACIONES
490 % -----
491 a_tmd_hist = []; % aceleración nodo 12 (con TMD)
492 x0_ext = zeros(2*ndt,1); % estado inicial completo
493
494 %% -----
495 % RECORRIDO DEL PEATÓN
496 % -----
497 for i = 1:nnodos
498
499 % vector de influencia
500 r = zeros(nd,1);
501 r(i) = 1;
502 r_ext = [r; 0]; % TMD no recibe carga directa
503
504 % fuerza de contacto
505 tt = 0:dt:St;
506 Wp = mp * 9.81;
507 alpha = 0.3;

```

```

508 Fcon = alpha * Wp * sin(pi*tt/St).;
509
510 % entrada del sistema
511 B_tmd = [ zeros(ndt,1)
512 M_ext\r_ext ];
513
514 S_tmd = ss(A_tmd, B_tmd, eye(2*ndt), zeros(2*ndt,1));
515
516 % simulación
517 [Resp_tmd,~,X_tmd] = lsim(S_tmd, Fcon, tt, x0_ext);
518
519 % actualización de estado
520 x0_ext = X_tmd(end,:);
521
522 % aceleraciones relativas
523 a_rel_tmd = Resp_tmd(:, ndt+1 : 2*ndt);
524
525 % guardar aceleración nodo 12
526 a_tmd_hist = [a_tmd_hist; a_rel_tmd(:,12)];
527 end
528
529 %% -----
530 % RESULTADO FINAL – NODO 12
531 % -----
532 Ntmd = length(a_tmd_hist); % número total de muestras
533 t_tmd = (0:Ntmd-1) * dt;
534 a_tmd = a_tmd_hist;
535
536 figure
537 plot(t, a_centro, 'g', 'LineWidth', 0.5); hold on
538 plot(t_tmd, a_tmd, 'm', 'LineWidth', 0.5);
539
540 % Línea de confort (Octave compatible)
541 plot(xlim, [0.5 0.5], '--r', 'LineWidth', 1.5)
542 text(mean(xlim), 0.52, 'Límite de confort 0.5 m/s^2', ...
543 'HorizontalAlignment','center', ...
544 'Color','r', ...
545 'FontSize', 14, ...
546 'FontWeight','bold')
547 grid on
548 xlabel('Tiempo [s]', 'FontSize', 14)
549 ylabel('Aceleración [m/s^2]', 'FontSize', 14)
550 title('Comparación aceleración en el centro – SIN y CON TMD', 'FontSize', 18)
551 legend('Sin TMD','Con TMD','Location','northeast','FontSize',14)
552 hold off

```