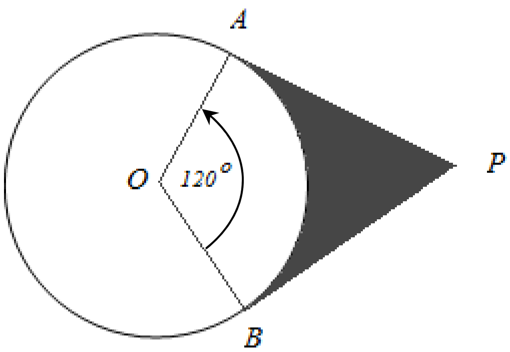
ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
CÁLCULO DIFERENCIAL
Examen de la Primera Evaluación
I Término – 11/julio/2008

Nombre: ____________________________ Paralelo: ___

Examen:	_____
Lecciones:	_____
Deberes:	_____
Otros:	_____

TEMA No. 1 (20 PUNTOS)

Considere la circunferencia con centro O y de longitud de radio $r = 12cm$. Las rectas tangentes a la circunferencia en los puntos A y B se intersecan en el punto P.



a) Determine la longitud de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{OP}$.
b) Determine el área de la superficie sombreada.

SOLUCIÓN

a) *Longitud del segmento* $\overline{AB}$ *(4 puntos)*

Opción 1: Aplicando la ley del Coseno

$$\overline{OA} = \overline{OB} = r$$

$$\overline{AB}^2 = r^2 + r^2 - 2(r)(r)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2r^2 - 2r^2\left(-\frac{1}{2}\right) = 3r^2$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = r\sqrt{3} = 12\sqrt{3}\ cm$$

Opción 2: Aplicando la ley del Seno

$$\frac{\overline{AB}}{sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{r}{sen\left(\frac{\pi}{6}\right)} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = r\left[\frac{sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{sen\left(\frac{\pi}{3}\right)}\right] = r\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}}\right) = r\sqrt{3} = 12\sqrt{3}\ cm$$

Longitud del segmento $\overline{OP}$ (6 puntos)

Opción 1: Aplicando el teorema de Pitágoras

$$\overline{OP}^2 = r^2 + \overline{BP}^2, \text{pero } \overline{AB} = \overline{BP} \text{ porque } \triangle\, OBP \text{ es equilátero}$$

$$\overline{OP}^2 = r^2 + 3r^2$$

$$\Rightarrow OP = 2r = 24\, cm$$

Opción 2: Aplicando una función trigonométrica en el $\triangle\, OBP$

$$sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\overline{BP}}{\overline{OP}} \quad \Rightarrow \quad \overline{OP} = \frac{\overline{BP}}{sen\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{r\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2r = 24\, cm$$

b) *Área de la superficie sombreada (10 puntos)*

$$A(deltoide) = \frac{\left(\overline{AB}\right)\left(\overline{OP}\right)}{2} = \frac{\left(12\sqrt{3}\right)(24)}{2} = 144\sqrt{3}\ cm^2$$

$$A(sector\ circular) = \frac{1}{2}\theta r^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{3}\right)(12)^2 = \frac{144\pi}{3}\ cm^2$$

$$A(superficie\ sombreada) = A(deltoide) - A(sector\ circular)$$

$$A(superficie\ sombreada) = 144\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 48\left(3\sqrt{3} - \pi\right) cm^2$$

RÚBRICA

40%: Planteamiento correcto
40%: Fórmulas correctas
20%: Cálculos correctos

TEMA No. 2 (15 PUNTOS)

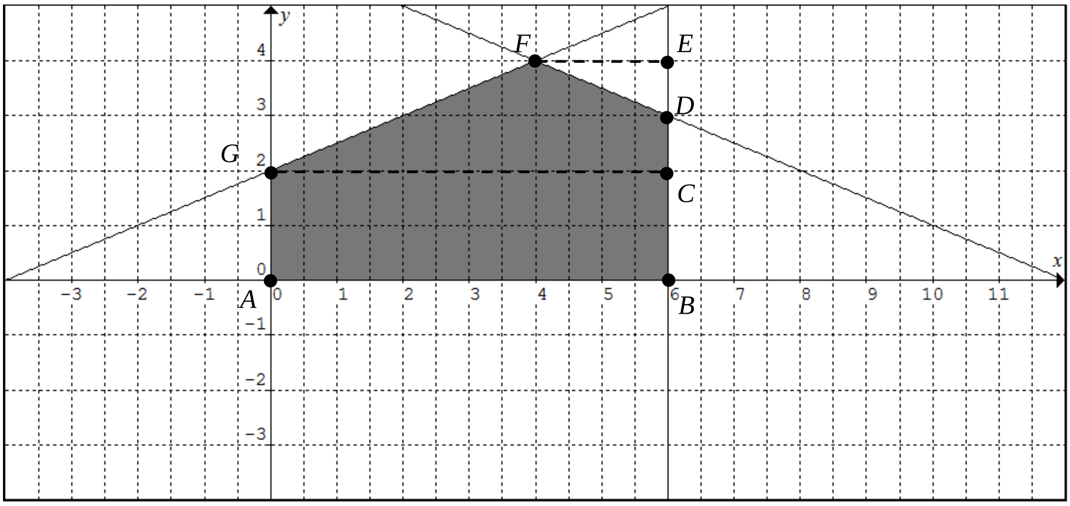
Sea la región $R=\{(x,y)/0\le x\le 6, y\ge 0, x-2y+4\ge 0, x+2y-12\le 0\}$

a) Bosqueje R en el plano cartesiano. (5 PUNTOS)

b) Determine el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar R alrededor de la recta $x=6$. (10 PUNTOS)

SOLUCIÓN

a)



Rectas limitantes: $x=0, x=6, y=0, y=\frac{x}{2}+2, y=6-\frac{x}{2}$

Coordenadas de puntos: $A(0,0), B(6,0), C(6,2), D(6,3), E(6,4), F(4,4), G(0,2)$

RÚBRICA

60%: Determinación de rectas y coordenadas de puntos.
40%: Graficación correcta de la región.

b)

$$V(\text{sólido}) = V(\text{cilindro generado al rotar el rectángulo } ABCG) + V(\text{cono truncado generado al rotar trapecio } GCEF) - V(\text{cono generado al rotar triángulo } DEF)$$

$$V(\text{sólido}) = \pi\left(\overline{AB}^2\right)\left(\overline{BC}\right)+\frac{\pi}{3}\left(\overline{EC}\right)\left(\overline{EF}^2+\overline{GC}^2+\left(\overline{EF}\right)\left(\overline{GC}\right)\right)-\frac{\pi}{3}\left(\overline{EF}^2\right)\left(\overline{ED}\right)$$

$$V(\text{sólido}) = \pi(6^2)(2)+\frac{\pi}{3}(2)\left(2^2+6^2+(2)(6)\right)-\frac{\pi}{3}(2^2)(1)$$

$$V(\text{sólido}) = \frac{\pi}{3}\left(216+2(52)-4\right)$$

$$V(\text{sólido}) = \frac{316\pi}{3}u^3$$

RÚBRICA

20%: Visualización correcta del sólido.
30%: Planteamiento correcto de los sólidos parciales.
40%: Fórmulas y dimensiones correctas.
10%: Cálculos correctos.

TEMA No. 3 (15 PUNTOS)

Califique cada una de las siguientes proposiciones como verdadera o falsa. Justifique formalmente su respuesta.

a) Si una esfera y un cubo tienen la misma área superficial de $36cm^2$, entonces el volumen de la esfera es mayor que el volumen del cubo.

SOLUCIÓN

$$A(superficie\ esférica)=4\pi r^2=36 \quad \Rightarrow \quad r=\frac{3}{\sqrt{\pi}}cm \quad \Rightarrow \quad V(esfera)=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{\sqrt{\pi}}\right)^3=\frac{36}{\sqrt{\pi}}cm^3$$

$$A(superficie\ cúbica)=6l^2=36 \quad \Rightarrow \quad l=\sqrt{6}cm \quad \Rightarrow \quad V(cubo)=\left(\sqrt{6}\right)^3=6\sqrt{6}cm^3$$

$$\sqrt{6}<3 \quad \Rightarrow \quad 6\sqrt{6}<18$$

$$\sqrt{\pi}<2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad \Rightarrow \quad 18<\frac{36}{\sqrt{\pi}}$$

$$6\sqrt{6}<18<\frac{36}{\sqrt{\pi}}$$

$$V(cubo)<V(esfera)$$

$\therefore$ *La proposición es verdadera*

RÚBRICA

60%: Planteamiento y fórmulas correctas.
20%: Cálculos correctos.
20%: Criterios de comparación.

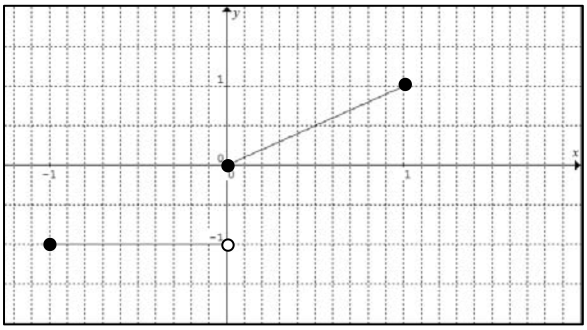
b) Sea una función de variable real definida como:

$$f(x)=\begin{cases} g(x), a\le x<b \\ h(x), b\le x\le c \end{cases}$$

Si g es continua en $[a,b)$ y h es continua en $[b,c]$, entonces f es continua en $[a,c]$.

SOLUCIÓN

Considere $f(x)=\begin{cases} [\![x]\!], -1\le x<0 \\ x \quad, 0\le x\le 1 \end{cases}$



g es continua en $[-1,0)$

h es continua en $[0,1]$

f no es continua en $[-1,1]$.

$\therefore$ *La proposición es falsa*

RÚBRICA

80%: Calificación correcta y gráfico o regla de correspondencia del contraejemplo.
20%: Explicación.

c) Si f es una función de variable real continua en $\mathbb{R}$ y se conoce que:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x+2)-f(x)-x^2+3}{sen(x)}\right)=1$$

Entonces: $f(2)=f(0)-3$

SOLUCIÓN

$$\lim_{x\to 0}\left(f(x+2)-f(x)-x^2+3\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x+2)-f(x)-x^2+3}{sen(x)}\right)\left(sen(x)\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x+2)-f(x)-x^2+3}{sen(x)}\right)\lim_{x\to 0} sen(x)=1(0)=0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0}\left(f(x+2)-f(x)-x^2+3\right)=0$$

Por continuidad:

$$f(0+2)-f(0)-0^2+3=\lim_{x\to 0}\left(f(x+2)-f(x)-x^2+3\right)$$

$$f(2)-f(0)+3=0 \quad \Rightarrow \quad f(2)=f(0)-3$$

$\therefore$ *La proposición es verdadera*

RÚBRICA

60%: Manipulación algebraica y aplicación de teoremas de límites.
40%: Aplicación de continuidad.

TEMA No. 4 (20 PUNTOS)

Evalúe de ser posible, los siguientes límites:

a) $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{27+h}-3}{h}$

SOLUCIÓN

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{27+h}-3}{h}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{(27+h)^{1/3}-3}{h}\right]\left[\frac{(27+h)^{2/3}+3(27+h)^{1/3}+3^2}{(27+h)^{2/3}+3(27+h)^{1/3}+3^2}\right]=\lim_{h\to 0}\frac{(27+h)-27}{h\left[(27+h)^{2/3}+3(27+h)^{1/3}+3^2\right]}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{(27+h)^{2/3}+3(27+h)^{1/3}+3^2}=\frac{1}{(27)^{2/3}+3(27)^{1/3}+3^2}=\frac{1}{9+9+9}=\frac{1}{27}$$

Si conoce el límite notable $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+\alpha x}-1}{x}=\frac{\alpha}{n}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{27+h}-3}{h}=3\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{\frac{27+h}{27}}-\frac{3}{3}}{h}=3\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{27}h}-1}{h}=3\left(\frac{\frac{1}{27}}{3}\right)=\frac{1}{27}$$

RÚBRICA

60%: Manipulación algebraica adecuada.
40%: Sustitución y evaluación correcta.

b) $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{x}{\sqrt{1-\cos(x)}}$

SOLUCIÓN

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\sqrt{1-\cos(x)}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\sqrt{1-\cos(x)}} \frac{\sqrt{1+\cos(x)}}{\sqrt{1+\cos(x)}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x\sqrt{1+\cos(x)}}{\sqrt{1-\cos^2(x)}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x\sqrt{1+\cos(x)}}{\sqrt{sen^2(x)}}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{x\sqrt{1+\cos(x)}}{|sen(x)|} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x\sqrt{1+\cos(x)}}{-sen(x)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{-\frac{sen(x)}{x}} \lim_{x\to 0^-} \sqrt{1+\cos(x)} = (-1)\left(\sqrt{2}\right) = -\sqrt{2}$$

RÚBRICA

60%: Manipulación algebraica adecuada.
20%: Valor absoluto y límite notable.
20%: Cálculo correcto.

c) $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$

SOLUCIÓN

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)^x = \frac{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \frac{e^{-1}}{e} = e^{-2}$$

RÚBRICA

20%: Identificación de tipo de indeterminación.
60%: Manipulación algebraica y límite notable.
20%: Cálculo correcto.

d) $\lim_{\theta\to\pi} (\theta-\pi)^2\, sen\left(\dfrac{1}{\pi-\theta}\right)$

SOLUCIÓN

$$-1 \le sen\left(\frac{1}{\pi-\theta}\right) \le 1 \quad \Rightarrow \quad -(\theta-\pi)^2 \le (\theta-\pi)^2\, sen\left(\frac{1}{\pi-\theta}\right) \le (\theta-\pi)^2$$

$$\lim_{\theta\to 0} -(\theta-\pi)^2 \le \lim_{\theta\to 0} (\theta-\pi)^2\, sen\left(\frac{1}{\pi-\theta}\right) \le \lim_{\theta\to 0} (\theta-\pi)^2$$

$$0 \le \lim_{\theta\to 0} (\theta-\pi)^2\, sen\left(\frac{1}{\pi-\theta}\right) \le 0$$

$$\textit{Aplicando el teorema del emparedado}:$$

$$\lim_{\theta\to 0} (\theta-\pi)^2\, sen\left(\frac{1}{\pi-\theta}\right) = 0$$

RÚBRICA

20%: Identificación de caso de no aplicación de límite de producto.
60%: Planteamiento del teorema del emparedado.
20%: Cálculo correcto.

TEMA No. 5 (10 PUNTOS)

Sea la función f definida sobre $\mathbb{R}$, cuya regla de correspondencia es $f(x) = 2x - [\![x]\!]$.

a) Determine el valor $L = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

b) Realice una demostración formal $\varepsilon - \delta$.

c) Si se desea que $|f(x) - L| < 10^{-2}$, encuentre el valor b tal que:

$$2 < x < b \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < 10^{-2}$$

SOLUCIÓN

a) (2 puntos)

$$\begin{aligned}
&L = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} 2x - [\![x]\!] \\
&Si\ \ 2 < x < 3, entonces\ \ [\![x]\!] = 2 \\
&\Rightarrow L = \lim_{x \to 2^+} 2x - 2 = 2(2) - 2 = 2
\end{aligned}$$

b) (5 puntos)

ANÁLISIS PRELIMINAR

$$\begin{aligned}
\forall \xi > 0\ \exists \delta > 0,\ 0 < x - 2 < \delta \Rightarrow\ & |2x - [\![x]\!] - 2| < \xi \\
& |2x - 2 - 2| < \xi \\
& |2x - 4| < \xi \\
& 2|x - 2| \xi \\
& |x - 2| < \frac{\xi}{2} \\
& \delta = \frac{\xi}{2}
\end{aligned}$$

OBJETIVO

$$\forall \xi > 0\ \delta = \min\left(1, \frac{\xi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad 0 < x - 2 < \delta$$

DEMOSTRACIÓN FORMAL

$$\begin{aligned}
& & & 0 < x - 2 < \frac{\xi}{2} \\
& & & 0 < 2(x - 2) < \xi \\
& 0 < x - 2 < 1 & & 0 < 2x - 4 < \xi \\
& 2 < x < 3 & & 0 < 2x - 2 - 2 < \xi \\
& [\![x]\!] = 2 & & \Rightarrow 0 < (2x - [\![x]\!]) - 2 < \xi \\
& & & \Rightarrow |(2x - [\![x]\!]) - 2| < \xi \\
& & & \Rightarrow |f(x) - L| < \xi
\end{aligned}$$

c) (3 puntos)

Si $\xi = 10^{-2}, \delta = \dfrac{0.01}{2} = 0.005$.

$2 < x < 2 + 0.005$

$\Rightarrow b = 2.005$

RÚBRICA

50%: Trabajo conceptual correcto.
50%: Cálculos correctos.

TEMA No. 6 (5 PUNTOS)

Considere la función f definida con la siguiente regla de correspondencia:

$$f(x) = \begin{cases} kx - 2, x < 3 \\ c \quad , x = 3 \\ 7 - x \ , \ x > 3 \end{cases}$$

Determine los valores de k y c, tales que sea f continua en todo su dominio.

SOLUCIÓN

RÚBRICA

60%:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x)$$

$$\lim_{x \to 3^-} kx - 2 = \lim_{x \to 3^+} 7 - x$$

$$3k - 2 = 4$$

$$k = 2$$

40%:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$$

$$c = 4$$

TEMA No. 7 (15 PUNTOS)

Bosqueje la gráfica de la función de variable real f a partir de la siguiente información sobre ella.

a) f es impar

b) f es continua en $\mathbb{R}-\{-2,0,2\}$

c) $f(1)=f(3)=0$

d) $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0, 0<x<\delta \Rightarrow |f(x)-1|<\varepsilon$

e) $\forall M>0\ \exists \delta>0, 0<2-x<\delta \Rightarrow f(x)>M$

f) $\forall M>0\ \exists \delta>0, 0<x-2<\delta \Rightarrow f(x)<-M$

g) $\forall \varepsilon>0\ \exists N>0, x>N \Rightarrow |f(x)-1|<\varepsilon$

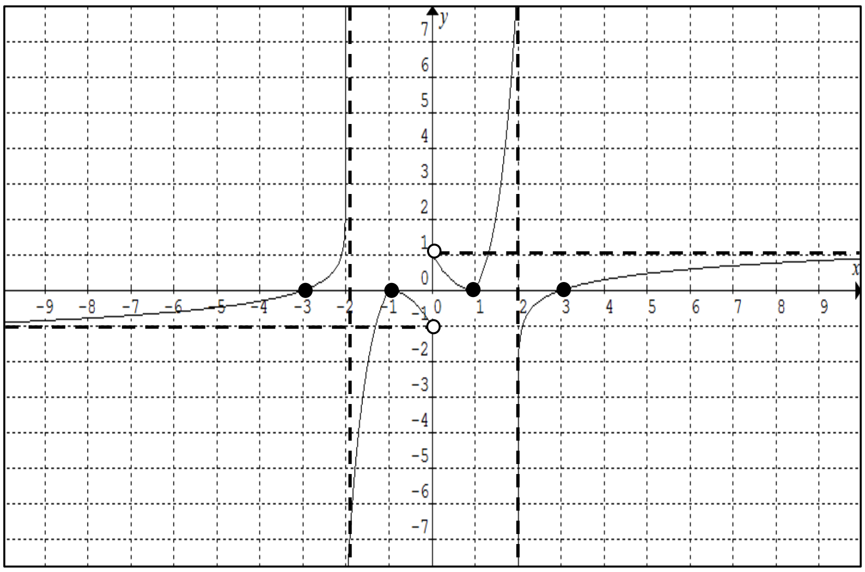
SOLUCIÓN

d) $0<2x-2-2<\xi\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$

e) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=+\infty$

f) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-\infty$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=1$



RÚBRICA

40%: Interpretación de los límites.
40%: La gráfica satisface las condiciones dadas.
20%: Integración de todas las condiciones de manera correcta.