

Rubén Cueva  
6/3/03

629.156  
5020  
C. 11

RESPONSABLE:  
INVENTARIADO

ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL  
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA

58



BIBLIOTECA

INVENTARIO A INVENTARIO CON  
ORD. NO. D-1847



D-1847

"SOLUCIONES NUMERICAS DEL DESARROLLO HIDRODINAMICO-TERMICO  
DE FLUJO EN DUCTOS CIRCULARES"

INVENTARIADO 16 MAR. 1981

RESPONSABLE:

TESIS DE GRADO  
PREVIO A LA OBTENCION DEL TITULO DE  
INGENIERO MECANICO

INVENTARIADO

RESPONSABLE:

POR

LUIS E. RODRIGUEZ OJEDA

GUAYAQUIL-ECUADOR



BIBLIOTECA

ABRIL, 1976

## DECLARACION EXPRESA:

DECLARO QUE: Hechos, ideas y doctrinas expuestos en esta tesis son de mi exclusiva responsabilidad, y que el patrimonio intelectual de la misma corresponde a la ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL.


(Reglamento de Exámenes y Títulos Profesionales de la ESPOL).



**BIBLIOTECA**

"SOLUCIONES NUMERICAS DEL DESARROLLO HIDRODINAMICO-TERMICO  
DE FLUJO EN DUCTOS CIRCULARES"

DIRECTOR DE TESIS



ING. GALO BETANCOURT

AUTOR



LUIS E. RODRIGUEZ OJEDA



BIBLIOTECA



BIBLIOTECA

DEDICATORIA

A LA ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA  
DEL LITORAL

*A mi Madre y Hermanos*



**BIBLIOTECA**

*A mis Compañeros de  
Estudio*

## PREFACIO

El presente tema de tesis fue sugerido por el Ing. GALO BETANCOURT, profesor del Departamento de Ingeniería Mecánica de la Escuela Superior Politécnica del Litoral. Desde entonces debo agradecerle su ayuda así como por toda la información que me proporcionó durante el desarrollo de este trabajo.



## RESUMEN

El desarrollo simultáneo de la velocidad y temperatura en la región de entrada de ductos circulares es estudiado numéricamente para un flujo en régimen laminar y con propiedades constantes. El fluido entra con velocidad y temperatura uniformes y recibe el efecto del esfuerzo de corte, y la transferencia de calor desde la pared la cual se mantiene a temperatura constante.

Las ecuaciones que describen el fenómeno físico son simplificadas y puestas en forma adimensional, en las que se aplica el método de diferencias finitas para reducir las a sistemas de ecuaciones lineales que son resueltas en computador mediante un método directo.

Los resultados calculados muestran mucha aproximación a los obtenidos con diferentes procedimientos en otros trabajos, los cuales están de acuerdo con datos experimentales existentes para este problema.

## NOMENCLATURA EMPLEADA EN EL ANALISIS

- $a$  = Radio del ducto
- $A_i$  = Coeficiente matricial
- $B_i$  = Coeficiente matricial
- $C_i$  = Coeficiente matricial
- $c_p$  = Calor específico
- $D$  = Diámetro del ducto
- $h_z$  = Coeficiente de transferencia local en la convección
- $k$  = Coeficiente de conductividad térmica
- $\dot{m}$  = Flujo de masa
- $N$  = Número de puntos radiales en la red de diferencias finitas.
- $Nu_z$  = Número de Nusselt local
- $p$  = Presión estática
- $p_0$  = Presión estática en la entrada del ducto
- $P$  = Presión estática adimensional
- $Pr$  = Número de Prandtl,  $\nu c_p/k$
- $q$  = Flujo de calor por unidad de área de pared y de tiempo.
- $r$  = Coordenada radial
- $R$  = Variable radial adimensional
- $Re$  = Número de Reynolds,  $\rho \bar{U} D/\mu$
- $S$  = Variable axial adimensional

$t$	=	Temperatura
$T$	=	Temperatura adimensional
$t_B$	=	Temperatura en la pared del ducto
$T_B$	=	Temperatura en la pared del ducto, adimensional
$t_m$	=	Temperatura de burbo del fluido
$T_m$	=	Temperatura de burbo del fluido, adimensional
$t_0$	=	Temperatura del fluido a la entrada del ducto.
$T_0$	=	Temperatura del fluido a la entrada del ducto, adimensional.
$T_w$	=	Esfuerzo corte en la pared, adimensional.
$U$	=	Velocidad axial adimensional
$\bar{U}$	=	Velocidad media, $m/110 a^2$
$V_h$	=	Velocidad radial
$V_z$	=	Velocidad axial
$z$	=	Coordenada axial
$\alpha$	=	Difusividad térmica molecular
$a$	=	Derivada parcial
$\Delta$	=	Incremento
$\theta$	=	Tiempo
$\Delta R$	=	Incremento radial
$\Delta S$	=	Incremento axial
$T_w$	=	Esfuerzo de corte en la pared
$\nu$	=	Viscosidad molecular
$v$	=	Viscosidad cinemática
$\rho$	=	Densidad del fluido
$\phi$	=	Coordenada angular

BIBLIOTECA



# CONTENIDO

	Pág.
PREFACIO	
RESUMEN	
NOMENCLATURA	
1. INTRODUCCION	1
1.1. <i>Proceso de la región de entrada</i>	2
1.2. <i>Métodos de solución teóricos</i>	4
1.3. <i>Trabajos experimentales previos</i>	7
2. ESTABLECIMIENTO DEL PROBLEMA	7
3. ANALISIS	9
3.1. <i>Flujo laminar</i>	9
3.1.1. <i>Solución hidrodinámica</i>	10
3.1.2. <i>Solución térmica con                 flujo desarrollado</i>	19
3.1.2.1. <i>Esquema explícito</i>	22
3.1.2.2. <i>Esquema implícito</i>	25
3.1.3. <i>Solución hidrodinámica-térmica</i>	27
3.1.4. <i>Número de Nusselt</i>	34
4. CALCULOS Y RESULTADOS	37
4.1. <i>Proceso de cálculo</i>	37
4.1.1. <i>Proceso de cálculo para                 la solución hidrodinámica</i>	39
4.1.2. <i>Proceso de cálculo para                 la solución térmica con                 flujo desarrollado</i>	40

	Pág.
4.1.2.1. Esquema explícito	40
4.1.2.2. Esquema implícito	42
4.1.3. Proceso de cálculo para la solución hidrodinámica-térmica.	42
4.2. Comparación con otros resultados	43
4.2.1. Discusión de resultados	45
4.2.1.1. Resultados de la solución hidrodinámica.	45
4.2.1.2. Resultados de la solución térmica con flujo desarrollado.	46
4.2.1.3. Resultados de la solución hidrodinámica-térmica.	48
5. CONCLUSIONES	51
APENDICE A: Convergencia y estabilidad de los esquemas de diferencias finitas.	55
APENDICE B: Dedución de las aproximaciones de diferencias finitas utilizadas en el análisis.	69

	Pág.
APENDICE C: Deducción de las fórmulas del método de Thomas para resolver un sistema <u>tridimensional</u> de ecuaciones lineales.	77
APENDICE D: Diagramas de flujo general para las soluciones.	82
APENDICE E: Programas de computadora.	86
APENDICE F: Tablas de resultados del computador.	102
APENDICE G: Tabla comparativa para la solución térmica con flujo desarrollado.	118
GRAFICOS	119
BIBLIOGRAFIA	128

## 1.0. INTRODUCCION

Uno de los problemas de transferencia de calor de importancia en aplicaciones de ingeniería es el que se refiere al intercambio de calor entre un fluido y la superficie del ducto dentro del cual fluye; con el propósito de evaluar el coeficiente de transferencia de calor respectivo, cuyo conocimiento se requiere en el diseño y análisis de intercambiadores de calor. La determinación de este coeficiente depende de la geometría del ducto y de las condiciones de flujo especificadas y es importante considerar la región del ducto en donde se efectúa el análisis, pues, mientras no se desarrollen completamente los flujos hidrodinámico y térmico, el problema es más complicado.

En esta tesis nos referimos a la región de entrada de un ducto de sección circular, donde la velocidad y temperatura del fluido están cambiando simultáneamente a partir de distribuciones uniformes en el punto de entrada. Nos hemos restringido al caso de tener temperatura constante en la pared, lo cual ocurre aproximadamente en condensadores y evaporadores y en intercambiadores de calor de flujo paralelo, sin embargo, en las soluciones presentadas

es fácil cambiar a cualquier tipo de variación de temperatura en la pared del ducto, cambiando las condiciones de frontera correspondientes.

### 1.1. PROCESO DE LA REGION DE ENTRADA

Cuando el fluido entra al ducto con velocidad uniforme, las partículas de fluido inmediatamente adyacentes a la pared del tubo quedan en reposo debido al efecto de fricción. Las partículas siguientes en el fluido son retardadas debido a una interacción entre partículas que tienen diferentes velocidades. Este fenómeno es el resultado de la existencia de fuerzas viscosas y sus efectos se extienden desde la frontera hacia el resto del fluido, pero, a cierta distancia desde la pared, la velocidad de las partículas de fluido es aproximadamente igual a la de la corriente libre que aún permanece sin disturbio. El fluido contenido en la primera zona constituye la capa frontera hidrodinámica, la cual gradualmente incrementa su espesor a lo largo del ducto mientras en el centro el flujo se acelera para mantener constante el caudal total. Cuando el espesor de la capa frontera iguala al radio del ducto, decimos que el flujo está desarrollado y desde es-

El desarrollo de la capa frontal térmica es cuádrática y semejante al de la capa frontal hidrodinámica. Partiendo de una distribución transversalmente uniforme en la entrada, las capas frías o calientes del fluido inyectado en su espesor hasta que se obtenga un equilibrio térmico entre el fluido que se enfría o calienta y la pared del tubo. La existencia de un perfil desarrollado de temperatura en algún punto del ducto es más difícil de visualizar que el perfil de velocidad, sin embargo, en ciertas condiciones de flujo de calor se puede visualizar un perfil de temperatura adimensional que llega a ser invariante a cierta longitud desde la entrada del ducto, denominada longitud de entrada térmica (Figura 2.).

La longitud de entrada hidrodinámica (Figura 1.). de tubo necesaria para llegar a este desarrollo se denomina longitud permanece esencialmente invariable. La longitud de punto hacia adelante, el perfil de velocidad a través

## 1.2. METODOS DE SOLUCION TEORICOS

Debido a la gran importancia práctica que tiene el problema de transferencia de calor en la región de entrada de ductos, se lo ha estudiado utilizando diferentes métodos teóricos, los cuales pueden ser clasificados en varios grupos generales: linealización, diferencias finitas, integración de la ecuación del momento e igualación.

El método de linealización consiste en linealizar los términos inerciales de la ecuación del momento. Los trabajos que lo han utilizado son entre otros los efectuados por Langhaar<sup>(7)</sup> (1940), Targ<sup>(4)</sup> (1951), Sparrow, Lin and Lundgren<sup>(4)</sup> (1964) y Betancourt<sup>(10)</sup> (1974) quien introdujo en la solución el método analítico de Galerkin-Kantorovich.

El método de diferencias finitas consiste en aproximar las ecuaciones que describen el fenómeno, con ecuaciones en diferencias finitas las cuales pueden ser resueltas numéricamente en un computador digital. Kays<sup>(8)</sup> (1951) utiliza una forma explícita de este método para calcular el desarrollo térmico y los resultados de la

---

\* Los números en la parte superior, entre paréntesis, se refieren a la Bibliografía detallada al final.

solución analítica de Langhaar<sup>(7)</sup> para el desarrollo hidrodinámico. Bodia and Osterle<sup>(11)</sup> (1961) y Hornbeck<sup>(5)</sup> (1964) usaron este método para calcular el flujo hidrodinámico en diferentes condiciones. Ulrichson and Schmitz<sup>(12)</sup> (1964) hicieron un trabajo semejante al de Kays<sup>(8)</sup> pero introduciendo la velocidad radial. Rosemberg and Hellums<sup>(13)</sup> (1965) presentaron una solución para el desarrollo simultáneo hidrodinámico-térmico considerando viscosidad variable y convección radial. McMordie and Emery<sup>(14)</sup> (1965) agregaron el término de conducción axial. Deissler and Presler<sup>(15)</sup> (1966) estudiaron el desarrollo del flujo laminar para el gas helio. Manohar<sup>(16)</sup> (1968) mejoró el método de Ulrichson and Schmitz<sup>(12)</sup>. Back<sup>(17)</sup> (1970) estudió el flujo laminar a altas temperaturas. Se menciona también el trabajo de Verhoff and Fisher<sup>(18)</sup> (1972). Recientemente el método de diferencias finitas ha sido aplicado a casos de flujo turbulento. Se mencionan los trabajos de McEligot<sup>(19)</sup> (1970) y Nelson and Pletcher<sup>(20)</sup> (1974).

El método de integración de la ecuación del momento trabaja con la representación integral de la ecuación del momento y asume un núcleo liso central en el flujo. Schi

ller<sup>(21)</sup> (1922), Campbell and Slatterry<sup>(3)</sup> (1963) y Gupta<sup>(22)</sup> (1965) aplicaron este método.

Se mencionan también otros métodos tales como el de igualación usado por Atkinson and Goldstein<sup>(23)</sup> (1938) y los métodos variacionales empleados en los trabajos de Savkar<sup>(24)</sup> (1969) y Sparrow and Siegel<sup>(25)</sup> (1972).

Nuestra solución combina un método de linealización y el método de diferencias finitas, llegándose a una solución que sin tener las complicaciones de las demás, muestra resultados que pueden ser calificados como aceptables y se llega a conclusiones importantes. Por otra parte, - puede servir como una referencia básica para la utilización de los métodos numéricos en situaciones más complejas, pues se dan los detalles de la aplicación y fundamentos del método y se comparan dos de sus formas más usuales en un caso específico, así como se presenta el procedimiento para analizar la estabilidad y convergencia de los esquemas de diferencias finitas empleados.

### 1.3. TRABAJOS EXPERIMENTALES PREVIOS

El número de trabajos experimentales que se han hecho para este problema, es reducido en comparación con el número de trabajos teóricos. Los más conocidos son los de Nikuradse, publicados por Prandtl and Tietjens<sup>(26)</sup> (1957), Pfenninger<sup>(27)</sup> (1952) y Reshotko<sup>(28)</sup> (1958). Otros trabajos son los de Kays and Nicoll<sup>(29)</sup> (1963), Davenport and Leppert<sup>(30)</sup> (1965) y L. Back<sup>(17)</sup> (1970) que trataron con diferentes tipos de flujo.

### 2.0. ESTABLECIMIENTO DEL PROBLEMA

El objetivo principal de esta Tesis es resolver el problema de transferencia de calor en la entrada de un ducto circular liso dentro del cual fluye en régimen laminar un fluido. El análisis parte de las ecuaciones de Navier-Stokes en donde se hacen algunas simplificaciones con el fin de obtener una ecuación aproximada, más fácil de manejar. De igual manera la ecuación general de la energía es reducida mediante algunas consideraciones a una ecuación aproximada. En ambos casos, las ecuaciones resultantes son transformadas mediante una forma implícita del método

de diferencias finitas a sistemas de ecuaciones lineales que son resueltas por métodos numéricos en computador.

En el caso mas general, se estudia el desarrollo simultáneo de los flujos hidrodinámico y térmico a partir de distribuciones transversales uniformes en la entrada, para ciertas condiciones de frontera. Para el caso hidrodinámico, un proceso iterativo es utilizado para el cálculo del esfuerzo de corte en la pared comenzando desde un valor asumido, ya que el valor verdadero no se lo puede determinar al desconocer la distribución de la velocidad. De los resultados anteriores se calcula el número de Nusselt local, el cual es comparado con el que se obtiene a partir de un análisis en el que se asume que el flujo hidrodinámico está completamente desarrollado desde la entrada. En este último análisis, con fines comparativos, se usan dos formas del método de diferencias finitas.

Todos los cálculos numéricos fueron efectuados en el computador IBM-1130 del Centro de Computación de la Escuela Superior Politécnica del Litoral.

### 3.0. ANALISIS

#### 3.1. FLUJO LAMINAR

El presente trabajo se refiere al análisis de un flujo de régimen laminar en la región de entrada de un ducto de sección circular.

En primer lugar, establezcamos las ecuaciones que describen este flujo para un fluido que es considerado incompresible y de propiedades constantes. Es apropiado utilizar coordenadas cilíndricas para facilitar el análisis.

a) Ecuación del momento en la dirección  $z$  (1)

$$\rho \left[ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] = \mu \left[ \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$$

(1)

b) Ecuación de la energía (2)

$$\rho c_p \left[ v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right] = k \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \dot{q}$$

(2)

## 3.1.1. SOLUCION HIDRODINAMICA

Para simplificar la solución de la ecuación (1) se asume lo siguiente:

Flujo permanente.

$$\frac{\partial V_z}{\partial \theta} = 0 \quad (3)$$

Flujo axialmente simétrico.

$$V_\phi = 0, \quad \frac{\partial V_z}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{\partial^2 V_z}{\partial \phi^2} = 0 \quad (4)$$

Transporte de momento axial despreciable con respecto al transporte radial de momento<sup>(3)</sup>.

$$\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \ll \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \quad (5)$$

Usando las ecuaciones (3), (4), y (5) en la ecuación (1) se obtiene.

$$\rho \left( V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \quad (6)$$

El término que contiene  $V_r$  es omitido ya que su influencia tiene importancia sólo en la región muy cercana a la entrada del ducto<sup>(2)</sup>.

$$V_r = 0 \quad (7)$$

Para el otro término inercial se utiliza la aproximación de Targ<sup>(4)</sup>.

$$V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \approx \bar{u} \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (8)$$

Con la ecuación (7) y la linealización de Targ<sup>(4)</sup>, la ecuación (6) se reduce.

$$\rho \bar{u} \frac{\partial V_z}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \quad (9)$$

Para generalizar la solución se definen las siguientes relaciones adimensionales<sup>(5)</sup>.

$$U = \frac{V_z}{\bar{u}}, \quad R = \frac{r}{a}$$

$$S = \frac{z \mu}{a^2 \rho \bar{u}} = \frac{4(z/D)}{Re} \quad (10)$$

$$P = \frac{p - p_0}{\rho \bar{u}^2}, \quad T_w = \frac{2a \tau_w}{\mu \bar{u}}$$

Con las que la ecuación (9) se transforma en

$$\frac{\partial U}{\partial S} = - \frac{\partial P}{\partial S} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial U}{\partial R} \right) \quad (11)$$

Por conservación de masa se tiene.

$$\dot{m} = \text{constante} = \int_0^a \rho v_z 2\pi r dr$$

$$= 2\pi a^2 \bar{u} \rho \int_0^1 u r dr$$

ya que  $\dot{m} = \pi a^2 \bar{u} \rho$ , se obtiene

$$\int_0^1 u r dr = \frac{1}{2} \quad (12)$$

La ecuación (11) es multiplicada por  $R dR$  y es integrada de  $R = 0$  a  $R = 1$ .

$$\frac{\partial}{\partial S} \int_0^1 u r dr = - \frac{\partial P}{\partial S} \int_0^1 R dR + \int_0^1 \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial u}{\partial R} \right) R dR$$

de donde

$$0 = - \frac{\partial P}{\partial S} \frac{R^2}{2} \Big|_0^1 + R \frac{\partial u}{\partial R} \Big|_0^1$$

La cual permite encontrar una relación entre el gradiente de presión y el esfuerzo de corte en la pared  $T_w$ .

$$\frac{\partial P}{\partial S} = 2 \frac{\partial u}{\partial R} = T_w \quad (13)$$

Sustituyendo la ecuación (13) en la ecuación (11).

$$\frac{\partial U}{\partial S} = -T_w + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial U}{\partial R} \right)$$

De la que finalmente se obtiene

$$\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} = \frac{\partial U}{\partial S} + T_w \quad (14)$$

Que será analizada con las siguientes consideraciones físicas para el problema.

a) Condición inicial.

Asumiendo que el fluido entra con velocidad uniforme al ducto, el valor de esta velocidad adimensional es

$$U = U_0 = 1 : S = 0, \quad 0 \leq R \leq 1 \quad (15)$$

b) Condiciones de frontera

b.1) La velocidad del fluido en contacto con la pared es cero.

$$U = U_B = 0 : S > 0, \quad R = 1 \quad (16)$$

b.2) Por simetría de flujo con respecto al centro del ducto.

$$\frac{\partial U}{\partial R} = 0 : S > 0, \quad R = 0 \quad (17)$$

Se puede observar que la condición (17) puesta en la ecuación (14) produce una indeterminación matemática. Para eliminarla se utiliza la regla de L'Hospital en el término correspondiente.

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial U}{\partial R}}{R} = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{\partial U}{\partial R} \right)}{\frac{\partial}{\partial R} (R)} = \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} \quad (18)$$

Reemplazando esta última expresión en la ecuación (14) resulta.

$$2 \frac{\partial^2 U}{\partial R^2} = \frac{\partial U}{\partial S} + T_w \quad (19)$$

para  $R = 0$

Para resolver las ecuaciones (14) y (19) junto a las condiciones (15), (16) y (17) con el presente método, las ecuaciones diferenciales parciales son expresadas en forma de diferencias finitas para los puntos de la red en que se ha dividido interiormente el ducto para efectos de

cálculo y que son mostrados en la figura 3.

La selección de representaciones en diferencias finitas origina diferentes esquemas o formas de solución pero siempre con el objetivo de transformar la ecuación de diferencias parcial en una o varias ecuaciones algebraicas que pueden resolverse usando métodos convencionales.

Para la solución hidrodinámica se toman las siguientes:

$$(20) \quad a^2 u = \frac{u_{\alpha-1, j+1} - 2u_{\alpha, j+1} + u_{\alpha+1, j+1}}{(\Delta R)^2}$$

$$(21) \quad \frac{a u}{a R} = \frac{u_{\alpha+1, j+1} - u_{\alpha-1, j+1}}{2 (\Delta R)}$$

$$(22) \quad \frac{a u}{a S} = \frac{u_{\alpha, j+1} - u_{\alpha, j}}{\Delta S}$$

$$R_{\alpha} = (\alpha - 1) \Delta R$$

que son introducidas en la ecuación (14).

$$u_{\alpha-j, j+1} - 2u_{\alpha, j+1} + u_{\alpha+1, j+1} + \frac{R_{\alpha}}{1} u_{\alpha+1, j+1} - u_{\alpha-1, j+1} = \frac{2 (\Delta R)}{\Delta S} u_{\alpha, j+1} + T_w$$

Definiendo

$$L_1 = \frac{\Delta S}{(\Delta R)^2} \quad \text{y} \quad L_2 = \frac{\Delta S}{2(\Delta R)} \quad (23)$$

Se obtiene

$$L_1(u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}) + \frac{L_2}{R_i}(u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1}) = u_{i,j+1} - u_{i,j} + \Delta ST_w$$

Las incógnitas están al nivel  $j+1$  y son despejadas resultando.

$$A_i u_{i-j,j+1} + B_i u_{i,j+1} + C_i u_{i+1,j+1} = D_i \quad (24)$$

$$i = 2, 3, \dots, N-2$$

$$j = 1, 2, 3, \dots$$

Siendo

$$A_i = L_1 - \frac{L_2}{R_i} \quad i = 2, 3, \dots, N-1$$

$$B_i = -2L_1 - 1 \quad "$$

$$C_i = L_1 + \frac{L_2}{R_i} \quad "$$

$$D_i = -u_{i,j} + \Delta ST_w \quad "$$

La ecuación (24) es aplicada en  $i = N-1$



$$j = 1, 2, 3, \dots$$

$$B_1 u_{1,j+1} + C_1 u_{2,j+1} = D_1 \quad (26)$$

con lo que se obtiene

$$u_{\lambda-1, j+1} = u_{\lambda+1, j+1}, \quad \lambda = 1$$

De acuerdo a la condición de frontera (17)

$$\lambda = 1$$

$$2 \frac{u_{\lambda-j, j+1} - 2u_{\lambda, j+1} + u_{\lambda+1, j+1}}{\Delta S} = \frac{(\Delta R)^2}{\Delta S} + T_w$$

diferencias finitas.

La ecuación (19) es también transformada a la forma de

$$j = 1, 2, 3, \dots$$

$$A_{N-1} u_{N-2, j+1} + B_{N-1} u_{N-1, j+1} = D_{N-1} \quad (25)$$

Resultado

$$u_{N, j+1} = u_B = 0$$

Como

$$A_{N-1} u_{N-2, j+1} + B_{N-1} u_{N-1, j+1} + C_{N-1} u_{N, j+1} = D_{N-1}$$



### 3.1.2. SOLUCION TERMICA CON FLUJO DESARROLLADO

El análisis parte de la ecuación de la energía (2) en la cual se hacen las siguientes restricciones.

Transferencia de calor axialmente simétrica.

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} = 0 \quad (28)$$

En flujo hidrodinámico completamente desarrollado la componente radial de la velocidad es nula<sup>(2)</sup>.

$$V_r = 0 \quad (29)$$

Conducción de calor despreciable con respecto a la conducción radial de calor<sup>(2)</sup>.

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \ll \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial t}{\partial r} \right) \quad (30)$$

Las ecuaciones (28), (29) y (30) son introducidas en la ecuación (2).

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial t}{\partial r} \right) = \frac{\rho C_p V_z}{k} \frac{\partial t}{\partial z} \quad (31)$$

Considerando flujo hidrodinámico completamente desarrollado, la velocidad ya no depende de  $z$ .

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (32)$$

Con la que la ecuación (9) se transforma en

$$\frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) = \frac{\partial p}{\partial z}$$

Siendo ambos miembros función de una sola variable, significa que deben ser iguales a una constante, es decir que el gradiente de presión es constante en esta región.

$$\frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) = C$$

Integrando dos veces esta expresión y aplicando las condiciones de frontera correspondientes se obtiene la conocida distribución parabólica de velocidades para flujo desarrollado.

$$V_z = 2 \bar{u} \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \quad (33)$$

La ecuación (33) se reemplaza en la ecuación (31) junto a las coordenadas adimensionales que utiliza Kays<sup>(2)</sup> en la solución analítica exacta, lo cual servirá para verifi

car la exactitud de los métodos numéricos que aquí se uti  
lizan.

$$S = \frac{k z}{2C_p \rho \bar{u} a^2} = \frac{2 (z/D)}{Re Pr} \quad (34)$$

$$R = \frac{r}{a}, \quad T = \frac{t - t_B}{t_0 - t_B}$$

Con lo que la ecuación (31) se transforma en

$$\frac{\partial^2 T}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial R} = (1 - R^2) \frac{\partial T}{\partial S} \quad (35)$$

Que será resuelta con las siguientes consideraciones fí  
sicas.

a) Condición inicial

El fluido entra al ducto con temperatura uniforme ( $t=t_0$ ).

$$T = T_0 = 1 ; \quad S = 0, \quad 0 \leq R \leq 1 \quad (36)$$

b) Condiciones de frontera

b.1) La temperatura en la pared es constante a lo largo  
del ducto ( $t = t_B$ ).

$$T = T_B = 0 ; \quad S > 0 , \quad R = 1 \quad (37)$$

b.2) El gradiente de temperatura en la dirección radial es cero por la simetría del flujo.

$$\frac{\partial T}{\partial R} = 0 : \quad S > 0 , \quad R = 0 . \quad (38)$$

La indeterminación matemática que produce la condición (38) en la ecuación (35) se elimina tomando límites como en el caso hidrodinámico, obteniéndose.

$$2 \frac{\partial^2 T}{\partial R^2} = \frac{\partial T}{\partial S} \quad (39)$$

para  $R = 0$

Los términos de las ecuaciones (35) y (39) serán aproximados por representaciones adecuadas en diferencias finitas para obtener dos esquemas diferentes, uno explícito y otro implícito con el propósito de comparar estos métodos y los resultados con los obtenidos de la solución analítica exacta.

### 3.1.2.1. Esquema Explícito

Para este esquema se tomaron las siguientes representaciones:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial R^2} = \frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{(\Delta R)^2} \quad (40)$$

$$\frac{\partial T}{\partial R} = \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2(\Delta R)} \quad (41)$$

$$\frac{\partial T}{\partial S} = \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta S} \quad (42)$$

$$R_i = (i-1)\Delta R$$

Introduciéndolas en la ecuación (35) resulta

$$L_1(T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}) + \frac{L_2}{R_i}(T_{i+1,j} - T_{i-1,j}) = (1 - R_i^2)(T_{i,j+1} - T_{i,j}) \quad (43)$$

$$\text{Siendo } L_1 = \frac{\Delta S}{(\Delta R)^2} ; \quad L_2 = \frac{\Delta S}{2(\Delta R)}$$

Las incógnitas, que están al nivel  $j+1$ , se las puede despejar explícitamente en estos esquemas.

$$T_{i,j+1} = A_i T_{i-1,j} + B_i T_{i,j} + C_i T_{i+1,j} \quad (44)$$

$$i = 2, 3, \dots, N-1$$

$$j = 1, 2, 3, \dots$$

En donde

$$A_i = \frac{L_1 - L_2/R_i}{1 - R_i^2}$$

$$B_i = \frac{1 - R_i^2 - 2L_1}{1 - R_i^2}$$

$$C_i = \frac{L_1 + L_2/R_i}{1 - R_i^2}$$

Relaciones similares de diferencias finitas son aplicadas a la ecuación (39) y se obtiene.

$$2L_1(T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}) = T_{i,j+1} - T_{i,j} \quad (45)$$

$$i = 1$$

$$j = 1, 2, 3, \dots$$

Para que se cumpla la condición (38)

$$T_{i-1,j} = T_{i+1,j}, \quad i = 1$$

Esto transforma a (45) en

$$T_{1,j+1} = (1 - 4L_1) T_{1,j} + 4L_1 T_{2,j} \quad (46)$$

$$j = 1, 2, 3, \dots$$

La evaluación de las ecuaciones (44) y (46) junto a las condiciones establecidas, darán la distribución de temperaturas en los puntos analizados del ducto.

## 3.1.2.2. Esquema Implícito

Representaciones en diferencias finitas, semejantes a las usadas en el esquema anterior son empleadas aquí pero con las dos primeras evaluadas al nivel  $j+1$ .

Reemplazándolas en la ecuación (35) se obtiene.

$$L_1(T_{i-1,j+1} - 2T_{i,j+1} + T_{i+1,j+1}) + \frac{L_2}{R_i}(T_{i+1,j+1} - T_{i-1,j+1}) = (1 - R_i^2)(T_{i,j+1} - T_{i,j}) \quad (47)$$

Siendo  $L_1$  y  $L_2$  iguales que para el último esquema.

Finalmente, haciendo

$$A_i = L_1 - \frac{L_2}{R_i}, \quad i = 2, 3, \dots, N-1$$

$$B_i = R_i^2 - 2L_1 - 1 \quad "$$

$$C_i = L_1 + \frac{L_2}{R_i} \quad "$$

$$D_i = T_{i,j}(R_i^2 - 1) \quad "$$

Resulta la ecuación de diferencias finitas

$$A_i T_{i-1,j+1} + B_i T_{i,j+1} + C_i T_{i+1,j+1} = D_i \quad (48)$$

$$i = 2, 3, \dots, N-2$$

$$j = 1, 2, 3, \dots$$

La ecuación (48) es aplicada a  $N-1$ .

$$A_{N-1} T_{N-2, j+1} + B_{N-1} T_{N-1, j+1} = D_{N-1} \quad (49)$$

$$j = 1, 2, 3, \dots$$

ya que  $T_{N, j} = T_{N, j+1} = T_B$  (condición de frontera)

En la ecuación (39), aplicando las relaciones de diferencias finitas se llega a.

$$B_1 T_{1, j+1} + C_1 T_{2, j+1} = D_1 \quad (50)$$

$$j = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{Siendo } B_1 = -4L_1^{-1}$$

$$C_1 = 4L_1$$

$$D_1 = -T_{1, j}$$

Las ecuaciones (48), (49) y (50), al ser aplicadas a los puntos interiores del ducto, forman un sistema de ecuaciones.



Si se considera que el fluido entra con una velocidad uniforme, la velocidad  $V_z$  es una función de  $r$  y  $z$ , correspondiendo a la solución hidrodinámica encontrada anteriormente.

El término que contiene a la velocidad radial es omitido también en este análisis considerando que tiene importancia únicamente en la región muy cercana a la entrada del ducto<sup>(2)</sup>. Así, la ecuación a resolverse es.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial t}{\partial r} \right) = \frac{\rho C_p}{k} V_z \frac{\partial t}{\partial z} \quad (53)$$

Siendo  $V_z = V_z (r, z)$

Para resolver la ecuación (53) se usan las mismas coordenadas adimensionales (10), definidas en la solución hidrodinámica para usar directamente la velocidad  $V_z$  allí calculada.

También se utiliza la coordenada adimensional de temperatura (34) definida en la solución térmica con flujo desarrollado.

Estas coordenadas son reemplazadas en la ecuación (53).

$$\frac{1}{aR} \frac{\partial}{\partial R} \left[ aR \frac{(t_0 - t_B) \partial T}{a \partial R} \right] = \frac{\rho C_p \bar{u} (t_0 - t_B) \partial T}{k \frac{\alpha^2 \rho \bar{u}}{\mu} \partial S}$$

de donde se obtiene finalmente

$$\frac{\partial^2 T}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial R} = P_r u \frac{\partial T}{\partial S} \quad (54)$$

Siendo  $u = u(R, S)$ , y  $P_r$  el número de Prandtl

Para este problema se mantienen las mismas condiciones inicial y de frontera dadas para la solución térmica con flujo desarrollado.

$$T = T_0 = 1 : \quad S = 0, \quad 0 \leq R \leq 1 \quad (55)$$

$$T = T_B = 0 : \quad S > 0, \quad R = 1 \quad (56)$$

$$\frac{\partial T}{\partial R} = 0 : \quad S > 0, \quad R = 0 \quad (57)$$

Va que la ecuación (54) no es aplicable al centro del ducto, con el criterio usado en las soluciones anteriores se obtiene.

$$2 \frac{\partial^2 T}{\partial R^2} = P_r u \frac{\partial T}{\partial S}$$

Para  $R = 0$

Se observa que en la solución hidrodinámica-térmica, el número de Prandtl es un parámetro. Esto se debe a que mientras el desarrollo hidrodinámico es independiente del número de Prandtl, el desarrollo térmico sí contiene a este parámetro.

En la solución térmica con flujo desarrollado en donde se usa el perfil parabólico de velocidades, el número de Prandtl no aparece explícitamente en la solución.

En este trabajo se usa  $Pr = 0.7$  para poder comparar con otras soluciones existentes. Con este valor la solución es aplicable a gases.

Para resolver la ecuación (54) se usan aproximaciones de diferencias finitas, iguales a las usadas en el esquema implícito de la solución térmica con flujo desarrollado, restando.

$$\frac{L_1}{Pr} (T_{\chi-1, f+1} - 2T_{\chi, f+1} + T_{\chi+1, f+1}) + \frac{L_2}{Pr} (T_{\chi+1, f+1} - T_{\chi-1, f+1}) = U_{\chi, f} (T_{\chi, f+1} - T_{\chi, f}) \quad (59)$$

En donde  $U_{i,j} = U(R,S)$ , corresponde al desarrollo hidrodinámico mientras que  $L_1$  y  $L_2$  son constantes definidas anteriormente.

Estableciendo

$$A_i = \frac{L_1}{P_n} - \frac{L_2}{P_n R_i} \quad i = 2, 3, \dots, N-1$$

$$B_i = -\frac{2L_1}{P_n} - U_{i,j} \quad "$$

$$C_i = \frac{L_1}{P_n} + \frac{L_2}{P_n R_i} \quad "$$

$$D_i = -U_{i,j} T_{i,j} \quad "$$

Se obtiene en forma general.

$$A_i T_{i-1,j+1} + B_i T_{i,i+1} + C_i T_{i+1,j+1} = D_i \quad (60)$$

$$i = 2, 3, \dots, N-2$$

$$j = 1, 2, 3, \dots$$

Aplicando la ecuación (60) en  $i = N-1$  y recordando que  $T_{N,j+1} = T_B = 0$ , resulta.

$$A_{N-1}^T T_{N-2, f+1} + B_{N-1} T_{N-1, f+1} = D_{N-1} \quad (61)$$

$$f = 1, 2, 3, \dots$$

La ecuación (58) es también transformada en forma de diferencias finitas.

Recordando que según la condición (57)

$$T_{\lambda-1, f+1} = T_{\lambda+1, f+1}, \quad \lambda = 1$$

Se obtiene finalmente.

$$B_1 T_{1, f+1} + C_1 T_{2, f+1} = D_1 \quad (62)$$

$$f = 1, 2, 3, \dots$$

En donde

$$B_1 = - \frac{4 L_1}{p} - U_{1, f}$$

$$C_1 = \frac{4 L_1}{p}$$

$$D_1 = - U_{1, f} T_{1, f}$$

Las ecuaciones (60), (61) y (62) forman el conocido  $\bar{A}$



## 3.1.4. NUMERO DE NUSSELT

El coeficiente de transferencia de calor en convección para flujo en ductos es definido por la siguiente ecuación

$$q = h_z (t_m - t_B) \quad (63)$$

donde por conveniencia se ha utilizado como referencia la temperatura de bulbo del fluido  $t_m$ , definida por la ecuación

$$t_m = \frac{\int_A \rho C_p V_z t dA}{\int_A \rho C_p V_z dA} \quad (64)$$

que para el caso de un fluido con propiedades constantes fluyendo en un ducto de sección circular se reduce a

$$t_m = \frac{2}{\bar{u}a^2} \int_0^a V_z t r dr \quad (65)$$

Para transformar la ecuación (65) a forma adimensional sustituimos  $t$  por  $T$ , definida anteriormente y  $t_m$  por  $T_m$ .

$$\text{siendo} \quad T_m = \frac{t_m - t_B}{t_o - t_B} \quad (66)$$

Con lo cual se obtiene finalmente

$$T_m = 2 \int_0^1 UTRdR \quad (67)$$

Definiendo la conductividad térmica en la pared como

$$q = -k \left( \frac{\partial t}{\partial r} \right)_{r=a} \quad (68)$$

usando las definiciones adimensionales respectivas para  $\tau$  y  $r$  se obtiene

$$q = k \frac{t_B - t_0}{a} \left( \frac{\partial T}{\partial R} \right)_{R=1} \quad (69)$$

Con la ecuación (63) se puede definir y evaluar un coeficiente de transferencia de calor local para la convección,  $h_z$

$$q = h_z (t_m - t_B) = -h_z (t_B - t_0) T_m$$

de donde

$$h_z = \frac{-q}{(t_B - t_0) T_m} \quad (70)$$

Como el número de Nusselt local está definido por

$$Nu_z = \frac{2a h_z}{k} \quad (71)$$

utilizando las ecuaciones (69) y (70) se obtiene finalmente

$$Nu_z = \frac{-2}{T_m} \left( \frac{\partial T}{\partial R} \right)_{R=1} \quad (72)$$



BIBLIOTECA

## 4. CALCULOS Y RESULTADOS

### 4.1. PROCESO DE CALCULO

Comenzando con las distribuciones iniciales de temperatura y velocidad con las que entra el fluido al ducto, las ecuaciones en diferencias finitas son aplicadas en este lugar, correspondiente al nivel axial  $j = 0$ , en una columna radial de puntos,  $i = 1, 2, \dots, N-1$ , obteniéndose  $N-1$  ecuaciones para igual número de incógnitas.

Después de resolver el sistema de ecuaciones resultante se obtiene el valor de las variables en toda la columna de puntos en el nivel  $j=1$ . Ahora operamos en el nivel  $j=1$  y repetimos el procedimiento anterior para calcular todas las variables en el nivel  $j=2$  a partir de los resultados del nivel anterior y así sucesivamente. De esta manera vamos avanzando en pasos, columna por columna a lo largo del ducto hasta cubrir la región que interesa analizar.

En la práctica, al usar un computador para los cálculos, simplemente se sustituyen los nuevos valores en las mismas variables que contienen a los resultados anteriores después que estos han sido impresos, ya que no es necesario almacenar toda la información. Un diagrama de flujo general pa-

ra cada solución está contenida en el apéndice D.

Para todos los cálculos se usó una red de 21 puntos en sentido radial separados a una distancia constante  $\Delta R=0.05$  mientras que para el paso o distancia axial, para las soluciones hidrodinámica e hidrodinámica-térmica, se probaron diferentes valores, cada vez más pequeños hasta que se obtuvo suficiente convergencia con  $\Delta S = 0.001$ .

Debido a la forma que tienen las ecuaciones en diferencias finitas; al aplicarlas a los puntos en la red, originan sistemas de ecuaciones lineales del tipo tridiagonal - que en el presente trabajo son resueltos con el método de Thomas, el cual es una variante del método directo de eliminación de Gauss. De este modo se reducen los errores acumulados en la sustitución regresiva al evaluar las incógnitas, así como los requerimientos de memoria en el computador.

No es necesario escribir completamente las matrices de coeficientes y constantes ya que son generadas dentro de un programa de computadora. En el Apéndice C se deducen las relaciones matemáticas que utiliza el método de Thomas.

#### 4.1.1. PROCESO DE CALCULO PARA LA SOLUCION HIDRODINAMICA

Debido a que las ecuaciones (14) y (19) contienen al esfuero de corte en la pared  $T_w$  cuyo valor no se conoce, es necesario asumir algún valor inicial con el que se evalúa el sistema de ecuaciones (27) y se obtiene una solución para la distribución de velocidades  $u$ .

Con los valores de la velocidad calculados se utiliza la ecuación del esfuero de corte adimensional,

$$T_w = 2 \frac{du}{dy} \Big|_{R=1} \quad (73)$$

y se determina un nuevo valor para  $T_w$ . Este es entonces utilizado para recalcular la distribución de velocidades y se regresa luego a la ecuación (73).

El proceso iterativo continúa hasta que el valor del esfuero de corte  $T_w$  obtenido en dos cálculos consecutivos no difiera en más del 0.1%.

Cuando se consigue esto decimos que se tiene el perfil de velocidades definitivo en ese nivel axial y proseguimos al siguiente en donde utilizamos un proceso iterativo

similar usando, como valor inicial para  $T_w$ , el último que se obtuvo en el nivel anterior. De esta manera se reduce el número de iteraciones requeridas dentro de cada nivel y que generalmente fué de 2.

Para calcular el gradiente de velocidad en la ecuación (73) se usó una aproximación de diferencias finitas - más exacta tomando los 3 puntos adyacentes a la pared del ducto. Se encuentra deducida en el Apéndice B.

#### 4.1.2. PROCESO DE CALCULO PARA LA SOLUCION TERMICA CON FLUJO DESARROLLADO.

##### 4.1.2.1. Esquema Explícito

La aplicación del método de diferencias finitas en estos esquemas es sencilla, ya que generalmente se obtiene una sola ecuación con la que se evalúan todas las variables en un mismo nivel para luego avanzar al siguiente usando los nuevos valores calculados.

Para calcular las temperaturas en esta solución, se usa directamente la ecuación (44) en todos los puntos de la red exceptuando el centro del ducto en donde aplicamos la ecuación (46) correspondiente.



El inconveniente de estos métodos explícitos es que por lo general la estabilidad del esquema está condicionada al tamaño del paso axial utilizado.

En el apéndice A analizamos la estabilidad de todos los esquemas empleados y allí se puede observar la restricción para  $\Delta S$  en el esquema explícito.

En los cálculos usamos  $\Delta S = 0.0001$  y se obtuvo una solución estable. También se probaron valores para  $\Delta S$  mayores que el límite fijado en el análisis y se pudo observar la inestabilidad de la solución, lo cual se manifiesta en resultados ilógicos que comienzan a aparecer desde la región cercana a la pared del ducto en donde la exigencia para  $\Delta S$  es mayor.

Para calcular  $T_m$  en la ecuación (67) se utilizó el método de integración aproximada de Simpson mientras que en la ecuación (72), para obtener  $Nu_z$ , se calculó el gradiente de temperatura con una aproximación de diferencias finitas más exacta, similar a la empleada para  $T_w$  en la solución hidrodinámica.

#### 4.1.2.2. Esquema Implícito

En general, la solución de este esquema es similar al anterior con la diferencia que ahora en cada paso axial hay que resolver el sistema de ecuaciones (51) para obtener los perfiles de temperatura.

En el cálculo se usó  $\Delta S = 0.001$  excepto en la región muy cercana de la entrada del ducto en donde se seleccionó  $\Delta S = 0.0001$  para obtener mejor convergencia.

#### 4.1.3. PROCESO DE CALCULO PARA LA SOLUCION HIDRODINAMICA-TERMICA

En este problema se combina la solución hidrodinámica y la solución térmica que se obtiene a partir de las ecuaciones (60), (61) y (62) las que son evaluadas en el momento en que el perfil de velocidades es determinado con el proceso iterativo para  $T_w$  descrito anteriormente.

Para resolver el sistema de ecuaciones resultante se usa también el método de Thomas mientras que para calcular  $T_m$  es usada la integración aproximada de Simpson. Por último, para obtener  $Nu_z$  se usa la aproximación en diferencias finitas que usa 3 puntos, en el cálculo del gradiente de temperatura.

#### 4.2. COMPARACION CON OTROS RESULTADOS

Para comprobar la exactitud de los métodos numéricos - que se utilizan en esta Tesis, los resultados obtenidos son comparados con los de otros trabajos conocidos.

Para la solución hidrodinámica isotérmica se usa como referencia los trabajos de Langhaar<sup>(7)</sup>, Sparrow<sup>(4)</sup>, Hornbeck<sup>(5)</sup>. Las figuras 5, 6 y 7 muestran estas comparaciones para diferentes casos y se pueden observar que los resultados obtenidos presentan una aceptable concordancia con aquellos exceptuando la región muy cercana a la entrada del ducto en donde difieren ligeramente.

Los trabajos mencionados contienen únicamente la solución hidrodinámica y emplean procedimientos diferentes al usado en esta Tesis. Por otra parte, los resultados de estos trabajos han sido generalmente considerados como buenos ya que están de acuerdo con las observaciones experimentales existentes, lo cual está demostrado en estas referencias. También se compararon con los de Betancourt<sup>(10)</sup>, quien usa el método analítico de Galerkin-Kantarovich y la linealización de Targ<sup>(4)</sup>, observándose mucha aproximación.

Para comparar la solución térmica con flujo desarrollado se usa como referencia la solución analítica que trae Kays<sup>(2)</sup>. La comparación de resultados está contenida en el Apéndice G, observándose buena aproximación con diferencias

menores al 1% en la región analizada, entre el método analítico y los dos esquemas usados para esta solución con propósitos ilustrativos.

Los resultados de la solución hidrodinámica-térmica simultánea, son comparados con el trabajo de Kays<sup>(8)</sup> en donde el autor usa un esquema explícito de diferencias finitas para el desarrollo térmico únicamente, mientras que para el desarrollo hidrodinámico usa la solución analítica de Langhaar<sup>(7)</sup>.

En la Figura 8 puede observarse la buena concordancia que presenta la solución calculada y la de Kays<sup>(8)</sup> para diferentes perfiles de temperatura.

Por último, en la Figura 9 se han graficado los números de Nusselt locales de Kays<sup>(8)</sup> y los obtenidos en el presente trabajo observándose también bastante aproximación.

En la misma figura se grafica el número de Nusselt local obtenido en la solución térmica con flujo hidrodinámico desarrollado. El cual se mantiene siempre menor que el anterior, concordando con los resultados de Kays<sup>(8)</sup>.

#### 4.2.1. DISCUSION DE RESULTADOS

##### 4.2.1.1. Resultados de la Solución Hidrodinámica

Cuando la velocidad en el centro del ducto alcanza el 99% del valor correspondiente en flujo completamente desarrollado (perfil parabólico de velocidades), se considera que el perfil de velocidades está desarrollado y la distancia axial adimensional en la cual se alcanza esta condición es denominada longitud hidrodinámica de entrada.

(Ver por ejemplo Hornbeck<sup>(5)</sup> y Kreith<sup>(9)</sup>).

Analizando la tabla de resultados del computador, para flujo hidrodinámico se observa que la condición anterior se alcanza cuando

$$S = 0.2 = \frac{4 (z/D)}{Re}, \text{ para } \left. u \right|_{R=0} = 1.98$$

de donde se puede obtener

$$\frac{z}{D} = 0.05 Re \quad \text{flujo hidrodinámico desarrollado (74)}$$

que coincide con la aproximación que deduce Kays<sup>(2)</sup> de la solución analítica de Langhaar<sup>(7)</sup>. A partir de esta distancia los perfiles de velocidad cambian lentamente y tienden

hacia el límite parabólico.

Alguna divergencia es encontrada en la región cercana a la pared del ducto pero esto podría corregirse usando  $\Delta R$  menores en esa región ya que allí se producen los mayores gradientes de velocidad.

#### 4.2.1.2. Resultados de la solución térmica con flujo desarrollado.

Para demostrar la existencia de los perfiles de temperatura, se toma como referencia a la temperatura  $T_m$ , de forma semejante al perfil de velocidad que es referido a  $\bar{u}$ .

Los resultados obtenidos del computador para los perfiles térmicos corresponde a los valores de una variable adimensional definida como.

$$\frac{T - T_B}{T_m - T_B}$$

En la solución que está analizando, la temperatura en la entrada del ducto es uniforme mientras que el perfil de velocidades se asume completamente desarrollado e invariante (parabólico).

En esta situación es importante conocer el significado del número de Prandtl el cual es un grupo adimensional definido como

$$Pr = \frac{\mu C_p}{k} = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\text{viscosidad cinemática}}{\text{difusividad térmica}}$$

$$= \frac{\text{difusividad por momento (velocidad)}}{\text{difusividad por calor (temperatura)}}$$

es decir que  $Pr$  indica la proporción a razón con que se difunden el calor y el momento a través del fluido.

Para determinar el momento en que se puede considerar el perfil de temperatura desarrollado, empleamos un criterio semejante al usado para el desarrollo hidrodinámico. Asumimos que el perfil térmico está desarrollado cuando el número de Nusselt local para flujo completamente desarrollado (determinado analíticamente en Kays<sup>(2)</sup>) e igual a  $Nu_z = 3.66$ , es el 99% del calculado.

Observando la tabla de resultados del computador encontramos esta condición se alcanza aproximadamente cuando

$$S = 0.1 = \frac{2(z/D)}{Re Pr}$$

la cual constituye la longitud de entrada térmica y de donde se deduce:

$$\frac{z}{D} \approx 0.05 Re Pr, \text{ flujo térmico desarrollado} \quad (75)$$

que coincide también con el análisis de Kays<sup>(2)</sup>.

Comparando las relaciones (74) y (75) se observa que si  $Pr = 1$ , los dos flujos se desarrollan al mismo tiempo, mientras que si  $Pr < 1$ , el perfil térmico se desarrolla más rápidamente que el hidrodinámico y viceversa. Esto coincide claramente con la definición del número de Prandtl.

#### 4.2.1.3. Resultados de la solución hidrodinámica-térmica.

Este caso es el más general. Está calculado con  $Pr = 0.7$  para compararlo con el trabajo de Kays<sup>(8)</sup>.

Hay que tener cuidado cuando se comparan estos resultados con los de la solución térmica con flujo desarrollado pues las coordenadas axiales son diferentes.

Para esta solución se usa el mismo criterio anterior para considerar el perfil térmico desarrollado.

En la tabla de resultados correspondiente se puede observar el establecimiento del perfil térmico el cual se desarrolla antes que el perfil hidrodinámico pero a una distancia mayor que la necesaria para el desarrollo térmico con flujo hidrodinámico parabólico en la entrada.

Según las condiciones de frontera definidas para las soluciones térmicas se deduce que en el punto de entrada del ducto ( $z = 0$ ), el gradiente de temperatura es infinito por lo cual  $NU_z$  también será infinito. Sin embargo cuando el flujo se desarrolla a lo largo del ducto, se observa en los resultados del computador que  $NU_z$  tiende hacia un valor límite el cual coincide aproximadamente con el determinado analíticamente por Kays<sup>(2)</sup> para flujo térmico completamente desarrollado, esto es,  $NU_z = 3.66$ .

Es interesante notar que el efecto de usar velocidad uniforme en la entrada del ducto en lugar del perfil parabólico, se manifiesta en el número de Nusselt que es siempre más alto para la solución hidrodinámica-térmica. Esto se debe a que cuando se usa en el desarrollo térmico la solución hidrodinámica y no un perfil de velocidad completamente desarrollado, los perfiles de temperatura se desarrollan más lentamente y por lo tanto los gradientes de

temperatura son mayores y consecuentemente, el número de Nusselt es también mayor.

## 5. CONCLUSIONES

- a) La omisión de los efectos de la velocidad radial en el desarrollo de los flujos es adecuada ya que solo afecta ligeramente a la región muy cercana a la entrada del ducto. Esto puede observarse en los gráficos correspondientes.
- b) La aproximación de Targ<sup>(4)</sup>, así como las otras idealizaciones están justificadas pues conducen a resultados que tienen una aceptable aproximación con los datos reales.
- c) Se ha demostrado la existencia de los perfiles de velocidad y temperatura, y se ha establecido la longitud en que estos perfiles alcanzan su desarrollo.
- d) Una buena aproximación, para determinar la longitud del ducto, necesaria para que el flujo hidrodinámico alcance su desarrollo en flujo laminar se puede estimar en

$$\frac{z}{D} \approx 0.05 R_e$$

- e) Analizando las relaciones (74) y (75) podemos concluir que la idealización de tener el perfil hidrodinámico -

completamente desarrollado en la entrada del ducto solamente es aplicable para flúidos con números de Prandtl altos, por ejemplo los aceites, pues de esta manera aún con velocidad y temperatura uniformes en la entrada del ducto, el perfil hidrodinámico se desarrolla mucho más rápido que el térmico y así la idealización de la solución térmica con flujo desarrollado introduce poco error Kays<sup>(2)</sup>, lo estima aplicable para flúidos con  $Pr \geq 5$ ).

- f) Con las mismas relaciones (74) y (75) concluimos que para flúidos con números de Prandtl menores a 1, por ejemplo los gases, o cercanos a 1, el perfil térmico se desarrollará antes o simultáneamente con el hidrodinámico y necesariamente habrá que trabajar con los resultados de la solución hidrodinámica-térmica.
- g) El número de Nusselt es muy alto en la región cercana a la entrada y disminuye a lo largo del ducto hasta alcanzar aproximadamente el límite  $NU_z = 3.66$  cuando el flujo térmico se ha desarrollado. De acuerdo a este análisis, es incorrecto usar el valor mencionado en la región del ducto que constituye la longitud de entrada térmica.
- h) De la conclusión anterior se deduce también que no es válido considerar que el coeficiente de transferencia de

calor local en la convección,  $h_z$ , se mantenga constante a lo largo de todo el ducto, conclusión importante en el diseño de intercambiadores de calor.

- i) Las soluciones obtenidas son muy generales pues siendo adimensionales pueden aplicarse en diferentes casos símplemente transformando las coordenadas a las del caso particular. Se exceptúa la solución hidrodinámica térmica en donde el número de Prandtl es un parámetro, pero, es una constante que puede cambiarse fácilmente dentro del programa de computadora.
- j) Habiéndose demostrado que los resultados obtenidos son aceptables, se concluye finalmente que los métodos de diferencias finitas son un recurso matemático muy eficiente a pesar de la relativa facilidad con que se aplican. Sin embargo, requieren el uso de un computador para obtener resultados ya que es un método numérico que necesita gran cantidad de operaciones aritméticas.

Con el desarrollo actual de los computadores, se están difundiendo rápidamente; pues pueden aplicarse aún en situaciones muy complejas donde no sería posible usar métodos analíticos.

- k) Por las razones anteriores recomendamos la continuación de este trabajo de investigación, extendiéndolo al análisis de flujo en otras condiciones así como para flujo hidrodinámico turbulento. De esta manera ayudaremos mucho al desarrollo de la ciencia e investigación.

## APENDICE A

CONVERGENCIA Y ESTABILIDAD DE LOS ESQUEMAS DE DIFERENCIAS  
FINITAS

## A.1. CONVERGENCIA

Convergencia significa que la solución exacta de las ecuaciones en diferencias finitas usadas para aproximar la ecuación diferencial parcial, tiende hacia la solución exacta de esta última cuando los incrementos ( $\Delta R$ ,  $\Delta S$ , etc.) tienden a cero. La diferencia entre las dos soluciones se denomina error por discretización. La magnitud de este error depende del tamaño de los incrementos usados y del número de términos tomados de las series para aproximar las derivadas (ver el Apéndice B). En general, el error por discretización decrece al disminuir el tamaño de los incrementos pero, esto aumenta el número de ecuaciones que deben resolverse.

El estudio de convergencia en el presente trabajo se hizo probando varios valores para los incrementos y observando que los resultados tendían siempre hacia un valor consstante dentro de un margen de tolerancia de aproximación debido a los errores por redondeo que produce el computador. Además se tienen otros trabajos que se refieren al problema

de esta Tesis, como referencia. De esta manera se pudo concluir que los esquemas de diferencias usadas, sí eran convergentes.

## A.2. ESTABILIDAD

Estabilidad significa que durante el proceso de cálculo, la solución numérica o calculada, de las ecuaciones en diferencias finitas, tiende hacia la solución exacta de las ecuaciones en diferencias finitas.

Debido a que el computador solamente puede trabajar con un número finito de dígitos, se introducen los denominados errores por redondeo siempre que es usado y así la solución calculada difiere en algo de la exacta para las aproximaciones en diferencias finitas.

Un conjunto de ecuaciones en diferencias finitas es estable cuando el efecto acumulado por los errores por redondeo durante todo el cálculo, es despreciable. Más específicamente, cuando el error por redondeo introducido en algún punto de la red de diferencias finitas en determinado nivel del avance de la solución, no se propaga mientras progresa ésta.

Existen métodos para investigar el crecimiento de los errores en las operaciones aritméticas necesarias para resolver las ecuaciones en diferencias finitas. En esta tesis se usa el método de series de Fourier desarrollado por Von Newman.

Para facilitar el análisis se utilizan las series de Fourier en forma exponencial compleja.

$$\sum A_n e^{In\pi x/L}$$

en donde  $I = \sqrt{-1}$  y  $L$  es el intervalo en el cual una función  $f(x, t)$  está definida. Con la notación empleada anteriormente puede escribirse.

$$f(x, t) = f_{i, j} = f(i\Delta x, j \Delta t)$$

y en términos de ésta, el término de la serie de Fourier

$$A_n e^{In\pi x/L} = A_n e^{In\pi i \Delta x / (N-1) \Delta x} = A_n I g_n^{i \Delta x}$$

donde  $g_n = n\pi / (N-1) \Delta x$ ,  $(N-1) \Delta x = L$ , y  $N$  es el número de puntos en la red a lo largo del intervalo  $L$  en el eje  $x$ .

Expresamos con  $E_i$  el error que se produce en el nivel

$t = 0$  y a lo largo de la línea de puntos entre  $x = 0$  y  $x = L$

$$E_i = \sum_{n=1}^N A_n e^{I g_n i \Delta x} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Con las  $N$  ecuaciones resultantes es posible determinar los coeficientes  $A_0, A_1, \dots, A_N$  a partir de una distribución arbitraria de errores inicial.

Como las ecuaciones en diferencias finitas empleadas en esta tesis son lineales, es posible tener soluciones separadas cuya suma es también una solución. En el análisis necesitamos considerar la propagación del error debido a un término solamente, digamos  $e^{I g_i \Delta x}$ , en donde se ha despreciado el coeficiente  $A_n$  ya que es constante y no introduce error.

Para investigar la propagación del error cuando la solución avanza en la dirección  $t$ , necesitamos encontrar una solución a la ecuación en diferencias finitas que se reduzca a  $e^{I g_i \Delta x}$  cuando  $t = j \Delta t = 0$ ; es decir, la definida anteriormente en ese nivel.

Asumamos que en base a la separación de soluciones permisibles se pueda escribir, para el error en las dos directe

ciones  $x, t$ .

$$E_{i,j} = e^{Igx} e^{\alpha t} = e^{Igi\Delta x} e^{\alpha j\Delta t} = e^{Igi\Delta x} H^j \quad (A-1)$$

donde  $H = e^{\alpha \Delta t}$ , y  $\alpha$  es una constante, en general compleja. Se puede observar que la ecuación (A-1) se reduce a  $e^{Igi\Delta x}$  cuando  $t = 0$ .

Es necesario definir una relación entre el error producido en dos pasos consecutivos al avanzar en la dirección  $t$  o sea, un factor de amplificación del error.

$$M = \frac{H^{j+1}}{H^j} \quad (A-2)$$

Según la ecuación (A-2) puede concluirse que el error no crecerá al incrementarse  $t$  si puede probarse que

$$|M| \leq 1 \quad (A-3)$$

### A.2.1. ANALISIS DE ESTABILIDAD DE LOS ESQUEMAS DE DIFERENCIAS FINITAS PROPUESTOS

#### A.2.1.1. Estabilidad del esquema usado en la solución hidrodinámica.

Investigamos la estabilidad de la ecuación (24) puesta

en la siguiente forma.

$$A_i u_{i-1, j+1} + B_i u_{i, j+1} + C_i u_{i+1, j+1} = u_{i, j} + \Delta STw \quad (24)$$

En esta ecuación hacemos las siguientes sustituciones deducidas de la ecuación (A-1) cambiando las coordenadas para estar de acuerdo con la ecuación (24).

$$u_{i-1, j+1} = e^{I_g(R - \Delta R)} H^{j+1}$$

$$u_{i, j+1} = e^{I_g R} H^{j+1}$$

$$u_{i+1, j+1} = e^{I_g(R + \Delta R)} H^{j+1}$$

$$u_{i, j} = e^{I_g R} H^j$$

(A-4)

Reemplazando las ecuaciones (A-4) en la ecuación (24) se obtiene finalmente.

$$M = \frac{H^{j+1}}{H^j} = \frac{-1}{A_i e^{-I_g \Delta R} + B_i + C_i e^{I_g \Delta R}}$$

en donde se ha eliminado el término correspondiente al esfuerzo de corte en la pared  $T_w$  ya que es una constante cu-

ya convergencia es controlado dentro de cada nivel; y asumimos que no introduce error.

Ahora utilizamos las ecuaciones de Euler.

$$e^{I\theta} = \cos \theta + I \operatorname{sen} \theta$$

$$e^{-I\theta} = \cos \theta - I \operatorname{sen} \theta$$

(A-5)

en donde  $\theta = g \Delta R$

Ya que solamente interesa la solución en el plano real, eliminamos los segundos términos en los miembros a la derecha y obtenemos.

$$M = \frac{-1}{(A_i + C_i) \cos \theta + B_i}$$

La condición de estabilidad (A-3), exige probar que

$$\left| \frac{-1}{(A_i + C_i) \cos \theta + B_i} \right| \leq 1$$

puesto en otra forma

$$-1 \leq \frac{-1}{(A_i + C_i) \cos \theta + B_i} \leq 1$$

conviene reemplazar aquí, los coeficientes  $A_i$ ,  $B_i$  y  $C_i$  por su valor original definido en el análisis de la ecuación (24), quedando finalmente después de simplificar.

$$-1 \leq \frac{1}{1 + 2L_1 (1 - \cos \theta)} \leq 1 \quad (\text{A-6})$$

En donde se puede observar claramente que para cualquier valor de  $\cos \theta$ , la condición se cumple siempre independientemente de la magnitud de  $L_1$  que es una constante positiva definida con la ecuación (23) del análisis.

$$L_1 = \frac{\Delta S}{(\Delta R)^2} \quad (23)$$

Es decir que, si hemos fijado el tamaño de  $\Delta R$ , no importa cual sea el de  $\Delta S$ , siempre se obtendrá una solución estable, lo cual es una característica ventajosa en estos esquemas implícitos. Sin embargo, no conviene tomar valores demasiado grandes para  $\Delta S$  ni para  $\Delta R$  para obtener una convergencia adecuada.

La estabilidad de las ecuaciones particulares (25) y (26) para la solución hidrodinámica también se investigaron, obteniéndose igualmente que son incondicionalmente estables.

A.2.1.2. Estabilidad de los esquemas usados en la solución térmica

con flujo desarrollado.

A.2.1.2.1. Esquema Explícito

En la ecuación (44) correspondiente

$$T_{\lambda, f+1} = A_{\lambda} T_{\lambda-1, f} + B_{\lambda} T_{\lambda, f} + C_{\lambda} T_{\lambda+1, f} \quad (44)$$

Se hacen las siguientes sustituciones

$$T_{\lambda-1, f} = e^{I_{g}(R - \Delta R)} H^f$$

$$T_{\lambda, f} = e^{I_{gR}} H^f$$

$$T_{\lambda+1, f} = e^{I_{g}(R + \Delta R)} H^f$$

$$T_{\lambda, f+1} = e^{I_{gR}} H^{f+1}$$

y con las ecuaciones (A-5), se obtiene

$$M = \frac{H^{f+1}}{H^f} = (A_{\lambda} + C_{\lambda}) \cos e + B_{\lambda}$$

Reemplazando los coeficientes  $A_{\lambda}$ ,  $B_{\lambda}$  y  $C_{\lambda}$  de la ecuación

ción (44) por su valor original obtenemos la siguiente con  
dición de estabilidad para este esquema.

$$-1 \leq \frac{1}{1 - R_i^2} (2L_1 \cos \theta + 1 - R_i^2 - 2L_1) \leq 1$$

Probemos solamente los casos extremos de  $\cos \theta$ , ya que es una función continua.

a)  $\cos \theta = 1$

$$-1 \leq \frac{1 - R_i^2}{1 - R_i^2} \leq 1, \text{ se cumple siempre}$$

b)  $\cos \theta = -1$

$$-1 \leq \frac{1 - R_i^2 - 4L_1}{1 - R_i^2} \leq 1$$

Siendo  $L_1$  siempre positivo, la condición derecha se cumple siempre, quedando como el caso crítico para es  
tabilidad la condición izquierda, la cual se reduce a

$$L_1 \leq \frac{1 - R_i}{2}, \quad i = 2, 3, \dots, \quad N-1$$

La condición más exigente ocurre cuando  $R_i = R_{N-1}$ , con

lo que finalmente se concluye que la estabilidad para este esquema es condicional y sujeta a

$$L_1 \leq \frac{1 - (RN-1)^2}{2} \quad (A-8)$$

Lo cual expresa en definitiva que el tamaño de  $\Delta S$  a utilizarse depende del número de puntos radiales usados en la red de diferencias finitas, ya que

$$L_1 = \frac{\Delta S}{(\Delta R)^2}, \quad R_i = (i-1) \Delta R, \quad \text{y} \quad \Delta R = \frac{1}{N-1}$$

Un análisis similar es hecho en la ecuación (46) obteniéndose también que es condicionalmente estable y sujeto a

$$L_1 \leq \frac{1}{4} \quad (A-9)$$

Puesto que en el problema estamos usando una red de 21 puntos en sentido radial, el valor de  $\Delta S$  deberá cumplir las siguientes restricciones derivadas de las condiciones (A-8) y (A-9).

Según la condición (A-8)

$$\Delta S = 0.000122 \quad (A-10)$$

Según la condición (A-9)

$$\Delta S = 0.000625 \quad (A-11)$$

Estos resultados son discutidos y utilizados en el proceso de cálculo respectivo.

#### A.2.1.2.2. Esquema Implícito

Un procedimiento similar a los anteriores es aplicado a la ecuación (48) y se llega a la siguiente condición de estabilidad

$$-1 \leq \frac{1 - R_i^2}{1 - R_i^2 + 2L_1 (1 - \cos \theta)} \leq 1 \quad (A-12)$$

que se cumple siempre para cualquier valor de  $\cos \theta$  con lo que concluimos que el esquema es incondicionalmente estable como también fue demostrada la estabilidad de las ecuaciones (49) y (50) asociadas con esta solución.

#### A.2.1.3. ESTABILIDAD DEL ESQUEMA USADO PARA LA SOLUCION HIDRODINAMI CA-TERMICA.

Aplicando el método de von Newman a la ecuación (60),

se obtuvo la siguiente condición de estabilidad

$$-1 \leq \frac{u_{i,j}}{u_{i,j} + \frac{2L_1}{P_n} (1 - \cos \theta)} \leq 1 \quad (\text{A-13})$$

que se cumple siempre para cualquier valor de  $\cos \theta$ , por lo que podemos decir que también este esquema es incondicionalmente estable, independientemente de la magnitud de  $P_n$  y  $L_1$ , que son constantes positivas. Por último, también se demostró la estabilidad incondicional de las ecuaciones (61) y (62) relacionadas con la solución hidrodinámica-térmica, lo cual es una característica en esquemas implícitos.

### A.3. CONSISTENCIA

Una ecuación en diferencias finitas es consistente o compatible con la ecuación diferencial parcial que representa si se reduce a esta cuando los incrementos ( $\Delta R$ ,  $\Delta S$ , etc.), tienden a cero.

La manera de establecer que la ecuación en diferencias finitas es consistente, es determinando el valor del error por truncamiento que resulta cuando los incrementos tienden a cero. Si este tiende a cero en esa medida, entonces de-

cimos que la aproximación numérica es consistente con la ecuación diferencial parcial original.

En el Apéndice B se incluyen los errores por truncamiento para cada aproximación en diferencias finitas de las derivadas y el cual es debido a los términos que se omiten de la serie de Taylor para llegar a esa aproximación.

En general, para las ecuaciones en diferencias finitas que se han utilizado en esta tesis, el error por truncamiento tiene la siguiente forma

$$e_t = \sigma [(\Delta R)^2] + \sigma [\Delta S] \quad (A-14)$$

En donde  $\sigma [ ]$  representa el orden del error por truncamiento cometido al utilizar las aproximaciones en las derivadas de las ecuaciones diferenciales parciales en el Análisis.

## APENDICE B

### DEDUCCION DE LAS APROXIMACIONES DE DIFERENCIAS FINITAS UTILIZADAS EN EL ANALISIS

Consideremos una función  $f = f(x)$

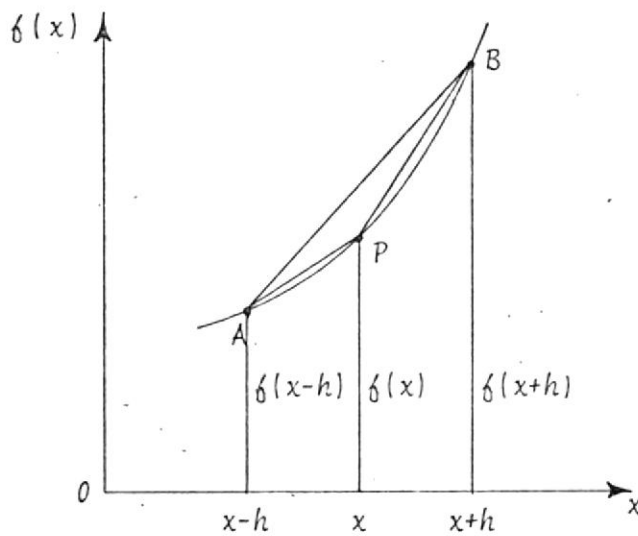


Fig. B-1

Si es una función continua de  $x$  así como sus derivadas y si tiene suficiente número de estas, podemos expandirla usando la serie de Taylor.

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2f''(x) + \frac{1}{6}h^3f'''(x) + \dots \quad (B-1)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{1}{2}h^2f''(x) - \frac{1}{6}h^3f'''(x) + \dots \quad (B-2)$$

Sumando estas dos expresiones

$$f'(x) \approx \frac{1}{h} [f(x) - f(x-h)] \quad \text{(B-7)}$$

$$f'(x) \approx \frac{1}{h} [f(x+h) - f(x)] \quad \text{(B-6)}$$

De las ecuaciones (B-1) y (B-2) se pueden obtener otras aproximaciones para la primera derivada en el punto P

con un error de orden  $h^2$ .

$$f'(x) = \frac{1}{2h} [f(x+h) - f(x-h)] \quad \text{(B-5)}$$

Restando la ecuación (B-2) de la ecuación (B-1) y despreciando los términos de orden  $h^3$ , resulta

como una aproximación para la segunda derivada de  $x$ , y con un error del orden  $h^2$ , en el punto P.

$$f''(x) = \frac{1}{h^2} [f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] \quad \text{(B-4)}$$

de  $h$ , se obtiene con relación a los términos que contienen menores potencias mayor o igual que 4. Asumiendo que estos son despreciables donde  $\sigma(h^4)$  significa términos conteniendo  $h$  con exponente

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + \sigma(h^4) \quad \text{(B-3)}$$

con un error de orden  $h$  para ambas

Las tres últimas aproximaciones son conocidas como  $\delta\bar{f}_e$

función central, diferencia ascendente y diferencia descendente, en forma respectiva.

Si  $f$ , es una función de dos variables independientes,  $x$  y  $t$ , utilizaremos la siguiente nomenclatura para representar las coordenadas de un punto en el plano  $x-t$ .

$$\delta(x, t) = \delta(kh, jh) = \delta_{k,j}$$

donde  $k$  y  $j$  son enteros

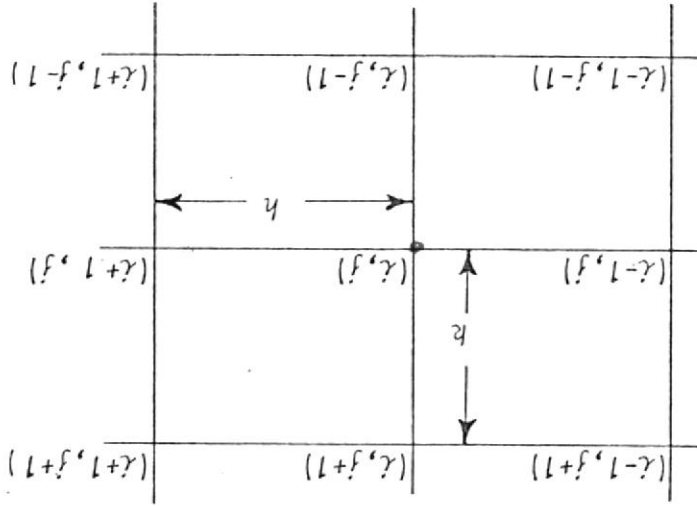


FIG. B-2

Con la ecuación (B-5)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{f[(i+1)h, jk] - f[(i-1)h, jk]}{2h}$$

que se reduce con la nomenclatura establecida a

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2h} \quad (\text{B-8})$$

con error de orden  $h^2$ .

En forma similar se obtienen las demás aproximaciones.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{h^2} \quad (\text{B-9})$$

con error de orden  $h^2$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{h} \quad (\text{B-10})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{h} \quad (\text{B-11})$$

con error de orden  $h$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{k} \quad (\text{B-12})$$

con error de orden  $k$ , etc.

todas evaluadas en el punto  $i, j$ .

Para aumentar el grado de precisión es posible usar más puntos en las aproximaciones de diferencias finitas para lo cual es conveniente utilizar la siguiente ecuación<sup>(35)</sup>

$$\left. \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right|_{x=x_n} = \frac{k!}{m! h^k} \sum_{j=0}^m A_j f(x_j) \quad (B-13)$$

En donde:

$k$  = orden de la derivada

$m$  = número de puntos usados en la aproximación menos uno.

$h$  =  $\Delta x, \Delta y$ , etc.

$n$  = número del punto en el que se evalúa la derivada (0, 1, 2, ...)

$A_j$  = coeficientes dados en la tabla de la siguiente página.

Se quiere aproximar  $\frac{\partial f}{\partial x}$  en el punto  $i+2$  en términos de tres puntos adyacentes  $i, i+1$  e  $i+2$ . Estos son numerados 0,

1 y 2 respectivamente para luego usar la tabla con los coeficientes  $A_j$ .

$$\begin{array}{ccccccc} & x_0 & & x_1 & & x_2 & \\ & | & \Delta x & | & \Delta x & | & \\ \hline & i & & i+1 & & i+2 & \end{array}$$

Para este caso tenemos

$$k = 1$$

$$m = 2$$

$$h = \Delta x$$

$$n = 2$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \delta}{\partial x} \right|_{i+2} &= \frac{1!}{2! (\Delta x)^2} \sum_{j=0}^2 A_j \delta(x_j) \\ &= \frac{1}{2 \Delta x} [A_0 \delta(x_0) + A_1 \delta(x_1) + A_2 \delta(x_2) + \text{error}] \\ &= \frac{1}{2 \Delta x} (1 \delta_i - 4 \delta_{i+1} + 3 \delta_{i+2} + \frac{1}{3} \Delta x^3 \delta^{(3)}) \\ \left. \frac{\partial \delta}{\partial x} \right|_{i+2} &= \frac{\delta_i - 4 \delta_{i+1} + 3 \delta_{i+2}}{2 \Delta x} \end{aligned} \tag{B-14}$$

con un error de orden  $\Delta x^2$ .

BIBLIOTECA



Los coeficientes  $A_j$  fueron tomados de la tabla adjunta para los datos particulares de este caso.

La ecuación (B-14) es usada en el análisis de las secciones para calcular los gradientes de velocidad y temperatura en la pared, haciendo  $\lambda = N-2$ .

Differentiation Formula:  $\frac{d^k f(x)}{dx^k} \Big|_{x=x_n} = \frac{k!}{m! h^k} \sum_{r=0}^m A_r f(x_r)$

FIRST DERIVATIVE ( $k=1$ )

n	$A_0$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	Error
Three Point ( $m=2$ )							
0	-3	4	-1				$1/3 h^3 f'''(x)$
1	-1	0	1				$-1/6 h^3 f'''(x)$
2	1	-4	3				$1/3 h^3 f'''(x)$
Four Point ( $m=3$ )							
0	-11	18	-9	2			$-1/4 h^4 f^{(4)}$
1	-2	-3	6	-1			$1/12 h^4 f^{(4)}$
2	1	-6	3	2			$-1/12 h^4 f^{(4)}$
3	-2	9	-18	11			$1/4 h^4 f^{(4)}$
Five Point ( $m=4$ )							
0	-50	96	-72	32	-6		$1/5 h^5 f^{(5)}$
1	-6	-20	36	-12	2		$-1/20 h^5 f^{(5)}$
2	2	-16	0	16	-2		$1/30 h^5 f^{(5)}$
3	-2	12	-36	20	6		$-1/20 h^5 f^{(5)}$
4	6	-32	72	-96	50		$1/5 h^5 f^{(5)}$
Six Point ( $m=5$ )							
0	-274	600	-600	400	-150	24	$-1/6 h^6 f^{(6)}$
1	-24	-130	240	-120	40	-6	$1/30 h^6 f^{(6)}$
2	6	-60	-40	120	-30	4	$-1/60 h^6 f^{(6)}$
3	-4	30	-120	40	60	-6	$1/60 h^6 f^{(6)}$
4	6	-40	120	-240	130	24	$-1/30 h^6 f^{(6)}$
5	-24	150	-400	600	-600	274	$1/6 h^6 f^{(6)}$

SECOND DERIVATIVE ( $k=2$ )

n	$A_0$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	Error
Three Point ( $m=2$ )							
0	1	-2	1				$-1/2 h^3 f'''(x)$
1	1	-2	1				$-1/24 h^4 f^{(4)}$
2	1	-2	1				$1/2 h^3 f'''(x)$
Four Point ( $m=3$ )							
0	6	-15	12	-3			$11/24 h^4 f^{(4)}$
1	3	-6	3	0			$-1/24 h^4 f^{(4)}$
2	0	3	-6	3			$-1/24 h^4 f^{(4)}$
3	-3	12	-15	6			$11/24 h^4 f^{(4)}$
Five Point ( $m=4$ )							
0	35	-104	114	-56	11		$-5/12 h^5 f^{(5)}$
1	11	-20	6	4	-1		$1/24 h^5 f^{(5)}$
2	-1	16	-30	16	-1		$1/180 h^6 f^{(6)}$
3	-1	4	6	-20	11		$-1/24 h^5 f^{(5)}$
4	11	-56	114	-104	35		$5/12 h^5 f^{(5)}$
Six Point ( $m=5$ )							
0	225	-770	1070	-780	305	-50	$137/360 h^6 f^{(6)}$
1	50	-75	-20	70	-30	5	$-13/360 h^6 f^{(6)}$
2	-5	80	-150	80	-5	0	$1/180 h^6 f^{(6)}$
3	0	-5	80	-150	80	-5	$1/180 h^6 f^{(6)}$
4	5	-30	70	-20	-75	50	$-13/360 h^6 f^{(6)}$
5	-50	305	-780	1070	-770	225	$137/360 h^6 f^{(6)}$

THIRD DERIVATIVE ( $k=3$ )

n	$A_0$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	Error
Four Point ( $m=3$ )							
0	-1	3	-3	1			$-1/4 h^4 f^{(4)}$
1	-1	3	-3	1			$-1/12 h^4 f^{(4)}$
2	-1	3	-3	1			$1/12 h^4 f^{(4)}$
3	-1	3	-3	1			$1/4 h^4 f^{(4)}$
Five Point ( $m=4$ )							
0	-10	36	-48	28	-6		$7/24 h^5 f^{(5)}$
1	-6	20	-24	12	-2		$1/24 h^5 f^{(5)}$
2	-2	4	0	-4	2		$-1/24 h^5 f^{(5)}$
3	2	-12	24	-20	6		$1/24 h^5 f^{(5)}$
4	6	-28	48	-36	10		$7/24 h^5 f^{(5)}$
Six Point ( $m=5$ )							
0	-85	355	-590	490	-205	35	$-5/16 h^6 f^{(6)}$
1	-35	125	-170	110	-35	5	$-1/48 h^6 f^{(6)}$
2	-5	-5	50	-70	35	-5	$1/48 h^6 f^{(6)}$
3	5	-35	70	-50	5	5	$-1/48 h^6 f^{(6)}$
4	-5	35	-110	170	-125	35	$1/48 h^6 f^{(6)}$
5	-35	205	-490	590	-355	85	$5/16 h^6 f^{(6)}$

FOURTH DERIVATIVE ( $k=4$ )

n	$A_0$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	Error
Five Point ( $m=4$ )							
0	1	-4	6	-4	1		$-1/12 h^5 f^{(5)}$
1	1	-4	6	-4	1		$-1/24 h^5 f^{(5)}$
2	1	-4	6	-4	1		$-1/144 h^6 f^{(6)}$
3	1	-4	6	-4	1		$1/24 h^5 f^{(5)}$
4	1	-4	6	-4	1		$1/12 h^5 f^{(5)}$
Six Point ( $m=5$ )							
0	15	-70	130	-120	55	-10	$17/144 h^6 f^{(6)}$
1	10	-45	80	-70	30	-5	$5/144 h^6 f^{(6)}$
2	5	-20	30	-20	5	0	$-1/144 h^6 f^{(6)}$
3	0	5	-20	30	-20	5	$-1/144 h^6 f^{(6)}$
4	-5	30	-70	80	-45	10	$5/144 h^6 f^{(6)}$
5	-10	55	-120	130	-70	15	$17/144 h^6 f^{(6)}$

FIFTH DERIVATIVE ( $k=5$ )

j	$A_0$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	Error
Six Point ( $m=5$ )							
0	-1	5	-10	10	-5	1	$-1/48 h^6 f^{(6)}$
1	-1	5	-10	10	-5	1	$-1/80 h^6 f^{(6)}$
2	-1	5	-10	10	-5	1	$-1/240 h^6 f^{(6)}$
3	-1	5	-10	10	-5	1	$1/240 h^6 f^{(6)}$
4	-1	5	-10	10	-5	1	$1/80 h^6 f^{(6)}$
5	-1	5	-10	10	-5	1	$1/48 h^6 f^{(6)}$

Compiled from W. G. Bickley, Formulae for numerical differentiation, Math. Gaz. 25, 19-27, 1941 (with permission).

Reproducida de Abramowitz and Stegun (35).

## APENDICE C

DEDUCCION DE LAS FORMULAS DEL METODO DE THOMAS PARA RESOLVER UN SISTEMA TRIDIAGONAL DE ECUACIONES LINEALES.

Consideremos un sistema tridiagonal de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ .

$$\begin{aligned} b_1 x_1 + c_1 x_2 &= d_1 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 &= d_2 \\ a_3 x_2 + b_3 x_3 &= d_3 \end{aligned}$$

puesto en forma matricial.

$$Ax = D \tag{C-1}$$

siendo

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_3 & b_3 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Para resolver este sistema usamos el método de eliminación de Gauss partiendo de la matriz aumentada.

$$C = [ A \mid D ]$$

Puesta en forma desarrollada

$$C = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

Si dividimos la primera fila por  $b_1 = w$ .

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \frac{c_1}{w_1} & 0 & \frac{d_1}{w_1} \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & a_3 & b_3 & d_3 \end{bmatrix}$$

Haciendo  $\frac{d_1}{w_1} = g_1$  y restando de la segunda fila la primera multiplicada por  $a_2$ .

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \frac{c_1}{w_1} & 0 & g_1 \\ 0 & (b_2 - \frac{a_2 c_1}{w_1}) & c_2 & d_2 - a_2 g_1 \\ 0 & a_3 & b_3 & d_3 \end{bmatrix}$$

Si hacemos  $b_2 - \frac{a_2 c_1}{w_1} = w_2$  y dividimos la segunda fila por  $w_2$ .

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \frac{c_1}{w_1} & 0 & g_1 \\ 0 & 1 & \frac{c_2}{w_2} & \left(\frac{d_2 - a_2 g_1}{w_2}\right) \\ 0 & a_3 & b_3 & d_3 \end{bmatrix}$$

Haciendo  $\frac{d_2 - a_2 g_1}{w_2} = g_2$ , restamos de la tercera fila la segunda multiplicada por  $a_3$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \frac{c_1}{w_1} & 0 & g_1 \\ 0 & 1 & \frac{c_2}{w_2} & g_2 \\ 0 & 0 & \left(b_3 - \frac{a_3 c_2}{w_2}\right) & (d_3 - a_3 g_2) \end{bmatrix}$$

Si hacemos  $b_3 - \frac{a_3 c_2}{w_2} = w_3$  y dividimos la tercera fila por  $w_3$ .

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \frac{c_1}{w_1} & 0 & g_1 \\ 0 & 1 & \frac{c_2}{w_2} & g_2 \\ 0 & 0 & 1 & \left(\frac{d_3 - a_3 g_2}{w_3}\right) \end{bmatrix}$$

Finalmente, si hacemos  $\frac{d_3 - a_3 g_2}{w_3} = g_3$ , se obtiene

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \frac{c_1}{w_1} & 0 & g_1 \\ 0 & 1 & \frac{c_2}{w_2} & g_2 \\ 0 & 0 & 1 & g_3 \end{bmatrix}$$

de donde pueden evaluarse las incógnitas de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} x_3 &= g_3 \\ x_2 &= g_2 - \frac{c_2}{w_2} x_3 \\ x_1 &= g_1 - \frac{c_1}{w_1} x_2 \end{aligned}$$

El procedimiento anterior es aplicable a un sistema de  $N$  ecuaciones con  $N$  incógnitas generalizando la solución anterior con las siguientes fórmulas.

$$\begin{aligned} x_N &= g_N \\ x_i &= g_i - \frac{c_i x_{i+1}}{w_i}, \quad i = N-1, N-2, \dots, 1 \quad (C-2) \end{aligned}$$

usando las fórmulas recursivas

$$w_1 = b_1$$

$$g_1 = d_1/w_1$$

$$w_i = b_i - \frac{a_i c_{i-1}}{w_{i-1}}, \quad i = 2, 3, \dots, N \quad (C-3)$$

$$g_i = \frac{d_i - a_i g_{i-1}}{w_i}, \quad i = 2, 3, \dots, N$$

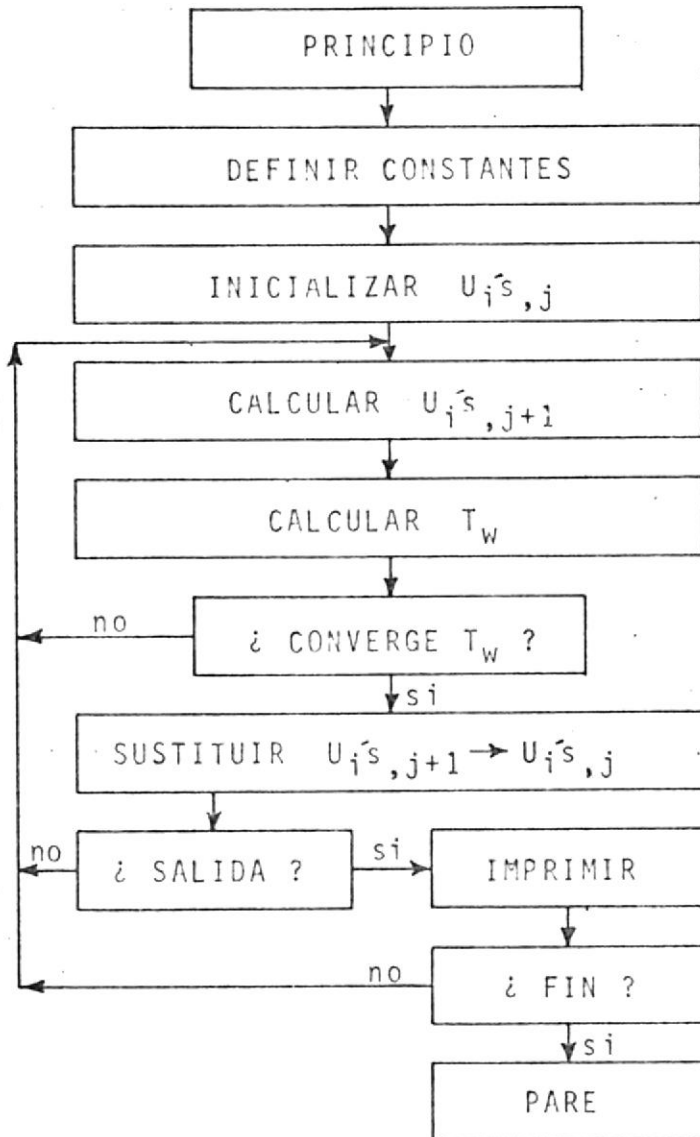
Las fórmulas (C-2) y (C-3) fueron utilizadas en el cálculo de los sistemas de ecuaciones en esta Tesis.

APENDICE D

DIAGRAMA DE FLUJO GENERAL PARA LAS SOLUCIONES



**BIBLIOTECA**

DIAGRAMA DE FLUJO GENERAL PARA LA SOLUCION  
HIDRODINAMICA

## DIAGRAMA DE FLUJO GENERAL PARA LA SOLUCION TERMICA CON FLUJO DESARROLLADO

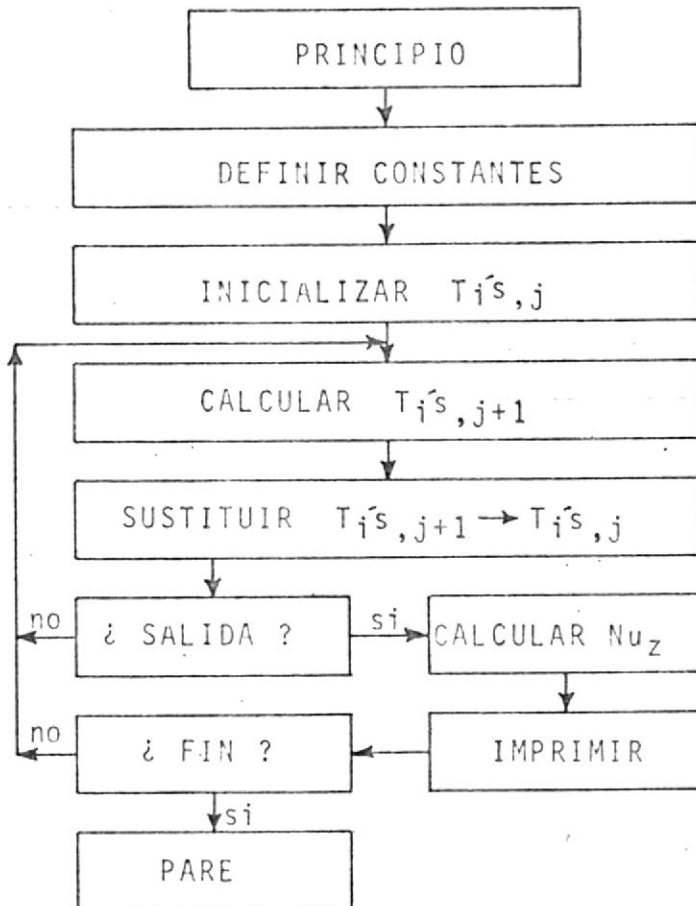
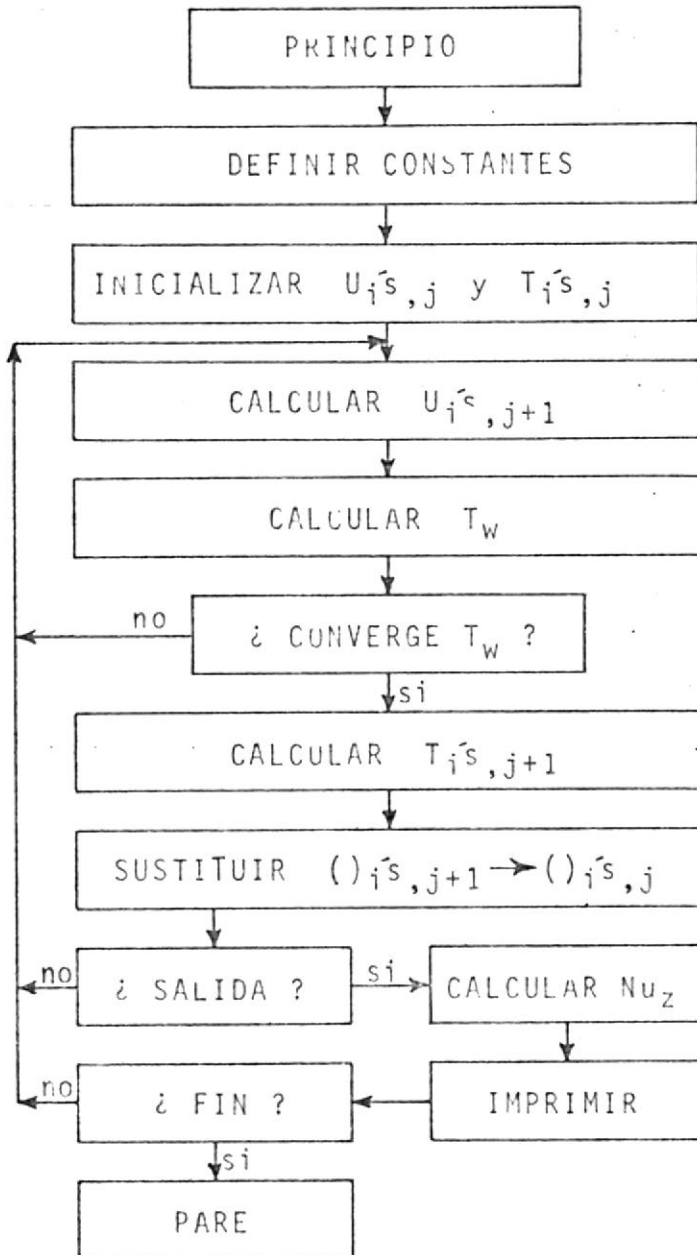


DIAGRAMA DE FLUJO GENERAL PARA LA SOLUCION  
HIDRODINAMICA-TERMICA



# APENDICE E

## PROGRAMAS DE COMPUTADORA

### SIMBOLOGIA USADA EN LOS PROGRAMAS

<u>ANALISIS</u>	<u>FORTRAN</u>	
$A_i$	$A(I)$	
$B_i$	$B(I)$	
$C_i$	$C(I)$	
$D_i$	$D(I)$	
$N$	$N$	
$NU_z$	$NU$	
$R_i$	$R(I)$	
$S$	$S$	
$T_{i,j}$	$TA(I)$	
$T_{i,j+1}$	$TN(I)$	
$T_m$	$TM$	
$T_w$	$TW$	
$U_{i,j}$	$UA(I)$	
$U_{i,j+1}$	$UN(I)$	
$\Delta R$	$DR$	
$\Delta S$	$DS$	
	$IMP$	<i>control de impresión</i>
	$LNS$	<i>contador de líneas</i>
	$SMX$	<i>límite de cálculo</i>

APENDICE E

PROGRAMAS DE COMPUTADORA

PAGE 1

// JOB

LOG DRIVE CART SPEC CART AVAIL PHY DRIVE  
0000 0001 0001 0000

V2 M10 ACTUAL 8K CONFIG 8K

// FOR

\*LIST SOURCE PROGRAM

\*ONE WORD INTEGERS

\*EXTENDED PRECISION

C

-----  
C INTEGRACION APROXIMADA - METODO DE SIMPSON

C

C YN ARREGLO CONTENIENDO ORDENADAS DE PUNTOS (ENTRADA)

C

C NP NUMERO DE PUNTOS (IMPAR) (ENTRADA)

C

C DX DIFERENCIA ENTRE DOS ABSCISAS (ENTRADA)

C

C SM CONTIENE EL RESULTADO DE LA INTEGRACION (SALIDA)

C

-----  
SUBROUTINE SIMPS(YN, NP, DX, SM)

DIMENSION YN(1)

SP=0.

SI=0.

NS1=NP-1

NS2=NP-2

DO 100 I=2, NS1, 2

100 SP=SP+YN(I)

DO 200 I=3, NS2, 2

200 SI=SI+YN(I)

SM=DX/3. \*(YN(1)+4. \*SP+2. \*SI+YN(NP))

RETURN

END

FEATURES SUPPORTED

ONE WORD INTEGERS

EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR SIMPS

COMMON 0 VARIABLES 18 PROGRAM 136



BIBLIOTECA

```
// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*EXTENDED PRECISION
*LIST SOURCE PROGRAM
```

```
C-----
C   SOLUCION DE UN SISTEMA TRIDIAGONAL DE ECUACIONES LINEALES
C   METODO DE THOMAS
```

```
C
C   N  NUMERO DE ECUACIONES           (ENTRADA)
C   A,B,C  COEFICIENTES DE LA MATRIZ (ENTRADA)
C   D  VECTOR DE CONSTANTES          (ENTRADA)
C   X  VECTOR SOLUCION                (SALIDA )
C-----
```

```
SUBROUTINE THOMS(N,A,B,C,D,X)
DIMENSION A(1),B(1),C(1),D(1),X(1),G(21),W(21)
```

```
C---- CALCULO DE LOS ARREGLOS G Y W
```

```
W(1)=B(1)
G(1)=D(1)/W(1)
DO 100 I=2,N
W(I)=B(I)-A(I)*C(I-1)/W(I-1)
100 G(I)=(D(I)-A(I)*G(I-1))/W(I)
```

88

```
C---- CALCULO DEL VECTOR SOLUCION X
```

```
X(N)=G(N)
J=N-1
DO 200 K=1,J
I=N-K
200 X(I)=G(I)-C(I)*X(I+1)/W(I)
RETURN
END
```

```
FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION
```

```
CORE REQUIREMENTS FOR THOMS
COMMON      0  VARIABLES      132  PROGRAM      158
```

PAGE 1

// JOB

LOG DRIVE CART SPEC CART AVAIL PHY DRIVE  
0000 0001 0001 0000

V2 M10 ACTUAL 8K CONFIG 8K

// FOR

\*LIST SOURCE PROGRAM  
\*ONE WORD INTEGERS  
\*EXTENDED PRECISION  
\*IOCS(CARD,1132PRINTER)

C-----  
C SOLUCION HIDRODINAMICA - ESQUEMA IMPLICITO  
C-----

REAL L1,L2  
DIMENSION UN(21),UA(21),R(21),A(21),B(21),C(21),D(21)

C---- PARAMETROS

DATA DS/0.001/,N/21/,IMP/02/,SMX/.4/

C---- CONDICIONES INICIAL, DE FRONTERA Y CONSTANTES

U0=1.

UB=0.

TW=-50.

LNS=10

NS1=N-1

DR=1./NS1

L1=DS/DR\*\*2

L2=DS/DR/2.

WRITE(3,207)DR,DS

C---- CALCULO DE COEFICIENTES

DO 100 I=1,N

100 R(I)=(I-1)\*DR

WRITE(3,201)(R(I),I=1,N,2)

B(1)=-4.\*L1-1.

C(1)=4.\*L1

DO 101 I=2,NS1

A(I)=L1-L2/R(I)

B(I)=-2.\*L1-1.

```
101 C(I)=L1+L2/R(I)
C----- INICIALIZACION
DO 102 I=1,N
102 UA(I)=U0
J=0
S=0.
WRITE(3,202)S,(UA(I),I=1,N,2)
UA(N)=UB
C----- VARIACION A LO LARGO DEL DUCTO
107 J=J+1
C----- CALCULO DEL VECTOR COLUMNA D
302 DO 103 I=1,NS1
103 D(I)=-UA(I)+DS*TW
C----- SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES

CALL THOMS(NS1,A,B,C,D,UN)

C----- RECALCULAR TW
TW=(UN(N-2)-4.*UN(N-1)+3.*UB)/DR
C----- CHEQUEAR CONVERGENCIA
IF(ABS((TW-TWF)/TW)-0.001)301,300,300
300 TW=TWF
GO TO 302
301 CONTINUE
C----- REEMPLAZAR J+1'S EN J'S
DO 105 I=1,NS1
105 UA(I)=UN(I)
C----- CONTROL DE SALIDA DE RESULTADOS
IF(J/IMP*IMP-J)107,110,107
110 S=J*DS+0.0000001
C----- IMPRIMIR RESULTADOS
WRITE(3,202)S,(UA(I),I=1,N,2),TW
C----- CONTROL DE IMPRESION
LNS=LNS+1
IF(J-100)121,122,121
122 IMP=5
121 IF(LNS/38*38-LNS)123,124,123
124 WRITE(3,201)(R(I),I=1,N,2)
```

PAGE 3

```
123 IF(S-SMX)107,111,111
C---- SE HA COMPLETADO EL ANALISIS EN LA REGION
111 CALL EXIT
201 FORMAT(3X'S'5X'R '11(F4.2,2X)4X'TW'/)
202 FORMAT(F7.4,3X11F6.3,F8.2)
207 FORMAT(1H190(' ')/11X'SOLUCION HIDRODINAMICA'/11X
2071'DISTRIBUCION DE LA VELOCIDAD U EN LA RED'/21X'METODO DE DIFERENCI
2072AS FINITAS - ESQUEMA IMPLICITO'/11X'PARAMETROS'/13X
2073'DELTA RADIAL'F8.4/13X'DELTA AXIAL'F9.4/1X90(' ')/)
END
```

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS  
EXTENDED PRECISION  
IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR  
COMMON 0 VARIABLES 482 PROGRAM 652

END OF COMPILATION

// XEQ

PAGE 1

// JOB

LOG DRIVE CART SPEC CART AVAIL PHY DRIVE  
0000 0001 0001 0000

V2 M10 ACTUAL 8K CONFIG 8K

// FOR

\*LIST SOURCE PROGRAM  
\*ONE WORD INTEGERS  
\*EXTENDED PRECISION  
\*IOCS(CARD,1132PRINTER)

C-----  
C SOLUCION TERMICA CON FLUJO DESARROLLADO - ESQUEMA EXPLICITO  
C-----

REAL L1,L2,NU  
DIMENSION TN(21),TA(21),R(21),A(20),B(20),C(20)  
DIMENSION VI(21),YN(21)

C----- PARAMETROS  
DATA DS/.0001/,N/21/,IMP/100/,SMX/.28/  
C----- CONDICIONES INICIAL, DE FRONTERA Y CONSTANTES

TO=1.  
TB=0.  
NS1=N-1  
DR=1.0/NS1  
L1=DS/DR\*\*2  
L2=DS/(2.\*DR)  
WRITE(3,207)DR,DS

C----- CALCULO DE COEFICIENTES

DO 100 I=1,N  
R(I)=(I-1)\*DR  
100 VI(I)=2.\*(1.-R(I)\*\*2)  
WRITE(3,201)(R(I),I=1,N,2)  
B(1)=1.-4.\*L1  
C(1)=4.\*L1  
DO 101 I=2,NS1  
A(I)=(L1-L2/R(I))/(1.-R(I)\*\*2)  
B(I)=(1.-R(I)\*\*2-2.\*L1)/(1.-R(I)\*\*2)

92

```

101 C(I)=(L1+L2/R(I))/(1.-R(I)**2)
C----- INICIALIZACION
DO 102 I=1,NS1
102 TA(I)=TO
    TA(N)=TB
    J=0
    S=0.
    WRITE(3,202)S,(TA(I),I=1,N,2)
C----- VARIACION A LO LARGO DEL DUCTO
107 J=J+1
C----- CALCULO DE TEMPERATURA EN EL CENTRO
    TN(1)=B(1)*TA(1)+C(1)*TA(2)
C----- EN EL RESTO DE PUNTOS DE LA RED
DO 103 I=2,NS1
103 TN(I)=A(I)*TA(I-1)+B(I)*TA(I)+C(I)*TA(I+1)
C----- REEMPLAZAR J+1'S EN J'S
DO 104 I=1,NS1
104 TA(I)=TN(I)
C----- CONTROL DE SALIDA DE RESULTADOS
    IF(J/IMP*IMP-J)107,110,107
110 S=J*DS+0.0000001
C----- CALCULO DE LA TEMPERATURA TM
DO 113 I=1,N
113 YN(I)=TA(I)*VI(I)*R(I)

    CALL SIMPS(YN,N,DR,SM)

    TM=2.0*SM
C----- CALCULO DEL NUMERO DE NUSSELT
    DN=(TA(N-2)-4.*TA(N-1)+3.*TB)/(2.*DR)
    NU=-2.0*DN/TM
C----- TEMPERATURA ADIMENSIONAL PARA EL PERFIL
DO 115 I=1,N
115 YN(I)=(TA(I)-TB)/(TM-TB)
C----- IMPRIMIR RESULTADOS
    WRITE(3,202)S,(YN(I),I=1,N,2),TM,NU
    IF(S-SMX)107,111,111
C----- SE HA COMPLETADO EL ANALISIS EN LA REGION

```

```
111 CALL EXIT
201 FORMAT(3X'S'5X'R '11(F4.2,2X)3X'TM'5X'NU'/)
202 FORMAT(F7.4,3X11F6.3,1X2F7.3)
207 FORMAT(1H190(' ')/11X'SOLUCION TERMICA - FLUJO HIDRODINAMICO DESAR
2071ROLLADO'/11X'DISTRIBUCION (T-TB)/(TM-TB) EN LA RED'/21X
2072'METODO DE DIFERENCIAS FINITAS - ESQUEMA EXPLICITO'/11X
2072'PARAMETROS'/13X'DELTA RADIAL'F8.4/13X'DELTA AXIAL'
2073F9.4/1X90(' ')/)
END
```

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS  
EXTENDED PRECISION  
IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR  
COMMON 0 VARIABLES 546 PROGRAM 756

END OF COMPILATION

// XEQ

PAGE 1

// JOB

LOG DRIVE    CART SPEC    CART AVAIL    PHY DRIVE  
0000            0001            0001            0000

V2 M10    ACTUAL    8K    CONFIG    8K

// FOR

\*LIST SOURCE PROGRAM  
\*ONE WORD INTEGERS  
\*EXTENDED PRECISION  
\*IOCS(CARD,1132PRINTER)

C-----  
C        SOLUCION TERMICA CON FLUJO DESARROLLADO - ESQUEMA IMPLICITO  
C-----

REAL L1,L2,NU  
DIMENSION TN(21),TA(21),R(21),A(20),B(20),C(20),D(20)  
DIMENSION VI(21),YN(21)

C----- PARAMETROS

DATA DS/.0010/,N/21/,IMP/010/,SMX/.28/

C----- CONDICIONES INICIAL, DE FRONTERA Y CONSTANTES

T0=1.  
TB=0.  
NS1=N-1  
NS2=N-2

DR=1./NS1  
L1=DS/DR\*\*2  
L2=DS/(2.\*DR)

WRITE(3,207)DR,DS

C----- CALCULO DE COEFICIENTES

DO 100 I=1,N  
R(I)=(I-1)\*DR  
100 VI(I)=2.\*(1.-R(I)\*\*2)  
WRITE(3,201)(R(I),I=1,N,2)

B(1)=-4.\*L1-1.  
C(1)=4.\*L1  
DO 101 I=2,NS1  
A(I)=L1-L2/R(I)

95

```

      B(I)=R(I)**2-2.*L1-1.
101  C(I)=L1+L2/R(I)
C----- INICIALIZACION
      DO 102 I=1,NS1
102  TA(I)=TO
      TA(N)=TB
      J=0
      S=0.
      WRITE(3,202)S,(TA(I),I=1,N,2)
C----- VARIACION A LO LARGO DEL DUCTO
107  J=J+1
C----- CALCULO DEL VECTOR COLUMNA D
      D(1)=-TA(1)
      DO 103 I=2,NS1
103  D(I)=TA(I)*(R(I)**2-1.)
      D(N-1)=D(N-1)-C(N-1)*TA(N)
C----- SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES

      CALL THOMS(NS1,A,B,C,D,TN)

C----- REEMPLAZAR J+1'S EN J'S
      DO 109 I=1,NS1
109  TA(I)=TN(I)
C----- CONTROL DE SALIDA DE RESULTADOS
      IF(J/IMP*IMP-J)107,110,107
110  S=J*DS+0.0000001
C----- CALCULO DE LA TEMPERATURA TM
      DO 113 I=1,N
113  YN(I)=TA(I)*VI(I)*R(I)

      CALL SIMPS(YN,N,DR,SM)

      TM=2.0*SM
C----- CALCULO DEL NUMERO DE NUSSELT
      DN=(TA(N-2)-4.*TA(N-1)+3.*TB)/(2.*DR)
      NU=-2.0*DN/TM
C----- TEMPERATURA ADIMENSIONAL PARA EL PERFIL
      DO 115 I=1,N

```

```

115 YN(I)=(TA(I)-TB)/(TM-TB)
C----- IMPRIMIR RESULTADOS
WRITE(3,202)S,(YN(I),I=1,N,2),TM,NU
IF(S-SMX)107,111,111
C----- SE HA COMPLETADO EL ANALISIS EN LA REGION
111 CALL EXIT
201 FORMAT(3X,'S',5X'R',11(F4,2,2X)3X'TM',5X'NU'//)
202 FORMAT(F7,4,3X'1F6,3,1X2F7,3)
207 FORMAT(1H190(' '),11X'SOLUCION TERMICA - FLUJO HIDRODINAMICO DESAR
2071'ROLLADO'/11X'DISTRIBUCION (T-TB)/(TM-TB) EN LA RED'/21X
2072'METODO DE DIFERENCIAS FINITAS - ESQUEMA IMPLICITO'/11X
2072'PARAMETROS'/13X'DELTA RADIAL'F8,4/13X'DELTA AXIAL'
2073F9,4/1X90(' '))
END

```

```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
EXTENDED PRECISION
IOCS

```

```

CORE REQUIREMENTS FOR
COMMON 0 VARIABLES 606 PROGRAM 718

```

```

END OF COMPILATION

```

```

// XEG

```

PAGE 1

// JOB

LOG DRIVE    CART SPEC    CART AVAIL    PHY DRIVE  
0000            0001            0001            0000

V2 M10    ACTUAL    8K    CONFIG    8K

// FOR

\*LIST SOURCE PROGRAM  
\*ONE WORD INTEGERS  
\*EXTENDED PRECISION  
\*IOCS(CARD,1132PRINTER)

C-----  
C        SOLUCION HIDRODINAMICA TERMICA - ESQUEMA IMPLICITO  
C-----

REAL L1,L2,L3,NU  
DIMENSION UN(21),UA(21),R(21),A(21),B(21),C(21),D(21)  
DIMENSION TN(21),TA(21),YN(21),AT(21),BT(21),CT(21),DT(21)

C---- PARAMETROS

DATA DS/0.001/,N/21/,IMP/02/,SMX/,4/,PR/.7/

C---- CONDICIONES INICIAL, DE FRONTERA Y CONSTANTES

U0=1.  
UB=0.  
T0=1.  
TB=0.  
TW=-50.  
LNS=11

NS1=N-1  
DR=1./NS1  
L1=DS/DR\*\*2  
L2=DS/DR/2.  
L3=2.\*L1/PR

WRITE(3,207)DR,DS,PR

C---- CALCULO DE COEFICIENTES

DO 100 I=1,N

100 R(I)=(I-1)\*DR

WRITE(3,201)(R(I),I=1,N,2)

DO 101 I=2,NS1

```

A(I)=L1-L2/R(I)
B(I)=-2.*L1-1.
C(I)=L1+L2/R(I)
AT(I)=A(I)/PR
101 CT(I)=C(I)/PR
B(1)=-4.*L1-1.
C(1)=4.*L1
CT(1)=C(1)/PR
C----- INICIALIZACION
DO 102 I=1,N
UA(I)=UO
102 TA(I)=T0
J=0
S=0.
WRITE(3,202)S,(TA(I),I=1,N,2)
UA(N)=UB
TA(N)=TB
C----- VARIACION A LO LARGO DEL DUCTO
107 J=J+1
C----- CALCULO DEL VECTOR COLUMNA D
302 DO 103 I=1,NS1
103 D(I)=-UA(I)+DS*TW
C----- SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES PARA LA VELOCIDAD

CALL THOMS(NS1,A,B,C,D,UN)

C----- RECALCULAR TW
TW=(UN(N-2)-4.*UN(N-1)+3.*UB)/DR
C----- CHEQUEAR CONVERGENCIA
IF(ABS((TW-TWF)/TW)-0.001)301,300,300
300 TW=TWF
GO TO 302
301 CONTINUE
C----- CALCULO DEL VECTOR COLUMNA DT
DO 104 I=2,NS1
BT(I)=-L3-UA(I)
104 DT(I)=-UA(I)*TA(I)
BT(1)=-2.*L3-UA(1)

```

DT(1)=-UA(1)\*TA(1)  
 C----- SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES PARA LA TEMPERATURA

CALL THOMS(NS1,AT,BT,CT,DT,TN)

C----- REEMPLAZAR J+1'S EN J'S

DO 105 I=1,NS1

UA(I)=UN(I)

105 TA(I)=TN(I)

C----- CONTROL DE SALIDA DE RESULTADOS

IF(J/IMP\*IMP-J)107,110,107

110 S=J\*DS+0.0000001

C----- CALCULO DE LA TEMPERATURA TM

DO 113 I=1,N

113 YN(I)=TA(I)\*UA(I)\*R(I)

CALL SIMPS(YN,N,DR,SM)

TM=2.\*SM

C----- CALCULO DEL NUMERO DE NUSSELT

DN=(TA(N-2)-4.\*TA(N-1)+3.\*TB)/(2.\*DR)

NU=-2.\*DN/TM

C----- TEMPERATURA ADIMENSIONAL PARA EL PERFIL

DO 115 I=1,N

115 YN(I)=(TA(I)-TB)/(TM-TB)

C----- IMPRIMIR RESULTADOS

WRITE(3,202)S,(YN(I),I=1,N,2),TM,NU

C----- CONTROL DE IMPRESION

LNS=LNS+1

IF(J-100)121,122,121

122 IMP=5

121 IF(LNS/38\*38-LNS)123,124,123

124 WRITE(3,201)(R(I),I=1,N,2)

123 IF(S-SMX)107,111,111

C----- SE HA COMPLETADO EL ANALISIS EN LA REGION

111 CALL EXIT

201 FORMAT(3X'S'5X'R'11(F4.2,2X)3X'TM'5X'NU'//)

202 FORMAT(F7.4,3X11F6.3,1X2F7.3)

PAGE 4

```
207 FORMAT(1H190(' ')/11X'SOLUCION HIDRODINAMICA - TERMICA'/11X  
2071DISTRIBUCION (T-TB)/(TM/TB) EN LA RED'/21X'METODO DE DIFERENCIAS  
2072 FINITAS - ESQUEMA IMPLICITO'/11X'PARAMETROS'/13X'DELTA RADIAL'  
2073F8.4/13X'DELTA AXIAL'F9.4/13X'PRANDTL'F13.4/1X90(' ')/  
END
```

FEATURES SUPPORTED  
ONE WORD INTEGERS  
EXTENDED PRECISION  
IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR  
COMMON 0 VARIABLES 950 PROGRAM 908

END OF COMPILATION

// XEQ

101

A P E N D I C E F .

T A B L A S D E R E S U L T A D O S D E L C O M P U T A D O R

-----  
 SOLUCION HIDRODINAMICA  
 DISTRIBUCION DE LA VELOCIDAD U EN LA RED  
 METODO DE DIFERENCIAS FINITAS - ESQUEMA IMPLICITO  
 -----

PARAMETROS

DELTA RADIAL 0.0500  
 DELTA AXIAL 0.0010  
 -----

S	R	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	TW
0.0000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	
0.0020	1.077	1.077	1.077	1.077	1.077	1.077	1.077	1.077	1.077	1.055	0.940	0.000	-34.23
0.0040	1.130	1.130	1.130	1.130	1.130	1.130	1.130	1.130	1.125	1.085	0.846	0.000	-24.46
0.0060	1.172	1.172	1.172	1.172	1.172	1.172	1.172	1.170	1.156	1.080	0.768	0.000	-19.86
0.0080	1.208	1.208	1.208	1.208	1.208	1.207	1.207	1.202	1.175	1.063	0.709	0.000	-17.27
0.0100	1.240	1.240	1.240	1.240	1.239	1.237	1.228	1.186	1.041	0.664	0.000	0.000	-15.61
0.0120	1.269	1.269	1.269	1.269	1.268	1.265	1.249	1.191	1.019	0.629	0.000	0.000	-14.45
0.0140	1.297	1.297	1.297	1.296	1.295	1.289	1.266	1.192	0.997	0.600	0.000	0.000	-13.58
0.0160	1.323	1.323	1.323	1.322	1.320	1.311	1.279	1.190	0.977	0.577	0.000	0.000	-12.91
0.0180	1.348	1.348	1.347	1.346	1.343	1.330	1.290	1.186	0.958	0.557	0.000	0.000	-12.37
0.0200	1.372	1.372	1.371	1.370	1.364	1.347	1.298	1.180	0.941	0.541	0.000	0.000	-11.92
0.0220	1.395	1.395	1.394	1.392	1.384	1.362	1.304	1.174	0.925	0.526	0.000	0.000	-11.54
0.0240	1.417	1.417	1.416	1.413	1.403	1.376	1.309	1.168	0.910	0.514	0.000	0.000	-11.22
0.0260	1.439	1.439	1.437	1.433	1.420	1.388	1.312	1.161	0.897	0.503	0.000	0.000	-10.94
0.0280	1.460	1.460	1.458	1.452	1.436	1.398	1.315	1.154	0.885	0.493	0.000	0.000	-10.69
0.0300	1.481	1.480	1.478	1.470	1.451	1.407	1.316	1.148	0.874	0.485	0.000	0.000	-10.48
0.0320	1.501	1.500	1.497	1.487	1.465	1.416	1.317	1.141	0.864	0.477	0.000	0.000	-10.29
0.0340	1.521	1.519	1.515	1.504	1.478	1.423	1.317	1.135	0.855	0.470	0.000	0.000	-10.12
0.0360	1.540	1.538	1.533	1.520	1.490	1.429	1.317	1.129	0.846	0.464	0.000	0.000	-9.96
0.0380	1.558	1.556	1.550	1.534	1.501	1.435	1.317	1.123	0.838	0.458	0.000	0.000	-9.82
0.0400	1.576	1.574	1.566	1.548	1.511	1.440	1.316	1.118	0.831	0.453	0.000	0.000	-9.70
0.0420	1.593	1.591	1.582	1.562	1.521	1.445	1.315	1.113	0.824	0.448	0.000	0.000	-9.58
0.0440	1.610	1.607	1.597	1.574	1.530	1.449	1.314	1.107	0.817	0.443	0.000	0.000	-9.48
0.0460	1.627	1.623	1.612	1.586	1.538	1.453	1.313	1.103	0.811	0.439	0.000	0.000	-9.38
0.0480	1.642	1.639	1.626	1.598	1.546	1.456	1.312	1.098	0.806	0.436	0.000	0.000	-9.29
0.0500	1.658	1.653	1.639	1.609	1.553	1.459	1.310	1.094	0.801	0.432	0.000	0.000	-9.21
0.0520	1.672	1.668	1.652	1.619	1.560	1.461	1.309	1.090	0.796	0.429	0.000	0.000	-9.13
0.0540	1.686	1.681	1.664	1.629	1.566	1.464	1.308	1.086	0.791	0.426	0.000	0.000	-9.06
0.0560	1.700	1.694	1.676	1.638	1.572	1.466	1.306	1.082	0.787	0.423	0.000	0.000	-9.00

S	R	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	TW
0.0580	1.713	1.707	1.687	1.646	1.577	1.468	1.305	1.079	0.783	0.420	0.000		-8.94
0.0600	1.726	1.719	1.697	1.655	1.582	1.469	1.304	1.075	0.779	0.418	0.000		-8.88
0.0620	1.738	1.731	1.707	1.662	1.587	1.471	1.302	1.072	0.776	0.416	0.000		-8.83
0.0640	1.750	1.742	1.717	1.670	1.592	1.472	1.301	1.069	0.773	0.414	0.000		-8.78
0.0660	1.761	1.753	1.726	1.677	1.596	1.474	1.300	1.066	0.770	0.412	0.000		-8.73
0.0680	1.771	1.763	1.735	1.684	1.600	1.475	1.298	1.064	0.767	0.410	0.000		-8.69
0.0700	1.782	1.773	1.744	1.690	1.604	1.476	1.297	1.061	0.764	0.408	0.000		-8.65
0.0720	1.791	1.782	1.752	1.696	1.607	1.477	1.296	1.059	0.761	0.406	0.000		-8.61
0.0740	1.801	1.791	1.759	1.702	1.611	1.478	1.295	1.056	0.759	0.405	0.000		-8.57
0.0760	1.810	1.799	1.767	1.707	1.614	1.479	1.294	1.054	0.757	0.403	0.000		-8.54
0.0780	1.818	1.808	1.774	1.712	1.617	1.479	1.293	1.052	0.754	0.402	0.000		-8.51
0.0800	1.826	1.815	1.780	1.717	1.619	1.480	1.292	1.050	0.752	0.401	0.000		-8.48
0.0820	1.834	1.823	1.786	1.722	1.622	1.481	1.291	1.048	0.750	0.399	0.000		-8.45
0.0840	1.842	1.830	1.792	1.726	1.624	1.481	1.290	1.046	0.749	0.398	0.000		-8.42
0.0860	1.849	1.836	1.798	1.730	1.627	1.482	1.289	1.045	0.747	0.397	0.000		-8.40
0.0880	1.856	1.843	1.804	1.734	1.629	1.482	1.288	1.043	0.745	0.396	0.000		-8.37
0.0900	1.862	1.849	1.809	1.738	1.631	1.483	1.287	1.042	0.744	0.395	0.000		-8.35
0.0920	1.868	1.855	1.814	1.741	1.633	1.483	1.287	1.040	0.742	0.394	0.000		-8.33
0.0940	1.874	1.860	1.818	1.745	1.635	1.484	1.286	1.039	0.741	0.393	0.000		-8.31
0.0960	1.880	1.866	1.823	1.748	1.637	1.484	1.285	1.037	0.739	0.392	0.000		-8.29
0.0980	1.885	1.871	1.827	1.751	1.638	1.484	1.285	1.036	0.738	0.392	0.000		-8.27
0.1000	1.890	1.875	1.831	1.754	1.640	1.485	1.284	1.035	0.737	0.391	0.000		-8.26
0.1050	1.901	1.886	1.840	1.760	1.643	1.485	1.282	1.032	0.734	0.389	0.000		-8.23
0.1100	1.912	1.896	1.848	1.766	1.647	1.486	1.281	1.030	0.732	0.388	0.000		-8.18
0.1150	1.921	1.905	1.855	1.771	1.649	1.487	1.280	1.028	0.730	0.386	0.000		-8.16
0.1200	1.929	1.912	1.862	1.776	1.652	1.487	1.279	1.026	0.728	0.385	0.000		-8.13
0.1250	1.936	1.919	1.867	1.780	1.654	1.487	1.278	1.025	0.726	0.384	0.000		-8.11
0.1300	1.942	1.925	1.872	1.783	1.656	1.488	1.277	1.023	0.725	0.383	0.000		-8.09
0.1350	1.947	1.930	1.876	1.786	1.657	1.488	1.277	1.022	0.724	0.383	0.000		-8.07
0.1400	1.952	1.934	1.880	1.789	1.659	1.488	1.276	1.021	0.723	0.382	0.000		-8.06
0.1450	1.956	1.938	1.883	1.791	1.660	1.489	1.276	1.020	0.722	0.381	0.000		-8.04
0.1500	1.960	1.942	1.886	1.793	1.661	1.489	1.275	1.019	0.721	0.381	0.000		-8.03
0.1550	1.963	1.945	1.889	1.795	1.662	1.489	1.275	1.019	0.720	0.380	0.000		-8.03
0.1600	1.966	1.948	1.891	1.797	1.663	1.489	1.274	1.018	0.720	0.380	0.000		-8.02
0.1650	1.969	1.950	1.893	1.798	1.664	1.489	1.274	1.017	0.719	0.380	0.000		-8.01
0.1700	1.971	1.952	1.895	1.799	1.664	1.489	1.274	1.017	0.719	0.379	0.000		-8.00
0.1750	1.973	1.954	1.897	1.801	1.665	1.490	1.274	1.016	0.718	0.379	0.000		-8.00
0.1800	1.975	1.956	1.898	1.801	1.666	1.490	1.273	1.016	0.718	0.379	0.000		-7.99



S	R	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	TW
0.3750	1.989	1.969	1.909	1.810	1.671	1.492	1.273	1.014	0.716	0.378	0.000		-7.96
0.3800	1.989	1.969	1.909	1.810	1.671	1.492	1.273	1.014	0.716	0.378	0.000		-7.96
0.3850	1.989	1.969	1.909	1.810	1.671	1.492	1.273	1.014	0.716	0.378	0.000		-7.96
0.3900	1.989	1.969	1.909	1.810	1.671	1.492	1.273	1.014	0.716	0.378	0.000		-7.96
0.3950	1.989	1.969	1.909	1.810	1.671	1.492	1.273	1.014	0.716	0.378	0.000		-7.96
0.4000	1.989	1.969	1.909	1.810	1.671	1.492	1.273	1.014	0.716	0.378	0.000		-7.96

-----  
 SOLUCION TERMICA - FLUJO HIDRODINAMICO DESARROLLADO  
 DISTRIBUCION  $(T-T_B)/(T_M-T_B)$  EN LA RED  
 METODO DE DIFERENCIAS FINITAS - ESQUEMA EXPLICITO  
 -----

PARAMETROS

DELTA RADIAL 0.0500  
 DELTA AXIAL 0.0001  
 -----

S	R	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	TM	NU
0.0000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000		
0.0100	1.195	1.195	1.195	1.195	1.190	1.165	1.086	0.910	0.635	0.313	0.000		0.836	6.005
0.0200	1.330	1.329	1.325	1.310	1.269	1.180	1.023	0.799	0.532	0.257	0.000		0.751	4.913
0.0300	1.449	1.444	1.426	1.383	1.301	1.166	0.975	0.740	0.485	0.233	0.000		0.684	4.436
0.0400	1.547	1.536	1.500	1.429	1.314	1.151	0.942	0.705	0.457	0.219	0.000		0.628	4.167
0.0500	1.622	1.605	1.553	1.459	1.321	1.138	0.920	0.681	0.440	0.210	0.000		0.578	3.999
0.0600	1.676	1.655	1.590	1.480	1.324	1.129	0.905	0.666	0.428	0.204	0.000		0.535	3.888
0.0700	1.714	1.690	1.616	1.493	1.326	1.122	0.894	0.655	0.421	0.200	0.000		0.493	3.813
0.0800	1.742	1.714	1.634	1.503	1.328	1.118	0.887	0.648	0.415	0.198	0.000		0.459	3.762
0.0900	1.760	1.731	1.646	1.509	1.328	1.115	0.882	0.643	0.412	0.196	0.000		0.426	3.727
0.1000	1.773	1.743	1.655	1.514	1.329	1.112	0.878	0.640	0.409	0.195	0.000		0.395	3.703
0.1100	1.782	1.752	1.661	1.517	1.329	1.111	0.876	0.637	0.407	0.194	0.000		0.367	3.686
0.1200	1.789	1.757	1.665	1.519	1.330	1.110	0.874	0.636	0.406	0.193	0.000		0.341	3.674
0.1300	1.793	1.761	1.668	1.521	1.330	1.109	0.873	0.635	0.405	0.193	0.000		0.317	3.666
0.1400	1.796	1.764	1.670	1.522	1.330	1.108	0.872	0.634	0.405	0.192	0.000		0.294	3.661
0.1500	1.798	1.766	1.671	1.522	1.330	1.108	0.871	0.633	0.404	0.192	0.000		0.273	3.657
0.1600	1.800	1.767	1.672	1.523	1.330	1.108	0.871	0.633	0.404	0.192	0.000		0.254	3.655
0.1700	1.801	1.768	1.673	1.523	1.330	1.108	0.871	0.633	0.404	0.192	0.000		0.236	3.653
0.1800	1.801	1.769	1.673	1.523	1.330	1.108	0.871	0.632	0.404	0.192	0.000		0.219	3.651
0.1900	1.802	1.769	1.674	1.524	1.330	1.108	0.870	0.632	0.404	0.192	0.000		0.204	3.651
0.2000	1.802	1.769	1.674	1.524	1.330	1.107	0.870	0.632	0.404	0.192	0.000		0.189	3.650
0.2100	1.802	1.770	1.674	1.524	1.330	1.107	0.870	0.632	0.404	0.192	0.000		0.176	3.650
0.2200	1.802	1.770	1.674	1.524	1.330	1.107	0.870	0.632	0.404	0.192	0.000		0.164	3.649
0.2300	1.803	1.770	1.674	1.524	1.330	1.107	0.870	0.632	0.404	0.192	0.000		0.152	3.649
0.2400	1.803	1.770	1.674	1.524	1.330	1.107	0.870	0.632	0.404	0.192	0.000		0.141	3.649
0.2500	1.803	1.770	1.674	1.524	1.330	1.107	0.870	0.632	0.404	0.192	0.000		0.131	3.649
0.2600	1.803	1.770	1.674	1.524	1.330	1.107	0.870	0.632	0.404	0.192	0.000		0.122	3.649
0.2700	1.803	1.770	1.674	1.524	1.330	1.107	0.870	0.632	0.404	0.192	0.000		0.113	3.649
0.2800	1.803	1.770	1.674	1.524	1.330	1.107	0.870	0.632	0.404	0.192	0.000		0.105	3.649

SOLUCION TERMICA - FLUJO HIDRODINAMICO DESARROLLADO  
 DISTRIBUCION (T-TB)/(TM-TB) EN LA RED  
 METODO DE DIFERENCIAS FINITAS - ESQUEMA EXPLICITO

PARAMETROS

DELTA RADIAL 0.0500  
 DELTA AXIAL 0.00025

S	R	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	TM	NU
0.00000		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000	
0.00025		1.026	1.026	1.026	1.026	1.026	1.026	1.026	1.026	1.026	1.026	1.026	0.973	-24.856
0.00050		1.011	1.011	1.011	1.011	1.011	1.011	1.011	1.011	1.011	1.011	1.011	0.988	76.598
0.00075		1.056	1.056	1.056	1.056	1.056	1.056	1.056	1.056	1.056	1.056	1.056	0.946	-79.678
0.00100		1.008	1.008	1.008	1.008	1.008	1.008	1.008	1.008	1.008	1.008	1.008	0.991	143.288
0.00125		1.098	1.098	1.098	1.098	1.098	1.098	1.098	1.098	1.098	1.098	1.098	0.910	*****
0.00150		0.985	0.985	0.985	0.985	0.985	0.985	0.985	0.985	0.985	0.985	0.985	1.014	285.712
0.00175		1.177	1.177	1.177	1.177	1.177	1.177	1.177	1.177	1.177	1.177	1.177	0.849	*****
0.00200		0.926	0.926	0.926	0.926	0.926	0.926	0.926	0.926	0.926	0.926	0.926	1.079	565.308
0.00225		1.369	1.369	1.369	1.369	1.369	1.369	1.369	1.369	1.369	1.369	1.369	0.729	*****
0.00250		0.812	0.812	0.812	0.812	0.812	0.812	0.812	0.812	0.812	0.812	0.812	1.231	*****
0.00275		2.060	2.060	2.060	2.060	2.060	2.060	2.060	2.060	2.060	2.060	2.060	0.485	*****
0.00300		0.637	0.637	0.637	0.637	0.637	0.637	0.637	0.637	0.637	0.637	0.637	1.568	*****
0.00325		*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	-0.030	*****
0.00350		0.433	0.433	0.433	0.433	0.433	0.433	0.433	0.405	0.092	*****	0.000	2.304	*****
0.00375		-0.886	-0.886	-0.886	-0.886	-0.886	-0.886	-0.886	-0.845	-1.871	*****	0.000	-1.128	*****
0.00400		0.256	0.256	0.256	0.256	0.256	0.256	0.254	0.232	0.333	*****	0.000	3.896	*****
0.00425		-0.287	-0.287	-0.287	-0.287	-0.287	-0.287	-0.284	-0.274	-1.054	*****	0.000	-3.480	*****
0.00450		0.136	0.136	0.136	0.136	0.136	0.136	0.134	0.117	-0.497	*****	0.000	7.328	*****
0.00475		-0.117	-0.117	-0.117	-0.117	-0.117	-0.117	-0.115	-0.114	-0.826	*****	0.000	-8.529	*****
0.00500		0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.066	0.053	-0.588	*****	0.000	14.715	*****

Demostración de la inestabilidad de los esquemas explícitos cuando no se cumple con la condición de estabilidad. Se puede observar que la divergencia tiene carácter oscilante y comienza desde la región cercana a la pared, en donde la restricción para  $\Delta S$  es mayor.

SOLUCION TERMICA - FLUJO HIDRODINAMICO-DESARROLLADO  
 DISTRIBUCION (T-TB)/(TM-TB) EN LA RED  
 METODO DE DIFERENCIAS FINITAS - ESQUEMA IMPLICITO

PARAMETROS

DELTA RADIAL 0.0500  
 DELTA AXIAL 0.0001

S	R	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	TM	NU
0.0000		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.836	6.036
0.0100		1.195	1.195	1.195	1.194	1.188	1.164	1.085	0.911	0.638	0.315	0.000	0.751	4.926
0.0200		1.329	1.328	1.323	1.308	1.268	1.179	1.024	0.800	0.534	0.258	0.000	0.684	4.444
0.0300		1.448	1.443	1.424	1.382	1.300	1.166	0.976	0.741	0.486	0.233	0.000	0.628	4.172
0.0400		1.546	1.535	1.499	1.428	1.314	1.151	0.943	0.705	0.458	0.219	0.000	0.579	4.003
0.0500		1.620	1.604	1.551	1.459	1.321	1.138	0.920	0.682	0.440	0.210	0.000	0.536	3.905
0.0600		1.668	1.648	1.585	1.477	1.324	1.130	0.907	0.668	0.430	0.205	0.000	0.496	3.826
0.0700		1.708	1.684	1.611	1.491	1.326	1.123	0.896	0.657	0.422	0.201	0.000	0.460	3.772
0.0800		1.736	1.710	1.630	1.501	1.327	1.119	0.888	0.650	0.416	0.198	0.000	0.427	3.735
0.0900		1.756	1.728	1.644	1.508	1.328	1.115	0.883	0.644	0.412	0.196	0.000	0.396	3.709
0.1000		1.770	1.741	1.653	1.513	1.329	1.113	0.879	0.641	0.410	0.195	0.000	0.368	3.690
0.1100		1.780	1.749	1.659	1.516	1.329	1.111	0.876	0.638	0.408	0.194	0.000	0.342	3.678
0.1200		1.787	1.756	1.664	1.518	1.329	1.110	0.874	0.636	0.407	0.193	0.000	0.318	3.669
0.1300		1.792	1.760	1.667	1.520	1.330	1.109	0.873	0.635	0.406	0.193	0.000	0.295	3.663
0.1400		1.795	1.763	1.669	1.521	1.330	1.109	0.872	0.634	0.405	0.192	0.000	0.275	3.659
0.1500		1.797	1.765	1.671	1.522	1.330	1.108	0.872	0.633	0.405	0.192	0.000	0.255	3.656
0.1600		1.799	1.767	1.672	1.523	1.330	1.108	0.871	0.633	0.404	0.192	0.000	0.237	3.653
0.1700		1.800	1.768	1.673	1.523	1.330	1.108	0.871	0.633	0.404	0.192	0.000	0.221	3.652
0.1800		1.801	1.768	1.673	1.523	1.330	1.108	0.871	0.632	0.404	0.192	0.000	0.205	3.651
0.1900		1.801	1.769	1.674	1.523	1.330	1.108	0.870	0.632	0.404	0.192	0.000	0.191	3.650
0.2000		1.802	1.769	1.674	1.524	1.330	1.107	0.870	0.632	0.404	0.192	0.000	0.177	3.650
0.2100		1.802	1.769	1.674	1.524	1.330	1.107	0.870	0.632	0.404	0.192	0.000	0.165	3.649
0.2200		1.802	1.770	1.674	1.524	1.330	1.107	0.870	0.632	0.404	0.192	0.000	0.153	3.649
0.2300		1.802	1.770	1.674	1.524	1.330	1.107	0.870	0.632	0.404	0.192	0.000	0.142	3.649
0.2400		1.803	1.770	1.674	1.524	1.330	1.107	0.870	0.632	0.404	0.192	0.000	0.132	3.649
0.2500		1.803	1.770	1.674	1.524	1.330	1.107	0.870	0.632	0.404	0.192	0.000	0.123	3.649
0.2600		1.803	1.770	1.674	1.524	1.330	1.107	0.870	0.632	0.404	0.192	0.000	0.114	3.649
0.2700		1.803	1.770	1.674	1.524	1.330	1.107	0.870	0.632	0.404	0.192	0.000	0.106	3.649
0.2800		1.803	1.770	1.674	1.524	1.330	1.107	0.870	0.632	0.404	0.192	0.000		

SOLUCION HIDRODINAMICA - TERMICA  
 DISTRIBUCION (T-TB)/(TM-TB) EN LA RED  
 METODO DE DIFERENCIAS FINITAS - ESQUEMA IMPLICITO

PARAMETROS

DELTA RADIAL 0.0500  
 DELTA AXIAL 0.0010  
 PRANDTL 0.7000

S	R	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	TM	NU
0.0000		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000		
0.0020		1.094	1.094	1.094	1.094	1.094	1.094	1.094	1.091	1.067	0.885	0.000	0.913	27.885
0.0040		1.125	1.125	1.125	1.125	1.125	1.124	1.122	1.109	1.035	0.716	0.000	0.888	16.634
0.0060		1.149	1.149	1.149	1.149	1.149	1.147	1.141	1.110	0.983	0.604	0.000	0.870	12.638
0.0080		1.171	1.171	1.171	1.171	1.170	1.167	1.154	1.101	0.927	0.530	0.000	0.853	10.678
0.0100		1.192	1.192	1.192	1.191	1.190	1.185	1.162	1.085	0.876	0.479	0.000	0.838	9.472
0.0120		1.212	1.212	1.212	1.211	1.209	1.199	1.165	1.065	0.831	0.441	0.000	0.824	8.633
0.0140		1.231	1.231	1.231	1.230	1.225	1.211	1.165	1.044	0.792	0.411	0.000	0.811	8.007
0.0160		1.250	1.250	1.249	1.247	1.241	1.220	1.161	1.022	0.758	0.388	0.000	0.799	7.517
0.0180		1.268	1.268	1.267	1.264	1.255	1.227	1.156	1.000	0.729	0.369	0.000	0.788	7.121
0.0200		1.286	1.286	1.284	1.280	1.267	1.232	1.149	0.979	0.703	0.353	0.000	0.777	6.793
0.0220		1.303	1.303	1.301	1.295	1.278	1.236	1.141	0.960	0.680	0.339	0.000	0.766	6.515
0.0240		1.321	1.320	1.317	1.309	1.288	1.238	1.132	0.941	0.660	0.327	0.000	0.756	6.276
0.0260		1.337	1.337	1.333	1.323	1.297	1.239	1.123	0.924	0.642	0.316	0.000	0.746	6.069
0.0280		1.354	1.353	1.348	1.335	1.305	1.239	1.113	0.907	0.625	0.307	0.000	0.736	5.887
0.0300		1.370	1.369	1.363	1.347	1.312	1.239	1.104	0.892	0.610	0.299	0.000	0.727	5.725
0.0320		1.386	1.384	1.377	1.358	1.318	1.237	1.095	0.877	0.597	0.292	0.000	0.718	5.581
0.0340		1.402	1.399	1.390	1.369	1.323	1.235	1.085	0.864	0.585	0.285	0.000	0.709	5.451
0.0360		1.417	1.414	1.403	1.379	1.328	1.233	1.076	0.851	0.574	0.279	0.000	0.701	5.333
0.0380		1.432	1.428	1.415	1.388	1.332	1.230	1.068	0.840	0.564	0.273	0.000	0.692	5.227
0.0400		1.446	1.442	1.428	1.396	1.335	1.227	1.059	0.829	0.554	0.268	0.000	0.684	5.129
0.0420		1.460	1.456	1.439	1.404	1.338	1.224	1.051	0.818	0.546	0.264	0.000	0.676	5.040
0.0440		1.474	1.469	1.450	1.412	1.340	1.221	1.043	0.809	0.537	0.260	0.000	0.668	4.958
0.0460		1.487	1.481	1.461	1.419	1.342	1.218	1.036	0.800	0.530	0.256	0.000	0.660	4.882
0.0480		1.500	1.493	1.471	1.425	1.344	1.214	1.028	0.791	0.523	0.252	0.000	0.653	4.812
0.0500		1.512	1.505	1.481	1.431	1.346	1.211	1.021	0.783	0.517	0.249	0.000	0.645	4.747
0.0520		1.525	1.517	1.490	1.437	1.347	1.208	1.015	0.776	0.511	0.246	0.000	0.638	4.687
0.0540		1.536	1.527	1.499	1.442	1.348	1.204	1.008	0.768	0.505	0.243	0.000	0.631	4.631

S	R	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	TM	NU
0.0560	1.547	1.538	1.507	1.447	1.349	1.201	1.002	0.762	0.500	0.240	0.000	0.000	0.624	4.578
0.0580	1.558	1.548	1.515	1.452	1.349	1.198	0.996	0.755	0.495	0.238	0.000	0.000	0.617	4.529
0.0600	1.569	1.558	1.523	1.457	1.350	1.195	0.991	0.749	0.490	0.235	0.000	0.000	0.610	4.484
0.0620	1.579	1.567	1.530	1.461	1.350	1.191	0.986	0.744	0.486	0.233	0.000	0.000	0.603	4.441
0.0640	1.589	1.576	1.537	1.465	1.350	1.188	0.981	0.738	0.482	0.231	0.000	0.000	0.596	4.400
0.0660	1.598	1.585	1.544	1.468	1.350	1.185	0.976	0.733	0.478	0.229	0.000	0.000	0.590	4.362
0.0680	1.607	1.593	1.550	1.472	1.350	1.183	0.971	0.729	0.474	0.227	0.000	0.000	0.583	4.327
0.0700	1.616	1.601	1.556	1.475	1.350	1.180	0.967	0.724	0.471	0.225	0.000	0.000	0.577	4.293
0.0720	1.624	1.609	1.562	1.478	1.350	1.177	0.962	0.720	0.467	0.224	0.000	0.000	0.571	4.262
0.0740	1.632	1.617	1.568	1.481	1.350	1.174	0.958	0.716	0.464	0.222	0.000	0.000	0.564	4.232
0.0760	1.640	1.624	1.573	1.483	1.350	1.172	0.955	0.712	0.461	0.221	0.000	0.000	0.558	4.204
0.0780	1.647	1.630	1.578	1.486	1.350	1.169	0.951	0.708	0.459	0.219	0.000	0.000	0.552	4.177
0.0800	1.654	1.637	1.583	1.488	1.350	1.167	0.947	0.705	0.456	0.218	0.000	0.000	0.546	4.152
0.0820	1.661	1.643	1.587	1.490	1.349	1.165	0.944	0.701	0.454	0.217	0.000	0.000	0.540	4.128
0.0840	1.668	1.649	1.592	1.493	1.349	1.163	0.941	0.698	0.451	0.216	0.000	0.000	0.535	4.106
0.0860	1.674	1.655	1.596	1.495	1.349	1.160	0.938	0.695	0.449	0.214	0.000	0.000	0.529	4.084
0.0880	1.680	1.660	1.600	1.496	1.348	1.158	0.935	0.692	0.447	0.213	0.000	0.000	0.523	4.064
0.0900	1.686	1.666	1.604	1.498	1.348	1.156	0.932	0.690	0.445	0.212	0.000	0.000	0.518	4.045
0.0920	1.692	1.671	1.607	1.500	1.348	1.155	0.930	0.687	0.443	0.211	0.000	0.000	0.512	4.027
0.0940	1.697	1.676	1.611	1.502	1.348	1.153	0.927	0.685	0.441	0.211	0.000	0.000	0.507	4.010
0.0960	1.702	1.680	1.614	1.503	1.347	1.151	0.925	0.682	0.440	0.210	0.000	0.000	0.501	3.993
0.0980	1.707	1.685	1.617	1.505	1.347	1.149	0.922	0.680	0.438	0.209	0.000	0.000	0.496	3.978
0.1000	1.712	1.689	1.620	1.506	1.347	1.148	0.920	0.678	0.437	0.208	0.000	0.000	0.491	3.963
0.1050	1.722	1.699	1.627	1.509	1.346	1.144	0.915	0.673	0.433	0.206	0.000	0.000	0.478	3.929
0.1100	1.732	1.707	1.634	1.512	1.345	1.141	0.911	0.669	0.430	0.205	0.000	0.000	0.465	3.900
0.1150	1.741	1.716	1.639	1.514	1.344	1.138	0.907	0.665	0.427	0.203	0.000	0.000	0.453	3.873
0.1200	1.749	1.722	1.644	1.516	1.344	1.135	0.903	0.662	0.425	0.202	0.000	0.000	0.441	3.850
0.1250	1.756	1.729	1.649	1.518	1.343	1.133	0.900	0.659	0.423	0.201	0.000	0.000	0.429	3.830
0.1300	1.762	1.734	1.652	1.520	1.343	1.131	0.897	0.656	0.421	0.200	0.000	0.000	0.418	3.812
0.1350	1.768	1.739	1.656	1.521	1.342	1.129	0.895	0.654	0.419	0.199	0.000	0.000	0.407	3.796
0.1400	1.773	1.744	1.659	1.523	1.342	1.127	0.893	0.652	0.418	0.199	0.000	0.000	0.397	3.782
0.1450	1.777	1.748	1.662	1.524	1.341	1.126	0.891	0.650	0.416	0.198	0.000	0.000	0.386	3.769
0.1500	1.781	1.751	1.664	1.525	1.341	1.125	0.889	0.649	0.415	0.197	0.000	0.000	0.376	3.758
0.1550	1.785	1.755	1.667	1.526	1.341	1.123	0.888	0.647	0.414	0.197	0.000	0.000	0.366	3.748
0.1600	1.788	1.757	1.669	1.526	1.340	1.122	0.886	0.646	0.413	0.196	0.000	0.000	0.357	3.739
0.1650	1.791	1.760	1.670	1.527	1.340	1.121	0.885	0.645	0.412	0.196	0.000	0.000	0.348	3.732
0.1700	1.793	1.762	1.672	1.528	1.340	1.121	0.884	0.644	0.412	0.196	0.000	0.000	0.339	3.725
0.1750	1.795	1.764	1.673	1.528	1.340	1.120	0.883	0.643	0.411	0.195	0.000	0.000	0.330	3.719

S	R	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	TM	NU
0.1800	1.797	1.766	1.674	1.529	1.339	1.119	0.882	0.642	0.410	0.195	0.000	0.321	3.713	
0.1850	1.799	1.768	1.676	1.529	1.339	1.119	0.881	0.641	0.410	0.195	0.000	0.313	3.708	
0.1900	1.801	1.769	1.676	1.530	1.339	1.118	0.881	0.641	0.409	0.195	0.000	0.305	3.704	
0.1950	1.802	1.770	1.677	1.530	1.339	1.118	0.880	0.640	0.409	0.194	0.000	0.297	3.700	
0.2000	1.803	1.771	1.678	1.530	1.339	1.117	0.879	0.640	0.409	0.194	0.000	0.289	3.697	
0.2050	1.804	1.772	1.679	1.531	1.339	1.117	0.879	0.639	0.408	0.194	0.000	0.282	3.694	
0.2100	1.805	1.773	1.679	1.531	1.339	1.116	0.879	0.639	0.408	0.194	0.000	0.274	3.691	
0.2150	1.806	1.774	1.680	1.531	1.339	1.116	0.878	0.638	0.408	0.194	0.000	0.267	3.689	
0.2200	1.807	1.775	1.680	1.531	1.338	1.116	0.878	0.638	0.408	0.194	0.000	0.260	3.687	
0.2250	1.808	1.775	1.681	1.531	1.338	1.116	0.878	0.638	0.407	0.194	0.000	0.254	3.685	
0.2300	1.808	1.776	1.681	1.532	1.338	1.115	0.877	0.638	0.407	0.194	0.000	0.247	3.683	
0.2350	1.809	1.776	1.681	1.532	1.338	1.115	0.877	0.637	0.407	0.193	0.000	0.241	3.681	
0.2400	1.809	1.777	1.682	1.532	1.338	1.115	0.877	0.637	0.407	0.193	0.000	0.234	3.680	
0.2450	1.810	1.777	1.682	1.532	1.338	1.115	0.877	0.637	0.407	0.193	0.000	0.228	3.679	
0.2500	1.810	1.777	1.682	1.532	1.338	1.115	0.876	0.637	0.407	0.193	0.000	0.222	3.678	
0.2550	1.810	1.778	1.682	1.532	1.338	1.115	0.876	0.637	0.407	0.193	0.000	0.217	3.677	
0.2600	1.811	1.778	1.683	1.532	1.338	1.114	0.876	0.637	0.406	0.193	0.000	0.211	3.676	
0.2650	1.811	1.778	1.683	1.532	1.338	1.114	0.876	0.636	0.406	0.193	0.000	0.206	3.675	
0.2700	1.811	1.778	1.683	1.532	1.338	1.114	0.876	0.636	0.406	0.193	0.000	0.200	3.675	
0.2750	1.811	1.779	1.683	1.532	1.338	1.114	0.876	0.636	0.406	0.193	0.000	0.195	3.674	
0.2800	1.811	1.779	1.683	1.532	1.338	1.114	0.876	0.636	0.406	0.193	0.000	0.190	3.673	
0.2850	1.812	1.779	1.683	1.532	1.338	1.114	0.876	0.636	0.406	0.193	0.000	0.185	3.673	
0.2900	1.812	1.779	1.683	1.532	1.338	1.114	0.876	0.636	0.406	0.193	0.000	0.180	3.672	
0.2950	1.812	1.779	1.683	1.532	1.338	1.114	0.875	0.636	0.406	0.193	0.000	0.176	3.672	
0.3000	1.812	1.779	1.683	1.532	1.338	1.114	0.875	0.636	0.406	0.193	0.000	0.171	3.672	
0.3050	1.812	1.779	1.683	1.532	1.338	1.114	0.875	0.636	0.406	0.193	0.000	0.167	3.671	
0.3100	1.812	1.779	1.683	1.532	1.338	1.114	0.875	0.636	0.406	0.193	0.000	0.162	3.671	
0.3150	1.812	1.779	1.683	1.532	1.338	1.114	0.875	0.636	0.406	0.193	0.000	0.158	3.671	
0.3200	1.812	1.779	1.683	1.532	1.338	1.114	0.875	0.636	0.406	0.193	0.000	0.154	3.670	
0.3250	1.812	1.779	1.683	1.532	1.337	1.114	0.875	0.636	0.406	0.193	0.000	0.150	3.670	
0.3300	1.812	1.779	1.683	1.532	1.337	1.114	0.875	0.636	0.406	0.193	0.000	0.146	3.670	
0.3350	1.812	1.779	1.683	1.532	1.337	1.114	0.875	0.636	0.406	0.193	0.000	0.142	3.670	
0.3400	1.812	1.779	1.683	1.532	1.337	1.113	0.875	0.636	0.406	0.193	0.000	0.139	3.669	
0.3450	1.812	1.779	1.683	1.532	1.337	1.113	0.875	0.636	0.406	0.193	0.000	0.135	3.669	
0.3500	1.812	1.779	1.683	1.532	1.337	1.113	0.875	0.635	0.406	0.193	0.000	0.132	3.669	
0.3550	1.812	1.779	1.683	1.532	1.337	1.113	0.875	0.635	0.406	0.193	0.000	0.128	3.669	
0.3600	1.812	1.779	1.683	1.532	1.337	1.113	0.875	0.635	0.406	0.193	0.000	0.125	3.669	
0.3650	1.812	1.779	1.683	1.532	1.337	1.113	0.875	0.635	0.406	0.193	0.000	0.122	3.669	

S	R	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	TM	NU
0.3700	1.812	1.779	1.683	1.532	1.337	1.113	0.875	0.635	0.406	0.193	0.000	0.000	0.119	3.669
0.3750	1.812	1.779	1.683	1.532	1.337	1.113	0.875	0.635	0.406	0.193	0.000	0.000	0.116	3.668
0.3800	1.812	1.779	1.683	1.532	1.337	1.113	0.875	0.635	0.406	0.193	0.000	0.000	0.113	3.668
0.3850	1.812	1.779	1.683	1.532	1.337	1.113	0.875	0.635	0.406	0.193	0.000	0.000	0.110	3.668
0.3900	1.812	1.779	1.683	1.532	1.337	1.113	0.875	0.635	0.406	0.193	0.000	0.000	0.107	3.668
0.3950	1.812	1.779	1.683	1.532	1.337	1.113	0.875	0.635	0.406	0.193	0.000	0.000	0.104	3.668
0.4000	1.812	1.779	1.683	1.532	1.337	1.113	0.875	0.635	0.406	0.193	0.000	0.000	0.101	3.668

SOLUCION HIDRODINAMICA - TERMICA  
 DISTRIBUCION DE TEMPERATURA T EN LA RED  
 METODO DE DIFERENCIAS FINITAS - ESQUEMA IMPLICITO

PARAMETROS

DELTA RADIAL 0.0500  
 DELTA AXIAL 0.0010  
 PRANDTL 0.7000

S	R	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	TM	NU
0.0000		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.913	27.885
0.0020		0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.997	0.975	0.808	0.000	0.888	16.634
0.0040		0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.997	0.986	0.920	0.637	0.000	0.870	12.638
0.0060		0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.998	0.993	0.965	0.855	0.525	0.000	0.853	10.678
0.0080		0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.997	0.985	0.940	0.792	0.453	0.000	0.838	9.472
0.0100		0.999	0.999	0.999	0.999	0.998	0.993	0.975	0.910	0.735	0.401	0.000	0.824	8.633
0.0120		0.999	0.999	0.999	0.999	0.997	0.989	0.961	0.879	0.686	0.364	0.000	0.811	8.007
0.0140		0.999	0.999	0.999	0.998	0.995	0.983	0.946	0.848	0.643	0.334	0.000	0.799	7.517
0.0160		0.999	0.999	0.999	0.997	0.992	0.976	0.929	0.817	0.606	0.310	0.000	0.788	7.121
0.0180		0.999	0.999	0.999	0.996	0.989	0.967	0.911	0.788	0.574	0.291	0.000	0.777	6.793
0.0200		0.999	0.999	0.998	0.995	0.985	0.958	0.893	0.761	0.546	0.274	0.000	0.766	6.515
0.0220		0.999	0.999	0.997	0.993	0.980	0.947	0.874	0.735	0.521	0.260	0.000	0.756	6.276
0.0240		0.999	0.998	0.996	0.990	0.974	0.936	0.856	0.712	0.499	0.247	0.000	0.746	6.069
0.0260		0.998	0.997	0.995	0.987	0.968	0.925	0.838	0.689	0.479	0.236	0.000	0.736	5.987
0.0280		0.997	0.997	0.993	0.984	0.961	0.913	0.820	0.668	0.461	0.226	0.000	0.727	5.725
0.0300		0.997	0.996	0.991	0.980	0.954	0.901	0.803	0.649	0.444	0.217	0.000	0.718	5.581
0.0320		0.996	0.994	0.989	0.976	0.947	0.889	0.785	0.630	0.429	0.209	0.000	0.709	5.451
0.0340		0.995	0.993	0.986	0.971	0.939	0.876	0.770	0.613	0.415	0.202	0.000	0.701	5.333
0.0360		0.993	0.991	0.984	0.966	0.931	0.864	0.755	0.597	0.402	0.195	0.000	0.692	5.227
0.0380		0.992	0.989	0.981	0.961	0.922	0.852	0.739	0.581	0.390	0.189	0.000	0.684	5.129
0.0400		0.990	0.987	0.977	0.956	0.914	0.840	0.725	0.567	0.379	0.184	0.000	0.676	5.040
0.0420		0.987	0.984	0.973	0.950	0.905	0.828	0.711	0.553	0.369	0.178	0.000	0.668	4.958
0.0440		0.985	0.982	0.969	0.944	0.896	0.816	0.697	0.540	0.359	0.173	0.000	0.650	4.882
0.0460		0.982	0.979	0.965	0.937	0.887	0.805	0.684	0.528	0.350	0.169	0.000	0.653	4.812
0.0480		0.980	0.975	0.961	0.931	0.878	0.793	0.672	0.517	0.342	0.165	0.000	0.645	4.747
0.0500		0.976	0.972	0.956	0.924	0.869	0.782	0.659	0.505	0.333	0.161	0.000	0.638	4.687
0.0520		0.973	0.968	0.951	0.917	0.860	0.771	0.648	0.495	0.326	0.157	0.000	0.631	4.631
0.0540		0.969	0.964	0.946	0.910	0.851	0.760	0.636	0.485	0.319	0.153	0.000		

S	R	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	TM	NU
0.0560	0.966	0.960	0.940	0.903	0.842	0.749	0.625	0.475	0.312	0.150	0.000	0.000	0.624	4.578
0.0580	0.962	0.955	0.935	0.896	0.832	0.739	0.615	0.466	0.305	0.146	0.000	0.000	0.617	4.529
0.0600	0.957	0.951	0.929	0.889	0.824	0.729	0.605	0.457	0.299	0.143	0.000	0.000	0.610	4.484
0.0620	0.953	0.946	0.923	0.881	0.815	0.719	0.595	0.449	0.293	0.140	0.000	0.000	0.603	4.441
0.0640	0.948	0.941	0.917	0.874	0.806	0.709	0.585	0.441	0.287	0.138	0.000	0.000	0.596	4.400
0.0660	0.943	0.936	0.911	0.867	0.797	0.700	0.576	0.433	0.282	0.135	0.000	0.000	0.590	4.362
0.0680	0.938	0.930	0.905	0.859	0.788	0.690	0.567	0.425	0.277	0.132	0.000	0.000	0.583	4.327
0.0700	0.933	0.925	0.899	0.851	0.780	0.681	0.558	0.418	0.272	0.130	0.000	0.000	0.577	4.293
0.0720	0.927	0.919	0.892	0.844	0.771	0.672	0.550	0.411	0.267	0.128	0.000	0.000	0.571	4.262
0.0740	0.922	0.913	0.885	0.836	0.763	0.663	0.541	0.404	0.262	0.125	0.000	0.000	0.564	4.232
0.0760	0.916	0.907	0.879	0.829	0.754	0.655	0.533	0.398	0.258	0.123	0.000	0.000	0.558	4.204
0.0780	0.910	0.901	0.872	0.821	0.745	0.646	0.525	0.391	0.253	0.121	0.000	0.000	0.552	4.177
0.0800	0.904	0.895	0.865	0.814	0.738	0.638	0.518	0.385	0.249	0.119	0.000	0.000	0.546	4.152
0.0820	0.898	0.889	0.858	0.806	0.730	0.630	0.510	0.379	0.245	0.117	0.000	0.000	0.540	4.128
0.0840	0.892	0.882	0.852	0.798	0.722	0.622	0.503	0.373	0.241	0.115	0.000	0.000	0.535	4.106
0.0860	0.886	0.876	0.845	0.791	0.714	0.614	0.496	0.368	0.238	0.113	0.000	0.000	0.529	4.084
0.0880	0.880	0.869	0.838	0.783	0.706	0.606	0.489	0.362	0.234	0.112	0.000	0.000	0.523	4.064
0.0900	0.873	0.863	0.831	0.776	0.698	0.599	0.483	0.357	0.230	0.110	0.000	0.000	0.518	4.045
0.0920	0.867	0.856	0.824	0.769	0.691	0.592	0.476	0.352	0.227	0.108	0.000	0.000	0.512	4.027
0.0940	0.860	0.849	0.817	0.761	0.683	0.584	0.470	0.347	0.224	0.107	0.000	0.000	0.507	4.010
0.0960	0.854	0.843	0.810	0.754	0.676	0.577	0.464	0.342	0.220	0.105	0.000	0.000	0.501	3.993
0.0980	0.847	0.836	0.803	0.746	0.668	0.570	0.458	0.337	0.217	0.103	0.000	0.000	0.496	3.978
0.1000	0.840	0.829	0.795	0.739	0.661	0.563	0.452	0.333	0.214	0.102	0.000	0.000	0.491	3.963
0.1050	0.823	0.812	0.778	0.721	0.643	0.547	0.437	0.322	0.207	0.098	0.000	0.000	0.478	3.929
0.1100	0.806	0.795	0.760	0.704	0.626	0.531	0.424	0.311	0.200	0.095	0.000	0.000	0.465	3.900
0.1150	0.789	0.777	0.743	0.686	0.609	0.516	0.411	0.301	0.193	0.092	0.000	0.000	0.453	3.873
0.1200	0.772	0.760	0.726	0.669	0.593	0.501	0.399	0.292	0.187	0.089	0.000	0.000	0.441	3.850
0.1250	0.755	0.743	0.708	0.652	0.577	0.487	0.387	0.283	0.181	0.086	0.000	0.000	0.429	3.830
0.1300	0.737	0.726	0.692	0.636	0.562	0.473	0.375	0.275	0.176	0.084	0.000	0.000	0.418	3.812
0.1350	0.720	0.709	0.675	0.620	0.547	0.460	0.365	0.266	0.171	0.081	0.000	0.000	0.407	3.796
0.1400	0.704	0.692	0.659	0.604	0.533	0.447	0.354	0.259	0.166	0.079	0.000	0.000	0.397	3.782
0.1450	0.687	0.676	0.643	0.589	0.519	0.435	0.344	0.251	0.161	0.076	0.000	0.000	0.386	3.769
0.1500	0.671	0.660	0.627	0.574	0.505	0.423	0.335	0.244	0.156	0.074	0.000	0.000	0.376	3.758
0.1550	0.655	0.644	0.611	0.560	0.492	0.412	0.325	0.237	0.152	0.072	0.000	0.000	0.366	3.748
0.1600	0.639	0.628	0.596	0.545	0.479	0.401	0.316	0.231	0.147	0.070	0.000	0.000	0.357	3.739
0.1650	0.623	0.612	0.581	0.531	0.466	0.390	0.308	0.224	0.143	0.068	0.000	0.000	0.348	3.732
0.1700	0.608	0.597	0.567	0.518	0.454	0.380	0.299	0.218	0.139	0.066	0.000	0.000	0.339	3.725
0.1750	0.593	0.582	0.552	0.505	0.442	0.370	0.291	0.212	0.135	0.064	0.000	0.000	0.330	3.719

S	R	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	TM	NU
0.1900	0.578	0.569	0.538	0.492	0.431	0.360	0.283	0.206	0.132	0.062	0.000	0.321	3.713	
0.1850	0.564	0.554	0.525	0.479	0.419	0.350	0.276	0.201	0.128	0.061	0.000	0.313	3.708	
0.1900	0.549	0.540	0.512	0.467	0.409	0.341	0.269	0.195	0.125	0.059	0.000	0.305	3.704	
0.1950	0.536	0.526	0.499	0.455	0.398	0.332	0.261	0.190	0.121	0.057	0.000	0.297	3.700	
0.2000	0.522	0.513	0.486	0.443	0.388	0.323	0.254	0.185	0.118	0.056	0.000	0.289	3.697	
0.2050	0.509	0.500	0.473	0.432	0.377	0.315	0.248	0.180	0.115	0.054	0.000	0.282	3.694	
0.2100	0.496	0.487	0.461	0.421	0.368	0.307	0.241	0.175	0.112	0.053	0.000	0.274	3.691	
0.2150	0.483	0.475	0.450	0.410	0.358	0.299	0.235	0.171	0.109	0.052	0.000	0.267	3.689	
0.2200	0.471	0.463	0.438	0.399	0.349	0.291	0.229	0.166	0.106	0.050	0.000	0.260	3.687	
0.2250	0.459	0.451	0.427	0.389	0.340	0.283	0.223	0.162	0.103	0.049	0.000	0.254	3.685	
0.2300	0.447	0.439	0.415	0.379	0.331	0.276	0.217	0.157	0.100	0.048	0.000	0.247	3.683	
0.2350	0.436	0.428	0.405	0.369	0.322	0.269	0.211	0.153	0.098	0.046	0.000	0.241	3.681	
0.2400	0.425	0.417	0.395	0.360	0.314	0.262	0.206	0.149	0.095	0.045	0.000	0.234	3.680	
0.2450	0.414	0.406	0.385	0.350	0.306	0.255	0.200	0.145	0.093	0.044	0.000	0.228	3.679	
0.2500	0.403	0.396	0.375	0.341	0.298	0.248	0.195	0.142	0.090	0.043	0.000	0.222	3.678	
0.2550	0.393	0.386	0.365	0.332	0.290	0.242	0.190	0.138	0.088	0.042	0.000	0.217	3.677	
0.2600	0.383	0.376	0.356	0.324	0.283	0.235	0.185	0.134	0.086	0.040	0.000	0.211	3.676	
0.2650	0.373	0.366	0.347	0.315	0.275	0.229	0.180	0.131	0.083	0.039	0.000	0.206	3.675	
0.2700	0.363	0.357	0.338	0.307	0.268	0.223	0.176	0.127	0.081	0.038	0.000	0.200	3.675	
0.2750	0.354	0.348	0.329	0.299	0.261	0.218	0.171	0.124	0.079	0.037	0.000	0.195	3.674	
0.2800	0.345	0.339	0.320	0.292	0.255	0.212	0.167	0.121	0.077	0.036	0.000	0.190	3.673	
0.2850	0.336	0.330	0.312	0.284	0.248	0.206	0.162	0.118	0.075	0.035	0.000	0.185	3.673	
0.2900	0.327	0.321	0.304	0.277	0.242	0.201	0.158	0.115	0.073	0.035	0.000	0.180	3.672	
0.2950	0.319	0.313	0.296	0.270	0.235	0.196	0.154	0.112	0.071	0.034	0.000	0.176	3.672	
0.3000	0.311	0.305	0.289	0.263	0.229	0.191	0.150	0.109	0.069	0.033	0.000	0.171	3.672	
0.3050	0.303	0.297	0.281	0.256	0.223	0.186	0.145	0.106	0.067	0.032	0.000	0.167	3.671	
0.3100	0.295	0.289	0.274	0.249	0.218	0.181	0.142	0.103	0.066	0.031	0.000	0.162	3.671	
0.3150	0.287	0.282	0.267	0.243	0.212	0.176	0.139	0.100	0.064	0.030	0.000	0.158	3.671	
0.3200	0.280	0.275	0.260	0.237	0.206	0.172	0.135	0.098	0.062	0.029	0.000	0.154	3.670	
0.3250	0.273	0.268	0.253	0.230	0.201	0.167	0.131	0.095	0.061	0.029	0.000	0.150	3.670	
0.3300	0.266	0.261	0.247	0.224	0.196	0.163	0.128	0.093	0.059	0.028	0.000	0.146	3.670	
0.3350	0.259	0.254	0.240	0.219	0.191	0.159	0.125	0.090	0.058	0.027	0.000	0.142	3.670	
0.3400	0.252	0.247	0.234	0.213	0.186	0.155	0.121	0.088	0.055	0.026	0.000	0.139	3.669	
0.3450	0.245	0.241	0.228	0.207	0.181	0.151	0.118	0.086	0.055	0.026	0.000	0.135	3.669	
0.3500	0.239	0.235	0.222	0.202	0.176	0.147	0.115	0.084	0.053	0.025	0.000	0.132	3.669	
0.3550	0.233	0.229	0.216	0.197	0.172	0.143	0.112	0.081	0.052	0.024	0.000	0.128	3.669	
0.3600	0.227	0.223	0.211	0.192	0.167	0.139	0.109	0.079	0.050	0.024	0.000	0.125	3.669	
0.3650	0.221	0.217	0.205	0.187	0.163	0.136	0.106	0.077	0.049	0.023	0.000	0.122	3.669	

S	R	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	TM	NU
0.3700		0.215	0.211	0.200	0.182	0.159	0.132	0.104	0.075	0.048	0.023	0.000	0.119	3.669
0.3750		0.210	0.206	0.195	0.177	0.155	0.129	0.101	0.073	0.047	0.022	0.000	0.116	3.668
0.3800		0.204	0.201	0.190	0.173	0.151	0.125	0.098	0.071	0.045	0.021	0.000	0.113	3.668
0.3850		0.199	0.195	0.185	0.168	0.147	0.122	0.096	0.070	0.044	0.021	0.000	0.110	3.668
0.3900		0.194	0.190	0.180	0.164	0.143	0.119	0.093	0.068	0.043	0.020	0.000	0.107	3.668
0.3950		0.189	0.185	0.175	0.160	0.139	0.116	0.091	0.066	0.042	0.020	0.000	0.104	3.668
0.4000		0.184	0.181	0.171	0.155	0.136	0.113	0.089	0.064	0.041	0.019	0.000	0.101	3.668

## APENDICE G

### TABLAS COMPARATIVAS PARA LA SOLUCION TERMICA CON FLUJO DESARROLLADO

$Nu_z$

S	EXPLICITO	IMPLICITO	ANALITICO (2)
0.01	6.005	6.036	5.99
0.04	4.167	4.172	4.18
0.08	3.762	3.772	3.79
0.10	3.703	3.709	3.71
0.20	3.650	3.650	3.66
$\infty$	3.649	3.649	3.66

TABLA G-1. Comparación de  $Nu_z$

$T_m$

S	EXPLICITO	IMPLICITO	ANALITICO (2)
0.01	0.836	0.836	0.836
0.04	0.628	0.628	0.626
0.08	0.459	0.460	0.457
0.10	0.395	0.396	0.394
0.20	0.189	0.191	0.1895
$\infty$	0	0	0

TABLA G-2. Comparación de  $T_m$

GRAFICOS

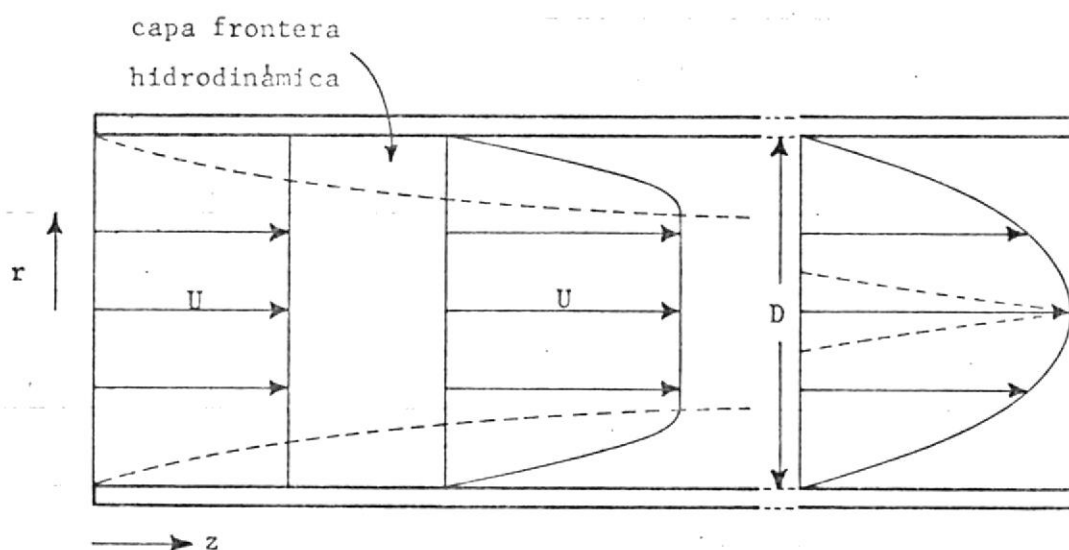


FIG. 1. Desarrollo del perfil de velocidad.

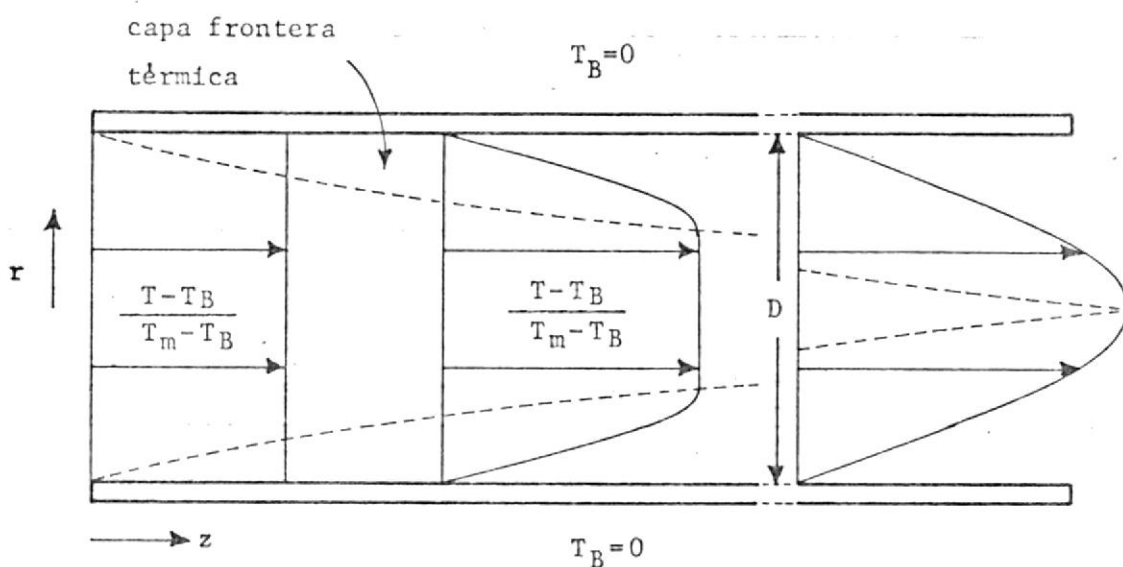


FIG. 2. Desarrollo del perfil de temperatura para un fluido que está siendo enfriado.

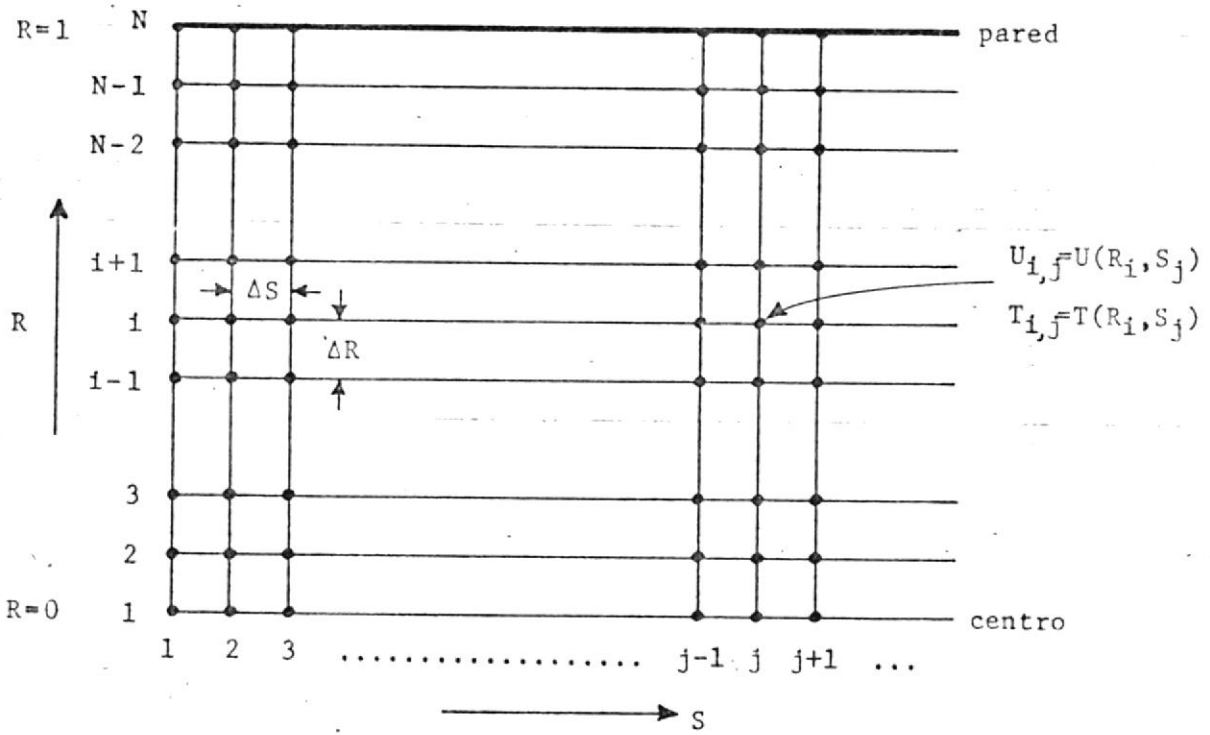


FIG. 3. Red de diferencias finitas utilizada en el análisis.

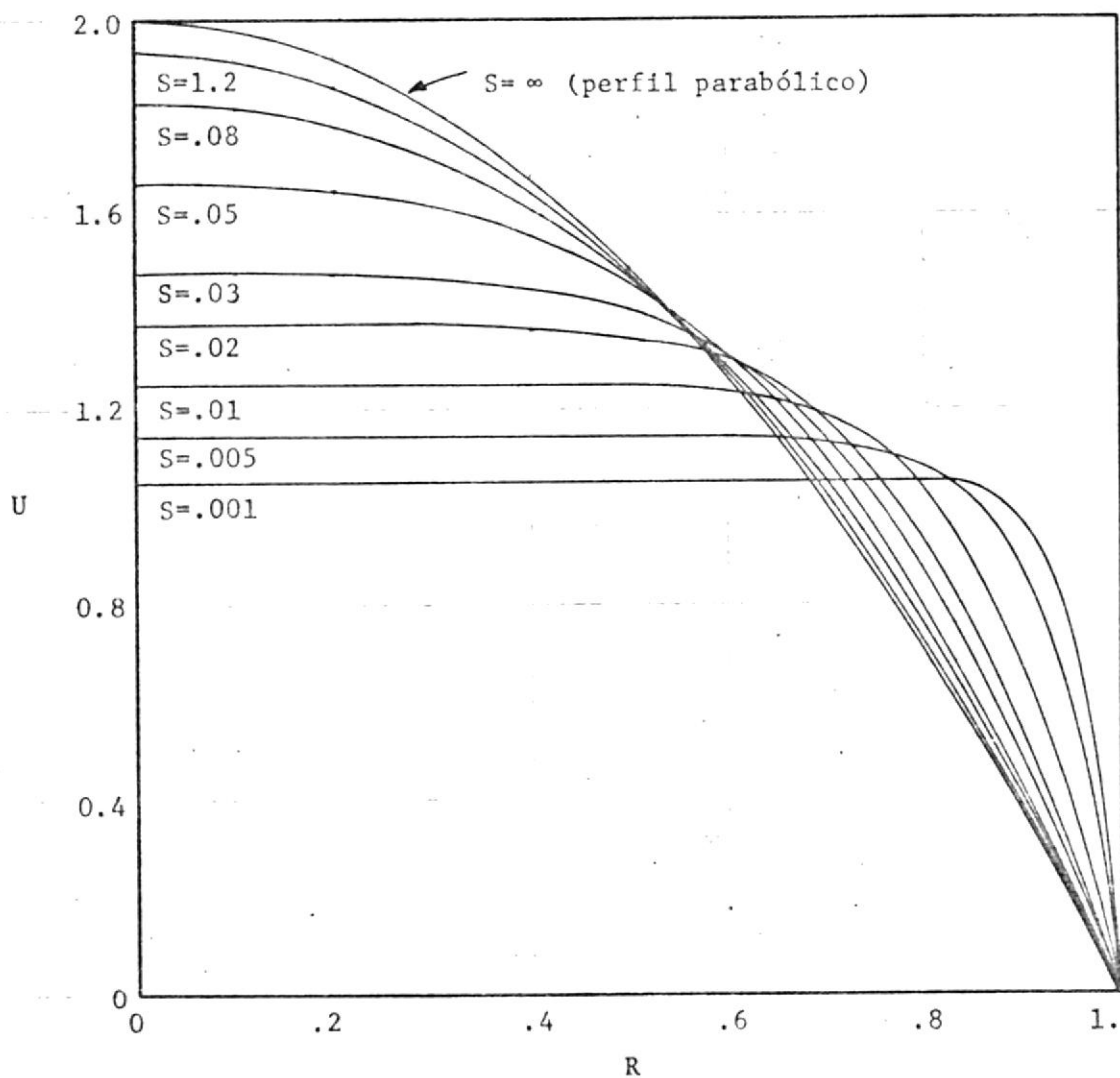
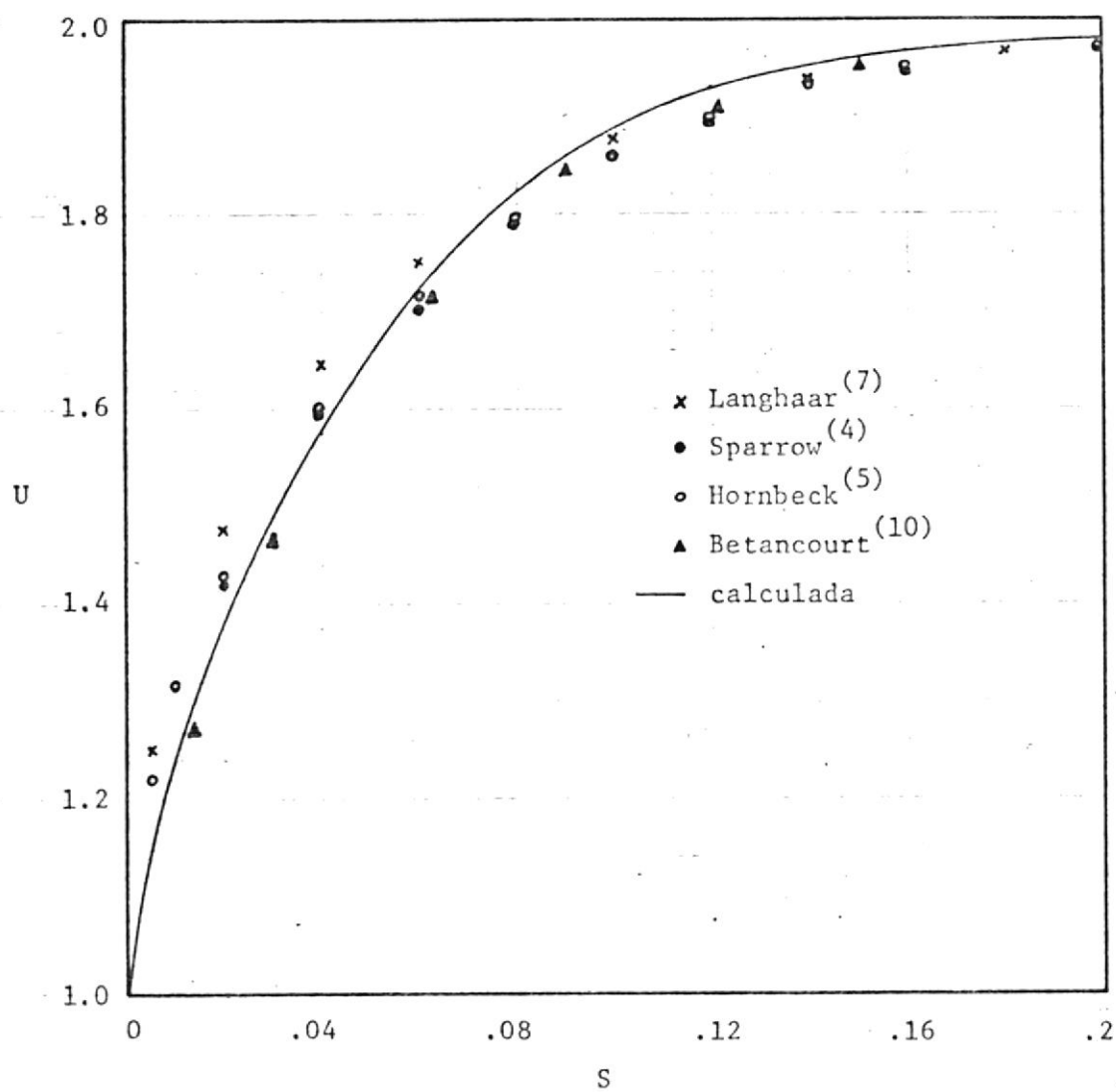
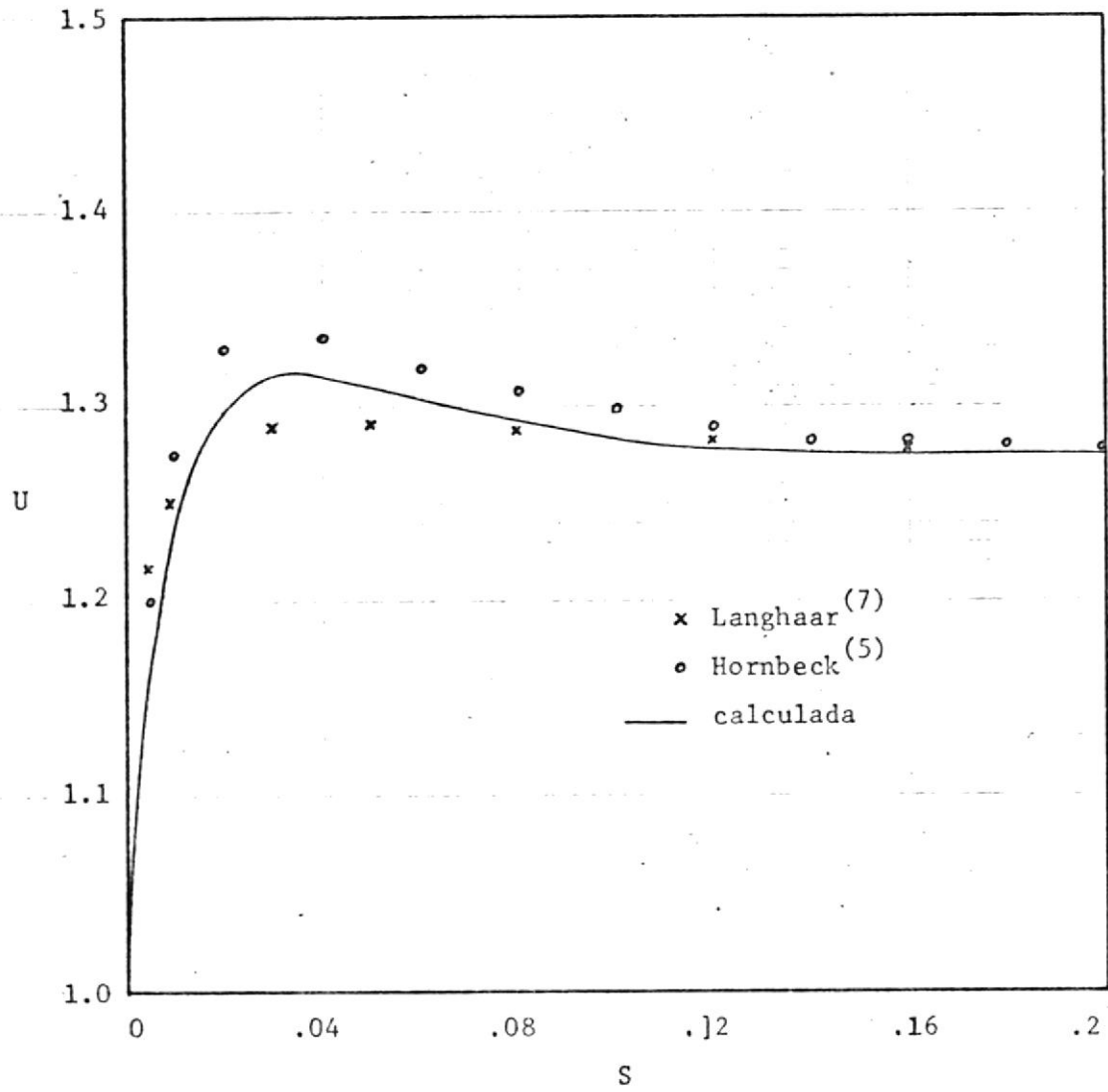


FIG. 4. Perfiles de velocidad calculados para el ducto circular.

FIG. 5. Desarrollo de la velocidad axial para  $R = 0$ .

FIG. 6. Desarrollo de la velocidad axial para  $R = 0.6$ .

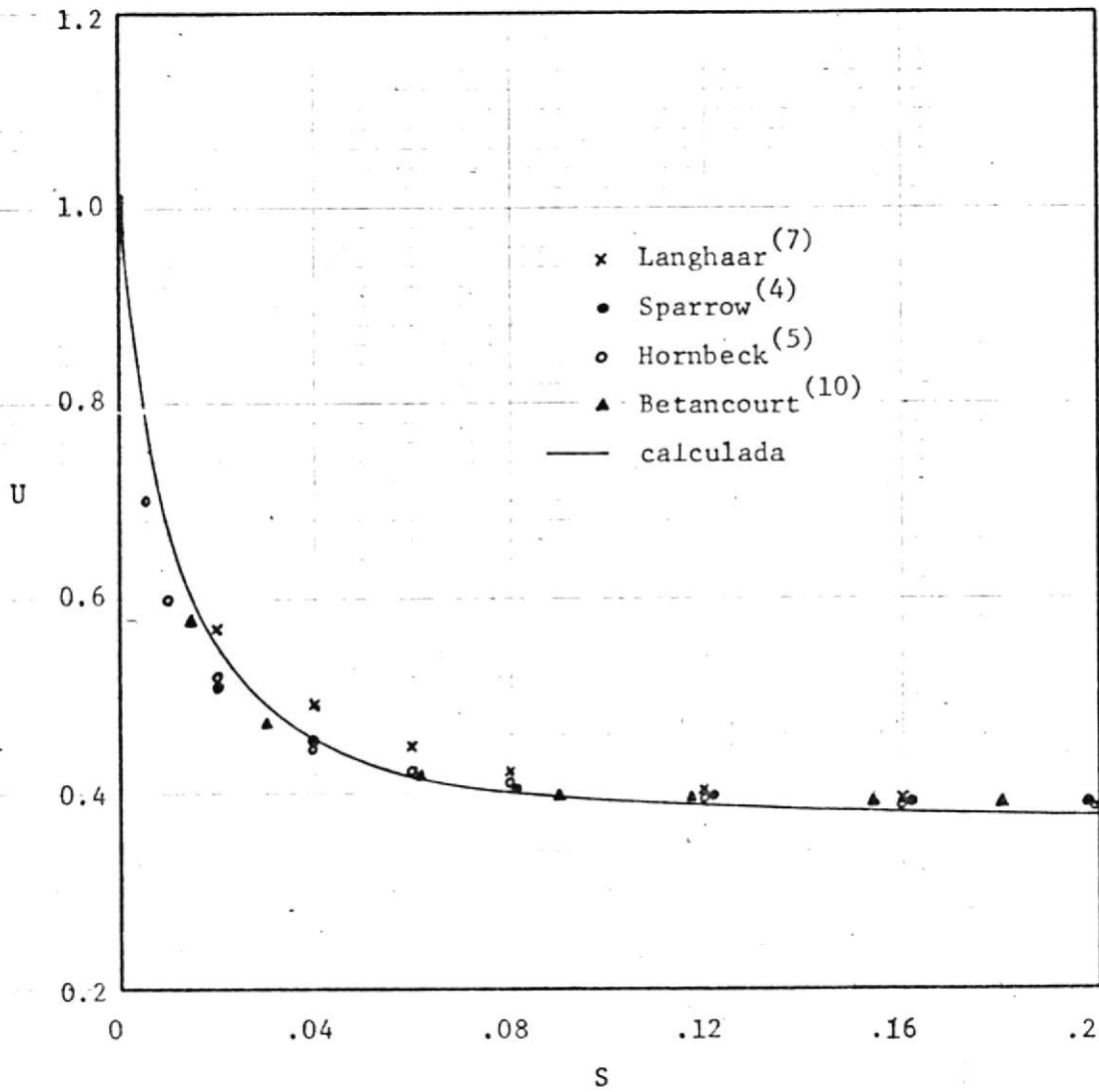


FIG. 7. Desarrollo de la velocidad axial para  $R = 0.9$ .

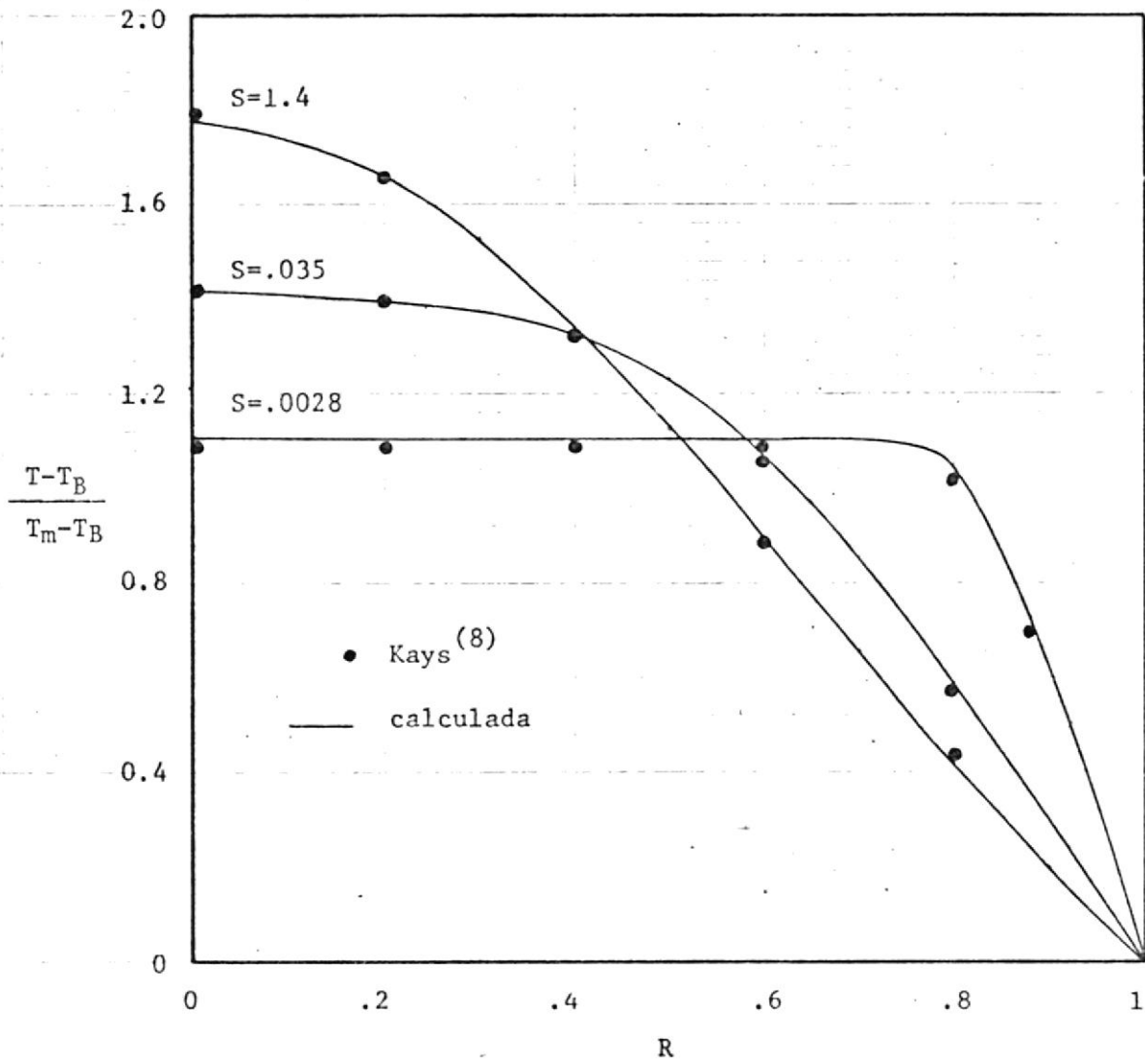
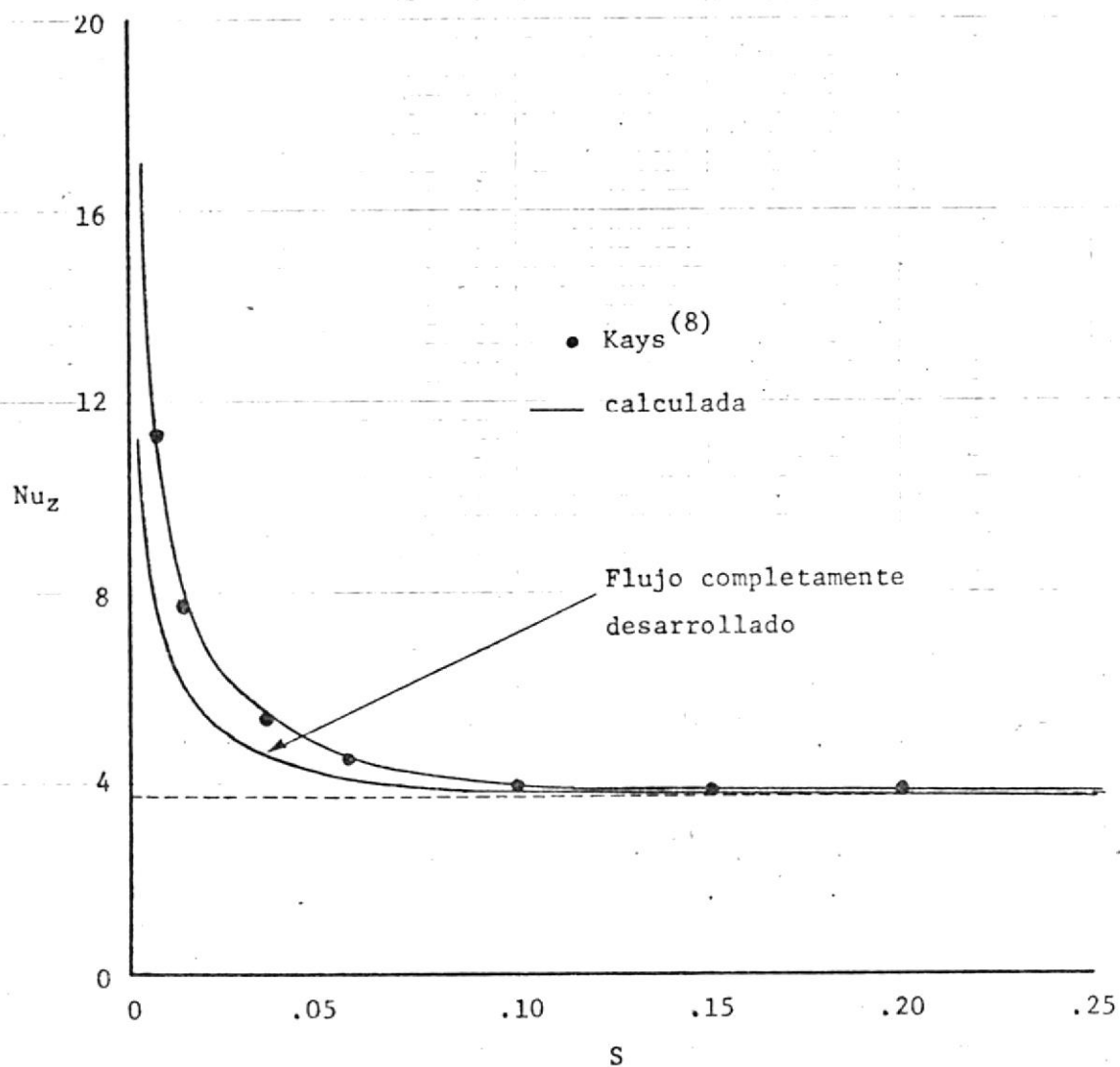


FIG. 8. Perfiles de Temperatura para temperatura constante en la pared con velocidad y temperatura uniformes en la entrada del ducto.  $P_r=0.7$ .

FIG. 9. Número de Nusselt local, propiedades constantes.  $Pr=0.7$ .

## BIBLIOGRAFIA

1. V.L. STREETER, Handbook of Fluid Dynamics, (New York: Mc Graw-Hill, 1961), pg. 2-15.
2. W.M. KAYS, Convective Heat and Mass Transfer, (New York: McGraw-Hill, 1966), pg. 78-144.
3. W.D. CAMPBELL, and J.C. SLATTERY, "Flow in the Entrance Region of a Flat Duct". A.I. Ch. E. Journal, Vol. 11 N°6.
4. E.M. SPARROW, S.H. LIN, and T.S. LUNDGREN, Flow Development in the Hydrodynamics Entrance Region of Tubes and Ducts, The Physics of Fluids, Vol. 7, N° 3 (March 1964) pg. 338-347.
5. R.W. HORNBECK, Laminar Flow in the Entrance Region of a Pipe, Applied Scientific Research, Section A, Vol. 13 (1964), pg. 224-232.
6. E.R.G. ECKERT, R.M. DRAKE, Jr., Analysis of Heat and Mass Transfer, (New York: McGraw Hill, 1972). pg. 327-339.
7. HENRY L. LANGHAAR, Steady Flow in the Transition Length of a Straight Tube, Journal of Applied Mechanics, Vol. 9 (1942).
8. W.M. KAYS, Numerical Solutions for Laminar-Flow Heat Transfer in Circular Tubes, Trans. ASME, Vol. 77 (Nov. 1955).
9. F. KREITH, Principios de Transferencia de Calor (Mexico, Herrero Hnos. S.A. 1970).
10. G. BETANCOURT, Simultaneous Hydrodynamic-Thermal Development on Laminar Flow in the Inlet Section of Circular Pipe Tesis de Master (University of Pittsburg, 1974).
11. J.R. BODIA, and J.F. OSTERLE, Finite-Difference Analysis of Plane Poiseuille and Couette Flow Developments, Applied Scientific Research, Section A, Vol 10 (1961) pg. 265-276.
12. D.L. ULRICHSON, and R.A. SCHMIDT, Laminar-Flow Heat Transfer in the Entrance Region of Circular Tubes, Int. J. Heat Transfer, Vol. 8 (1965) pg. 253-258.
13. D.E. ROSEMBERG, and J.D. HELSUMS, Flow Development and Heat Transfer in Variable-Viscosity Fluids, I & EC Fundamentals, Vol. 4, N° 4 (November 1965), pg. 419-422.

14. R.K. MCMORDIE, and A.F. EMERY, A Numerical Solution for Laminar-Flow Heat Transfer in Circular Tubes with Axial Conduction and Developing Thermal and Velocity Fields, Journal of Heat Transfer, Vol. 89 (February 1967) pg. 11-16.
15. Proceedings of the Third International Heat Transfer Conference AICHE, August 7-12, 1966. Analysis of Developing Laminar Flow and Heat Transfer in a Tube for a Gas with Variable Properties, by Robert G. Deissler and Alden F. Presler, (Chicago: American Institute of Chemical Engineers, 1966), Vol. 1, pg. 250-256.
16. R. MONOHAR Analysis of Laminar-Flow Heat Transfer in the Entrance Region of Circular Tubes, Int. J. Heat Transfer, Vol. 12 (1969), pg. 15-22.
17. L.H. BACK, Very High temperature Laminar Flow of a Cooled Tube-Numerical Calculations and Experimental Results, Int. J. Heat Transfer, Vol. 15 (1972).
18. F.H. VERHOFF, and D.P. FISHER, A Numerical Solution of the Graetz Problem with Axial Conduction Included, Journal of Heat Transfer, Vol. 95 (February 1973), pg. 132-133.
19. BANKSTON, C.A., and D.M. McELIGOT, "Turbulent and Laminar Heat Transfer to Gases with Variable Properties in the Entry Region of Circular Ducts", Int. J. Heat Mass Transfer, 13, (1970) pg. 319-344.
20. NELSON, R.M. AND PLETCHER R.H., An Explicit Scheme for the Calculation of Confined Turbulent Flows with Heat Transfer, Proceedings of the 1974 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute (1974). pg. 154-170.
21. L. SCHILLER, Die Entwicklung der Laminaren Geschwindigkeitsverteilung und ihre Bedeutung für Zähigkeitsmessungen, Z. Angew. Math. Mech., Vol. 2 (1922) pg. 96-106.
22. R.C. GUPTA, Flow Development in the Hydrodynamics Entrance Region of a Flat Duct, A. I. Ch. E. Journal Vol. 11, N<sup>o</sup> 6 (November 1965), pg. 1149.
23. S. GOLDSTEIN, Modern Development of Fluid Dynamics Oxford: Clarendon Press, 1938, Vol. 1, pg. 304.