3.4. Ley de Gravitación Universal y Leyes de Kepler.

En su **teoría de la gravitación universal** Isaac Newton (1642-1727) explicó las leyes de Kepler y, por tanto, los movimientos celestes, a partir de la existencia de una fuerza, la fuerza de la gravedad, que actuando a distancia produce una atracción entre masas. Esta fuerza de gravedad demostró que es la misma fuerza que en la superficie de la Tierra denominamos peso.

Newton demostró que la fuerza de la gravedad tiene la dirección de la recta que une los centros de los astros y el sentido corresponde a una atracción. Es una fuerza directamente proporcional al producto de las masas que interactúan e inversamente proporcional a la distancia que las separa. La constante de proporcionalidad, G, se denomina constante de gravitación universal, y tiene un valor de 6.67×10^{-11} Nm^2/kg^2.

$$\boxed{\vec{F} = -G\frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \vec{u}_r}$$

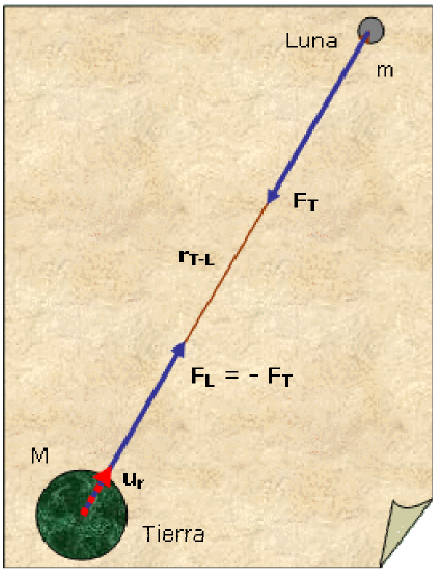

Figura 333

Newton consiguió explicar con su fuerza de la gravedad el movimiento elíptico de los planetas. La fuerza de la gravedad sobre el planeta de masa m va dirigida al foco, donde se halla el Sol, de masa M, y puede descomponerse en dos componentes:

- existe una **componente tangencial** (dirección tangente a la curva elíptica) que produce el efecto de aceleración y desaceleración de los planetas en su órbita (variación del módulo del vector velocidad);
- la **componente normal**, perpendicular a la anterior, explica el cambio de dirección del vector velocidad, por tanto la trayectoria elíptica. En la figura adjunta se representa el movimiento de un planeta desde el afelio (B) al perihelio (A), es decir, la mitad de la trayectoria dónde se acelera. Se observa que existe una componente de la fuerza, la tangencial que tiene el mismo sentido que la velocidad, produciendo su variación.

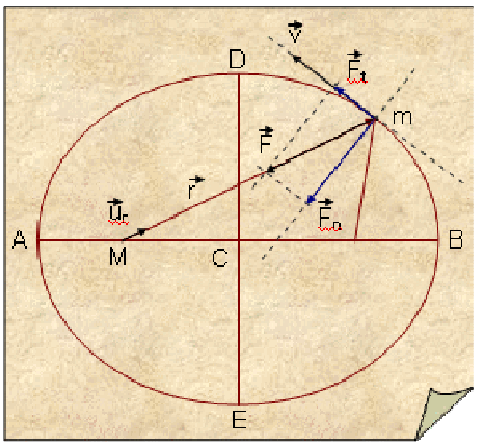

Figura 334

Una partícula de masa *m* que se encuentre sobre la superficie terrestre, moviéndose entre dos puntos cualesquiera, esta bajo la influencia de la fuerza gravitacional.

El cambio de energía potencial de la partícula de masa *m* se define como el trabajo negativo realizado por la fuerza gravitacional, en este caso:

$$\Delta E_P = E_{Pf} - E_{Pi} = -W = -\int_{r_i}^{r_f} \bar{F}_G \cdot d\bar{r}$$

Reemplazando en esta expresión la fuerza gravitacional, para calcular la energía potencial gravitacional de la partícula de masa *m*, se obtiene:

$$E_{gf} - E_{gi} = \int_{r_i}^{r_f} GM_T m \frac{dr}{r^2} = GM_T m \left(-\frac{1}{r}\bigg|_{ri}^{rf} \right)$$

$$E_{gf} - E_{gi} = -GM_T m \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right)$$

Como el punto de referencia inicial para la energía potencial es arbitrario, se puede elegir en $r = \infty$, donde la fuerza gravitacional (y la aceleración de gravedad) es cero. Con esta elección se obtiene la energía potencial gravitacional general para una partícula de masa *m* ubicada a una altura *r* medida desde el centro de la Tierra:

$$E_g(r) = -\frac{GM_T m}{r}$$

Suponga que un objeto de masa *m* se lanza verticalmente hacia arriba desde la superficie terrestre con una velocidad vi, como se muestra en la figura 335. Podemos utilizar consideraciones de energía para encontrar el valor mínimo de la velocidad inicial con la cual el objeto escapará del campo gravitacional de la Tierra. La ecuación anterior nos brinda la energía total del objeto en cualquier punto cuando se conocen su velocidad y distancia desde el centro de la Tierra. En la superficie de ésta $vi = v$ y $ri = RT$. Cuando el objeto alcanza su altura máxima, $vf = 0$ y $rf = rmáx$. Debido a que la energía total del sistema es constante, al reemplazar estas condiciones se obtiene:

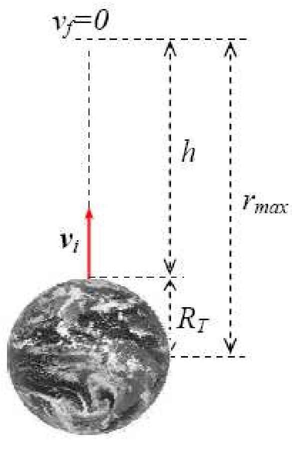

Figura 335

$$E_{ci} + E_{Pi} = E_{cf} + E_{Pf}$$

$$\frac{1}{2} m v_i^2 - \frac{GM_T m}{R_T} = 0 + -\frac{GM_T m}{r_{máx}}$$

Al despejar v^2_i se obtiene

$$v_1^2 = 2GM_T \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r_{máx}} \right)$$

En consecuencia, si se conoce la velocidad inicial, esta expresión puede usarse para calcular la altura máxima *h*, puesto que sabemos que $h = rmáx - RT$. Ahora tenemos la posibilidad de calcular la velocidad mínima que el objeto debe tener en la superficie terrestre para escapar de la influencia del campo gravitacional del planeta. Al viajar a esta velocidad mínima, el objeto puede alcanzar *justamente* el infinito con una velocidad final igual a cero. Al establecer $rmáx = \infty$ en la ecuación anterior y tomando $vi = vesc$, que se llama la velocidad de escape, obtenemos

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R_T}}$$

Los movimientos de los planetas, estrellas y otros cuerpos celestes han sido observados por la gente durante miles de años. En la antigüedad, los científicos consideraban a la Tierra como el centro del universo. Así el modelo llamado geocéntrico fue elaborado por el astrónomo griego Claudio Ptolomeo (100-170) en el segundo siglo DC y fue aceptado durante los siguientes 1400 años. En 1543, el astrónomo polaco Nicolás Copérnico (1473-1543) sugirió que la Tierra y los otros planetas giraban en órbitas circulares alrededor del Sol (el modelo heliocéntrico). El astrónomo danés Tycho Brahe (1546-1601) hizo mediciones astronómicas más precisas por un periodo de 20 años y proporcionó una prueba rigurosa de los modelos alternativos del sistema solar. Es interesante observar que estas precisas observaciones sobre los planetas y de 777 estrellas visibles a simple vista se llevaron a cabo con un gran sextante y un compás, sin un telescopio,
el cual aún no se había inventado. El astrónomo alemán Johannes Kepler, quien era ayudante de Brahe, obtuvo los datos astronómicos de este último y empleó casi 16 años en tratar de desarrollar un modelo atemático para el movimiento de los planetas. El análisis completo se resume en tres enunciados, conocidos como las ***leyes de Kepler:***

1. Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en uno de los puntos focales.
2. El radio vector trazado desde el Sol hasta un planeta barre áreas iguales en intervalos de tiempo iguales
3. El cuadrado del periodo orbital de cualquier planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita elíptica.

Medio siglo después, Newton demostró que estas leyes son la consecuencia de una fuerza única que existe entre cualesquiera dos masas. La ley de la gravedad de Newton, junto con su desarrollo de las leyes del movimiento, entrega las bases para la solución matemática completa del movimiento de planetas y satélites.

Cuando Newton publicó por primera vez su teoría de la gravitación, para sus contemporáneos fue difícil aceptar la idea de un campo de fuerza que pudiera actuar a través de una distancia. Se preguntaban cómo era posible que dos masas interactuaran aun cuando no estuvieran en contacto entre sí. Aunque el propio Newton no pudo responder a esta pregunta, su teoría fue ampliamente aceptada debido a que explicó de manera satisfactoria el movimiento de los planetas. Un planteamiento alternativo en la descripción de la interacción gravitacional, por lo tanto, es introducir el concepto de un ***campo gravitacional*** que cubre cada punto en el espacio. Cuando una partícula de masa *m* se sitúa en un punto donde el campo es el vector ***g***, la partícula experimenta una fuerza ***Fg = mg***. En otras palabras, el campo ejerce una fuerza sobre la partícula. Por lo tanto, el campo gravitacional se define por medio de

$$\bar{g} = \frac{\bar{F}_g}{m}$$

Es decir, el campo gravitacional en un punto en el espacio es igual a la fuerza gravitacional experimentada por una masa de prueba situada en el punto, dividido por la masa de prueba. Por ejemplo, considere un objeto de masa *m* cerca de la superficie terrestre. La fuerza gravitacional sobre el objeto está dirigida hacia el centro de la Tierra y tiene una magnitud *mg*. Puesto que la fuerza gravitacional sobre el objeto tiene una magnitud *GMTm/r2* (donde *MT* es la masa de la Tierra), el campo ***g*** a una distancia *r* del centro de la Tierra es

$$\bar{g} = \frac{\bar{F}_g}{m} = -\frac{GM_T}{r^2}\hat{r}$$

donde *r*ˆ es un vector unitario que apunta radialmente hacia fuera de la Tierra, y el signo menos indica que el campo apunta hacia el centro terrestre, como en la figura 336. Advierta que los vectores de campos en diferentes puntos que circundan la Tierra varían tanto en dirección como en magnitud. En una región pequeña cercana a la superficie de la Tierra, el campo hacia abajo *g* es aproximadamente constante y uniforme, como se indica en la figura 9.9. La ecuación anterior es válida en todos los puntos *fuera* de la superficie terrestre, suponiendo que la Tierra es esférica. En la superficie terrestre, donde *r = RT,* ***g*** tiene una magnitud de *9.8 N/kg*.

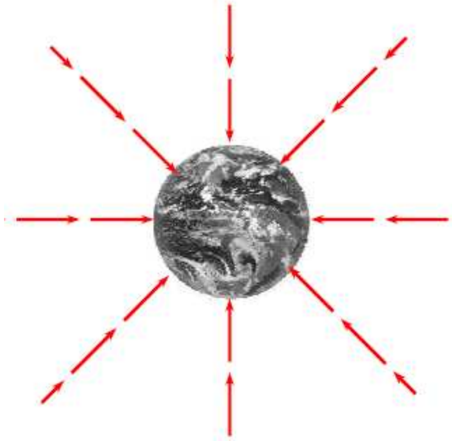

Figura 336

3.4.1. Ejercicios resueltos

1. La fuerza de atracción gravitacional que ejerce la Tierra sobre la Luna es mayor que la que ejerce la Luna sobre la Tierra, porque la masa de la Tierra es mucho mayor
   a. Verdadero
   b. Falso

SOLUCIÓN

La fuerza de atracción gravitacional es la misma para ambos, Tierra y Luna, por la tercera ley de Newton, por lo tanto la respuesta es b, o sea, falso.

2. Un planeta de masa constante orbita elípticamente alrededor del Sol. Despreciando cualquier fuerza de fricción existente, qué sucede con la energía cinética alrededor del centro del Sol?
   a. Permanece constante.
   b. Se incrementa constantemente.
   c. Decrece constantemente.
   d. Se incrementa cuando el planeta se acerca al Sol, y decrece cuanto se aleja de él.

SOLUCIÓN

Cuando un planeta se acerca al Sol la magnitud de su velocidad aumenta, según la segunda ley de Kepler, vea la figura 337. Si el planeta se aleja del Sol, la magnitud de la magnitud disminuye, por lo tanto la energía cinética aumenta mientras el planeta se acerca al Sol y disminuye cuando se aleja.

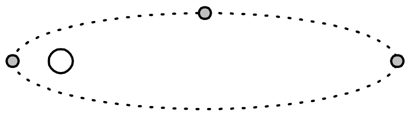

Figura 337

Respuesta: d

3. Un planeta es descubierto orbitando una estrella en la Galaxia Andrómeda, con el mismo diámetro orbital de la Tierra alrededor del Sol. Si esa estrella tiene cuatro veces más masa que el Sol, cuál será el periodo de revolución de ese nuevo planeta, comparado con el periodo de la Tierra alrededor del Sol
   a. ¼ del periodo del obtenido por la Tierra.
   b. ½ del periodo del obtenido por la Tierra.
   c. El doble del periodo del obtenido por la Tierra.
   d. Cuatro veces más del periodo del obtenido por la Tierra.

SOLUCIÓN

En la figura 338 se muestra la Tierra alrededor del Sol, y el planeta alrededor de la estrella. Sabemos que al moverse un objeto en una órbita circular existe una aceleración centrípeta, en la figura 339 se muestra este

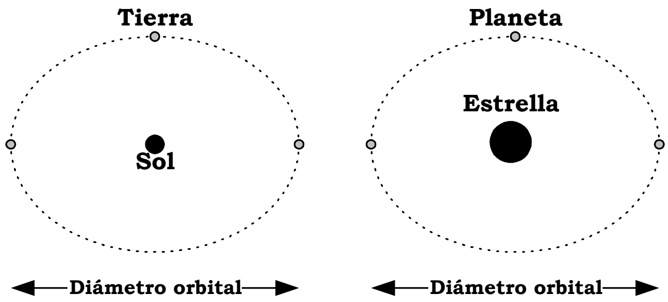

Figura 338

detalle. Aplicamos la segunda ley de Newton, sabiendo que la fuerza F es la de atracción gravitacional de la estrella (Sol) sobre el planeta (Tierra)

Del último resultado se puede observar que la relación entre el periodo y la masa de la estrella (o del Sol) es inversa con la raíz cuadrada, o sea, si la masa de la estrella aumenta de M a 4M el periodo disminuye de T a ½ T (por efecto de la raíz cuadrada).

Respuesta: b

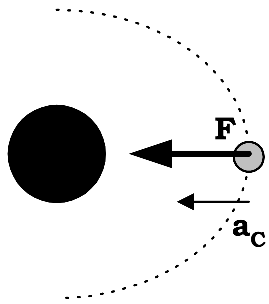

Figura 339

4. Un astronauta está ubicado a una altura igual al radio de la Tierra, sobre la superficie de la Tierra. En este punto su aceleración será.
   a) Cero. b. g c. ½ g d. ¼ g

SOLUCIÓN

Analizaremos la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre, y en la posición del astronauta. Las distancias a tomar en cuenta se miden desde el centro de la Tierra, observe la figura 340.

$\sum F = ma_C$ *Se aplica la segunda ley de Newton*

$F = ma_C$ *La única fuerza que actúa en la dirección de la aceleración de a_C es F*

$\frac{Gm_{ESTRELLA}m_{PLANETA}}{d^2} = m_{PLANETA}a_C$ *La fuerza F es la fuerza de atración gravitacional*

$\frac{Gm_{ESTRELLA}}{d^2} = a_C$ *Se simplifica la masa del planeta*

$\frac{Gm_{ESTRELLA}}{d^2} = \varpi^2 d$ *Se reemplaza la aceleración centrípeta*

$\frac{Gm_{ESTRELLA}}{d^3} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$ *Se reemplaza la velocidad angular y d pasa a dividir al lado izquierdo*

$\frac{Gm_{ESTRELLA}}{d^3} = \frac{4\pi^2}{T^2}$ *Se desarrolla la potencia*

$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{Gm_{ESTRELLA}}\right)d^3$ *Se despeja el periodo*

$$T = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{Gm_{ESTRELLA}}\right)d^3}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{m_{ESTRELLA}}}\sqrt{\frac{d^3}{G}}$$

La fuerza de atracción gravitacional, F_G, que genera la Tierra sobre el astronauta es también conocida como peso, w.
Por lo tanto $F_G = w$

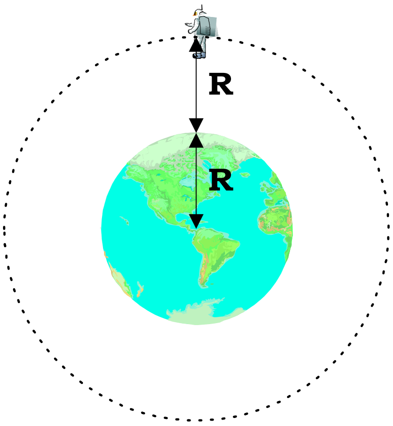

Figura 340

$$F_G = w$$

$$\frac{GM_{TIERRA}M_{ASTRONAUTA}}{d^2} = M_{ASTRONAUTA}g$$

$$\frac{GM_{TIERRA}}{d^2} = g$$

Note de la última ecuación que la aceleración de la gravedad, g, depende de la masa de la Tierra, misma que es constante, de la constante gravitacional, G, que también es un valor constante y de la distancia, d, medida desde el centro de la Tierra hasta donde se encuentra el astronauta. Si el astronauta se encuentra en la superficie de la Tierra, la distancia d será igual al radio de la Tierra, R; si, en cambio, el astronauta se encuentra orbitando la Tierra, como se muestra en la figura 485, la distancia d será 2R. Llamaremos g_S a la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra y g_o a la aceleración de la gravedad en la órbita a la que se encuentra el astronauta.

$$g_S = \frac{GM_{TIERRA}}{R^2}$$

$$g_0 = \frac{GM_{TIERRA}}{(2R)^2}$$

$$g_0 = \frac{GM_{TIERRA}}{4R^2}$$

$$g_0 = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{GM_{TIERRA}}{R^2}\right)$$

$$g_0 = \left(\frac{1}{4}\right)(g_S)$$

Por lo tanto la aceleración de la gravedad en la órbita es la cuarta parte de la que existe en la superficie.
Respuesta: d

5. Una luna está orbitando sobre su planeta madre. Cuál de las siguientes afirmaciones es siempre verdadera, sobre su energía cinética, K, y su energía potencial gravitacional, U?
   a) K es positiva y U es positiva.
   b. K es negativa y U es positiva.
   c. K es positiva y U es negativa.
   d. K es negativa y U es negativa.

SOLUCIÓN
El campo gravitacional, **g**, está dirigido hacia la Tierra y la posición se mide a partir del centro de la Tierra por lo tanto la energía potencial será negativa, mientras que la energía cinética será positiva por estar relacionada con el cuadrado de la velocidad.
Respuesta: c

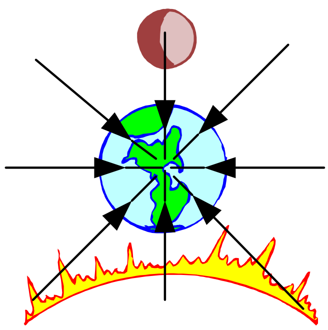

Figura 341

6. Una nave espacial está viajando hacia la Luna. En qué punto más allá de la Tierra cesa la fuerza de atracción gravitacional generada por ella sobre la nave?
   a) Cuando la nave está sobre la atmósfera.
   b) Cuando está a la mitad del camino entre la Luna y la Tierra.
   c) Cuando está más cerca de la Luna que de la Tierra.
   d) Nunca cesará la atracción de la Tierra sobre la nave.

SOLUCIÓN
La fuerza de atracción gravitacional está dada por

$$F_G = G\frac{mM}{r^2}$$

De donde se puede apreciar que será cero solamente si r es muy grande, esto es, si tiende al infinito, por lo tanto la fuerza no cesará.
Respuesta: d

3.4.2. Ejercicios Propuestos

1. Un piloto ejecuta una picada vertical (cae verticalmente a gran velocidad). Justo antes de que el avión comience a subir desde el fondo de la trayectoria recorrida, la fuerza aplicada sobre el piloto es:
   a) Menor que mg y apuntando hacia arriba.
   b) Menor que mg y apuntando hacia abajo.
   c) Mayor que mg y apuntando hacia arriba.
   d) Mayor que mg y apuntando hacia abajo.
   Respuesta: c

2. Suponga que existe un planeta de la mitad de la masa que la Tierra y la mitad de su radio. En la superficie de ese planeta, la aceleración de la gravedad es:
   a. El doble de la de la Tierra. b. Igual que en la Tierra.
   c. La mitad de la de la Tierra. d. Un cuarto de la de la Tierra.
   Respuesta: a

3. Un planeta (P) se está moviendo alrededor del sol (S) en una órbita elíptica. A medida que el planeta se mueve alrededor de la órbita, el momento angular del planeta:
   a) aumenta mientras se mueve desde el afelio al perihelio y disminuye mientras se mueve desde el perihelio al afelio.
   b) Disminuye mientras se mueve desde el afelio al perihelio y aumenta mientras se mueve desde el perihelio al afelio.
   c) Disminuye siempre.
   d) Aumenta siempre.
   e) Permanece igual siempre.
   (Segunda evaluación de Física A, I Término 2007 – 2008)
   Respuesta: e

4. Un satélite que gira en órbita circular en torno de la Tierra tiene una masa m = 1000 kg y está ubicado a 2000 km sobre la superficie de la Tierra.
   a) ¿Cuál es la energía potencial del sistema Tierra – satélite?
   b) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre el satélite?
   (Examen de mejoramiento de Física I, II Término 2004 – 2005)
   Respuesta: a) -4.73×10^{10} J; b) 5.6×10^{3} N

5. Un minero de 70 kg de masa desciende en una excavación vertical de 10 km de profundidad desde la superficie de la Tierra. Si consideramos que la Tierra es una esfera homogénea de radio $R = 6.38\times10^{6}$ m, ¿cuál será el peso en Newton que tendrá el minero en esa profundidad si se sabe que la aceleración de la gravedad en la superficie es $g_o = 9.81$ m/s^2.
   (Examen final de Física A, I Término 2005 – 2006)
   Respuesta: 685.6 N

6. La distancia entre una nave espacial y el centro de la Tierra aumenta de un radio de la Tierra a tres veces el radio de la Tierra. ¿Qué le sucede a la fuerza de gravedad que actúa en la nave espacial?
   (Examen Final de Física A, II Término 2005 – 2006)
   Respuesta: Es 1/9 de la inicial.

7. Dos planetas esféricos con radios $r_1 = 2R_o$ y $r_2 = R_o$ y masas $m_1 = 2m_o$ y $m_2 = m_o$, respectivamente, alrededor de la misma estrella la cual tiene $m_s = m_o$. ¿Cómo se comparan las velocidades de los planetas?
   (Examen Final de Física A, II Término 2005 – 2006)
   Respuesta: La velocidad del primer planeta en su órbita es $\sqrt{\frac{1}{2}}$ la velocidad del segundo planeta en su órbita.

8. En un modelo de la Tierra se considera que está formada por 3 capas esféricas de diferentes densidades, como se muestra en la figura 342. Determine la fuerza de atracción gravitacional (peso) que experimenta en los puntos 1, 2 y 3 en función de los datos. R1 = R/2, R2 = R, R3 = 2R, ρ1 = 2ρ y ρ2 = ρ.
   (Examen Final de Física I, I Término 2004 – 2005)
   Respuesta: $F_1 = -\frac{4}{3}\pi G\rho Rm$; $F_2 = -\frac{3}{2}\pi G\rho Rm$; $F_3 = -\frac{3}{8}\pi G\rho Rm$

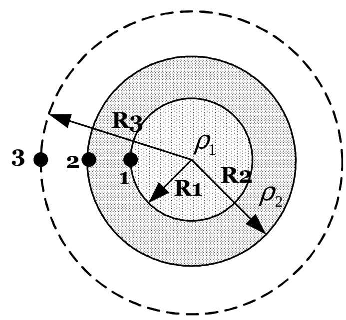

Figura 342

9. ¿Cuál sería el periodo de revolución de un planeta del sistema solar que se encuentra a 5800 millones de kilómetros del sol; sabiendo que la Tierra está a 150 millones de kilómetros del sol.
(Examen de mejoramiento de Física I, I Término 2004 – 2005)
Respuesta: 240 años

10. Calcule el valor de la gravedad en la superficie del satélite natural más grande de Urano, denominado Titania, sabiendo que tiene un radio que es 8 veces más pequeño que el de la Tierra y una masa 1700 veces menor que la masa de la Tierra ($m_{TIERRA} = 5.97\times10^{24}$ kg; $r_{TIERRA} = 6.38\times10^{6}$ m).
(Examen Final de Física I, II Término 2003 – 2004)
Respuesta: 0.37 m/s^2.

3.5. Movimiento Armónico Simple.

Una partícula que se mueve a lo largo del eje x, tiene un movimiento armónico simple cuando su desplazamiento x desde la posición de equilibrio, varía en el tiempo de acuerdo con la relación

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

donde A, ω, y δ son constantes del movimiento. Esta es una ecuación periódica y se repite cuando ωt se incrementa en 2π radianes. Para dar un significado físico a estas constantes, es conveniente graficar x en función de t, como se muestra en la figura 343. La constante A se llama ***amplitud*** del movimiento, es simplemente el máximo desplazamiento de la partícula, ya sea en la dirección positiva o negativa de x. La constante ω se llama ***frecuencia angular***, el ángulo δ se llama ***ángulo*** o ***constante de fase***, y junto con la amplitud quedan determinados por el desplazamiento y velocidad inicial de la partícula. Las constantes A y δ nos dicen cual era el desplazamiento en el instante $t = 0$. La cantidad $(\omega t + \delta)$ se llama la ***fase*** del movimiento y es de utilidad en la comparación del movimiento de dos sistemas de partículas.

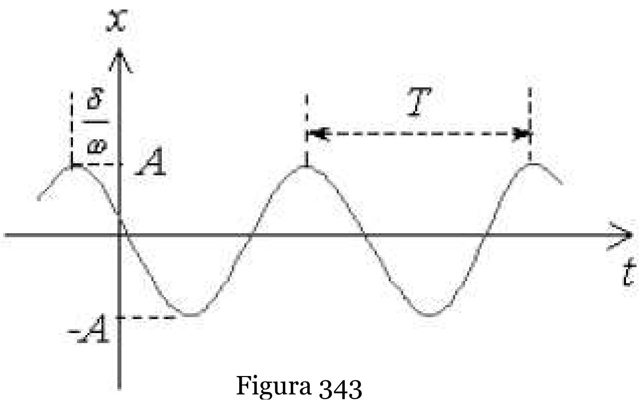

Figura 343

El periodo T es el tiempo que demora la partícula en completar un ciclo de su movimiento, esto es, es el valor de x en el instante $t + T$. Se puede demostrar que el periodo del movimiento esta dado por $T = 2\pi/\omega$, sabiendo que la fase aumenta 2π radianes en un tiempo T:

$$\omega t + \delta + 2\pi = \omega(t+T) + \delta$$

Comparando, se concluye que $\omega T = 2\pi$, o

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Al inverso del periodo se le llama ***frecuencia*** f del movimiento. La frecuencia representa el número de oscilaciones que hace la partícula en un periodo de tiempo, se escribe como:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Las unidades de medida de f en el SI son *1/s* o *ciclos/s*, llamados Hertz, Hz. Reacomodando la ecuación de la frecuencia, se obtiene la frecuencia angular ω, que se mide en *rad/s*, de valor:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

La velocidad de una partícula que tiene un movimiento armónico simple se obtiene derivando respecto al tiempo la ecuación del movimiento armónico simple

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \delta)$$

La aceleración de la partícula está dada por dv/dt:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \delta)$$

Como $x = A\cos(\omega t + \delta)$, se puede expresar la aceleración en la forma:

$$a = -\omega^2 x$$

De las ecuaciones de velocidad y de aceleración, teniendo en cuenta que los valores extremos de las funciones seno o coseno son ± 1, sus valores extremos máximos o mínimos son:

$$v = \pm\omega A$$
$$a = \pm\omega^2 A$$

Las curvas de posición, velocidad y aceleración con el tiempo se muestran en la figura 344. En estas curvas se ve, (figura 344.b), como la fase de la velocidad difiere en $\pi/2$ rad o 90º con la fase del desplazamiento. Esto es, cuando x es un máximo o un mínimo, la velocidad es cero. De igual forma, cuando x es cero, la rapidez es un máximo o un mínimo. Del mismo modo, como la fase de la aceleración difiere en π rad o 180º con la fase del desplazamiento, (figura 344.c), cuando x es un máximo o un mínimo, la aceleración es un mínimo o un máximo.

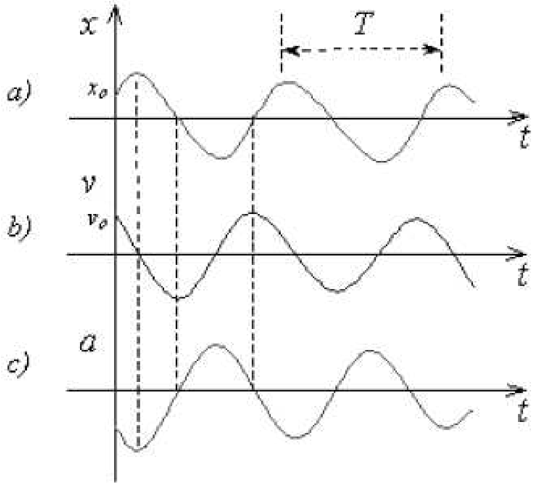

Figura 344

De la definición de energía cinética, reemplazando la ecuación de la rapidez de una partícula con movimiento armónico simple, se obtiene:

$$Ec = \tfrac{1}{2} mv^2 = \tfrac{1}{2} m\omega^2 A^2 sen^2 (\omega t + \delta)$$

La energía potencial elástica almacenada en un resorte, para cualquier deformación x es:

$$EE = \tfrac{1}{2} kx^2 = \tfrac{1}{2} kA^2 cos^2 (\omega t + \delta)$$

La energía mecánica total en el movimiento armónico simple, considerando que $\omega^2 = k/m$ o bien $m\omega^2 = k$, se puede escribir como:

$$E = Ec + EE = \tfrac{1}{2} kA^2 [sen^2 (\omega t + \delta) + \cos^2(\omega t + \delta)]$$
$$E = \tfrac{1}{2}\ kA^2$$

De donde se deduce que la energía mecánica total en el movimiento armónico simple es una constante del movimiento, proporcional al cuadrado de la amplitud. Este valor es igual a la máxima energía potencial elástica almacenada en un resorte cuando $x = \pm A$, ya que en esos puntos $v = 0$ y no hay energía cinética. Por otro lado, en la posición de equilibrio, $x = 0$ y por lo tanto $EE = 0$, además en este punto la rapidez es la máxima, de tal manera que toda la energía es energía cinética, es decir en $x = 0$:

$$E = Ec = \tfrac{1}{2} mv^2_{máx} = \tfrac{1}{2}\ \omega^2 A^2.$$

Como la superficie sobre la cual oscila el resorte es sin fricción, la energía se conserva, usando la ecuación de conservación de la energía, se puede escribir:

$$E = Ec + EE = cte$$
$$\tfrac{1}{2}\ mv^2 + \tfrac{1}{2}\ kx^2 = \tfrac{1}{2}\ kA^2$$

De esta expresión se puede calcular la rapidez para un desplazamiento arbitrario *x*:

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - x^2\right)} = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

encontrándose nuevamente que la rapidez es máxima en $x = 0$ y es cero en los puntos de regreso del oscilador $x = \pm A$.

El péndulo simple es otro sistema mecánico que tiene un movimiento periódico oscilatorio, si se mueve en un medio sin fricción. Un péndulo es un sistema formado por una masa puntual *m* suspendida en el aire por una cuerda de longitud *L*, de masa muy pequeña comparada con la masa *m*, por lo que se desprecia; la parte superior de la cuerda se encuentra fija, como se muestra en la figura 345. El movimiento del péndulo producido por la fuerza de gravedad se realiza en un plano vertical, y es un movimiento armónico simple si el ángulo θ que forma la cuerda del péndulo con la vertical es pequeño, como se puede demostrar a continuación.

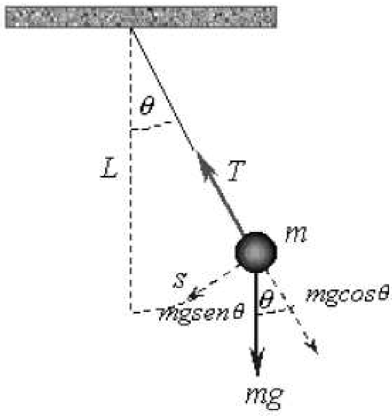

Figura 345

Las fuerzas que actúan sobre la masa *m* son la tensión *T* de la cuerda y el peso *mg* de la masa, se muestran en la figura 345. La componente tangencial del peso, *mg sen*θ, siempre apunta hacia θ = 0, en dirección opuesta la desplazamiento. Esta es la fuerza de restitución, entonces puede escribirse la ecuación de movimiento en la dirección tangencial de la forma:

$$F_t = -mgsen\theta \Rightarrow m\frac{d^2s}{dt^2} = -mgsen\theta$$

donde *s* es el desplazamiento medido a lo largo del arco de trayectoria y el signo menos indica que *Ft* actúa opuesta al movimiento. Como *s* = *L*θ y *L* es constante, la ecuación se transforma en:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}sen\theta$$

Como el lado derecho es proporcional a *sen*θ, y no solo a θ, se concluye que el movimiento no es armónico simple. Esa es una ecuación diferencial difícil de resolver, por lo que se supone que el péndulo se mueve en pequeños desplazamientos, tal que θ es pequeño, en este caso se puede usar la aproximación *sen*θ ≈ θ y la ecuación diferencial del movimiento se reduce a:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$$

que tiene la misma forma que la ecuación que describe al movimiento armónicosimple, por lo que solo en esas condiciones el movimiento del péndulo es un movimiento armónico simple. Su solución es entonces:

$$\theta = \Theta \cos(\omega t + \delta)$$

donde Θ es la amplitud que corresponde al máximo desplazamiento angular y ω es la frecuencia angular, de valor:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

El periodo del movimiento es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

El periodo y la frecuencia de un péndulo simple dependen solo de la longitud de la cuerda y la aceleración de gravedad, y son independiente de la masa *m* del péndulo. Esto significa que todos los péndulos simples de igual longitud en el mismo lugar, oscilarán con el mismo periodo.

Comúnmente se usa el péndulo simple como un medidor de tiempo. También es un dispositivo adecuado para hacer mediciones precisas de la aceleración de gravedad, que son importantes por ejemplo cuando las variaciones locales de *g* pueden dar información sobre las fuentes subterráneas de petróleo u otros recursos minerales.

Un péndulo físico consta de cualquier cuerpo rígido suspendido de un eje fijo que no pasa por su centro de masa. El cuerpo rígido oscilará cuando se desplaza de su posición de equilibrio. Si el cuerpo rígido se sujeta en un eje que pasa por un punto *O* a una distancia *d* del centro de masa, como se muestra en la figura 346, la fuerza debido a la gravedad produce un torque respecto de *O*, de magnitud $mgd\ sen\theta$. Como el torque se escribe $\tau = I\alpha$, donde *I* es el momento de inercia respecto al eje que pasa por *O* y α es la segunda derivada de la rapidez angular, se obtiene:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgd\ sen\theta$$

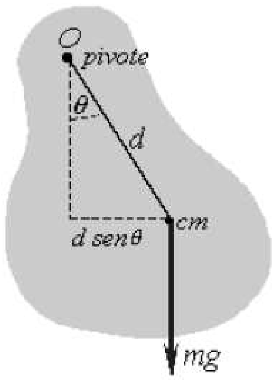

Figura 346

El signo menos indica que la fuerza de gravedad es una fuerza de restitución que produce un torque que hace disminuir el ángulo θ. Para resolver esta ecuación, nuevamente se supone que el péndulo físico se mueve en pequeños desplazamientos, tal que θ es pequeño, en este caso se puede usar la aproximación $sen\theta \approx \theta$ y la ecuación diferencial del movimiento se reduce a:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgd}{I}\theta = -\omega^2\theta$$

que tiene la misma forma que la ecuación que describe al movimiento armónico simple, por lo que en esas condiciones así es el movimiento del péndulo. Su solución es entonces:

$$\theta = \Theta \cos(\omega t + \delta)$$

donde Θ es la amplitud que corresponde al máximo desplazamiento angular y ω es la frecuencia angular, de valor:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

El periodo del movimiento es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

Se pueden usar estos resultados para medir el momento de inercia de cuerpos rígidos planos. Si se ubica el centro de masa y se mide *d*, se puede obtener el momento de inercia midiendo el periodo del péndulo físico. El periodo del péndulo físico se reduce al del péndulo simple, cuando toda la masa del cuerpo rígido se concentra en su centro de masa, ya que en este caso $I = md^2$.

3.4.1. Ejercicios Resueltos.

1. Una masa M = 5 kg descansa sobre una superficie lisa horizontal unida a dos resortes de constantes k1 = 1000 N/m y k2 = 2000 N/m, que inicialmente no tienen deformación alguna. Si desde la posición de equilibrio se perturba hacia 5cm la derecha y se suelta, determine si se genera un movimiento armónico simple, determine el periodo de oscilación y la ecuación de movimiento. (Lección de Física I, II Término 2003 – 2004)

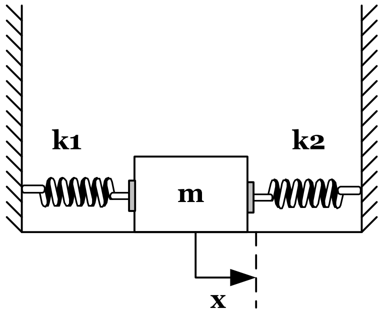

Figura 347

SOLUCIÓN

En la figura 348 se muestra el diagrama de cuerpo libre, para cuando el bloque se ha desplazado la distancia x.

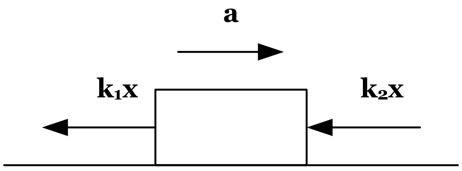

Figura 348

Ambas fuerzas aplicadas por los resortes son restitutivas, o sea, intentan llevar al equilibrio al bloque. Aplicamos la segunda ley de Newton para el movimiento

$$\sum Fx = ma$$
$$-k_1x - k_2x = ma$$
$$-(k_1 + k_2)x = ma$$
$$-\left(\frac{k_1 + k_2}{m}\right)x = a$$

El resultado anterior muestra que el movimiento es armónico simple, puesto que la aceleración es función de la posición; además el factor que acompaña a la posición es el cuadrado de la frecuencia angular, o sea,

$$\omega^2 = \frac{k_1 + k_2}{m}$$
$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$
$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$$

Al reemplazar los datos en la ecuación anterior tenemos que el periodo es T = 0.256 s. La ecuación del movimiento está dada por x = Asen(ωt + φ). Para cuando t = 0, o sea en el momento de la perturbación, x = 5 cm y como no hay amortiguamiento A = 5 cm, y al reemplazar los datos para ω la ecuación del movimiento queda

$$5 = 5\ \text{sen}\phi \quad \rightarrow \quad \text{sen}\ \phi = 1 \quad \rightarrow \quad \phi = \pi/2$$
$$x = 0.05\ \text{sen}(24.5t + \pi/2)$$

2. En el extremo libre de una barra de longitud L, está suspendido un cuerpo de masa m, y a una distancia b está sujeta de un resorte de constante elástica k, como se muestra en la figura 349. Si se considera que la masa de la barra es despreciable, calcule la frecuencia natural del sistema si este se comporta como un oscilador armónico.

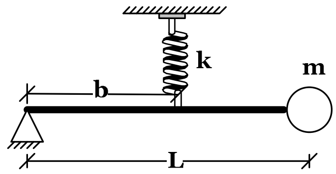

Figura 349

SOLUCIÓN

Realizamos el diagrama de cuerpo libre en el equilibrio del sistema, y utilizamos la condición de equilibrio para la rotación.

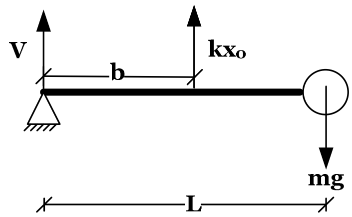

Figura 350

$$\sum \tau = 0$$
$$kbx_0 = mgL$$

En la figura 351 se muestra el sistema ya perturbado y que gira cuna aceleración angular

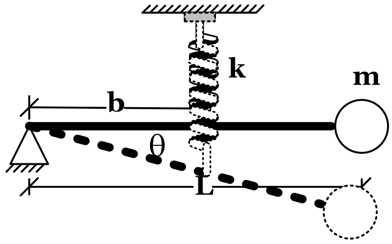

Figura 351

$$\sum \tau = I\alpha$$
$$mgL - k(x_0 + x)b = mL^2\alpha$$

La posición debe queda expresada en función de la aceleración angular. De la figura 351 se puede apreciar que tan θ = x/b y puesto que para ángulos pequeños tan θ ≈ θ tenemos que x = bθ, de manera que la ecuación anterior queda expresada como

$$mgL - kbx_0 - kbx = mL^2\alpha$$
$$mgL - mgL - kb(b\theta) = mL^2\alpha$$
$$-\left(\frac{kb^2}{mL^2}\right)\theta = \alpha$$

Lo cual muestra que el movimiento es armónico simple, y la frecuencia se determina mediante

$$\omega^2 = \frac{kb^2}{mL^2} \Rightarrow \omega = \frac{b}{L}\sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$2\pi f = \frac{b}{L}\sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$f = \frac{b}{2\pi L}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

3. Un sistema formado por dos masas, m1 y m2 están unidas por una cuerda inextensible que pasa por una polea ideal. El sistema está unido a la pared y al piso por medio de dos resortes de constantes k1 y k2, como se muestra en la figura 352. Inicialmente el sistema se encuentra en equilibrio. La masa m1 se encuentra sobre una superficie horizontal lisa. Si se perturba el sistema, determine si el movimiento adquirido por él es armónico simple y calcule el periodo de oscilación. (Examen de mejoramiento de Física I, I Término 1998 – 1999)

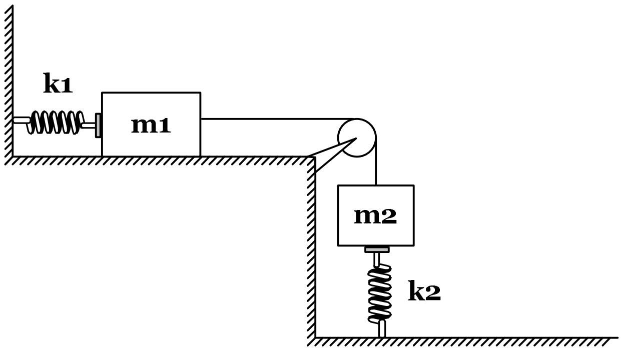

Figura 352

SOLUCIÓN
Realizamos el diagrama de cuerpo libre para cada bloque, en el equilibrio.

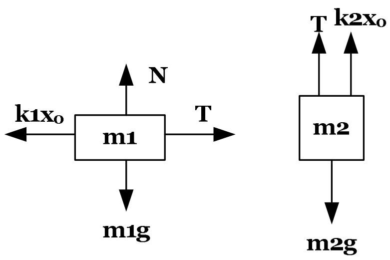

Figura 353

Para el bloque de masa m1 el análisis de las leyes de Newton es

$$\sum Fx = 0$$
$$T = k_1 x_0$$

Para el bloque de masa m2 es

$$\sum Fy = 0$$
$$T + k_2 x_0 - m_2 g = 0$$

Al combinar las dos ecuaciones tenemos la relación entre las masas y los resortes

$$k_1 x_0 + k_2 x_0 = m_2 g$$

Cuando se perturba el sistema tenemos que los resortes se estiran (o comprimen) una longitud x adicional a la que ya estaban estirados (o comprimido en el caso del resorte de constante k2) y se genera una aceleración.

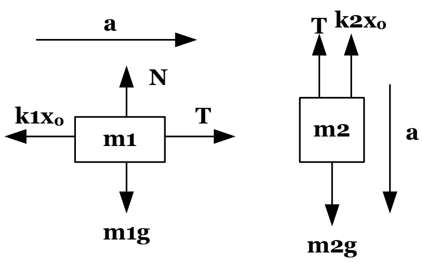

Figura 354

Las ecuaciones para el sistema acelerado quedan expresadas como sigue

$$\sum Fx = m_1 a \qquad\qquad \sum Fy = m_2 a$$
$$T - k_1(x_0 + x) = m_1 a \quad (1) \qquad m_2 g - T - k_2(x_0 + x) = m_2 a \quad (2)$$

$$(1) + (2)$$
$$m_2 g - k_1 x_0 - k_1 x - k_2 x_0 - k_2 x = (m_1 + m_2)a$$
$$m_2 g - (k_1 x_0 + k_2 x_0) - (k_1 + k_2)x = (m_1 + m_2)a$$
$$m_2 g - m_2 g - (k_1 + k_2)x = (m_1 + m_2)a$$
$$-\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1 + m_2}\right)x = a$$

Del resultado obtenido se observa que el sistema tiene movimiento armónico simple, puesto que la aceleración es función de la posición, y su periodo está determinado por

$$\omega^2 = \frac{k_1 + k_2}{m_1 + m_2}$$
$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m_1 + m_2}}$$
$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m_1 + m_2}}$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k_1 + k_2}}$$

4. Una barra rígida homogénea, de masa M y longitud L se suspende del punto O que está a una distancia x del extremo superior, alrededor del cual puede oscilar libremente. En el otro extremo se encuentra adherida una partícula de masa M/4.
   a) Encuentre el momento de inercia del sistema barra – partícula con respecto al eje O en función de x.
   b) Demuestre que para pequeños ángulos las oscilaciones serán armónicas y determine su frecuencia de oscilación.
   c) Encuentre el valor de x para que el sistema rote y no oscile.
   (Examen Final de Física I, I Término 1999 – 2000)

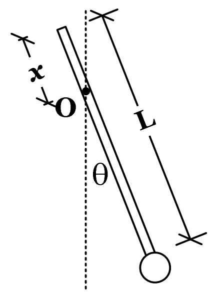

Figura 355

SOLUCIÓN

a) El momento de inercia del sistema es igual al momento de inercia de la barra sumado al momento de inercia de la partícula. Puesto que el eje de rotación no pasa por el centro de masa de la barra utilizamos el Teorema de los ejes paralelos o Teorema de Steiner.

$$I_{BARRA} = I_{CM} + Md^2$$
$$I_{BARRA} = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2} - x\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L^2}{4} - Lx + x^2\right)$$
$$I_{BARRA} = \frac{1}{3}ML^2 + Mx^2 - MLx$$

$$I_{PARTÍCULA} = \left(\frac{M}{4}\right)(L-x)^2$$

$$I_{PARTÍCULA} = \left(\frac{M}{4}\right)\left(L^2 - 2Lx + x^2\right)$$

$$I_{PARTÍCULA} = \frac{1}{4}ML^2 - \frac{1}{2}MLx + \frac{1}{4}Mx^2$$

$$I_{SISTEMA} = I_{BARRA} + I_{PARTÍCULA}$$

$$I_{SISTEMA} = \left(\frac{1}{3}ML^2 + Mx^2 - MLx\right) + \left(\frac{1}{4}ML^2 - \frac{1}{2}MLx + \frac{1}{4}Mx^2\right)$$

$$I_{SISTEMA} = \frac{7}{12}ML^2 + \frac{5}{4}Mx^2 - \frac{3}{2}MLx$$

b) Para la demostración de que el sistema se mueve con MAS utilizamos la segunda ley de Newton para la rotación, para lo que utilizamos el diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 356.

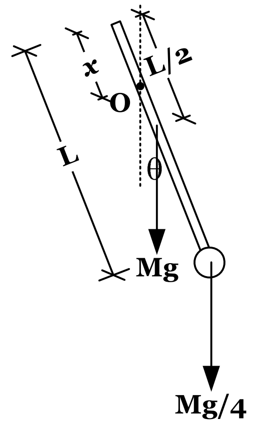

Figura 356

$$\sum \tau = I\alpha$$

$$-Mg\left(\frac{L}{2} - x\right)sen\theta - \frac{1}{4}Mg(L-x)sen\theta = I\alpha$$

$$-Mgsen\theta\left(\frac{1}{2}L + \frac{1}{4}L - x - \frac{1}{4}x\right) = I\alpha$$

$$-\frac{Mg}{I}\left(\frac{3}{4}L - \frac{5}{4}x\right)sen\theta = \alpha$$

$$\alpha = -\frac{Mg}{4I}(3L - 5x)\theta$$

Observe que debido a que el ángulo de oscilación es pequeño, sen θ ≈ θ.

c) Para que exista la rotación pero no la oscilación se debe cumplir que ω = 0, y de la ecuación anterior ya se conoce la frecuencia angular, ω.

$$\omega^2 = \frac{Mg}{4I}(3L - 5x)$$

$$0 = 3L - 5x$$

$$x = \frac{3}{5}L$$

5. Una barra de masa despreciable y longitud L tiene en su extremo una puntual M y está unida a un resorte de constante elástica k, a una distancia h debajo del punto de articulación, como se muestra en la figura 357. Encuentre la frecuencia de vibración del sistema para valores pequeños de θ. Examen final de Física I, II Término 2002 – 2003)

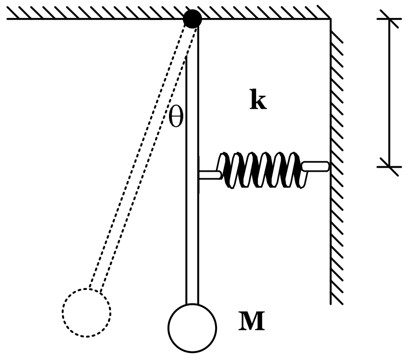

Figura 357

SOLUCIÓN

Aplicamos la segunda ley de Newton para la rotación, en función de los datos presentados en el diagrama de cuerpo libre que se muestra en la figura 358.

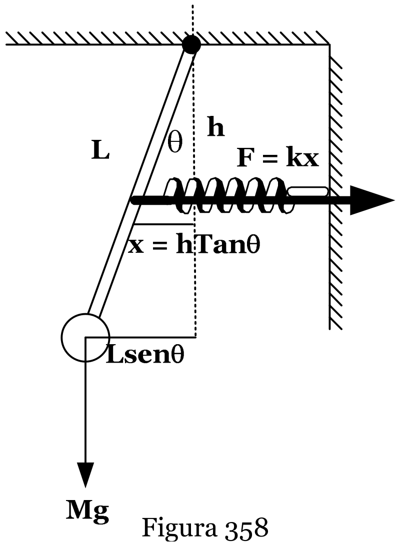

Figura 358

$$\sum \tau = I\alpha$$

$$-MgLsen\theta - kxh = \left(ML^2\right)\alpha$$

$$-MgL\theta - k\left(hTan\theta\right)h = ML^2\alpha$$

$$-\frac{\left(MgL + kh^2\right)}{ML^2}\theta = \alpha$$

$$\omega^2 = \frac{MgL + kh^2}{ML^2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{MgL + kh^2}{ML^2}}$$

$$2\pi f = \sqrt{\frac{MgL + kh^2}{ML^2}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi L}\sqrt{\frac{MgL + kh^2}{M}}$$

6. Un cuerpo de 70 kg se deja caer desde una altura de 1 m sobre un resorte ideal de constante 5000 N/m, y queda adherido al resorte. Calcular:
   a) La máxima compresión del resorte.
   b) La amplitud de las oscilaciones.
   (Examen de mejoramiento de Física I, I Término 2002 – 2003)

SOLUCIÓN

a) Por conservación de la energía analizamos la compresión máxima del resorte
Hacemos un gráfico que represente la situación inicial y la final.

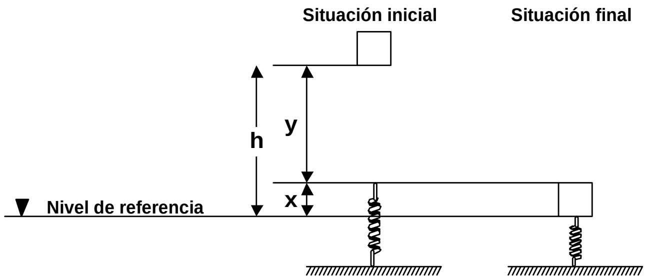

Figura 359

Se puede apreciar en el gráfico que no existen fuerzas no conservativas, por tanto, la energía mecánica inicial es igual a la energía mecánica final.

$$E_{INICIAL} = E_{FINAL}$$
$$mg(y + x) = \frac{1}{2}kx^2$$
$$mgy + mgx = \frac{1}{2}kx^2$$
$$2(70)(10)(1) + 2(70)(10)x = 5000x^2$$
$$25x^2 - 7x - 7 = 0$$
$$x = 0.69m$$

<u>El resorte se comprime aproximadamente 69 cm</u>

b) Para obtener a amplitud de las oscilaciones analizamos el movimiento como armónico simple.

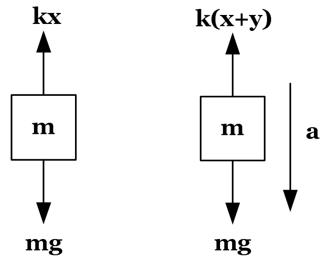

Figura 359

Para el equilibrio

$$\sum Fy = 0$$
$$kx - mg = 0$$

Para el movimiento acelerado

$$\sum Fy = ma$$
$$-kx - ky + mg = ma \quad \Rightarrow \quad -\frac{k}{m}y = a$$
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Si utilizamos la ecuación de la velocidad máxima para un movimiento armónico simple tenemos que

$$v_{MÁX} = A\omega$$

y la velocidad es máxima cuando el cuerpo entra en contacto con el resorte, o sea,

$$E_{INICIAL} = E_{FINAL}$$
$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$
$$v_{MÁX} = \sqrt{2gh}$$

Combinamos las dos ecuaciones, de manera que así obtendremos la amplitud de las oscilaciones

$$v_{MÁX} = A\omega$$
$$\sqrt{2gh} = A\sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$A = \sqrt{\frac{2mgh}{k}} = \sqrt{\frac{2(70)(10)(1)}{5000}}$$
$$A = 0.529m$$
$$A = 52.9cm$$

7. Un resorte de constante k = 50 N/m fijo al suelo se ata a un extremo de una cuerda que pasa por una polea en forma de disco de masa M = 10 kg y de radio R = 20 cm, por el otro extremo de la cuerda se sostiene un bloque de masa m = 1 kg tal como se muestra en la figura 360. Si esta situación de equilibrio se perturba deslizando hacia abajo al bloque y luego soltándolo, demuestre que el sistema describirá M.A.S y además encuentre su periodo de oscilación. (Examen de mejoramiento de Física I, III Término 2002 – 2003)

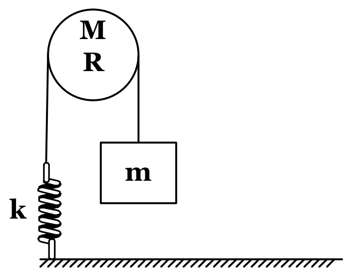

Figura 360

SOLUCIÓN
En el equilibrio se deduce que

$$\sum Fy = 0$$
$$mg = ky_0$$

Cuando el sistema se encuentra acelerado, se tiene que

$$\sum Fy = ma$$
$$mg - T = ma$$
$$T = mg - ma$$

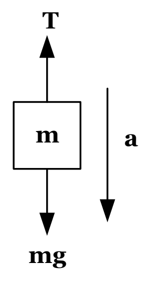

Figura 361

$$\sum \tau = I\alpha$$
$$TR - T_1 R = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{a}{R}\right)$$
$$T - T_1 = \frac{1}{2}Ma$$

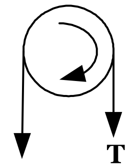

Figura 362

Al combinar las tres ecuaciones tenemos

$$T - T_1 = \frac{1}{2}Ma$$
$$(mg - ma) - k(y + y_0) = \frac{1}{2}Ma$$
$$ky_0 - ky_0 - ky = \frac{1}{2}Ma + ma$$
$$a = -\frac{2k}{2m + M}y$$

Con esto último queda demostrado que el movimiento es armónico simple, y de esta misma ecuación podemos encontrar el periodo

$$\omega^2 = \frac{2k}{2m + M}$$
$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m + M}}$$
$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{2k}{m + M}}$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + M}{2k}}$$

3.5.1. Ejercicios Propuestos

Para los ejercicios 1, 2 y 3 se da como información el gráfico x – t para un objeto en movimiento armónico simple.

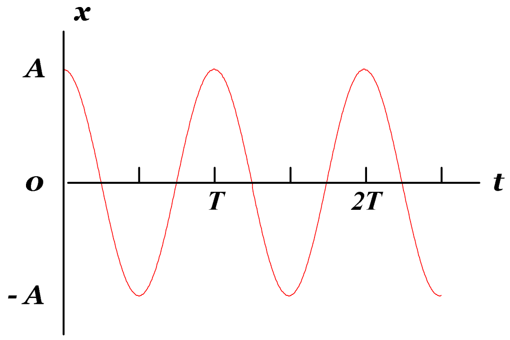

Figura 363

1. ¿En cuál de los tiempos siguientes el objeto tiene la aceleración más negativa a_x?
   a) t = T/4 b) t = T/2 c) t = 3T/4 d) t = T

2. ¿En cuál de los tiempos siguientes la energía potencial del objeto es la más grande?
   a) t = T/8 b) t = T/4 c) t = 3T/8 d) t = T/2

3. ¿En cuál de los tiempos siguientes la energía cinética del objeto es la más grande?
   a) t = T/4 b) t = T/2 c) t = 3T/4 d) t = T

(Segunda evaluación de Física A, I Término 2007 – 2008)
Respuesta: 2: b); 3: d); 4: d)

4. Un objeto en el extremo de un resorte está oscilando en movimiento armónico simple. Si la amplitud de la oscilación se duplica
   a) el periodo y la rapidez máxima de la oscilación del objeto se duplican.
   b) El periodo de la oscilación sigue siendo igual y se duplica la rapidez máxima del objeto.
   c) El periodo y la rapidez máxima del objeto siguen siendo igual.
   d) Se duplica el periodo de oscilación y la rapidez máxima del objeto sigue siendo igual.
   e) El producto del periodo de oscilación y la rapidez máxima del objeto se duplica.

(Segunda evaluación de Física A, I Término 2007 – 2008)
Respuesta: e)

Los ejercicios 5 y 6 se refieren al gráfico x – t para un objeto en movimiento armónico simple mostrado en la figura 364.

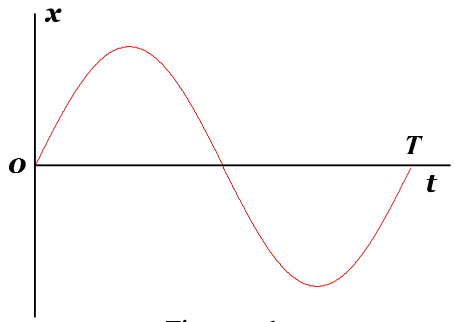

Figura 364

Considere las siguientes cuatro situaciones

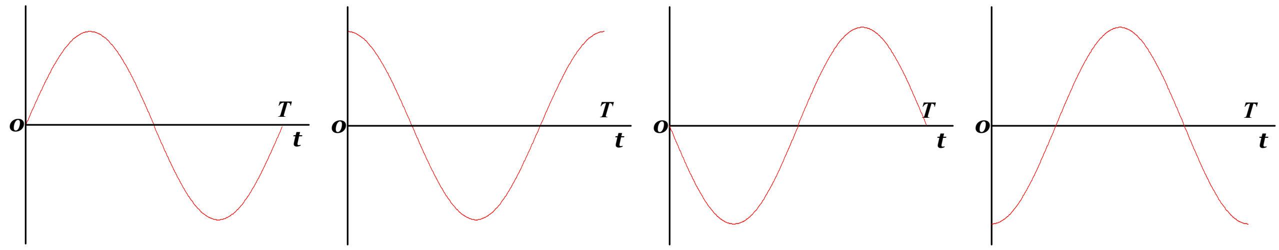

Gráfico I **Gráfico II** **Gráfico III** **Gráfico IV**

Figura 365

5. ¿Cuál de los gráficos muestra correctamente la velocidad versus tiempo para este objeto?
   a) Gráfico I b) Gráfico II c) Gráfico III d) Gráfico IV

6. ¿Cuál de los gráficos muestra correctamente la aceleración versus tiempo para ese objeto?
   a) Gráfico I b) Gráfico II c) Gráfico III d) Gráfico IV

(Segunda Evaluación de Física A, I Término 2007 – 2008)
Respuesta: 5: d); 6: c)

7. Una bala (m = 0.100 kg) se dispara con una velocidad v y se incrusta en un bloque (M = 0.900 kg) que se encuentra sobre una superficie lisa conectado a un resorte (k = 5000 N/m), como se muestra en la figura 366. Producto de la colisión, el resorte se comprime una distancia máxima de 9.460 cm. Encuentre:
   a) La velocidad v de la bala.
   b) El periodo de oscilación del sistema.
   c) La velocidad del bloque cuando el resorte está comprimido 5.000 cm.
   d) La posición del bloque en función del tiempo
   (Segunda Evaluación de Física A, I Término 2006 – 2007)
   Respuesta: a) 6.7 m/s; b) 0.089 s; c) 5.7 m/s; d) x = 0.0946 Sen(70.7t + π/2)

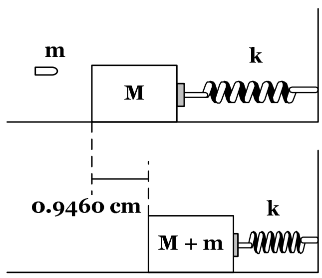

Figura 366

8. Una varilla uniforme de longitud L y masa M está articulada en un extremo y sostenida por un resorte de constante k del otro extremo. Cuando está en reposo la viga queda horizontal, como se muestra en la figura 367. Para desplazamientos pequeños verticales de la varilla
   a) demuestre que el sistema realiza un MAS.
   b) Deduzca una expresión para el periodo de oscilación de este sistema.
   (Tercera Evaluación de Física A, I Término 2006 – 2007)

   Respuesta: b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{3k}}$

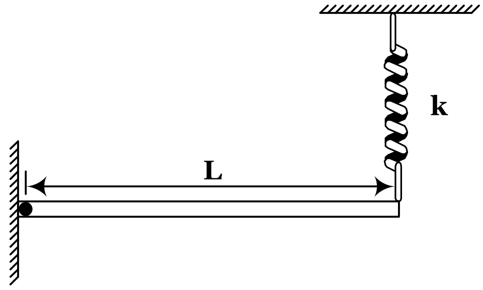

Figura 367

9. Una partícula realiza un MAS y su posición, dada por la expresión x(t) = A cos(ωt + ϕ), se muestra en el diagrama x vs t adjunto. Determine:
   a) los valores A, ω y ϕ
   b) la posición de la partícula en t = 0.85 s.
   (Segunda Evaluación de Física A, II Término 2006 – 2007)
   Respuesta: a) 0.82 cm; 9.11 rad/s; 58.37° = 1.02 rad; b) – 0.647 cm

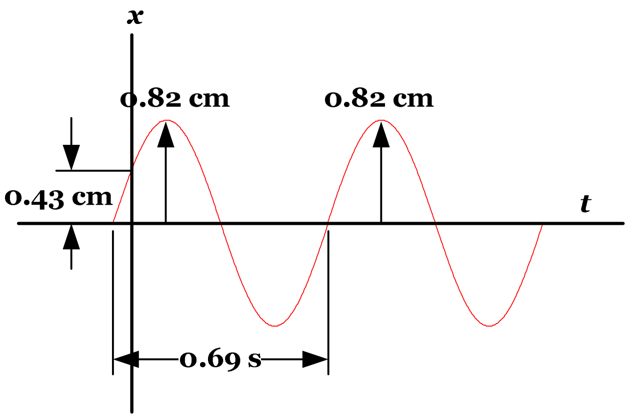

Figura 368

10. Dos bloques de masa m1= 5kg y m2 = 3kg están unidos por un hilo ligero que pasa sobre dos poleas de masa despreciable y sin fricción, como se muestra en la figura 369. La masa más pequeña está unida a un resorte de constante k = 120 N/m, si al sistema se lo perturba desde su posición de equilibrio
   a) Demuestre que el sistema se mueve con MAS.
   b) Encuentre el periodo de oscilación.
   (Examen final de Física A, II Término 2005 – 2006)
   Respuesta: b) 1.62 s

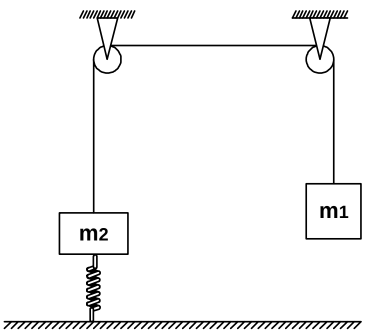

Figura 369

11. Un objeto vibra con MAS, con un periodo de 1.2 s y amplitud de 0.6 m. En t = 0 el objeto pasa por la posición de equilibrio. ¿A qué distancia de la posición de equilibrio se encontrará el objeto cuando t = 0.48 s?. (Segundo examen parcial del Física I, II Término 2004 – 2005)
Respuesta: 0.35 m

12. Una barra delgada de masa M = 10 kg está unida en sus extremos a dos masas puntuales, m, que descansan inicialmente en equilibrio en posición vertical. Si el sistema tiene una articulación lisa en el punto P como se muestra en la figura 370, demuestre que para pequeñas perturbaciones el sistema se mueve con m.a.s. y encuentre su periodo T.
(Examen de mejoramiento de Física I, II Término 2004 – 2005)
Respuesta: 4.75 s

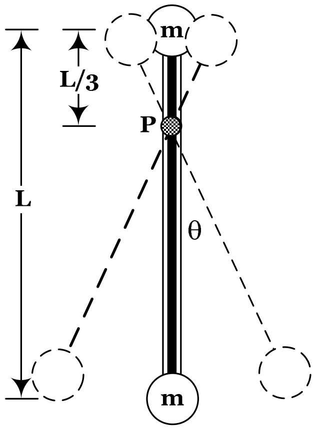

Figura 370

13. El periodo de un m.a.s. es de 2 s. ¿Cuál será la amplitud si al pasar por su posición de equilibrio lo hace con velocidad de π m/s. (Examen de mejoramiento de Física I, I Término 2004 – 2005).
Respuesta: 1 m

14. Un cuerpo puntual que se mueve horizontalmente con m.a.s. tiene una frecuencia de 2 Hz. Si en el instante t = 0, cuando el cuerpo está 3 cm a la derecha de la posición de equilibrio, su velocidad instantánea es 30 cm/s hacia la izquierda, encuentre
   a) El periodo de oscilación.
   b) La frecuencia angular.
   c) El desfase angular en radianes.
   d) La amplitud del movimiento.
   e) La ecuación de la velocidad para un instante cualquiera
   f) La ecuación de la aceleración para un instante cualquiera

(Examen final de Física I, II Término 2003 – 2004)
Respuesta: a) 0.5 s; b) 4π rad/s; c) - 0.90 rad; d) 3.83 cm; e) v = 48.13 cos(4πt – 0.90); a = - 605 sen(4πt – 0.90)

15. La figura 371 muestra un bloque de 7.5 kg, inicialmente en reposo, el cual está unido a un resorte de constante k = 750 N/m. Un bloque de 4.5 kg se coloca sobre. Si el coeficiente de fricción estática entre los bloques es 0.7 y la fricción en la superficie es despreciable, determine cuál es la máxima deformación que se puede dar al resorte, sin que el bloque de 4.5 kg deslice al hacer oscilar el sistema con m.a.s.
(Examen Final de Física I, I Término 2003 – 2004)
Respuesta: 11.0 cm

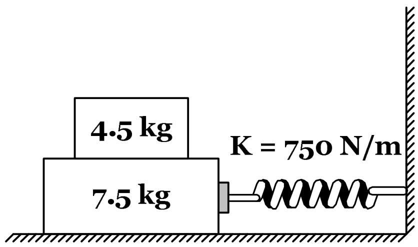

Figura 371

16. Un resorte elástico ideal, de masa despreciable y constante elástica k = 50 N/m, cuelga verticalmente y sostiene en su extremo libre una esfera puntual de masa M en equilibrio. Si la masa es ligeramente perturbada verticalmente, el sistema se mueve con m.a.s.
    a) ¿Cuál debe ser el valor de la masa para que el periodo de oscilación sea 1.00 s.
    b) Si la masa disminuye un 5% de su valor ¿en que porcentaje varía el periodo?
    c) ¿cuál es el valor de este nuevo periodo?
    (Examen de mejoramiento de Física I, I Término 2003 – 2004)
    Respuesta: a) 1.27 kg; b) 2.53% menor que el primero; c) 0.97 s

17. Una esfera de mas m está unida a un resorte de constante de fuerza k como se muestra en la figura 372. Si la esfera no desliza mientras oscila, determine su periodo.
    (Examen final de Física I, I Término 1996 – 1997)
    Respuesta: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{7k}{5m}}$

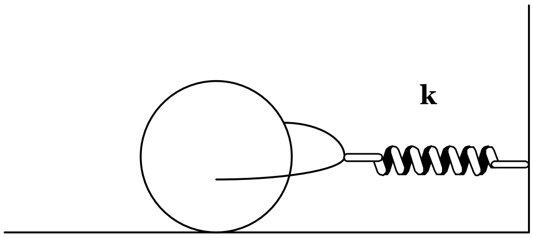

Figura 372

18. Determine la frecuencia natural para pequeñas oscilaciones del sistema mostrado. Las masas de las poleas y la fricción son despreciables.
    Respuesta: $f = \dfrac{2}{\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

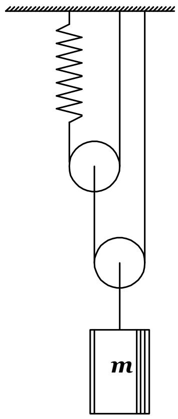

Figura 373

19. Una masa m está fija en un extremo de una barra de peso despreciable, y que está pivotada a una distancia c de la masa m. ¿Cuál es la frecuencia natural de vibración para pequeñas amplitudes de movimiento?
    Respuesta: $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{2kb^2}{mc^2} - \dfrac{g}{c}}$

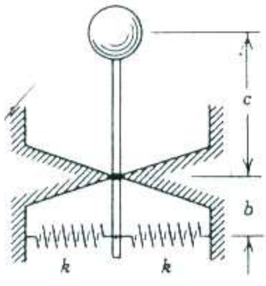

Figura 374