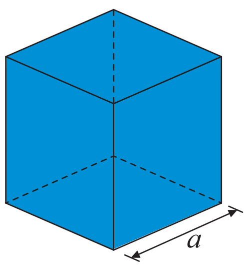
Capítulo 8
Geometría del Espacio

Introducción

Esta rama de la geometría, también denominada Estereometría, se ocupa de las propiedades y medidas de figuras geométricas en el espacio tridimensional. Estas figuras se denominan sólidos y entre ellas se encuentran el cono, el cubo, el cilindro, la pirámide, la esfera y el prisma. La geometría del espacio amplía y refuerza las proposiciones de la geometría plana y es la base fundamental de la trigonometría esférica, la geometría analítica del espacio y la geometría descriptiva, entre otras.



El estudio de la geometría tridimensional data de la antigua Grecia, cuando se planteó el famoso problema de **la duplicación del cubo**. Cuenta la leyenda que la peste asolaba la ciudad de Atenas, hasta el punto de llevar a la muerte a Pericles. Un embajador de la ciudad fue al oráculo de Delfos, para consultar qué se debía hacer para erradicar la mortal enfermedad. Tras consultar al oráculo, la respuesta fue que se debía duplicar el altar consagrado a Apolo en la isla de Delfos. El altar tenía una peculiaridad: su forma cúbica. Los atenienses construyeron un altar cúbico en el que las medidas de los lados eran el doble de las medidas del altar de Delfos, pero la peste no cesó. Consultado de nuevo, el oráculo advirtió a los atenienses que el altar no era el doble de grande, sino 8 veces mayor, puesto que el volumen del cubo es el cubo de su arista $((2a)^3 = 8a^3)$. Nadie supo cómo construir un cubo cuyo volumen fuese exactamente el doble del volumen de otro cubo dado, y el problema matemático persistió durante siglos (no así la enfermedad).

János Bolyai, matemático húngaro (1802-1860)

Gauss fue el primero que creyó construir una geometría (un modelo del espacio) en la que no se cumple el V postulado de Euclides, pero no publicó su descubrimiento. Son Bolyai y Lobachevsky quienes, de manera independiente y simultánea, publicaron cada uno una geometría distinta en la que no se verifica tampoco el V postulado. ¿Qué quiere decir esto? Tanto Bolyai como Lobachevsky parten de un objeto geométrico y establecen sobre él, unos postulados que son idénticos a los de Euclides en "*Los Elementos*", excepto el quinto. Pretenden originalmente razonar por reducción al absurdo: si el V postulado depende de los otros cuatro, cuando lo sustituya por aquél que dice exactamente lo contrario, se ha de llegar a alguna contradicción lógica.

Nikolai Lobachevsky, matemático ruso (1792-1856)

Lo sorprendente es que no se llega a contradicción alguna, lo cual indica dos cosas:

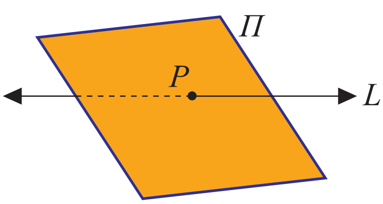
1. El V postulado es independiente de los otros cuatro, es decir, no puede deducirse de los otros cuatro, no es un teorema, y Euclides hizo bien en considerarlo como un postulado.
2. Existen modelos del espacio en los que, en contra de toda intuición, un punto que no esté contenido en una cierta recta no necesariamente forma parte de una única recta paralela a la dada. Esto no es intuitivo, pues no podemos concebir tal cosa, no podemos imaginar (ni mucho menos dibujar) una situación así, sin reinterpretar los conceptos de recta, plano, etc. Pero desde el punto de vista lógico, es perfectamente válido.

Como es de imaginar, esto supuso una fuerte crisis en las matemáticas del siglo XIX, que vino a sumarse a otras controversias.

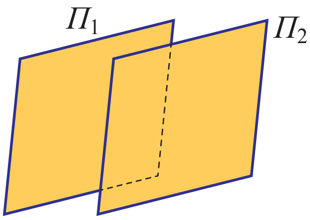
8.1 Figuras en el espacio

En esta sección se identifican los elementos que participan en la geometría espacial, los cuales son fundamentales para la creación de objetos en tres dimensiones.

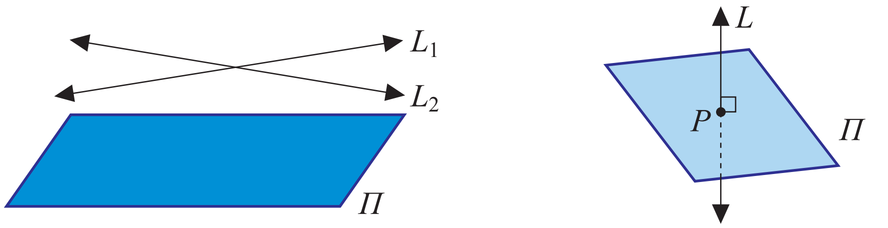
En el espacio existen figuras (conjuntos de puntos) que no están contenidas en plano alguno, a continuación se muestran algunos de ellos y sus relaciones.



a) Recta intersecando un plano.



b) Planos paralelos.



c) Dos rectas concurrentes paralelas a un mismo plano.

d) Recta perpendicular a un plano.

Figura 8.1: Figuras en el espacio.

8.2 Rectas y planos en el espacio

Objetivos

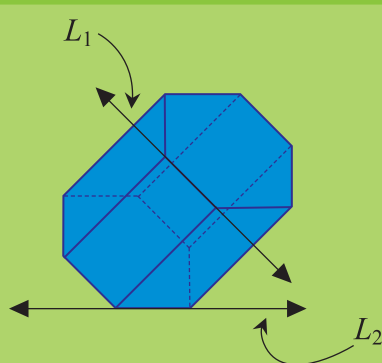
Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dadas dos rectas en el espacio, explicar si son secantes, alabeadas o paralelas, justificando adecuadamente su respuesta.
* Dados un plano y una recta en el espacio, explicar si la recta es perpendicular, secante o paralela al plano.
* Interpretar el concepto de semiespacio, ángulo diedro, ángulo poliedro, arista, cara y vértice.

En el espacio puede ocurrir que dos rectas no sean paralelas o no tengan algún punto de intersección, lo cual no ocurre en el plano.

Definición 8.1 (Rectas alabeadas)

Dos rectas L_1 y L_2 son alabeadas cuando no son paralelas ni se intersecan.



Con respecto a un plano Π, una recta L puede ocupar una de las tres posiciones siguientes:

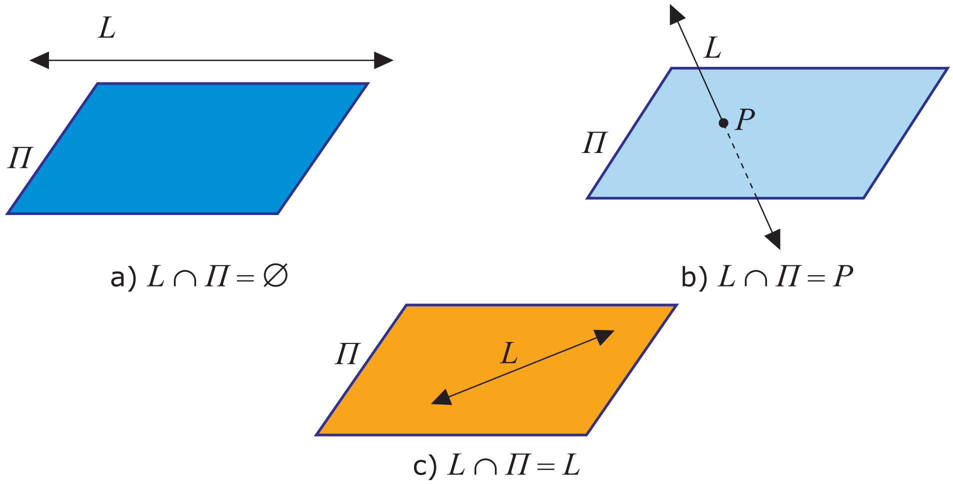


Figura 8.2: Recta L y plano Π.

a) L es paralela al plano Π y no está contenida en él,
b) L interseca a Π en un punto P, y
c) L es paralela a Π y es un subconjunto de Π.

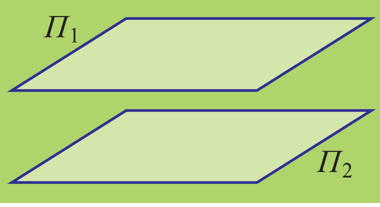
De los casos a) y c) se entiende el paralelismo entre el plano Π y la recta L, así:

$$(L \parallel \Pi) \equiv ((L \cap \Pi = \varnothing) \vee (L \subset \Pi))$$

Definición 8.2 (Planos paralelos)

Un plano es paralelo a otro cuando no se intersecan o son coincidentes. La notación para el paralelismo es: $\Pi_1 \| \Pi_2$.

$$(\Pi_1 \parallel \Pi_2) \equiv ((\Pi_1 \cap \Pi_2 = \varnothing) \vee (\Pi_1 = \Pi_2))$$



Un plano siempre divide al espacio en dos **semiespacios**.

Dos planos no paralelos se denominan **planos secantes**.

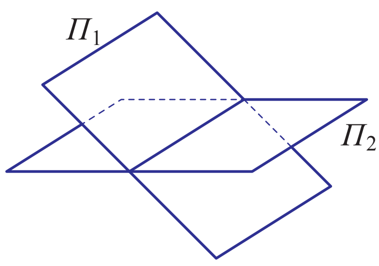


Figura 8.3: Planos secantes.

Definición 8.3 (Ángulo diedro)

Es la unión de dos semiplanos que se intersecan en su borde. Al ángulo diedro se lo suele denominar simplemente diedro; a los semiplanos se los denomina caras del diedro y al borde común se lo denomina arista del diedro.

Dos planos secantes determinan un ángulo diedro. Un ejemplo de este ángulo lo encontramos en la figura que se forma al abrir una tarjeta de cumpleaños.

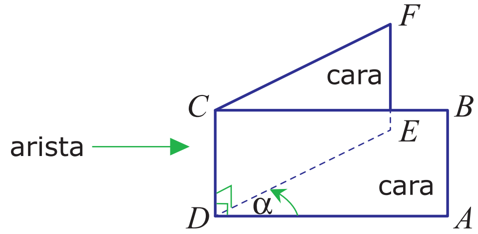


Figura 8.4: Ángulo diedro.

En el diedro $ABCDEF$, los semiplanos $ABCD$ y $CDEF$ son las **caras** del diedro, y la recta $\overline{CD}$ es la **arista** del diedro.

Se denomina **ángulo rectilíneo** al ángulo formado por dos rectas perpendiculares, $\overline{DA}$ y $\overline{DE}$, a la arista $\overline{DC}$, cada una situada en caras diferentes del diedro. La **medida del ángulo diedro** es la medida de su ángulo rectilíneo α.

Definición 8.4 (Ángulo poliedro)

Es la unión de semirrectas que se intersecan en su extremo V y que tienen un punto común con la poligonal d contenida en un plano que no contiene a V. A las semirrectas que se intersecan con uno de los vértices de la poligonal se las denomina aristas del ángulo poliedro y el punto V se denomina vértice del ángulo poliedro.

Por ejemplo, el ángulo triedro (intersección de tres semiplanos) es un ángulo poliedro formado por el vértice V, tres aristas $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{VC}$, y tres caras VAB, VBC, VCA.

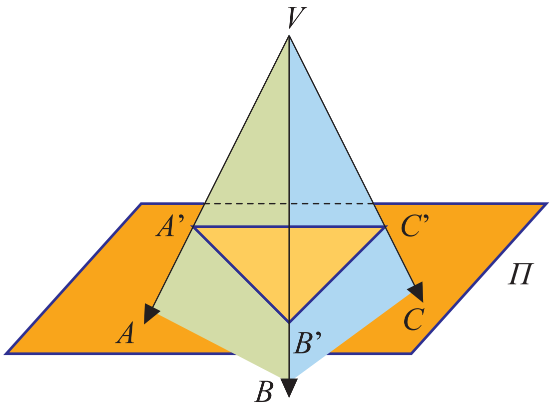


Figura 8.5: Ángulo poliedro.

La intersección del ángulo triedro con el plano Π determina el triángulo $A'B'C'$.

Ejemplo 8.1 Ángulo poliedro.

La figura que forman en un rincón de una habitación las dos paredes y el techo que inciden en ese punto es un claro ejemplo de un ángulo triedro. Las pirámides utilizadas por civilizaciones como las egipcias emplearon el concepto de ángulo tetraedro. La plomada, que es un peso que se emplea en construcción, tiene en su punta un ángulo hexaedro.



8.3 Cuerpos geométricos

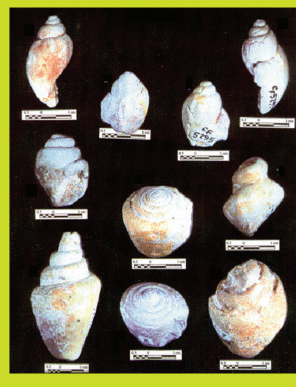
En esta sección se clasificarán diferentes cuerpos que se pueden presentar en el espacio tridimensional, atendiendo a los elementos estudiados anteriormente.

Definición 8.5 (Poliedro)

Se define como poliedro al cuerpo que está limitado por superficies planas (denominadas caras) y de contorno poligonal (denominadas aristas de las caras). Los vértices del poliedro son los vértices de las caras.

Ejemplo 8.2 Poliedros.

Algunos minerales y esqueletos de criaturas marinas son modelos de los sólidos denominados poliedros que se estudiarán en esta sección.



Un **poliedro convexo** es aquel que está limitado por polígonos convexos. Entre sus propiedades más importantes figuran:

- Cada arista de una cara pertenece también a otra cara y únicamente a otra. Dichas caras se denominan **contiguas**.
- Dos caras contiguas están en planos distintos.
- El plano que contiene a cada cara deja a todas las demás a un mismo lado del espacio, es decir, en un mismo semiespacio.
- El número de aristas es igual al número de caras más el número de vértices disminuido en 2.

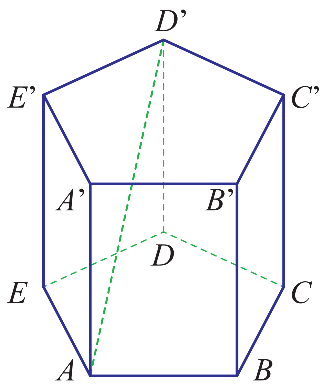


Figura 8.6: Poliedro.

En el poliedro anterior se tienen los vértices A, B, C, D, E, A', B', C', D', E', las aristas $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EA}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$, $\overline{D'E'}$, $\overline{E'A'}$, $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$, $\overline{EE'}$, y las caras $AEE'A'$, $BAA'B'$, $CBB'C'$, $DCC'D'$, $EDD'E'$. En cada vértice deben concurrir al menos tres aristas.

La **diagonal** del poliedro es un segmento de recta que une dos vértices situados en caras diferentes. Por ejemplo, $\overline{AD'}$ es una diagonal en la figura anterior.

Según el número de sus caras, los poliedros se denominan así:

Número de Caras	Nombre
4	Tetraedro
5	Pentaedro
6	Hexaedro
7	Heptaedro
8	Octaedro
10	Decaedro
12	Dodecaedro
20	Icosaedro

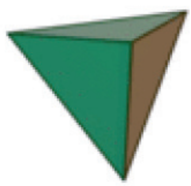
Cuadro 8.1: Nombres de poliedros según su número de caras.

Definición 8.6 (Poliedro regular)

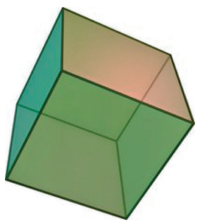
Un poliedro de n caras se dice que es regular, si y sólo si todas sus caras son polígonos regulares congruentes y sus ángulos poliedros también son congruentes.

Los poliedros regulares, también denominados sólidos platónicos (en honor a Platón), son sólo cinco:

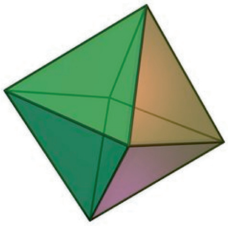
1. **Tetraedro regular:** Está limitado por 4 caras que son triángulos equiláteros. Tiene 4 vértices, 4 ángulos triedros, 6 aristas y 6 ángulos diedros.



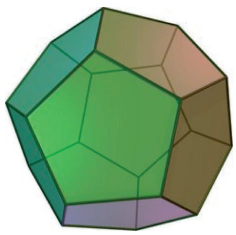
2. **Hexaedro regular o cubo:** Está limitado por 6 caras que son cuadrados. Tiene 8 vértices, 8 ángulos triedros, 12 aristas, 12 ángulos diedros y 4 diagonales congruentes y concurrentes.



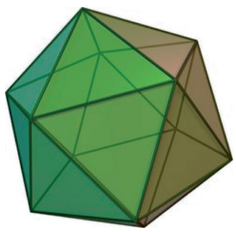
3. **Octaedro regular:** Está limitado por 8 caras que son triángulos equiláteros. Tiene 6 vértices, 6 ángulos tetraedros, 12 aristas y 12 ángulos diedros. Está formado por dos pirámides unidas por su base común.



4. **Dodecaedro regular:** Está limitado por 12 caras que son pentágonos regulares. Tiene 20 vértices, 20 ángulos triedros, 30 aristas y 30 ángulos diedros.



5. **Icosaedro regular:** Está limitado por 20 caras que son triángulos equiláteros. Tiene 12 vértices, 12 ángulos pentaedros, 30 aristas y 30 ángulos diedros.



Otro tipo de poliedros importantes son los **prismas** y las **pirámides**, los mismos que serán estudiados a continuación.

8.4 Prismas

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dado un prisma, reconocer los elementos que lo conforman.
* Dado un prisma, identificar si es oblicuo, recto o regular.
* Dado un paralelepípedo, analizar sus principales características.

Definición 8.7 (Prisma)

Un prisma es un poliedro en el cual existen dos caras congruentes paralelas, denominadas bases, en donde las otras caras, denominadas caras laterales, conectan los lados congruentes de las caras paralelas.

A una recta que es paralela a una de las aristas de una cara lateral se la denomina recta **generatriz**. En un prisma las caras laterales son paralelogramos y son paralelas a la recta generatriz g.

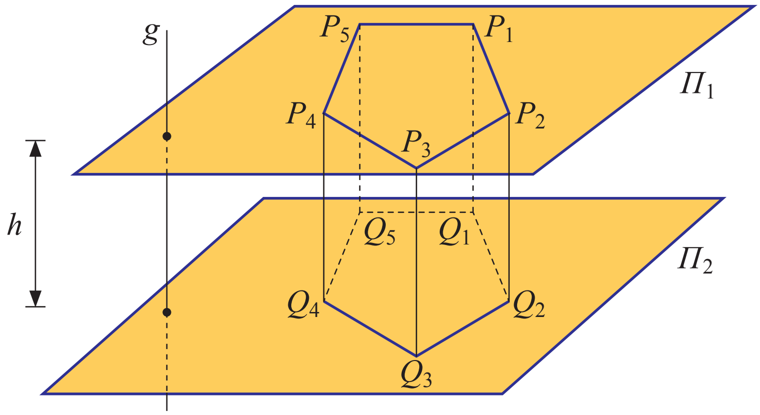


Figura 8.7: Prisma pentagonal.

En la figura anterior las bases del prisma son los pentágonos $P_1P_2P_3P_4P_5$ y $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5$, las caras laterales del prisma son $Q_4Q_3P_3P_4$, $Q_3Q_2P_2P_3$, $Q_2Q_1P_1P_2$, $Q_1Q_5P_5P_1$, $Q_5Q_4P_4P_5$; y, g es una recta generatriz paralela a las aristas $\overline{P_1Q_1}$, $\overline{P_2Q_2}$, $\overline{P_3Q_3}$, $\overline{P_4Q_4}$, $\overline{P_5Q_5}$.

La distancia mínima entre los planos que contienen a las bases del prisma se denomina **altura** del prisma, es decir, es la longitud del segmento de recta perpendicular entre las dos bases.

Si las aristas laterales son perpendiculares al plano que contiene una base, el prisma se denomina **prisma recto**.

En el prisma recto la altura h es congruente con la longitud de las aristas laterales. Las caras laterales de un prisma recto son rectángulos. Si las bases son polígonos regulares se denomina **prisma recto regular** y, en este caso, las caras laterales son rectángulos congruentes entre sí. Por ejemplo:

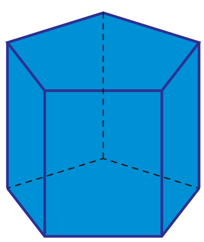


Figura 8.8: Prisma recto regular.

El prisma también puede ser **oblicuo**, si las aristas laterales no son perpendiculares a las bases. Por ejemplo:

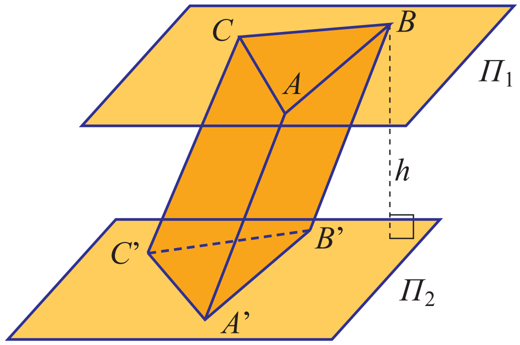
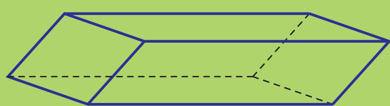


Figura 8.9: Prisma oblicuo triangular.

Definición 8.8 (Paralelepípedo)

Un paralelepípedo es un prisma cuyas bases son paralelogramos.



A un paralelepípedo recto rectangular se le denomina **ortoedro**.

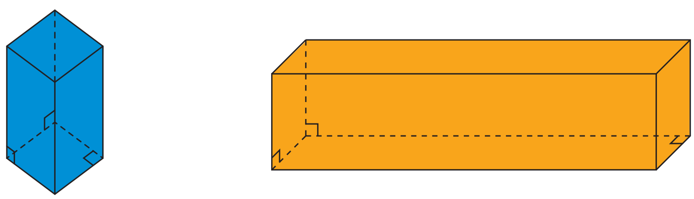
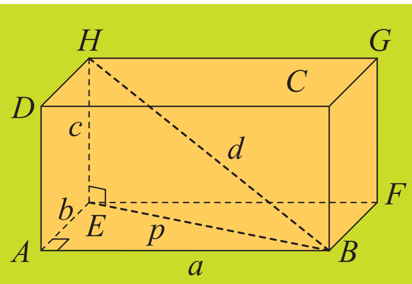


Figura 8.10: Ortoedros.

Ejemplo 8.3 Aplicación del teorema de Pitágoras en el espacio.

Demuestre que en un paralelepípedo recto rectangular el cuadrado de la longitud de una diagonal es igual a la suma de los cuadrados de las tres dimensiones.



Hipótesis: a, b y c son las dimensiones del paralelepípedo recto rectangular. Se busca la longitud de la diagonal d.

Tesis: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Solución:

En la figura, d es la hipotenusa del triángulo rectángulo BHE:

$$d^2 = p^2 + c^2 \qquad \text{(I)}$$

En el triángulo rectángulo ABE, p es la hipotenusa, entonces:

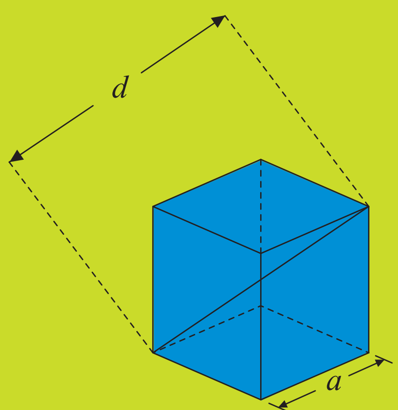
$$p^2 = a^2 + b^2 \qquad \text{(II)}$$

Luego, reemplazando (II) en (I), se tiene:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Ejemplo 8.4 La longitud de la diagonal de un cubo.

Calcule la longitud de la diagonal de un cubo.



Solución:

En el cubo o hexaedro regular, las tres dimensiones son iguales:

$$\begin{aligned} a = b = c \ &\Rightarrow\ d^2 = a^2 + a^2 + a^2 \\ &\Rightarrow\ d^2 = 3a^2 \\ &\Rightarrow\ d = a\sqrt{3} \end{aligned}$$

8.5 Pirámides

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dada una pirámide, reconocer los elementos que la conforman.
* Dada una pirámide, identificar si es oblicua, recta o regular.

Definición 8.9 (Pirámide)

Una pirámide es un poliedro en el cual existe una cara denominada base y un punto que no pertenece al mismo plano de la base, denominado vértice, tal que las otras caras, denominadas caras laterales, son triángulos que van desde los lados de la base al vértice.

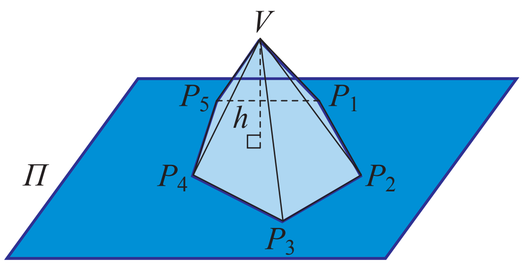


Figura 8.11: Pirámide.

En el poliedro anterior se tienen en la base los vértices P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 y las aristas $\overline{P_4P_3}$, $\overline{P_3P_2}$, $\overline{P_2P_1}$, $\overline{P_1P_5}$, $\overline{P_5P_4}$.

Las **aristas laterales** de una pirámide son los segmentos $\overline{VP_1}$, $\overline{VP_2}$, ..., $\overline{VP_n}$. Una pirámide tiene sólo una base.

La distancia mínima entre el plano que contiene a la base de la pirámide y el vértice se denomina **altura** de la pirámide.

Una **pirámide recta** es aquella en la que el pie de su altura en la base equidista de todos los vértices del polígono base; caso contrario, se dice que es **oblicua**.

Definición 8.10 (Pirámide regular)

Una pirámide se denomina regular si es una pirámide recta cuya base es un polígono regular.

Si la pirámide es regular sus caras son triángulos isósceles congruentes, denominándose **apotema** de la pirámide a la altura de cualquiera de estos triángulos.

Si una pirámide se interseca con un semiespacio generado por un plano paralelo a la base de la pirámide, resultan dos cuerpos: una pirámide y otro que se denomina **pirámide truncada.** Una pirámide truncada tiene dos bases paralelas semejantes, las caras laterales son trapecios que unen los lados semejantes de las bases paralelas y la altura h es la distancia mínima entre ellas.

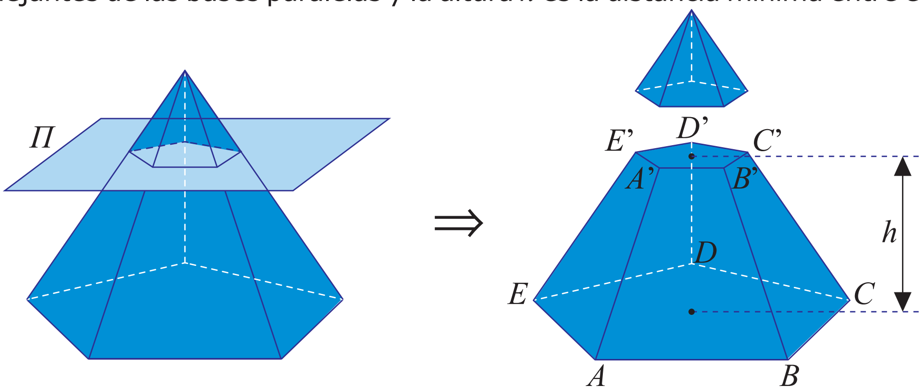


Figura 8.12: Pirámide truncada.

En la figura anterior las bases de la pirámide truncada son los pentágonos $ABCDE$ y $A'B'C'D'E'$, las caras laterales son $EAA'E'$, $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$, $DEE'D'$.

8.6 Áreas de poliedros

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dado un prisma, calcular el área de su superficie lateral y el área de su superficie total.
* Dada una pirámide, calcular el área de su superficie lateral y el área de su superficie total.
* Dada una pirámide truncada, calcular el área de su superficie lateral y el área de su superficie total.

Los diseñadores profesionales y decoradores de interiores necesitan determinar la cantidad de material que se requiere para decorar superficies. En ocasiones, objetos familiares, tales como mesas auxiliares o vitrinas, tienen formas de prisma o pirámide. Con frecuencia es necesario calcular el área de estas superficies.

Para determinar el área de la superficie de los cuerpos poliedros calculamos el área de cada uno de los polígonos o caras que forman su superficie, sumando luego las áreas obtenidas.

Geometría del Espacio

En los prismas y en las pirámides se tiene los siguientes tipos de áreas:

- Área de la superficie lateral (A_L): Es la suma de las áreas de las superficies de las caras laterales.
- Área de la superficie de la base (A_B): Es el área de la superficie de una base.
- Área de la superficie total (A_T): Es la suma del área de la superficie lateral más el área de la superficie de la base, en el caso de pirámides; o, es la suma del área de la superficie lateral más el duplo del área de la superficie de la base, en el caso de prismas.

a) Área de poliedros regulares

Para calcular el área de la superficie total A_T de un poliedro regular, basta con multiplicar el área de la superficie de una de sus caras por el número de caras del poliedro. Por ejemplo, en el cubo de arista a, $A_T = 6a^2$.

b) Áreas de las superficies de un prisma recto

(Per: perímetro de la base; y, h: altura o longitud de la arista lateral)

$A_L = (Per).(h)$

$A_T = A_L + 2A_B$

$A_T = (Per).(h) + 2A_B$

El área de la superficie de la base no se especifica, pues puede ser la de cualquier polígono.

c) Áreas de las superficies de una pirámide regular

Para el área de la superficie lateral, se calcula el área de la superficie de uno de los triángulos isósceles que son las caras laterales, y se multiplica por el número de caras laterales n.

$$A_L = n\left(\frac{a\,.\,\rho}{2}\right)$$

Donde n: Número de caras laterales de la pirámide.

a: Longitud de la arista de la base.

ρ: Longitud de la apotema de la pirámide.

$$A_T = A_L + A_B$$

El área de la superficie de la base no se especifica, pues puede ser la de cualquier polígono.

d) Áreas de las superficies de una pirámide truncada regular

El área de la superficie lateral de una pirámide truncada regular es igual al producto de la semisuma de los perímetros basales por la longitud de la apotema lateral.

$$A_L = \left(\frac{Per + Per'}{2}\right) \cdot \rho$$

Donde Per y Per': Perímetros de las bases.

ρ: Longitud de la apotema lateral de la pirámide truncada.

$$A_T = A_L + A_{B\ superior} + A_{B\ inferior}$$

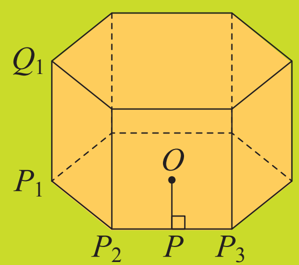
El área de las superficies de las bases no se especifica, pues pueden ser la de cualquier polígono.

Ejemplo 8.5 Área de la superficie total de un prisma.

Calcule el área de la superficie total de un prisma recto hexagonal regular, si su arista lateral mide $4\sqrt{3}m$ y su arista de la base mide $2m$.

Solución:

En esta figura, el segmento $\overline{OP}$ es la apotema del hexágono regular.



$\overline{P_1Q_1} = 4\sqrt{3}m$, $\overline{P_1P_2} = 2m$

$$A_T = A_L + 2A_B$$

$$A_B = \frac{Per(base)\ \overline{OP}}{2}$$

$$\overline{OP} = \frac{(\sqrt{3})\ \overline{P_1P_2}}{2} = \sqrt{3}m$$

$$Per(base) = 6(2) = 12m$$

$$A_B = \frac{12\sqrt{3}}{2}\ m^2 = 6\sqrt{3}m^2$$

$$A_L = 6\ \acute{A}rea(cara\ lateral)$$

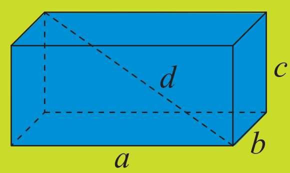
$$A_L = [6(2)(4\sqrt{3})] = 48\sqrt{3}m^2$$

$$A_T = 48\sqrt{3}m^2 + 12\sqrt{3}m^2$$

$$A_T = 60\sqrt{3}m^2$$

Ejemplo 8.6 Diagonal de un paralelepípedo.

La suma de las tres dimensiones de un ortoedro es $15m$ y el área de su superficie total es $200\ m^2$. Calcule la longitud de la diagonal del paralelepípedo.



Solución:

$$a + b + c = 15m$$
$$A_T = 200m^2$$
$$d = ?$$

Por cuanto:

$$A_T = 200 = 2ab + 2ac + 2bc$$
$$a + b + c = 15 \Rightarrow (a + b + c)^2 = 15^2$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 225 \qquad \text{(I)}$$

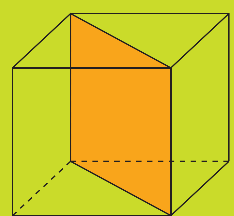
Teniendo en cuenta que: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Reemplazando en (I)

$$d^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 225$$
$$d^2 + 200 = 225 \Rightarrow d^2 = 25$$
$$d = 5m$$

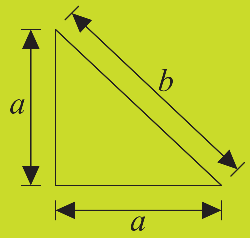
Ejemplo 8.7 Área de superficies en el espacio.

La figura adjunta es un cubo cuya arista mide $a\ cm$. Calcule el valor del área de la superficie sombreada.



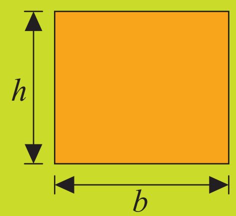
Solución:

El área de la superficie que debemos calcular corresponde a la de un rectángulo cuya base (b) debemos determinar y en el cual la altura (h) es congruente con la arista del cubo.



Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$b = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$$



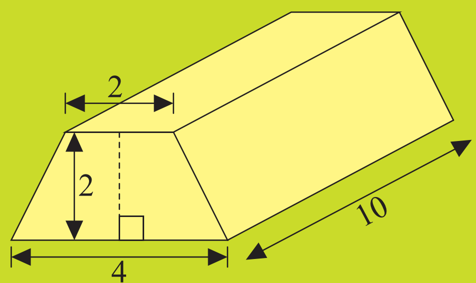
$$A = b \cdot h$$

$$A = (\sqrt{2}a)(a)$$

$$A = \sqrt{2}\, a^2 cm^2$$

Ejemplo 8.8 Área de superficies de prismas.

Los lingotes de oro son barras moldeadas como la de la figura, cuyas dimensiones se miden en cm. Los extremos son trapecios isósceles paralelos. ¿Cuál es su volumen?



Solución:

$$V = A_B\, h_P$$

$$= \frac{(B_T + b_T)h_T}{2}\, h_P$$

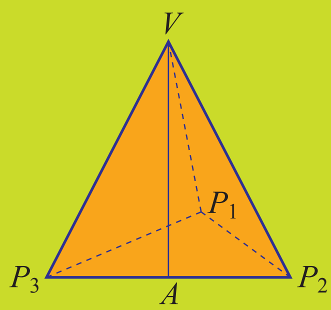
$$= \frac{(4+2)(2)}{2}\,(10)$$

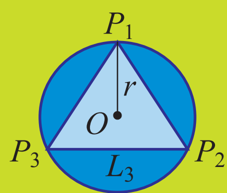
$$V = 60\ cm^3$$

Ejemplo 8.9 Área de la superficie lateral de una pirámide.

Encuentre el área de la superficie lateral de un tetraedro, cuyas caras laterales son congruentes, cuya apotema mide el triplo de la arista de la base y la circunferencia circunscrita a la base mide $24\pi m$.

Solución:





$\overline{VA} = 3(\overline{P_1P_2})$

$L(\textit{Longitud de la circunferencia}) = 2\pi(\overline{OP_1}) = 24\pi m \Rightarrow \overline{OP_1} = r = 12m.$

En la circunferencia circunscrita al triángulo, se cumple que: $L_3 = \sqrt{3}r$ y en este caso, $L_3 = \overline{P_2P_3}$.

$\overline{P_2P_3} = \sqrt{3}\ (\overline{OP_1})$

$\overline{P_2P_3} = 12\sqrt{3}$

$\overline{VA} = 3(12\sqrt{3})m = 36\sqrt{3}m$

$$A_L = 3\left(\frac{\textit{base} \text{ x } \textit{altura}}{2}\right) m^2$$

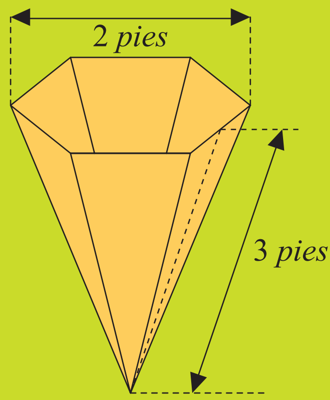
$$A_L = 3\left(\frac{\overline{P_2P_3} \text{ x } \overline{VA}}{2}\right) m^2$$

$$A_L = (3)\ \frac{(12\sqrt{3})(36\sqrt{3})}{2}\ m^2$$

$A_L = 1944m^2$

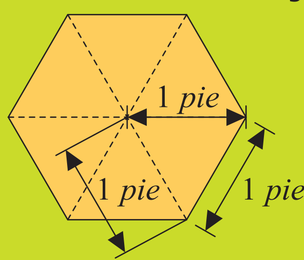
Ejemplo 8.10 Área de superficies de pirámides.

Un recipiente con forma de pirámide regular tiene la parte superior abierta. Esta parte es un hexágono regular con las dimensiones que muestra la figura. Si se van a pintar 100 de estos recipientes, por dentro y por fuera, con una pintura que cubre 450 *pies* cuadrados por galón, ¿cuántos galones se requieren?

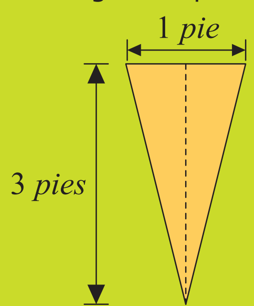


Solución:

La parte superior es un hexágono regular formado por 6 triángulos equiláteros. La longitud de cada lado del triángulo sería entonces 1 *pie*.



La superficie triangular a pintar tiene el siguiente valor de área.



$$A = \frac{(3)(1)}{2}\, pies^2$$

$$A = \frac{3}{2}\, pies^2$$

Como son 6 caras $\Rightarrow A_1 = 6A = 9 pies^2$.

Como es por dentro y por fuera $\Rightarrow A_2 = 2A_1 = 18 pies^2$.

Como son 100 recipientes $\Rightarrow A_3 = 100A_2 = 1800 pies^2$.

Como son 450 $pies^2$ por galón $\Rightarrow$ 4 galones.

Luego, se requerirán 4 galones para pintar los 100 recipientes.

Geometría del Espacio

A continuación estudiaremos el cálculo de volúmenes para poliedros, una magnitud muy importante para algunas aplicaciones de la realidad. Por ejemplo, los ingenieros estiman costos de construcción de una carretera determinando la cantidad de material que se debe utilizar, calculando previamente el volumen de los sólidos involucrados.

8.7 Volumen de poliedros

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Dado un prisma, calcular su volumen.
* Dada una pirámide, calcular su volumen.
* Dada una pirámide truncada, calcular su volumen.

En esta sección se calculará el volumen de un cuerpo poliédrico con las características estudiadas en las secciones anteriores.

Se denomina volumen V de un cuerpo geométrico a la medida del espacio que ocupa. A partir del cálculo del volumen del **paralelepípedo recto rectangular** se pueden derivar las reglas que permiten calcular el volumen de los demás poliedros.

$$V = A_B \cdot altura$$

$$V = (largo \cdot ancho) \cdot altura$$

$$V = a \cdot b \cdot h$$

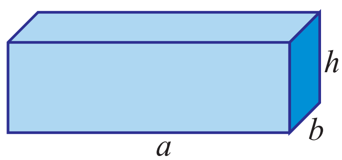


Figura 8.13: Ortoedro.

El **cubo** es un ortoedro con todas sus aristas de igual longitud, entonces su volumen es:

$$V = a \cdot a \cdot a$$

$$V = a^3$$

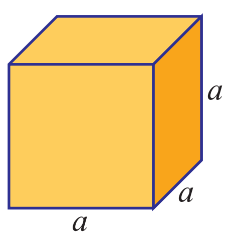


Figura 8.14: Cubo.

Un **paralelepípedo** siempre se puede transformar en un ortoedro de base equivalente y de igual altura, por lo que su volumen es también igual al área de la superficie de la base por la altura.

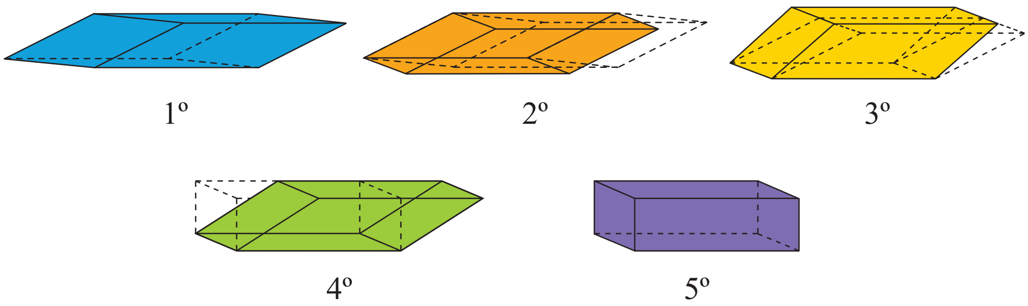


Figura 8.15: Transformación de un paralelepípedo.

Un paralelepípedo siempre se puede descomponer en dos **prismas triangulares equivalentes**, trazando, por ejemplo, un plano que contenga a dos diagonales paralelas, situadas respectivamente en dos caras también paralelas del cuerpo.

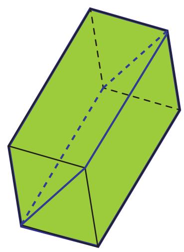


Figura 8.16: Prismas equivalentes.

El volumen de cada prisma triangular de la figura es igual a la mitad del volumen del paralelepípedo.

Por el postulado de Cavalieri (véase apéndice B) se establece que todo prisma triangular se puede descomponer en tres pirámides o tetraedros de igual volumen. De aquí se obtiene que el **volumen de un tetraedro** es igual a la tercera parte del volumen del prisma de igual base triangular; entonces, el volumen de una pirámide triangular es:

$$V = \frac{1}{3}(A_B \cdot h)$$

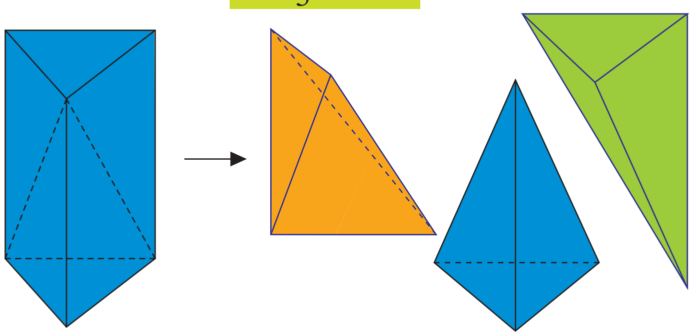


Figura 8.17: Volumen de un tetraedro.

El resultado anterior es válido para cualquier pirámide: "El volumen de una pirámide es igual a la tercera parte del producto del área de la base por la longitud de la altura".

Veamos cómo se obtiene el **volumen** en el caso de una **pirámide pentagonal**:

Si unimos A con D y B con D, la base queda descompuesta en tres triángulos. Los planos que contienen dichas diagonales y el vértice, descomponen la pirámide en tres tetraedros de igual volumen.

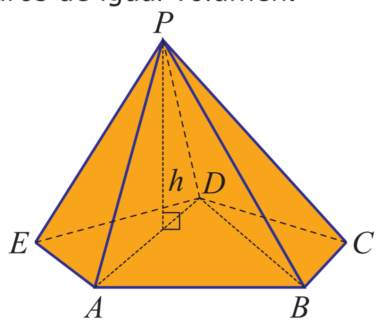


Figura 8.18: Pirámide pentagonal.

$$V(\textit{pirámide } PABCDE) = V(\textit{tetraedro } PEAD) + V(\textit{tetraedro } PABD) + V(\textit{tetraedro } PBCD)$$

$$= \frac{1}{3} A_{EAD} \cdot altura + \frac{1}{3} A_{ABD} \cdot altura + \frac{1}{3} A_{BCD} \cdot altura$$

$$= \frac{1}{3} (A_{EAD} + A_{ABD} + A_{BCD}) \cdot altura$$

$$V(\textit{ pirámide } PABCDE) = \frac{1}{3} (A_{ABCDE}) \cdot altura$$

El **volumen de una pirámide truncada** de bases paralelas es igual a un tercio del producto de la longitud de su altura por la suma del área de las superficies de las dos bases con la media geométrica entre ellas.

En una pirámide truncada de altura h y bases paralelas de áreas B y B':

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (B + B' + \sqrt{B \cdot B'})$$

$\sqrt{B \cdot B'}$ = media geométrica entre B y B'

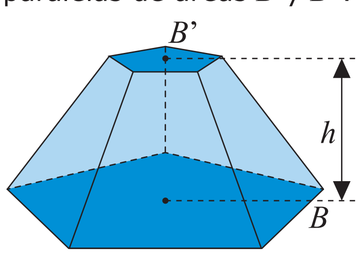
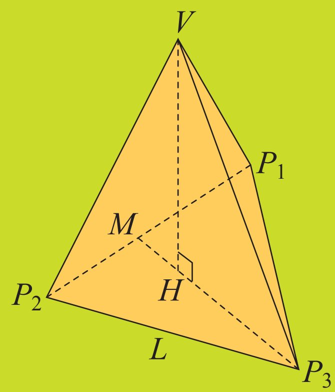


Figura 8.19: Pirámide truncada.

Ejemplo 8.11 Volumen de un poliedro regular.

Encuentre el volumen de un tetraedro regular, siendo su base el $\Delta P_1P_2P_3$ cuyo lado tiene longitud L.



Solución:

$$A_B = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) L^2$$

Además en el ΔVP_3H:

$$\overline{P_3H} = \frac{2}{3}\,\overline{P_3M}$$ H es el ortocentro de $\Delta P_1P_2P_3$.

Como:

$$\overline{P_3M} = \left(\frac{L\sqrt{3}}{2}\right)$$ Altura del triángulo equilátero.

$$\overline{P_3H} = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{L\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{L\sqrt{3}}{3}\right)$$

En el ΔVP_3H:

$$(\overline{VH})^2 = (\overline{VP_3})^2 - (\overline{P_3H})^2$$ Teorema de Pitágoras.

$$h^2 = L^2 - \left(\frac{L^2}{3}\right) = \left(\frac{2L^2}{3}\right)$$

$$h = \left(\frac{L\sqrt{6}}{3}\right)$$

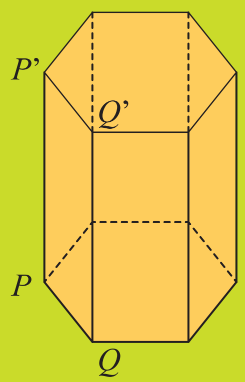
En conclusión:

$$V(Tetraedro\ regular) = \frac{1}{3} A_B h$$

$V(Tetraedro\ regular) = \left(\dfrac{L^3\sqrt{2}}{12}\right)$, el cual se mide en unidades cúbicas.

Ejemplo 8.12 Volumen de un poliedro regular.

Calcular el volumen de un prisma hexagonal recto cuya altura mide $10\ cm$, y cuya área de la superficie lateral es el cuádruplo del área de la superficie de una de sus bases.



Solución:

$$\overline{PP'} = 10cm$$
$$A_L = 4A_B \qquad (a)$$
$$A_B = \frac{Per(base) \cdot apotema}{2} = \frac{6(\overline{PQ})\left(\overline{PQ}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2}$$
$$A_L = 6\acute{A}rea\ (cara\ lateral)$$
$$A_L = 6[(\overline{PQ})(\overline{PP'})]$$
$$A_L = 60(\overline{PQ}) \qquad (b)$$

Utilizando (a) y (b):

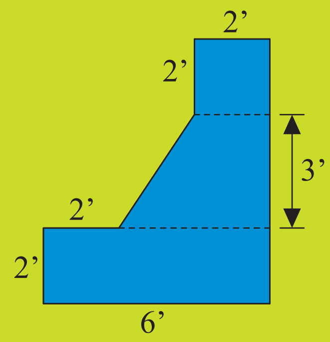
$$60(\overline{PQ}) = 4\left(3\overline{PQ}^{\,2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \overline{PQ}\sqrt{3} = 10$$
$$\overline{PQ} = \frac{10\sqrt{3}}{3}\ cm$$

El volumen del prisma se calcula con:

$$V(Prisma) = A_B\,.\,altura$$
$$= \left(3\overline{PQ}^{\,2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\overline{PP'})$$
$$= 3\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(10)$$
$$V(Prisma) = 500\sqrt{3}\ cm^3$$

Ejemplo 8.13 Volumen de prismas.

Un muro de contención de hormigón mide 80 *pies* de longitud, con extremos como los de la figura. ¿Cuántos pies cúbicos de hormigón se emplearon para construir este muro?



Solución:

El volumen que ocupa este muro de hormigón se lo puede obtener dividiéndolo en 3 partes.

Sean: V_1, el volumen del prisma rectangular cuyo largo y ancho miden $6'$ y $2'$.

V_2, el volumen del prisma trapezoidal cuyas bases miden $2'$ y $4'$ y la longitud de su altura $3'$.

V_3, el volumen del prisma rectangular cuyo largo y ancho miden $2'$.

En los 3 casos, la longitud de la profundidad es $80'$.

$$
\begin{aligned}
V_T &= V_1 + V_2 + V_3 \\
&= A_{B_1} \cdot h + A_{B_2} \cdot h + A_{B_3} \cdot h \\
&= h\left[(a_1)(b_1) + \frac{(b_T + B_T)h_T}{2} + (a_2)(b_2)\right] \\
&= 80\left[(2)(6) + \frac{(2+4)(3)}{2} + (2)(2)\right] \\
&= 80\ (12 + 9 + 4) \\
&= 80\ (25) \\
V_T &= 2000 \textit{ pies cúbicos}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, se emplearon 2000 *pies cúbicos* de hormigón para construir este muro.

8.8 Cuerpos de revolución

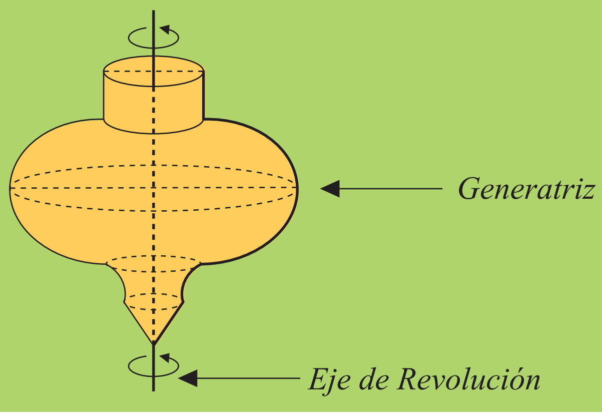
Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

* Explicar las características de los cuerpos de revolución.
* Dado un cilindro de revolución, calcular el área de su superficie lateral, el área de su superficie total y su volumen.
* Dado un cono de revolución, calcular el área de su superficie lateral, el área de su superficie total y su volumen.
* Dada una esfera, calcular el área de la superficie esférica y el volumen de la esfera.
* Dado un rectángulo, triángulo rectángulo, trapecio o semicírculo, calcular el volumen del sólido de revolución que se genera al girar la figura en torno a un eje.
* Dada una región en el plano cartesiano y un eje de revolución, calcular el volumen del sólido que se genera al girar la región en torno al eje.

Definición 8.11 (Superficie de revolución)

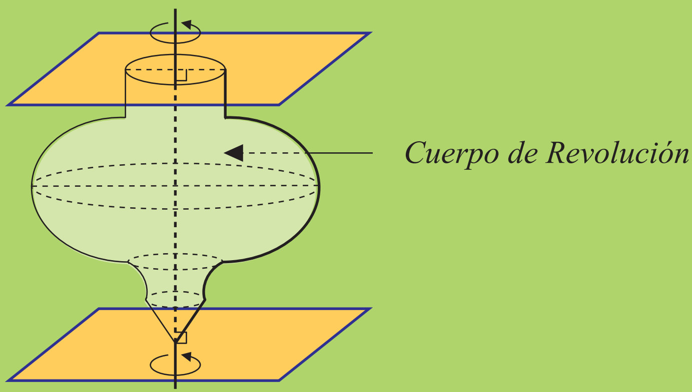
Una superficie de revolución es una superficie generada por una línea o una curva plana continua, sin autointersecciones (los puntos de la línea son coplanares), que gira alrededor de una recta denominada eje de revolución. La línea que gira se denomina generatriz.



En general, las superficies de revolución junto con superficies planas perpendiculares al eje de revolución que contienen a los extremos de la curva de revolución, delimitan cuerpos sólidos.

Definición 8.12 (Sólido de revolución)

Un sólido de revolución es el cuerpo limitado por una superficie de revolución y dos planos perpendiculares al eje de revolución de dicha superficie.



Los cuerpos de revolución (cuerpos redondos) que estudiaremos en esta sección son el cilindro recto, el cono recto y la esfera.

Si consideramos un prisma recto regular con n lados en la base, donde n tiende a infinito, se obtendrá un sólido, denominado **cilindro recto**, cuya base será un círculo. De igual manera, si consideramos una pirámide recta regular con n lados en la base, donde n tiende a infinito, se obtendrá un sólido, denominado **cono recto**, cuya base será un círculo. Nos preocuparemos por ahora de estos dos sólidos.

Una comparación entre el prisma y el cilindro, la pirámide y el cono, se muestra a continuación.

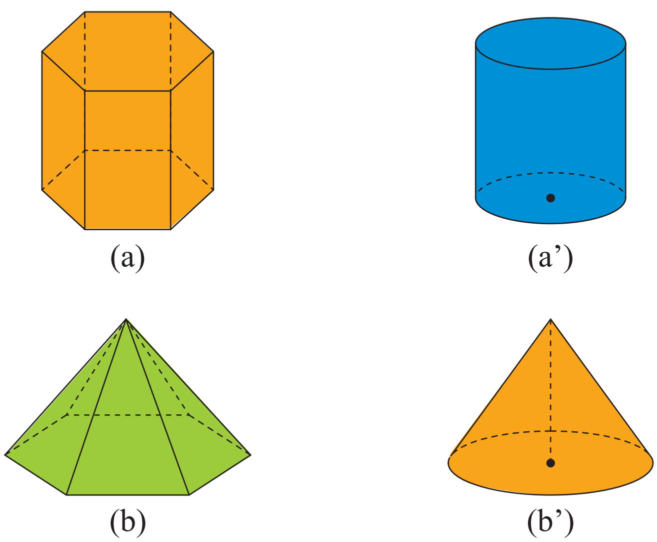


Figura 8.20: Prisma y cilindro, pirámide y cono.

Se puede considerar que el cilindro en este caso es un sólido generado por la rotación completa de un rectángulo en torno a uno de sus lados; a este sólido se le denomina **cilindro de revolución**.

Se puede considerar que el cono en este caso es un sólido generado por la rotación completa de un triángulo rectángulo en torno a uno de sus catetos; a este sólido se le denomina **cono de revolución**.

En un cono y en un cilindro las bases son círculos, y sus aristas laterales son las **generatrices.** La **altura** es el segmento perpendicular a la base que contiene al vértice como extremo, en el caso del cono, y que contiene a un punto del plano de la otra base, en el caso del cilindro.

El área de la superficie lateral de un cilindro recto será el área de la superficie de un rectángulo cuya base tiene por longitud el perímetro de la circunferencia de radio r de la base, es decir $2\pi r$, y cuya altura tiene por longitud la de la generatriz g, luego:

$$A_L = 2\pi rg$$

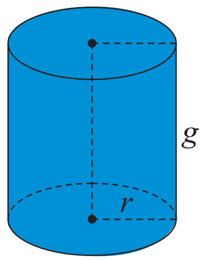


Figura 8.21: Cilindro recto.

El área de la superficie total de un cilindro recto es $A_T = A_L + 2\pi r^2$, esto es:

$$A_T = 2\pi r(g + r)$$

El área de la superficie lateral de un cono recto será el área de la superficie del triángulo, cuya base tiene por longitud el perímetro de la circunferencia de radio r de la base, es decir $2\pi r$, y cuya altura tiene por longitud la de la generatriz g, luego:

$$A_L = \pi rg$$

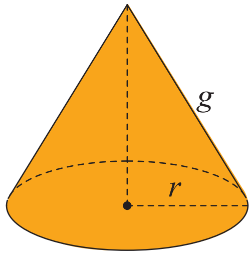
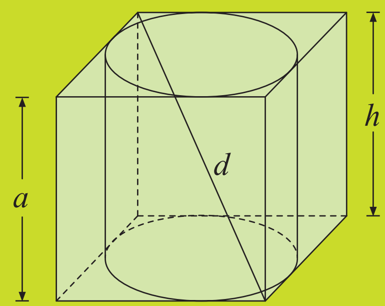


Figura 8.22: Cono recto.

Mientras que el área de la superficie total de un cono recto es: $A_T = \pi r(g + r)$.

Ejemplo 8.14 Área de la superficie lateral de un cilindro.

Un cilindro está inscrito en un cubo cuya diagonal d mide $20cm$. Calcule el área de la superficie lateral del cilindro.



Solución:

$$d = 20cm$$

La altura h del cubo coincide con la generatriz a del cilindro, $h = a$.

Además:

$$d = a\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad a\sqrt{3} = 20 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

Longitud del radio de la base del cilindro:

$$r = \frac{a}{2}$$

Luego:

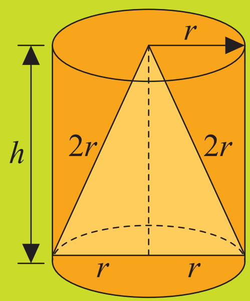
$$\begin{aligned} A_L &= 2\pi rh \\ &= 2\pi\left(\frac{a}{2}\right)a \\ &= \pi a^2 \end{aligned}$$

$$A_L = \left(\frac{400\pi}{3}\right)cm^2$$

Ejemplo 8.15 Área de la superficie total de un cilindro.

Determine el área de la superficie total de un cilindro cuya generatriz h es perpendicular al diámetro de su base de radio r, que a su vez es congruente con la generatriz del cono inscrito en él.

Solución:



$A_L = 2\pi rh$

La longitud de la generatriz se puede obtener aplicando el teorema de Pitágoras:

$h = \sqrt{4r^2 - r^2} = \sqrt{3}\, r$

$A_L = 2\sqrt{3}\pi r^2$

$A_B = \pi r^2$

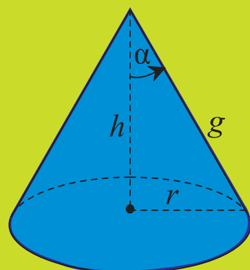
$A_T = A_L + 2A_B$

$A_T = 2\sqrt{3}\pi r^2 + 2\pi r^2$

$A_T = 2\pi(\sqrt{3} + 1)r^2 u^2$

Ejemplo 8.16 Área de la superficie lateral de un cono.

Un cono recto de altura $h = 3m$, tiene un área de la superficie lateral de $6\pi m^2$. Determine la medida del ángulo α que la generatriz g forma con la altura h.



Solución:

$h = 3m$
$A_L = 6\pi m^2$
$A_L = \pi rg \Rightarrow rg = 6 \Rightarrow r = \dfrac{6}{g}$

Por el teorema de Pitágoras:

$$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow g^2 - r^2 = h^2 \Rightarrow g^2 - \frac{36}{g^2} = 9$$

Por tanto:
$$g^4 - 9g^2 - 36 = 0$$
$$(g^2 - 12)(g^2 + 3) = 0$$
$$(g^2 = 12) \vee (g^2 = -3)$$

De donde:
$$g = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

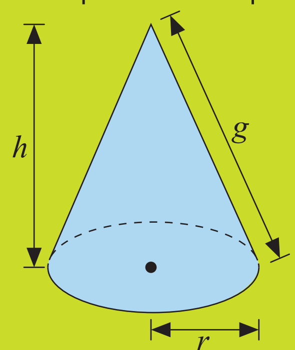
Además:
$$cos(\alpha) = \frac{h}{g} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

Ejemplo 8.17 Área de la superficie de cuerpos redondos.

Calcule el área de la superficie lateral de un cono cuyo radio tiene longitud $3cm$ y su altura tiene longitud $4cm$.

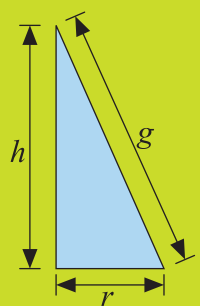
Solución:

La situación descrita puede ser representada en la figura.



$$r = 3cm$$
$$h = 4cm$$

Aplicando el teorema de Pitágoras:



$$g = \sqrt{h^2 + r^2}$$
$$g = \sqrt{(4)^2 + (3)^2}$$
$$g = 5cm$$

El área de la superficie lateral del cono viene dada por:

$$\begin{aligned} A_L &= \pi rg \\ &= \pi(3)(5) \\ A_L &= 15\pi cm^2 \end{aligned}$$

Si un cono se interseca con un semiespacio generado por un plano paralelo a la base del cono resultan dos cuerpos: un cono y otro que se denomina **cono truncado**. Un cono truncado tiene dos bases circulares paralelas semejantes, de áreas A y A' , y la altura h es la distancia mínima entre ellas.

Las secciones transversales de un cono dividen a la altura, a las generatrices y a las bases en partes proporcionales, además:

$$\frac{A'}{A} = \left(\frac{r'}{r}\right)^2$$

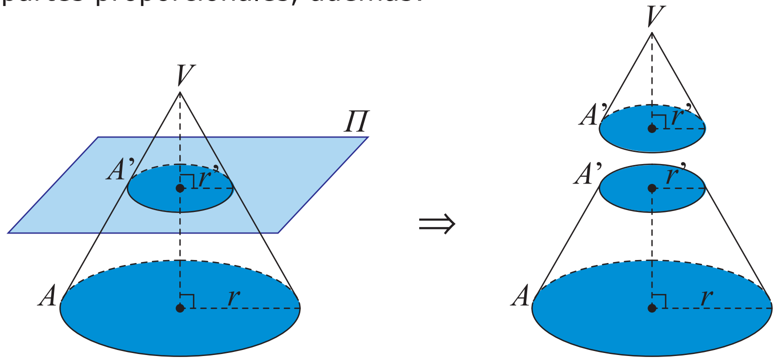
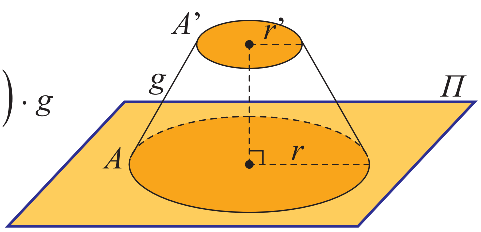


Figura 8.23: Cono truncado recto.

Se puede considerar que el **cono truncado de revolución** de bases paralelas, es un sólido de revolución generado por la rotación de un trapecio rectángulo en torno de un eje que contiene el lado perpendicular a sus bases.

Área de la superficie lateral: $A_L = \left(\frac{P + P'}{2}\right) \cdot g$



Donde: g es la generatriz.

P es el perímetro de la base mayor $= 2\pi r$

P' es el perímetro de la base menor $= 2\pi r'$

Entonces: $A_L = \frac{(2\pi r + 2\pi r')}{2} \cdot g = \pi(r + r') \cdot g$

Área de la superficie total: $A_T = A_L + A_B + A_{B'}$

Donde A_B y $A_{B'}$ son las áreas de las superficies de las bases:

Luego: $A_T = \pi(r + r') \cdot g + \pi r^2 + \pi r'^2$

$A_T = \pi[(r + r') \cdot g + r^2 + r'^2]$

Definición 8.13 (Esfera sólida y superficie esférica)

Sea r un número positivo y O un punto en el espacio, el conjunto $S=\{P|\overline{OP}=r\}$ es una superficie esférica de radio r, centrada en O. La unión de una superficie esférica con su interior se denomina esfera sólida.

Se puede considerar que la esfera sólida es un sólido generado por la rotación completa de un semicírculo en torno al diámetro; a este sólido se le denomina **esfera sólida de revolución**.

Elementos de la esfera sólida y la superficie esférica.

Respecto a la siguiente figura, se pueden observar los siguientes elementos de una esfera sólida y una superficie esférica de centro O y radio r.

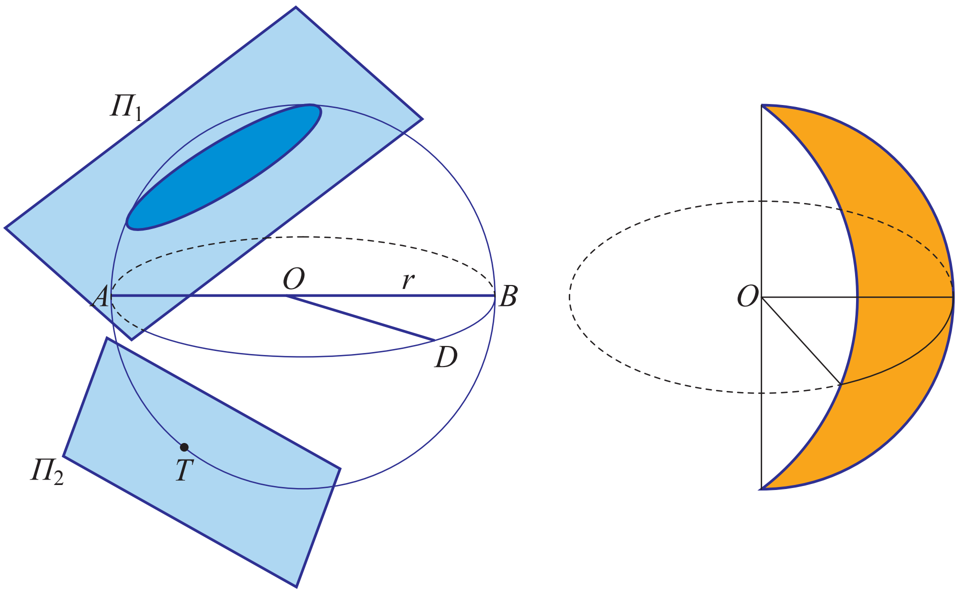


Figura 8.24: Elementos de la esfera sólida y la superficie esférica.

a) **Radio (r):** Es un segmento que une el centro de la superficie esférica con un punto cualquiera de ella. Por ejemplo: $\overline{OD}$, $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ son radios. $\overline{OD} = \overline{OA} = \overline{OB} = r$.

b) **Diámetro (d):** Es un segmento de recta que contiene al centro de la superficie esférica y tiene por extremos puntos de la superficie esférica. La longitud del diámetro d es el doble de la longitud del radio r, es decir $d = 2r$. Por ejemplo: $\overline{AB}$.

c) **Casquete esférico:** es la parte de la superficie esférica limitada por un plano secante a la esfera. Si el plano contiene el centro de la esfera, la sección plana que determina es un **círculo máximo**, es decir, es un círculo que tiene igual radio que el de la esfera. Un círculo máximo divide a la esfera en dos **hemisferios**.

d) **Huso esférico:** Un huso esférico o cuña esférica es la intersección de una superficie esférica con un ángulo diedro, cuya arista contiene al centro de la esfera.

e) **Plano secante:** Es un plano que interseca a la superficie esférica en más de un punto. Por ejemplo: Π_1.

f) **Plano tangente:** Es un plano que interseca a la superficie esférica en un solo punto. Por ejemplo: Π_2. El punto de intersección se denomina punto de tangencia o de contacto. En la figura, T es el punto de tangencia. En toda esfera, el plano tangente es perpendicular al radio correspondiente en el punto de tangencia.

Se puede demostrar que el área de la superficie esférica es igual a cuatro veces el área de un círculo máximo.

$$A(\textit{superficie esférica}) = 4\pi r^2$$

El **volumen de los cuerpos de revolución**, previamente estudiados, puede ser calculado de la siguiente manera:

Cilindro

El volumen de un cilindro es igual al producto del área de la superficie de la base por la longitud de la altura.

$$V = A_B \cdot altura$$
$$V = \pi r^2 \cdot h$$

r: Longitud del radio de la base.
h: Longitud de la altura.

Cono

El volumen de un cono es un tercio del producto del área de la superficie de la base por la altura.

$V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot altura$

r: Longitud del radio de la base.

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$

h: Longitud de la altura.

Cono truncado

$V = \frac{1}{3} \pi h \cdot (r^2 + r'^2 + rr')$

r y r': Longitudes de los radios de las bases.
h: Longitud de la altura.

Esfera (Sólida)

El volumen de una esfera sólida es igual a un tercio del producto de la longitud del radio por el área de la superficie esférica.

$V = \frac{1}{3} \cdot r \cdot 4\pi r^2$

r: Longitud del radio de la base.

$V = \frac{4}{3} \pi r^3$

Ejemplo 8.18 Área de una superficie esférica.

Cerca de tres cuartas partes de la superficie de la Tierra está cubierta de agua. ¿Cuántos kilómetros cuadrados de la superficie de la Tierra constituyen terreno seco? (Considere $6400km$ como longitud del radio de la Tierra).

Solución:

El área A del terreno seco lo constituirá la cuarta parte de la superficie esférica con $r = 6400km$.

$A = \frac{1}{4}(4\pi r^2)$

$A = \pi r^2$

$A = \pi(6400)^2$

$A = 40'960.000\pi$

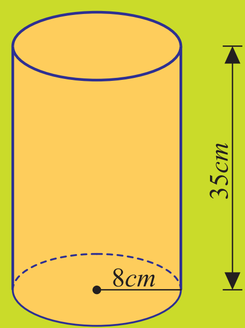
La superficie de la Tierra que constituye terreno seco es $40'960.000\pi \; km^2$.

Ejemplo 8.19 Área y volumen de un cilindro recto.

Un recipiente en forma de cilindro circular recto mide $35cm$ de altura y tiene una base de $16cm$ de diámetro. Encuentre el área de su superficie total y su volumen.

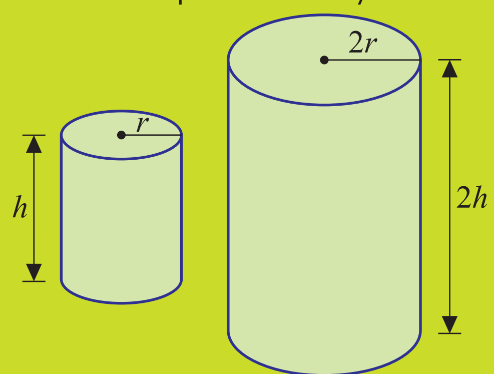
$$A_T = A_L + 2A_B$$
$$= 2\pi rh + 2\pi r^2$$
$$= 2\pi(8)(35) + 2\pi(8)^2$$
$$= 560\pi + 128\pi$$
$$A_T = 688\pi\ cm^2$$

$$V = \pi r^2 h$$
$$= \pi(8)^2(35)$$
$$V = 2240\pi\ cm^3$$



Ejemplo 8.20 Variaciones del área y volumen de un cilindro.

Si las longitudes del radio y de la altura de un cilindro se duplican, ¿cómo varían el área de su superficie total y su volumen?

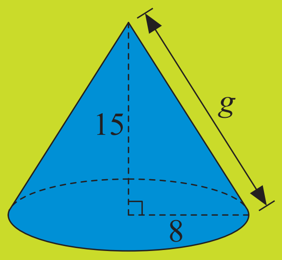


$$A_T(\textit{cilindro grande}) = 2\pi(2r)(2h) + 2\pi(2r)^2$$
$$= 4(2\pi rh) + 4(2\pi r^2)$$
$$= 4[2\pi rh + 2\pi r^2]$$
$$A_T(\textit{cilindro grande}) = 4A_T\ (\textit{cilindro pequeño})$$
$$V(\textit{cilindro grande}) = \pi(2r)^2(2h)$$
$$= 8\pi r^2 h$$
$$V(\textit{cilindro grande}) = 8V(\textit{cilindro pequeño})$$

Ejemplo 8.21 Generatriz, área y volumen de un cono.

Un cono circular recto tiene altura $15cm$ y radio de la base $8cm$. Encuentre:

a) La longitud de la generatriz.
b) El área de la superficie total.
c) El volumen.



Solución:

a) Generatriz:

$g^2 = 8^2 + 15^2$

$g^2 = 64 + 225 = 289$

$g = 17cm.$

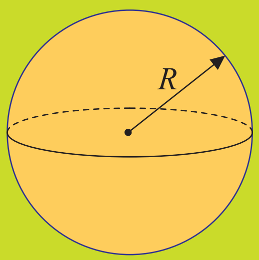
b) $A_T = \pi(8)(17) + \pi(64) = 200\pi\ cm^2$

c) $V = \frac{1}{3}\pi(8)^2\,(15) = 320\pi\ cm^3$

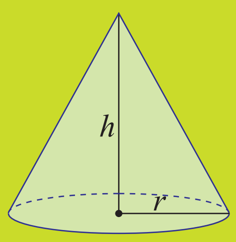
Ejemplo 8.22 Volúmenes de cuerpos redondos.

Una esfera sólida de cobre se funde y con el metal se hacen conos con longitud de radio igual al de la esfera y longitud de la altura igual al doble de la longitud de dicho radio. ¿Cuántos conos se obtienen?

Solución:



$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$



$V_{cono} = \frac{\pi r^2 h}{3}$

Por condiciones del problema:

$r = R$

$h = 2R$

$V_{cono} = \frac{\pi R^2(2R)}{3}$

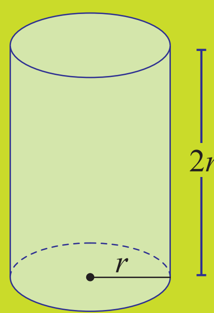
$V_{cono} = \frac{2}{3}\pi R^3$

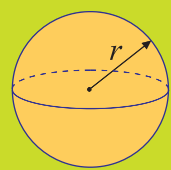
Cantidad de conos $= \frac{V_{esfera}}{V_{cono}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{2}{3}\pi R^3}$

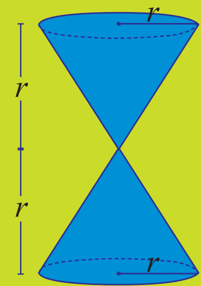
Cantidad de conos $= 2.$

Ejemplo 8.23 Relación entre esfera, cilindro y bicono.

Demuestre que el volumen de un cilindro, cuya altura es congruente con su diámetro, es igual al volumen de la esfera más el volumen del bicono inscritos en el cilindro.







$V(cilindro) = \pi r^2(2r)$
$V(cilindro) = 2\pi r^3$

$V(esfera) = \left(\frac{4}{3}\right)\pi r^3$

$V(bicono) = 2\left[\frac{1}{3}\pi r^2(r)\right]$
$V(bicono) = \frac{2}{3}\pi r^3$

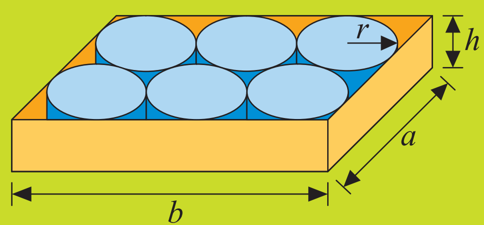
Solución:

$$\begin{aligned} V(cilindro) &= 2\pi r^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi r^3 + \frac{2}{3}\pi r^3 \\ V(cilindro) &= V(esfera) + V(bicono) \end{aligned}$$

Ejemplo 8.24 Volúmenes de cuerpos redondos.

En una caja se embalan seis latas cilíndricas. ¿Cuál es la razón entre el volumen de las seis latas juntas y el volumen de la caja?

Solución:



Se cumple que $b = 6r$ y $a = 4r$

El volumen de cada lata cilíndrica es $V_L = \pi r^2 h$

El volumen de la caja es $V_C = abh$

La razón entre volúmenes se calcula así:

$$\frac{6V_L}{V_C} = \frac{6\pi r^2 h}{abh}$$

$$= \frac{6\pi r^2 h}{(4r)(6r)h}$$

$$\frac{6V_L}{V_C} = \frac{\pi}{4}$$

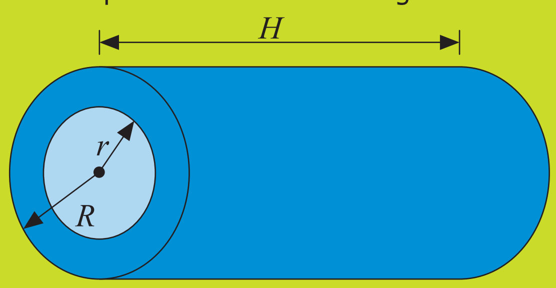
Con lo cual, la razón entre los volúmenes es $\frac{\pi}{4}$.

Ejemplo 8.25 Volúmenes de cuerpos redondos.

Un canal de desagüe tiene forma de un tubo cilíndrico de $50cm$ de largo. Los radios interno y externo tienen longitudes de $9cm$ y $12cm$, respectivamente. Determine el volumen de cemento necesario para construir el canal.

Solución:

Se deduce que el canal tiene la siguiente forma:



$R = 12cm$
$r = 9cm$
$H = 50cm$

El volumen del tubo cilíndrico será el volumen del cilindro exterior menos el volumen del cilindro interior.

$V = V_{EXT} - V_{INT}$

$V = \pi R^2 H - \pi r^2 H$

$V = \pi H\ (R^2 - r^2)$

$V = \pi(50)[(12)^2 - (9)^2]$

$V = \pi(50)(144 - 81)$

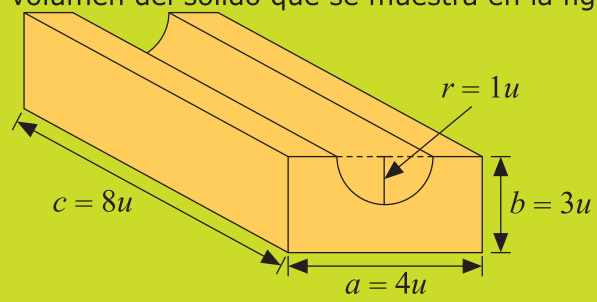
$V = \pi(50)(63)$

$V = 3150\pi$

El volumen de cemento necesario para construir el canal es $3150\pi cm^3$.

Ejemplo 8.26 Volúmenes de figuras.

Determine el volumen del sólido que se muestra en la figura adjunta.



Solución:

Sea U el volumen del paralelepípedo y W el volumen semicilíndrico.

$U = abc$
$U = (4)(3)(8)$
$U = 96$

$W = \frac{1}{2}\, Vcilindro$

$W = \frac{1}{2}\, \pi r^2 c$

$W = \frac{1}{2}\, \pi (1)^2 (8)$

$W = 4\pi$

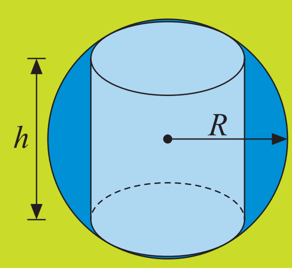
El volumen V del sólido será:

$V = U - W$
$V = 96 - 4\pi$
$V = 4\,(24 - \pi)\, u^3$

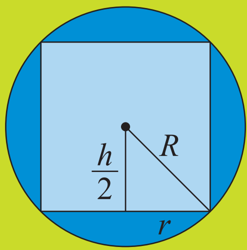
Ejemplo 8.27 Volúmenes de cuerpos redondos.

Determine el volumen de un cilindro de altura h inscrito en una esfera de radio R.

Solución:



Su proyección en un plano lateral es:



Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$$

$$V_{CIL} = \pi r^2 h$$

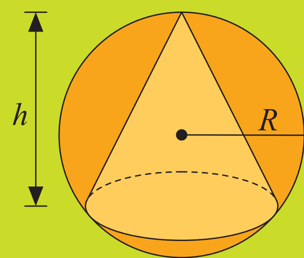
$$V_{CIL} = \pi \left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right) h$$

$$V_{CIL} = \frac{\pi}{4}(4R^2 - h^2)\, hu^3$$

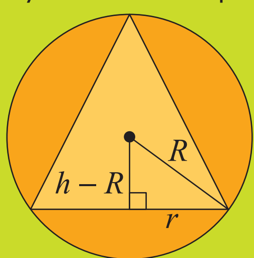
Ejemplo 8.28 Volúmenes de cuerpos redondos.

Determine el volumen de un cono de altura h inscrito en una esfera de radio R.

Solución:



Su proyección en un plano lateral es:



Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$r^2 = R^2 - (h - R)^2$$

$$r^2 = R^2 - h^2 + 2hR - R^2$$

$$r^2 = 2hR - h^2$$

$$r^2 = h(2R - h)$$

$$V_{CO} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$V_{CO} = \frac{1}{3}\pi[h(2R - h)]h$$

$$V_{CO} = \frac{\pi}{3}(2R - h)h^2 u^3$$

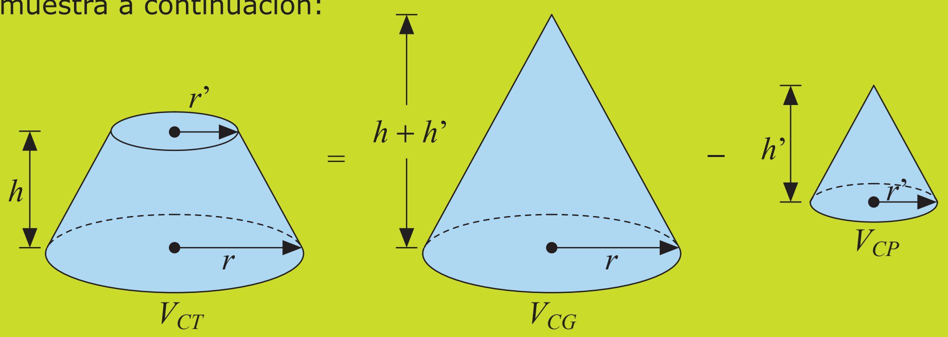
Ejemplo 8.29 Volumen de un cono truncado.

Demuestre que el volumen de un cono truncado de longitudes de radios de las bases r y r' y longitud de altura h es:

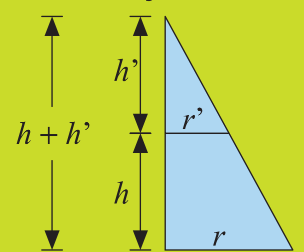
$$V = \frac{1}{3}\pi h\,(r^2 + r'^2 + rr')$$

Solución:

El cono truncado puede ser obtenido a partir de dos conos como se muestra a continuación:



Estableciendo semejanzas entre triángulos:



$$\frac{h+h'}{r} = \frac{h'}{r'}$$
$$hr' + h'r' = h'r$$
$$h'r - h'r' = hr'$$
$$h'(r - r') = hr'$$
$$h' = \frac{hr'}{r - r'}$$

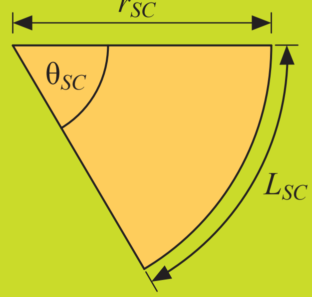
Calculando el volumen del cono truncado:

$$V_{CT} = V_{CG} - V_{CP}$$
$$= \frac{1}{3}\pi r^2(h + h') - \frac{1}{3}\pi r'^2 h'$$
$$= \frac{1}{3}\pi r^2\left(h + \frac{hr'}{r - r'}\right) - \frac{1}{3}\pi r'^2\left(\frac{hr'}{r - r'}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\pi h\left[r^2 + \frac{r'r^2}{r - r'} - \frac{r'^2 r'}{r - r'}\right]$$
$$= \frac{1}{3}\pi h\left(\frac{r^3 - r'r^2 + r'r^2 - r'^3}{r - r'}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\pi h\left(\frac{r^3 - r'^3}{r - r'}\right)$$
$$V_{CT} = \frac{1}{3}\pi h\,(r^2 + r'^2 + rr')$$

Ejemplo 8.30 Volúmenes de cuerpos redondos.

Determine el volumen de un cono construido a partir de un sector circular de longitud de radio igual a $2cm$ y ángulo central de medida igual a $\frac{\pi}{3}$ radianes.

Solución:



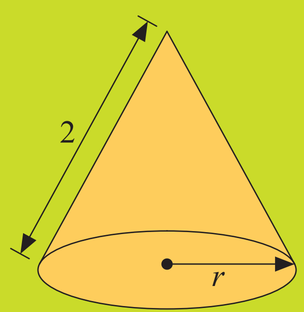
La longitud de arco L_{SC} del sector circular es:

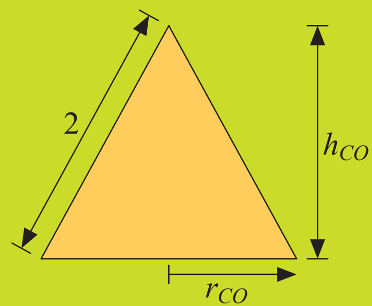
$$L_{SC} = r_{SC}\,\theta_{SC}$$

$$L_{SC} = (2)\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$L_{SC} = \frac{2\pi}{3}$$

Su proyección en un plano lateral es:





La longitud de arco del sector circular coincide con la longitud de la circunferencia de la base del cono.

$$L_{SC} = L_{CO}$$

$$\frac{2\pi}{3} = 2\pi r_{CO}$$

$$r_{CO} = \frac{1}{3}$$

Por el teorema de Pitágoras:

$$h_{CO} = \sqrt{(2)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$h_{CO} = \sqrt{4 - \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{35}}{3}$$

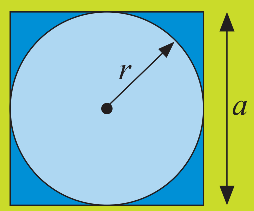
$$V = \frac{1}{3}\,\pi r_{CO}^2\, h_{CO} = \frac{1}{3}\,\pi\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{\sqrt{35}}{3}\right) = \frac{\pi\,\sqrt{35}}{81}\,u^3$$

Ejemplo 8.31 Volúmenes de cuerpos redondos.

Calcule el volumen comprendido entre un cubo de longitud de arista a, y la esfera inscrita en él.

Solución:

Su proyección en un plano es:



La longitud del radio es $\frac{1}{2}a$ unidades y el volumen solicitado será la diferencia entre el volumen del cubo y el de la esfera:

$$V = V_C - V_E$$

$$V = a^3 - \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3$$

$$V = a^3\left(1 - \frac{\pi}{6}\right)u^3$$

Ejemplo 8.32 Volúmenes de cuerpos redondos.

Un rey decide que se fundan 100 esferas de oro de radio a unidades y que, con el material que quede, se formen conos rectos cuyas alturas midan $\frac{a}{2}$ y cuyas bases tengan diámetros de a unidades de longitud. Calcule cuántos conos como esos se podrán formar para repartirlos entre sus súbditos.

Solución:

Denominaremos V_1 al volumen de las 100 esferas.

$$V_1 = 100V_{ESFERA}$$

$$= 100\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

$$V_1 = \left(\frac{400\pi}{3}a^3\right)$$

Denominaremos V_2 al volumen de los x conos.

$$V_2 = xV_{CONO}$$
$$= x\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right)$$
$$= x\left(\frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\left(\frac{a}{2}\right)\right)$$
$$V_2 = x\left(\frac{1}{24}\pi a^3\right)$$

Suponiendo que no hay pérdida de material, debe cumplirse que $V_1 = V_2$, luego:

$$\frac{400\pi a^3}{3} = \frac{\pi a^3}{24}x$$

Despejando x:

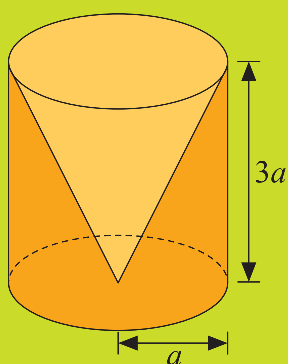
$$x = \left(\frac{24}{3}\right)(400)$$

$$x = 3200$$

El rey podrá repartir 3200 conos de las características anotadas entre sus súbditos.

Ejemplo 8.33 Volúmenes de cuerpos redondos.

En la figura adjunta, determine el volumen comprendido entre el cilindro y el cono.



Solución:

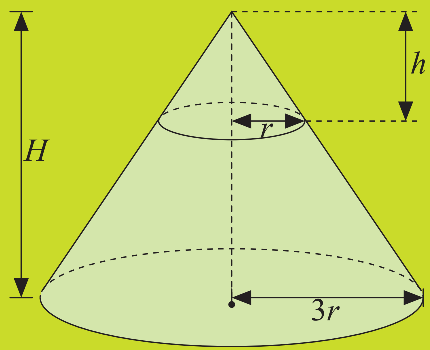
El volumen V comprendido entre el cilindro y el cono será la diferencia de ambos.

$$V = V_{CIL} - V_{CO}$$
$$= \pi r_{CIL}^2 h_{CIL} - \frac{1}{3}\pi r_{CO}^2 h_{CO}$$
$$= \pi(a)^2(3a) - \frac{1}{3}\pi(a)^2(3a)$$
$$= 3\pi a^3 - \pi a^3$$
$$V = 2\pi a^3$$

El volumen requerido es $2\pi a^3$ unidades cúbicas.

Ejemplo 8.34 Volúmenes de cuerpos semejantes.

Con respecto a la figura, se conoce que el volumen del cono de radio de la base $3r$ es igual a $27\pi u^3$. Determine el volumen del cono de altura h y radio de la base r.



Solución:

Aplicando el criterio de semejanza de triángulos:

$$\frac{H}{3r} = \frac{h}{r}$$

$$H = 3h$$

$$h = \frac{H}{3}$$

$$V_{CG} = 27\pi = \frac{1}{3}\pi(3r)^2 H \Rightarrow r^2 = \frac{9}{H}$$

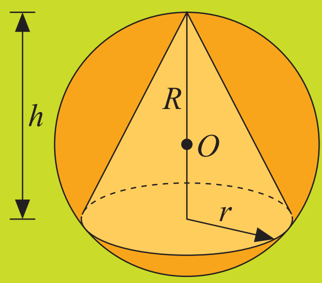
$$V_{CP} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{9}{H}\right)\left(\frac{H}{3}\right)$$

$$V_{CP} = \pi u^3$$

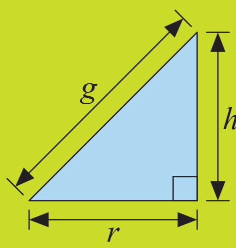
Ejemplo 8.35 Volúmenes de cuerpos redondos.

En la figura adjunta, se ha inscrito un cono recto en una esfera de radio R y centro en O. Si la longitud del radio y el volumen del cono son $3cm$ y $27\pi cm^3$, respectivamente determine el volumen de la esfera.



Solución:

El volumen del cono es $V_{CO} = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{9\pi h}{3} = 27\pi$. De aquí: $h = 9cm$.

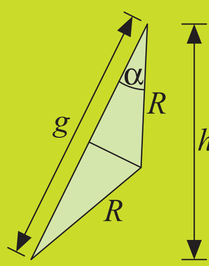


La generatriz del cono se la puede obtener aplicando el teorema de Pitágoras: $g^2 = h^2 + r^2 = 81 + 9 = 90$.

Sea α el ángulo formado por la generatriz g y la altura h del cono. Sea R la longitud del radio de la esfera.

Se tendrá entonces:

$$cos\,(\alpha) = \frac{h}{g}\ \text{(I)}$$



También: $cos\,(\alpha) = \frac{\left(\frac{g}{2}\right)}{R}$ (II).

Donde R es la longitud del radio de la esfera.

Igualando (I) y (II): $\frac{h}{g} = \frac{g}{2R}$.

De donde $R = \frac{g^2}{2h} = \frac{90}{18} = 5cm$. Y, por lo tanto, el volumen de la esfera será:

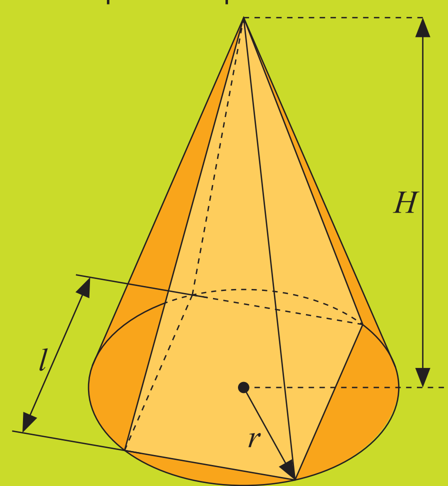
$$V_E = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4\pi(125)}{3} = \frac{500\pi}{3}\ cm^3$$

Ejemplo 8.36 Volúmenes de cuerpos en el espacio.

Una pirámide con base cuadrada se inscribe en un cono recto, de manera que tengan el mismo vértice y la base de la pirámide quede inscrita en la base del cono. La altura común mide $18cm$ y la longitud de un lado del cuadrado es $15cm$. Calcule el volumen de la pirámide y del cono.

Solución:

La situación planteada se puede representar en la figura adjunta.

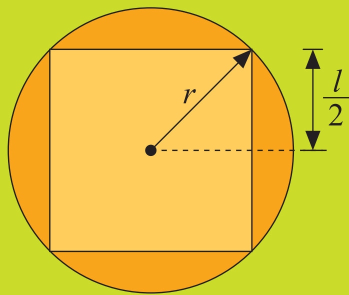


$$\begin{aligned} V_{PIRAMIDE} &= \frac{1}{3} V_{PRISMA} \\ &= \frac{1}{3} l^2 H \\ &= \frac{1}{3}(15)^2(18) \end{aligned}$$

$$V_{PIRAMIDE} = 1350cm^3$$

$\therefore$ El volumen de la pirámide es $1350cm^3$.

Considerando las bases de la pirámide y el cono, tenemos:



Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$r^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$r^2 = \frac{l^2}{2}$$

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2}\, l$$

Por lo tanto, para calcular el volumen del cono:

$$V_{CONO} = \frac{1}{3}\pi r^2 H$$

$$= \frac{1}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\, l\right)^2 H$$

$$= \frac{1}{3}\pi \left(\frac{1}{2}\right) l^2 H$$

$$= \frac{1}{3}\pi \left(\frac{1}{2}\right) (15)^2 (18)$$

$$V_{CONO} = 675\,\pi cm^3$$

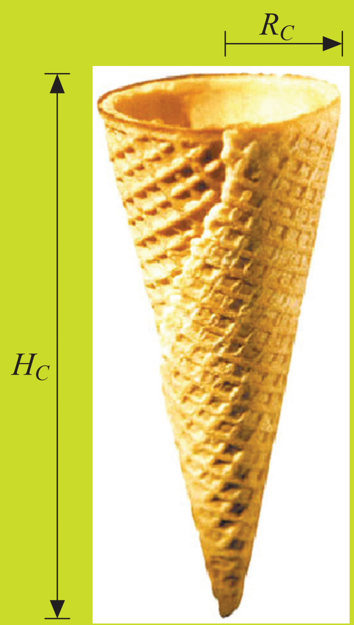
$\therefore$ El volumen del cono es $675\pi cm^3$.

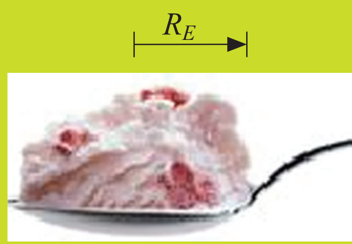
Ejemplo 8.37 Volúmenes de cuerpos redondos.

Un cono de helado tiene $12\frac{1}{2}cm$ de profundidad y $5cm$ de diámetro superior. Se colocan en él dos cucharadas semiesféricas, también de longitud de diámetro $5cm$. Si el helado se derrite dentro del cono, ¿lo rebasará?

Solución:

La situación descrita puede ser representada por:





$$V_{CONO} = \frac{1}{3}\pi R_C^2 H_C$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{5}{2}\right)^2\left(\frac{25}{2}\right)$$

$$V_{CONO} = \frac{625\pi}{24}\ cm^3$$

$$V_{HELADO} = 2V_{SEMIESFERA} = V_{ESFERA}$$

$$= \frac{4}{3}\pi R_E^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi\left(\frac{5}{2}\right)^3$$

$$V_{HELADO} = \frac{125\pi}{6}\ cm^3$$

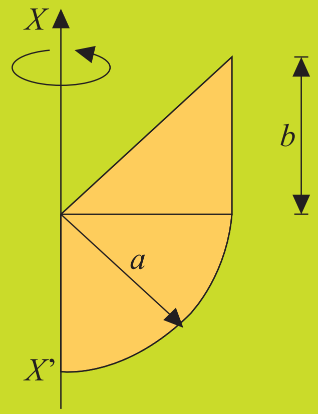
Para que el helado no rebase el cono, debe cumplirse que: $V_{HELADO} \leq V_{CONO}$

Como: $\frac{125\pi}{6} \leq \frac{625\pi}{24}$

Si el helado se derrite, no rebasará el cono.

Ejemplo 8.38 Volumen de un sólido de revolución.

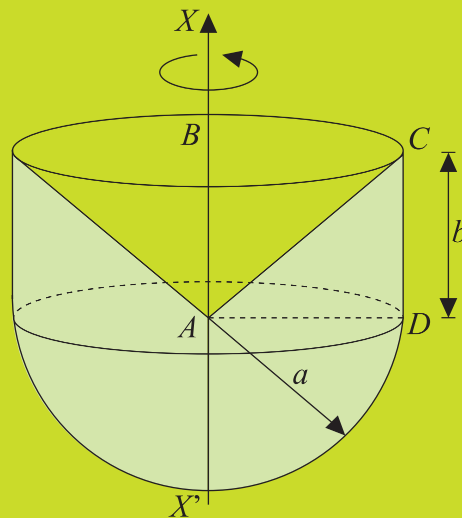
Encuentre el volumen del sólido que se genera al rotar la región sombreada alrededor del eje XX'.



Solución:

Sea U el volumen del hemisferio de radio a que se genera al rotar el cuarto de círculo de radio a alrededor del eje XX':

$$U = \frac{2}{3}\pi a^3$$



Sea V el volumen del cono recto de longitud de radio a y altura b que se genera al rotar el triángulo rectángulo ABC alrededor del eje XX':

$$V = \frac{1}{3}\pi a^2 b$$

Sea W el volumen del cilindro recto de longitud de radio a y altura b que se genera al rotar el rectángulo $ABCD$ alrededor del eje XX':

$$W = \pi a^2 b$$

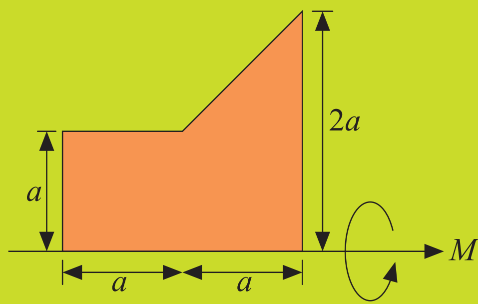
El volumen del sólido es: $U + W - V$

$$U + W - V = \frac{2}{3}\pi a^3 + \pi a^2 b - \frac{1}{3}\pi a^2 b$$

$$U + W - V = \frac{2}{3}\pi a^2(a + b)u^3$$

Ejemplo 8.39 Volumen de un sólido de revolución.

Calcule el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar la región del plano mostrada en la figura alrededor del eje M.



Solución:

$V_S = V_{CIL} + V_{CT}$

$V_S = \pi(a)^2(a) + \frac{1}{3}\pi[(a)^2 + (a)(2a) + (2a)^2]a$

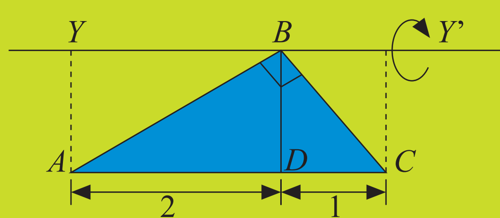
$V_S = \pi a^3 + \frac{1}{3}\pi(a^2 + 2a^2 + 4a^2)a$

$V_S = \pi a^3 + \frac{7}{3}\pi a^3$

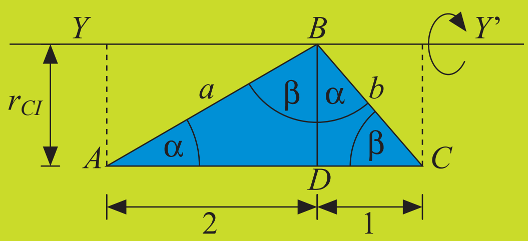
$V_S = \frac{10}{3}\pi a^3 u^3$

Ejemplo 8.40 Volumen de un sólido de revolución.

Si en la figura adjunta el triángulo rectángulo tiene su hipotenusa paralela al eje YY', determine el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar la región sombreada alrededor de dicho eje.



Solución:



$\alpha + \beta = 90^{\circ}$

Tenemos 3 triángulos rectángulos que son semejantes, luego tomamos los triángulos ABD y ABC:

$$\frac{a}{3} = \frac{2}{a}$$
$$a^2 = 6$$
$$a = \sqrt{6}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = (2 + 1)^2$

$$b = \sqrt{(3)^2 - (\sqrt{6})^2}$$
$$\therefore\ b = \sqrt{3}$$

También se puede utilizar semejanza de triángulos para calcular el valor de b:

$$\frac{b}{3} = \frac{1}{b}$$
$$b^2 = 3$$
$$b = \sqrt{3}$$

Aplicando nuevamente semejanza entre los triángulos DBC y ABC:

$$\frac{r_{CI}}{b} = \frac{a}{3}$$
$$r_{CI} = \frac{ab}{3} = \frac{\sqrt{6}\,\sqrt{3}}{3} = \frac{3\,\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$$
$$V = Vcilindro - Vcono_1 - Vcono_2$$
$$V = \pi r_{CI}^2 h_{CI} - \frac{1}{3}\,\pi r_{CO_1}^2 h_{CO_1} - \frac{1}{3}\,\pi r_{CO_2}^2 h_{CO_2}$$

Pero $r_{CI} = r_{CO_1} = r_{CO_2} = \sqrt{2}$

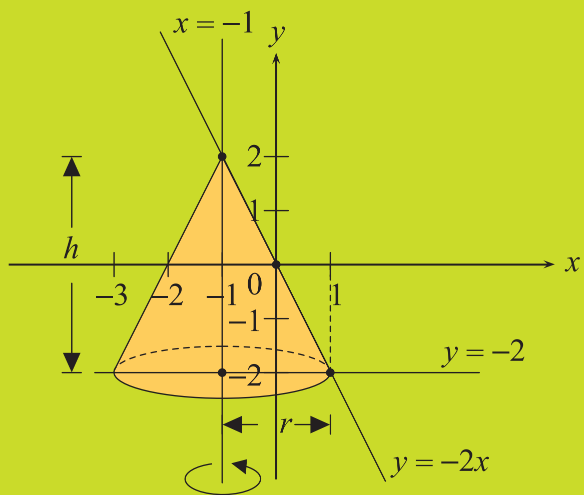
$$V = \pi r_{CI}^2 \left(h_{CI} - \frac{1}{3}\,h_{CO_1} - \frac{1}{3}\,h_{CO_2}\right)$$
$$V = \pi(\sqrt{2})^2 \left[3 - \frac{1}{3}\,(2) - \frac{1}{3}\,(1)\right]$$
$$V = 2\pi \left(3 - \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)$$
$$V = 4\pi u^3$$

Ejemplo 8.41 Volumen de un sólido de revolución.

Si se define la región del plano cartesiano limitada por: $\begin{cases} y = -2x \\ y = -2 \\ x = -1 \end{cases}$,

encuentre el volumen del sólido de revolución generado al rotar dicha región, alrededor del eje $x = -1$.

Solución:



$r = |1 - (-1)| = 2$

$h = |2 - (-2)| = 4$

$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

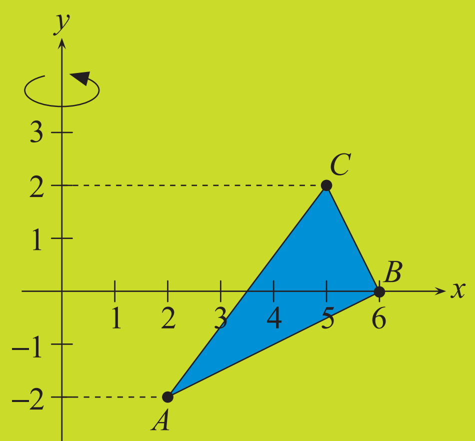
$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi (2)^2 (4)$

$V_{cono} = \frac{16}{3}\pi u^3$

Ejemplo 8.42 Volumen de un sólido de revolución.

Calcule el volumen del sólido de revolución que se genera cuando el triángulo cuyos vértices son $A(2, -2)$, $B(6, 0)$ y $C(5, 2)$ gire en torno al eje y.

Solución:



Procedemos a encontrar el punto de intersección del lado $\overline{AC}$ del triángulo con el eje x.

La función lineal que contiene dicho segmento de recta es:

$$f(x) = \frac{2}{3}(2x - 7)$$

Para encontrar el valor de la abcisa del punto de intersección de f con el eje x, debemos resolver la ecuación lineal $f(x) = 0$.

$$\frac{2}{3}(2x - 7) = 0$$

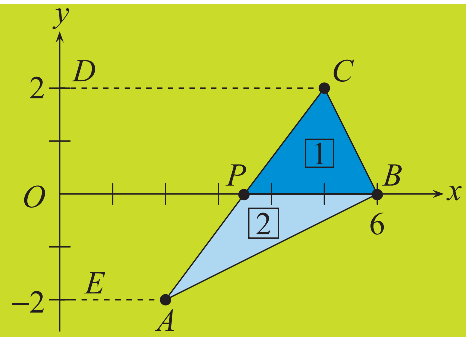
$$2x - 7 = 0$$

$$x = \frac{7}{2}$$

Las coordenadas de dicho punto P son $\left(\frac{7}{2}, 0\right)$, y también se las puede obtener de manera más sencilla, porque entre $x = 2$ y $x = 5$, la mitad es $x = 3.5$ y las ordenadas respectivas están distribuidas simétricamente respecto al eje x.

El volumen del sólido de revolución que se genera puede ser obtenido en 2 partes:

$$V_S = V_1 + V_2$$



En donde V_1, es el volumen del cono truncado que se genera al rotar la superficie del trapecio *DCBO* menos la superficie del trapecio *DCPO* alrededor del eje y; y, V_2 es el volumen del cono truncado que se genera al rotar el trapecio *OBAE* menos la superficie del trapecio *OPAE* alrededor del eje y.

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi H_1\left(R_1^2 + R_1 r_1 + r_1^2 - R_2^2 - R_2 r_2 - r_2^2\right)$$

$$= \frac{1}{3}\pi(2)\left((6)^2 + (6)(5) + (5)^2 - (5)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)(5) - \left(\frac{7}{2}\right)^2\right)$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(36 + 30 - \frac{35}{2} - \frac{49}{4}\right)$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(\frac{264 - 70 - 49}{4}\right)$$

$$= \frac{2(145)}{12}\pi$$

$$V_1 = \frac{145}{6}\pi$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi H_3\left(R_3^2 + R_3 r_3 + r_3^2 - R_4^2 - R_4 r_4 - r_4^2\right)$$

$$= \frac{1}{3}\pi(2)\left((6)^2 + (6)(2) + (2)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)(2) - (2)^2\right)$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(36 + 12 - \frac{49}{4} - 7\right)$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(41 - \frac{49}{4}\right)$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(\frac{164 - 49}{4}\right)$$

$$= \frac{2(115)}{12}\pi$$

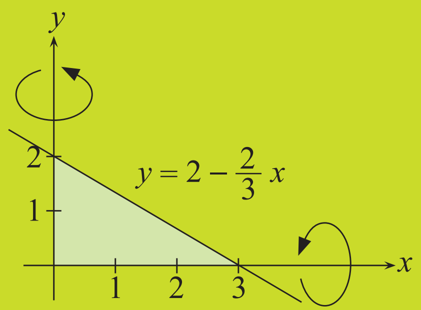
$$V_2 = \frac{115}{6}\pi$$

$$V_S = \frac{145\pi}{6} + \frac{115\pi}{6}$$
$$= \frac{260\pi}{6}$$
$$V_S = \frac{130\pi}{3}$$

Por lo tanto, el volumen que se genera al rotar el triángulo ABC alrededor del eje y es $\frac{130\pi}{3}u^3$.

Ejemplo 8.43 Volumen de un cuerpo de revolución.

Considere la región en el plano de la figura adjunta:



a) Determine Vx, que es el volumen del cuerpo de revolución que se genera al rotar la figura alrededor del eje x.

b) Determine Vy, que es el volumen del cuerpo de revolución que se genera al rotar la figura alrededor del eje y.

c) La proposición: $Vx = Vy$, ¿es verdadera?

Solución:

Dado que se obtiene un cono al rotar alrededor del eje x.

a) $Vx = \frac{1}{3}\pi r_x^2 h_x$

$$= \frac{1}{3}\pi(2)^2(3)$$

$$Vx = 4\pi u^3$$

Al rotar la figura alrededor del eje y también se obtiene un cono.

b) $Vy = \frac{1}{3}\pi r_y^2 h_y$

$$= \frac{1}{3}\pi(3)^2(2)$$

$$Vy = 6\pi u^3$$

c) A partir de los valores anteriores, concluimos que el valor de verdad de la proposición planteada es falso.