“Calculo Actuarial con Cadenas de Markov, una aplicación”

Xavier Cabezas[1], Fernando Sandoya[2]

[1]Ingeniero en Estadística Informática 2000
[2]Director de Tesis, Matemático, Escuela Politécnica Nacional 1996, Profesor de la ESPOL desde 1995.

RESUMEN

Comenzando con un análisis de la economía del seguro y la teoría del riesgo, luego de la definición de procesos estocásticos, justificamos la existencia de espacios y distribuciones finito dimensionales y explicamos las propiedades básicas de los procesos de Markov, después estudiamos las fuerzas de transición en intervalos de tiempo discretos, que nos servirán para la determinación de probabilidades en tiempo continuo, también analizamos lo más importante del método, que es el tomar en cuenta el tiempo de duración dentro de un estado determinado y la dependencia del mismo en el cálculo de probabilidades de transición, terminando con una muestra de la aplicabilidad del método en problemas ecuatorianos, con un pequeño ejemplo del mismo.

INTRODUCCION

La sociedad ecuatoriana no posee suficientes referencias acerca de la ciencia actuarial, así como de sus aportes y aplicaciones en la vida cotidiana. A excepción de los expertos, pocas personas conocen que los cálculos actuariales están ligados a los seguros de personas, bienes o servicios, y que sobre la base de ellos se establecen las primas, los riesgos, tiempos de vida o utilidad esperados, etc., por citar algunas situaciones. Justamente, la forma actual de analizar esas situaciones olvida ciertos momentos importantes de aquéllas, en el lapso de tiempo desde su origen hasta su término.

En el Análisis Markoviano se resaltan las virtudes de un método moderno que explora exhaustivamente las situaciones mencionadas anteriormente y las formula matemáticamente. Este método fue propuesto en el año 1994 por un investigador canadiense y es ampliamente desarrollado en esta tesis.

La aplicación del método se presenta como un aporte a las ciencias actuariales, con el objeto de que las compañías aseguradoras del país se orienten en este marco teórico y den respuestas más prácticas y coherentes dentro del mundo de los seguros.

CONTENIDO

Función de Supervivencia

Definamos la edad de muerte de un recién nacido por X como una variable aleatoria continua, y la función de probabilidad de densidad acumulada por:

$$F(x) = Pr(X \leq x) \qquad x \geq 0$$

La cual es la probabilidad de que la edad de muerte de un recién nacido sea menor o igual a x. Por lo tanto podemos escribir a la función de supervivencia acumulada como:

$$s(x) = 1 - F(x) = Pr(X > x) \qquad x \geq 0$$

Mortalidad en Grupos Homogéneos

Consideremos un grupo de individuos con características homogéneas que los hace similares entre sí, entonces, podemos referirnos a la edad de un grupo, como una variable aleatoria, así como las probabilidades de muerte y sobrevivencia en una determinada edad.

Probabilidades en Tablas Ultimadas y de Grupos Seleccionados

El modelo completo para un subgrupo especial seleccionado, que pertenece a un grupo general, es un conjunto de funciones de supervivencia, una función para cada edad, que reconozca una información determinada, este conjunto puede ser descrito por medio de una función general de dos variables, la primera es la edad a la que por ejemplo se adquiere un seguro o enfermedad $[x]$, y la segunda variable es el tiempo de duración de la póliza o la enfermedad t. Al tiempo t lo denominaremos periodo selecto, dentro del cual las probabilidades, para el subgrupo seleccionado, son encontradas a partir de la función de supervivencia bivariada descrita anteriormente, y después de este número de años, la función de supervivencia $S(x)$ general, puede ser utilizada para todo el grupo. Si una Tabla además de tomar edades dentro del periodo selecto, toma en cuenta tiempos mayores a t, es decir $t + j$, es conocida como Tabla Ultimada y de Grupos Seleccionados.

Propiedades Básicas de los Procesos de Markov

Empezaremos presentando a $X(t)$ como la representación del estado de un individuo al tiempo (edad) $t \geq 0$. Denotaremos un proceso estocástico por $\{X(t), t \geq 0\}$.
Suponiendo que existe un número finito de estados $1,2,3,....,k$, entonces podemos decir que el proceso tiene un espacio de estados $\{1,2,3,....,k\}$, decimos entonces que el proceso estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$ es un Proceso de Markov, si para todo $s,t \geq 0$ además de $i, j, x(u) \in \{1,2,3,....,k\}$, ocurre que:

$$P\{X(s+t) = j \,/\, X(s) = i, X(u) = x(u), \quad 0 \leq u < s\} = P\{X(s+t) = j \,/\, X(s) = i\}$$

Lo que quiere decir que el estado de un individuo en el tiempo (edad) $s + t$, depende solo del estado en el tiempo (edad) s y no de los estados en los instantes anteriores $0 \leq u < s$, dicha propiedad se suele denominar propiedad de pérdida de memoria del proceso.

Cadenas de Markov

Una Cadena de Markov es un caso especial de los Procesos de Markov. Se utiliza para estudiar el comportamiento de ciertos sistemas estocásticos a corto y largo plazo.

Ecuación de Chapman-Kolgomorov

Se la define como:

$$p_{ij}(s,s+t+u)=\sum_{l=1}^{k} p_{il}(s,s+t)p_{lj}(s+t,s+t+u), \quad i,j\in\{1,2,\ldots,k\} \qquad \textbf{(2.5.1)}$$

y las ecuaciones diferenciales de **Chapman-Kolgomorov** son:

$$\frac{\partial}{\partial t}p_{ij}(s,s+t)=\sum_{l=1}^{k} p_{il}(s,s+t)\mu_{lj}(s+t)$$

$$\frac{\partial}{\partial s}p_{ij}(s,s+t)=-\sum_{l=1}^{k}\mu_{il}(s)p_{lj}(s,s+t)$$

Fuerzas Constantes de Transición

Antes hablamos de los procesos de Markov Homogéneos, es decir de procesos de Markov en los que las probabilidades de transición y las fuerzas de transición definidas no dependen del tiempo en que se encuentren, podemos decir entonces que la probabilidad de transición de un paso es la misma para cualquier edad s.

Entonces la probabilidad $p_{ij}(s,s+t)$ puede ser escrita como $p_{ij}(t)$, de igual forma podemos actuar con las fuerzas de transición; es decir, podemos escribir $\mu_{ij}(t)$ = μ_{ij}, para cualquier t.

Las fuerzas de transición pueden ser consideradas matricialmente como los valores dentro de una matriz Q de $k\times k$ estados y la función de probabilidades de transición como ya lo hemos visto puede ser expresada en la forma matricial $P(t)$

Así, podemos entonces expresar en forma matricial las ecuaciones de Chapman-Kolmogorof como $P(t+u)=P(t)P(u)$ y también las ecuaciones diferenciales de **Chapman-Kolgomorov**, quedando expresadas como el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{ij}(t) = \sum_{l=1}^{k} p_{il}(t)\mu_{lj}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} p_{ij}(t) = -\sum_{l=1}^{k} \mu_{il} p_{lj}(t)$$

que matricialmente puede expresarse como:

$$\begin{cases} P'(t) = P(t)Q \\ \\ P'(t) = QP(t) \end{cases} \quad \text{, donde } P(0) = I$$

resolviendo este sistema de ecuaciones diferenciales homogéneo lineal de primer orden, por la fórmula de Abel, se tiene la solución $P(t) = ce^{Qt}$

Como $P(0) = I$, se tiene que $c = 1$, por tanto, $P(t) = e^{Qt}$. Desarrollando e^{Qt} en serie de Taylor obtenemos $P(t) = e^{Qt} = I + Qt + \frac{Q^2t^2}{2!} + ...$, ahora bien, si la matriz Q tiene distintos valores propios $\lambda_1, \lambda_2, .. \lambda_k$, podemos decir que es diagonalizable por lo tanto $Q = ADA^{-1}$ donde $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, .. \lambda_k)$ y A es la matriz de los vectores propios asociados con los valores propios λ_i. Entonces, tenemos reemplazando en $P(t)$ que $P(t) = e^{Qt} = e^{ADA^{-1}} = e^{Adiag(\lambda_1, ... \lambda_k)A^{-1}}$, por lo tanto $P(t) = Adiag(e^{\lambda_1 t}, ... e^{\lambda_k t})A^{-1}$, de donde podemos escribir que los valores de la matriz $P(t)$son: $p_{ij}(t) = \sum_{n=1}^{k} a_{in} v_{nj} e^{\lambda_n t}$, donde v es la entrada de la matriz $V = A^{-1}$. Si los vectores propios no son distintos, puede utilizarse la descomposición canónica de Jordan, que consiste en el cálculo de un vector característico generalizado, por ejemplo si tenemos una matriz M cuadrada de $2x2$, con un valor característico de multiplicidad algebraica 2, no existirá otro vector propio que v_1, entonces se calcula el siguiente sistema de ecuaciones para hallar el segundo vector propio v_2 que se necesita, $(M + I)v_2 = v_1$. En conclusión, al encontrar los valores propios y los vectores propios de la matriz de las fuerzas de transición Q, podemos determinar con mayor facilidad la Matriz $P(t)$.

Fuerzas Constantes de Transición en Intervalos Discretos

Hemos asumido que las fuerzas de transición de estados son constantes con respecto al tiempo, lo cual nos permite expresar las funciones de probabilidad de transición de manera mas sencilla en función de t. Sin embargo, en la práctica de aplicaciones actuariales no es tan bueno esto, más bien se necesita de fuerzas de transición que varíen con el tiempo (es decir con la edad de un individuo), podemos lograr esto usando fuerzas de transición constantes solo en intervalos discretos de tiempo pequeños.

Definamos $\mu_{ij}(t)=\mu_{ij}^{(m)}$ si $[t_{m-1},t_m)$, para $m=1,2,....,$donde $t_0=0$. Definamos también $p_{ij}^{(m)}(t)$ como la función de probabilidad de transición asociada con el intervalo de tiempo $[u,u+t)$ contenido dentro del intervalo $[t_{m-1},t_m)$

Expresando esto de forma matricial tendremos las matrices $Q^{(m)}$ y $P^{(m)}$. Definimos también m_t como el entero que hace que $t_{m_t-1}\le t<t_{m_t}$, podemos entonces ahora afirmar lo siguiente $P(s,t)=P^{(m_s)}(t_{m_s}-s)P^{(m_s+1)}(t_{m_s+1}-t_{m_s}).....P^{(m_t)}(t-t_{m_t-1})$

Dependencia de la Duración en un Estado E_i

Un individuo de edad media puede padecer la misma enfermedad que un individuo de edad avanzada, sin embargo, la probabilidad de muerte para el primer caso será más baja que para el segundo, así también, si alguien sufre de alguna enfermedad por largo tiempo evidentemente la probabilidad de que se cure pronto es más alta que la de alguien que recién adquiere la enfermedad, por supuesto si la enfermedad es curable, caso contrario la probabilidad de muerte es 1, pero en general esta probabilidad cambia según el tiempo de transcurrida la enfermedad, además de la edad del individuo; estos aspectos no han sido considerados en las secciones anteriores, pero es necesario considerarlas ya que las aplicaciones actuariales en modelos de 3 estados donde uno de ellos es la incapacidad (enfermedad), requiere de una aproximación donde se analice estos aspectos.

Ejemplo Numérico

TABLA I

Extracto de la Tabla Inglesa de Mortalidad para los Seguros.
Publicada por el Instituto de Actuarios

	(1)	*(2)*	*(3)*	*(4)*	*(5)*	*(6)*	*(7)*
[x]	**q[x]**	**q[x]+1**	**qx+2**	**l[x]**	**l[x]+1**	**lx+2**	**X+2**
30	0.0004376	0.0005737	0.0006988	33829	33814	33795	32
31	0.0004532	0.0005992	0.0007381	33807	33791	33771	33
32	0.0004771	0.0006344	0.0007900	33784	33767	33746	34
33	0.0005096	0.0006800	0.0008557	33760	33742	33719	35
34	0.0005511	0.0007365	0.0009366	33734	33715	33690	36

Para estimar $\mu_{12}^{(x)}$, $\mu_{13}^{(x)}$, $\mu_{23}^{(x)}$, que son la taza de mortalidad necesitaremos de las distintas fuerzas de mortalidad de la **TABLA I**, a las que llamaremos valores tabulados, para las distintas duraciones de una póliza de seguros, dadas para, $t=0,1$ por, $\mu_{[x-t]+t+1/2}^{T}=-ln\left(1-q_{[x-t]+t}^{T}\right)$ y para $t>1$ por la fuerza de mortalidad ultimada $\mu_{x+1/2}^{T}=-ln\left(1-q_x^{T}\right)$. Donde T representa el valor tabulado.

La fuerza de mortalidad tabulada se incrementa durante los dos períodos selectos $[0,1)$ y $[1,2)$, y permanece constante después, ésta característica no es considerada en nuestra correspondiente fuerza de mortalidad $\mu^{(x)}(t)$, que se encuentra determinada por la ecuación $\mu(t)=\dfrac{(\mu_{23}-\mu_{13})(\mu_{12}+\mu_{13})e^{-(\mu_{12}+\mu_{13})}-\mu_{12}\mu_{23}e^{-\mu_{23}t}}{(\mu_{23}-\mu_{13})e^{-(\mu_{12}+\mu_{13})}-\mu_{12}e^{-\mu_{23}t}}$

TABLA II

Datos Tabulados para $t=2$, y $x=32$

Edad x=32	
Duración	***Datos Tabulados***
0.5	0.000477224
1.5	0.000599420
Ultimada	0.000699064

Sólo nos faltaría estimar $\mu_{12}^{(32)}$, que lo obtendremos al minimizar las desviaciones cuadradas de $\mu^{(32)}(t)$, con la ayuda del computador, es decir minimizamos $\sum_{t=0}^{1}\left[\mu^{T}_{[32-t]+t+1/2}-\mu^{(32)}(t+1/2)\right]^2$. Donde $\mu(t)=\dfrac{(\mu_{23}-\mu_{13})(\mu_{12}+\mu_{13})e^{-(\mu_{12}+\mu_{13})}-\mu_{12}\mu_{23}e^{-\mu_{23}t}}{(\mu_{23}-\mu_{13})e^{-(\mu_{12}+\mu_{13})}-\mu_{12}e^{-\mu_{23}t}}$ es la expresión para la regresión no lineal. El resultado obtenido es el siguiente:

TABLA III

Estimadores de la Fuerza de Mortalidad para $x=32$

$\mu^{(32)}_{12}$	$\mu^{(32)}_{13}$	$\mu^{(32)}_{23}$
0.623114499	0.000416126	0.000699064

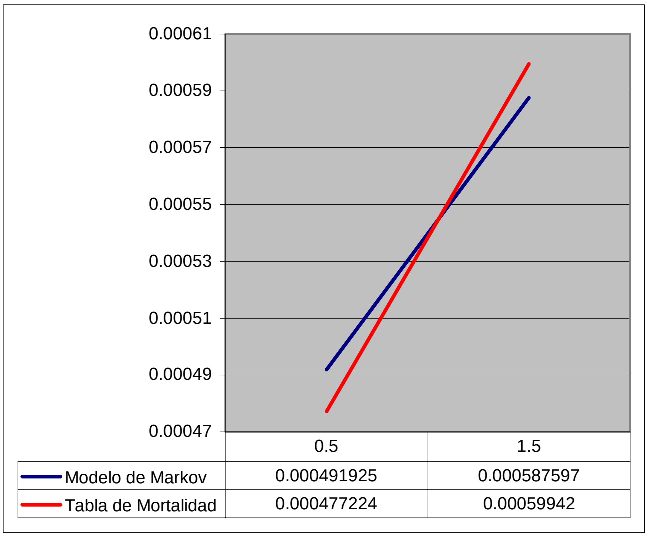

Figura 1 Comparación de la Fuerza de Mortalidad a la edad de 32 años, dentro del Periodo Selecto de 0.5 a 1.5

TABLA IV

Para $x = 32$. Comparación de Fuerzas de Mortalidad con duración de la póliza del seguro de 0.5 a 10.5 años

Duración	*Estimación*	*Tabla*	*|Diferencia|*
0.5	0.0004919	0.0004772	0.0000147
1.5	0.0005876	0.0005994	0.0000118
2.5	0.0006386	0.0006991	0.0000605
3.5	0.0006658	0.0006991	0.0000333
4.5	0.0006801	0.0006991	0.0000190
5.5	0.0006875	0.0006991	0.0000116
6.5	0.0006913	0.0006991	0.0000078
7.5	0.0006931	0.0006991	0.0000060
8.5	0.0006938	0.0006991	0.0000053
9.5	0.0006940	0.0006991	0.0000051
10.5	0.0006939	0.0006991	0.0000052

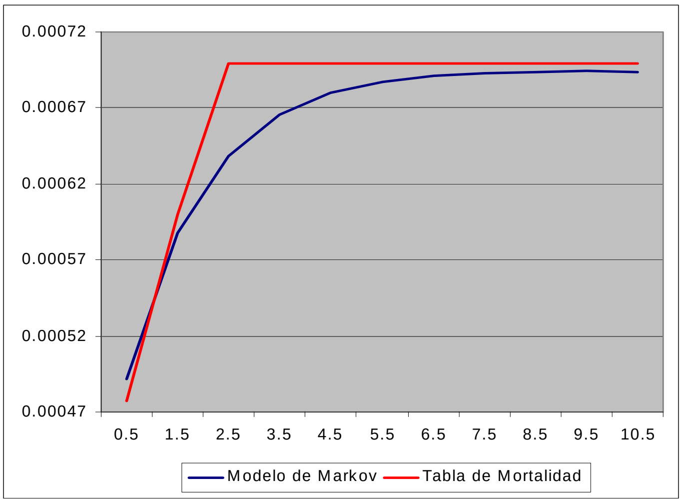

Figura 2 Comparación de las fuerzas de Mortalidad hasta 10.5 años

Con estos estimadores de la fuerza de mortalidad podemos armar la matriz Q; y luego, hallando sus valores y vectores propios, obtenemos la matriz de probabilidades de transición $P^{(32)}(1)$.

Para el modelo de tres estados:

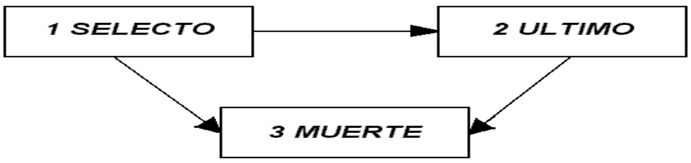

Figura 3 Modelo de 3 estados, SELECTO y ULTIMO

$$Q^{(x)} = \begin{bmatrix} -\left(\mu_{12}^{(x)} + \mu_{13}^{(x)}\right) & \mu_{12}^{(x)} & \mu_{13}^{(x)} \\ 0 & -\mu_{23}^{(x)} & \mu_{23}^{(x)} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los valores propios para $Q^{(x)}$ serán entonces: $\lambda_1 = -\mu_{23}^{(32)}$ $\lambda_2 = -\left(\mu_{12}^{(32)} + \mu_{13}^{(32)}\right)$ $\lambda_3 = 0$. Y los correspondientes vectores propios son:

$$v1 = \begin{bmatrix} -\mu_{12}^{(x)} / -\mu_{12}^{(x)} - \mu_{13}^{(x)} + \mu_{23}^{(x)} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para $x = 32$, tendremos entonces que los valores y vectores propios son los siguientes:

TABLA V
Valores propios de Q

λ_1	λ_2	λ_3
-0.00069906	-0.62353062	0

$$v1 = \begin{bmatrix} 1.0004543 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Presentamos ahora la matriz $P^{(32)}(1)$, definida por $P(t) = A diag\left(e^{\lambda_1 t}, \ldots.. e^{\lambda_k t}\right) A^{-1}$, para $t = 1$, donde t representa 1 año después de la edad x, es decir, estas probabilidades están dentro del intervalo $[x, x+1)$ donde las fuerzas de mortalidad son constantes.

$$\begin{bmatrix} 1.0004543 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9993012 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5360485 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1.000454 & 0.0004543 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{(32)}(1) = \begin{bmatrix} 0.5360485 & 0.4634631 & 0.0004884 \\ 0 & 0.9993012 & 0.0006988 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Con un procedimiento similar tenemos que para $x = 33$ y $x = 34$. Hallando la Matriz $P(32,34)$ y $P(32,35)$, podremos ilustrar la proximidad con los valores reales.

$$P(32,34)=\begin{bmatrix} 0.286534406 & 0.712355372 & 0.001110222 \\ 0 & 0.998563566 & 0.001436434 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P(32,35)=\begin{bmatrix} 0.154288757 & 0.843876665 & 0.001834578 \\ 0 & 0.997774661 & 0.002225339 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La **TABLA XIV**, muestra las probabilidades de supervivencia, de un individuo que se asegura a los 32 años.

TABLA XIV

Comparación de Probabilidades de Supervivencia

t	${}_{t}p^{T}_{[32]}$	$1-p_{13}(32,32+t)$	|*Diferencia*|
1	0.99952289	0.999511625	0.000011265
2	0.998875207	0.998889778	0.000014571
3	0.998076012	0.998165422	0.000089410

La probabilidad ${}_{2}p^{T}_{[32]}$; por ejemplo, es obtenida de la **TABLA I**, de la siguiente manera:

$${}_{2}p^{T}_{[32]}=\frac{l_{34}}{l_{[32]}}=\frac{33746}{33784}=0.998875207$$

Como vemos el valor de los datos de nuestro Modelo de Markov son muy cercanos a los obtenidos de la Tabla de Mortalidad, concluyendo entonces que el Modelo propuesto nos sirve para estimar valores de probabilidad bastante aproximados a los reales y además, toma en cuenta la duración dentro del estado de **VIDA**, separándolo en dos estados, **SELECTO** y **ULTIMO**, donde el primero tiene una duración de t años.

Conclusiones y Recomendaciones

1. El tratar los Problemas Actuariales por medio de procesos multiestados, hace más fácil los cálculos de probabilidades de transición, que por medio de las Tablas de Mortalidad para Grupos Seleccionados.

2. Deberían ser construidas Tablas de Mortalidad Generales y de Grupos Seleccionados, ya que en Ecuador no existen.

3. Seleccionar un subgrupos de personas con una cierta característica, que se encuentran dentro de un grupo general, enfoca problemas específicos del área de seguros de vida, anualidades y primas netas.

4. El Modelo Propuesto toma en consideración el tiempo de permanencia dentro de un estado determinado.

5. Las estimaciones de probabilidad obtenidas tienen un error de 0.001 %, con respecto a los valores de la Tabla de Mortalidad.

BIBLIOGRAFIA

1. Sociedad de Actuarios, Matemáticas Actuariales (Estados Unidos, 1994), pp. 1-50

2. Bruce L. Jones, Actuarial Calculations using a Markov Model (Iowa Canadá, 1994), pp. 1-29

3. Richard l. Burden y J. Douglas Faires, Análisis numérico, (Estados Unidos, Editorial Iberoamérica, 1985), pp. 318-373

4. Richard L. Scheaffer y James T. McClave, Probabilidad y Estadística para Ingeniería, (Estados Unidos, Editorial Iberoamérica, 1993), pp. 24-113