RÚBRICA DEL TERCER EXAMEN DE CÁLCULO VECTORIAL

PAO1 2023-2024

1. (15 p.) Considere la superficie $S : x^2 + y^2 - 3z^2 = 1$ y sea π el plano que es tangente a S en el punto $(3, -2, 2)$.

   a) Obtenga la ecuación general de π.

   - Plantea expresión general del gradiente a S en un punto.............2 p.
   - Reemplaza datos y obtiene un vector normal, por ejemplo, $\mathbf{n} = (3, -2, -6)$...................3 p.
   - Plantea ecuación general del plano incluyendo $\mathbf{n}$...............2 p.
   - Determina el término independiente correctamente..........2 p.
   - Escribe la ecuación general de π.................1 p.

   $$\pi : 3x - 2y - 6z - 1 = 0.$$

   b) Suponga que L es la recta que contiene los puntos $A(1, 0, -1)$ y $B(-1, 1, 0)$. Determine si L es perpendicular a π.

   - Determina un vector director de L con los puntos dados, por ejemplo, $\mathbf{d} = (-2, 1, 1)$......................1 p.
   - Plantea como condición suficiente para que L sea perpendicular a π que $\mathbf{d}$ y $\mathbf{n}$ sean paralelos.............2 p.
   - Determina que L NO es perpendicular a π usando el razonamiento planteado anteriormente.............2 p.

2. (20 p.) Sea $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)e^{-x^2-y^2} & , x^2+y^2 \neq 0 \\ 1 & , x^2+y^2 = 0 \end{cases}$.

a) Determine si f es continua en $(0,0)$ empleando el criterio de continuidad.

- Plantea criterio general de continuidad en un punto de acumulación..................2 p.
- Calcula correctamente que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$............4 p.
- Compara el límite hallado con $f(0,0)$ y concluye que f NO es continua en $(0,0)$....................2 p.

b) Calcule f_x y f_y en $(0,0)$.

- Plantea definición general de f_x en $(0,0)$..................2 p.
- Analiza correctamente el límite y concluye que no existe........4 p.
- Justifica que f_y tampoco existe en $(0,0)$....................2 p.

c) Concluya sobre la diferenciabilidad de f en $(0,0)$ usando alguno de los resultados obtenidos en los literales *a*) o *b*).

- Argumenta que f no es diferenciable en $(0,0)$ porque no es continua o las derivadas parciales no existen en dicho punto......................4 p.

3. (15 p.) Sean f, g funciones de variable real de clase C^2 en $\mathbb{R}$. Sea $z = f(u) + g(v)$, siendo $u = xy$, $v = 2x - y$. Demuestre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4u + v^2)\frac{d^2 f}{du^2} + 8\frac{d^2 g}{dv^2}.$$

- Utiliza regla de la cadena para obtener z_x y z_y (2 p. c/u)..........4 p.

$$\begin{aligned} z_x &= y\frac{df}{du} + 2\frac{dg}{dv} \\ z_y &= x\frac{df}{du} - \frac{dg}{dv} \end{aligned}$$

- Vuelve a usar regla de la cadena para obtener z_{xx} y z_{yy} (3 p. c/u)............6 p.

$$\begin{aligned} z_{xx} &= y^2\frac{d^2 f}{du^2} + 4\frac{d^2 g}{dv^2} \\ z_{yy} &= x^2\frac{d^2 f}{du^2} + \frac{d^2 g}{dv^2} \end{aligned}$$

- Deduce que $z_{xx} + 4z_{yy} = (y^2 + 4x^2)\dfrac{d^2 f}{du^2} + 8\dfrac{d^2 g}{dv^2}$...........................2 p.
- Determina que $y^2 + 4x^2 = 4u + v^2$, usando las expresiones de u y v.......2 p.
- Muestra completamente la igualdad.......................1 p.

4. (15 p.) Una empresa que transporta gasolina necesita diseñar un nuevo tipo de contenedor en forma de paralelepípedo rectangular con base cuadrada. El volumen de cada contenedor debe ser de $288m^3$ debido a una restricción de los camiones. Además, el costo de fabricar cinco de las seis caras del contenedor es de 3 dólares por cada m^2. La base del contenedor debe ser de un material diferente, por lo que cada m^2 cuesta 5 dólares. Empleando el método de Lagrange, determine las dimensiones del contenedor que minimizan su costo de fabricación.

- Identifica dos dimensiones como variables, por ejemplo denota x para la longitud del lado de la base y z para la altura del contenededor.........2 p.
- Plantea función objetivo para minimizar el costo............3 p.

$$c(x,z) = 8x^2 + 12xz, \quad x, z > 0$$

- Plantea función restricción $g(x,z) = x^2z - 288$.......................1 p.
- Plantea condición necesaria del teorema de Lagrange.............1 p.

$$\nabla c(x,z) = \lambda \nabla g(x,z) \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Reemplaza datos y obtiene sistema de ecuaciones...................3 p.

$$16x + 12z = 2xz\lambda$$
$$12x = \lambda x^2$$
$$x^2z = 288$$

- Aplica un procedimiento adecuado para resolver el sistema, que conduzca a obtener el punto crítico..........................3 p.
- Especifica dimensiones correctas:
  lado de la base de $6m$ y altura de $8m$......2 p.

5. (15 p.) Considere la región plana

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - 3 \leq y \leq -x^2 + 5\}$$

y sea f una función continua en D.

a) Dibuje y sombree D, especificando ejes coordenados y vértices.

- Dibuja parábolas correctamente.....................2 p.
- Determina puntos de intersección entre las parábolas (vértices)....2 p.
- Sombrea correctamente la región D................1 p.

b) Plantear $\int_D \int f(x, y) dA$ en el orden $dx\, dy$.

- Reconoce que el planteamiento requiere dos integrales dobles.......1 p.
- Escribe correctamente los límites de cada integral doble con el orden requerido (4p. c/u)................8 p.
- Expresa la integral como la suma de las dos integrales dobles planteadas..............1 p.

$$\int_D \int f(x, y) dA = \int_{-3}^{1} \int_{-\sqrt{y+3}}^{\sqrt{y+3}} f(x, y) dx\, dy + \int_{1}^{5} \int_{-\sqrt{5-y}}^{\sqrt{5-y}} f(x, y) dx\, dy$$

6. (20 p.) Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (x - y)\mathbf{i} + (y - z)\mathbf{j} + (z - x)\mathbf{k}$ un campo vectorial definido en $\mathbb{R}^3$. Sea S la superficie del sólido Q limitado por las superficies $z = 9 - x^2 - y^2$ y $z = 3x^2 + 3y^2 - 16$. Empleando el teorema de la divergencia de Gauss, determine el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S orientado hacia el exterior de Q.

- Plantea expresión general del teorema de Gauss............................2 p.

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} ds = \iiint_Q div\mathbf{F} dv$$

- Calcula $div\mathbf{F} = 3$..............2 p.
- Grafica los paraboloides y bosqueja intersección entre ellos..........4 p.
- Dibuja proyección del sólido en XY, círculo de radio $\frac{5}{2}$ centrado en $(0, 0)$............................4 p.
- Plantea la integral triple correctamente colocando los límites en algún sistema adecuado...........................4 p.

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{5}{2}} \int_{3r^2-16}^{9-r^2} r\, dz\, dr\, d\theta$$

- Resuelve la integral y especifica la respuesta correcta......................4 p.

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} ds = \iiint_Q div\mathbf{F} dv = \frac{3 \times 5^4}{8}\pi.$$