

RUBRICA DEL PRIMER EXAMEN DE CÁLCULO VECTORIAL

PAO 2 2025-2026

TEMA 1: Sea

$$f(x, y) = 1 + \text{sen}(3x + y)$$

una función diferenciable que representa el campo escalar de temperatura en una placa metálica.

- Calcule todos los vectores unitarios $v \in \mathbb{R}^2$ para los cuales la tasa de cambio de f en la dirección de v desde el punto $(0,0)$ es igual a 1.
- Determine la dirección de máximo incremento y el valor máximo de la tasa de cambio de f en $(0,0)$.

Solución:

Para la parte (a), halla el gradiente de la función:

$$\nabla f(x, y) = (3\cos(3x + y), \cos(3x + y))$$

En el punto $(0,0)$:

$$\nabla f(0,0) = (3,1)$$

Hasta 3 puntos.

Luego, la derivada direccional en la dirección del vector unitario $v = (u_1, u_2)$ está dada por:

$$D_v f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot v = 3u_1 + u_2$$

Se desea que esta tasa de cambio sea igual a 1, por lo tanto:

$$3u_1 + u_2 = 1$$

Con la condición de que u sea unitario:

$$u_1^2 + u_2^2 = 1$$

Resolviendo el sistema:

De la primera ecuación:

$$u_2 = 1 - 3u_1$$

Sustituyendo en $u_1^2 + u_2^2 = 1$:

$$u_1^2 + (1 - 3u_1)^2 = 1 \Rightarrow u_1^2 + 1 - 6u_1 + 9u_1^2 = 1$$

$$5u_1^2 - 6u_1 = 0 \Rightarrow u_1(5u_1 - 6) = 0 \Rightarrow u_1 = 0 \vee u_1 = \frac{6}{5}$$

Calculamos los valores correspondientes de u_2 :

$$\begin{cases} u_1 = 0 \Rightarrow u_2 = 1 - 3u_1 \Rightarrow u_2 = 1 - 3(0) = 1 \\ u_1 = \frac{6}{5} \Rightarrow u_2 = 1 - 3u_1 \Rightarrow u_2 = 1 - 3\left(\frac{6}{5}\right) = -\frac{8}{5} \end{cases}$$

Por los tanto, los vectores unitarios buscados son:

$$v_1 = (0,1) \ ; \ v_2 = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

Hasta 8 puntos.

Para el literal (b), la dirección de máximo aumento de f es el gradiente $\nabla f(0,0) = (3,1)$. El valor máximo de la tasa de cambio es la magnitud del gradiente $\|\nabla f(0,0)\| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$. Hasta 10 puntos.

TEMA 2: Sea la función $f : R^2 \rightarrow R$; $z = f(u,w) = \cos(u^2) + 4u + e^{w^2+1}$. Si $u = x + 2025t$ y $w = x - 2025t$, demuestre, usando la regla de la cadena, que $z = f(u,w)$ satisface la ecuación:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 2025^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

Solución: Calculando las primeras derivadas parciales, esto es:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = (-2u \sin(u^2) + 4)(2025) + 2we^{w^2+1}(-2025)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = (-2u \sin(u^2) + 4) + 2we^{w^2+1}$$

Hasta 4 puntos.

Luego, calculando las segundas derivadas, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 2025^2(-2 \sin(u^2) - 4u^2 \cos(u^2) + 2 + 4w^2)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2 \sin(u^2) - 4u^2 \cos(u^2) + 2 + 4w^2$$

Hasta 8 puntos.

Finalmente verifica la igualdad:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 2025^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Hasta 10 puntos.

TEMA 3: Sea la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x| + |y|}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) Determine si f es continua en $(0, 0)$.
(b) Determine si f es diferenciable en $(0, 0)$.

Solución: Para (a), utilizando el cálculo del límite mediante coordenadas polares obtiene:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{|x| + |y|} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{|r| [|\cos \theta| + |\sin \theta|]} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos \theta \sin \theta}{[|\cos \theta| + |\sin \theta|]} = 0$$

Concluye que el límite es CERO, indicando que la función en términos de θ es acotada y por lo tanto continua en $(0, 0)$. Hasta 4 puntos.

Para (b), primero calcula las derivadas parciales en $(0, 0)$:

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0, \quad f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0,$$

Hasta 6 puntos.

Finalmente, por la definición de diferenciability evalúa el límite y obtiene:

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h_1, h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h_1, h_2)}{r} = \frac{\cos \theta \sin \theta}{|\cos \theta| + |\sin \theta|},$$

Expresión que depende del ángulo θ , concluyendo que f no es diferenciable en $(0, 0)$. Hasta 10 puntos.

TEMA 4: Sea $z = g(x, y)$ un campo escalar definido de manera implícita por la ecuación:

$$ze^z = xe^x - ye^y, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

- a) Si $(1, 1, z_0)$ es un punto que satisface la ecuación dada, deduzca el valor de z_0 .
b) Justifique si la ecuación dada define a $z = g(x, y)$ con g de clase C^1 en una vecindad de $(1, 1)$.
c) En caso de ser afirmativa la respuesta en b), calcule la máxima variación de z en el punto $(1, 1)$.

Solución: para la parte a) se deduce que cuando $x = y = 1$ la ecuación se satisface si y sólo si $z_0 = 0$. Hasta 2 puntos.

Para b) se tiene que la ecuación dada define una función implícita de la forma:

$$F(x, y, z) = ze^z - xe^x + ye^y = 0.$$

Se cumple que F es de clase C^1 en R^3 y además $F_z(1, 1, 0) = 1 \neq 0$. Por hipótesis de función implícita se justifica la existencia de g . Hasta 5 puntos.

Para la parte c) se obtienen las derivadas parciales de z usando las fórmulas dadas por el teorema de la función implícita versión escalar, obteniendo:

$$z_x(1, 1) = -F_x(1, 1, 0)/F_z(1, 1, 0) = 2e$$

$$z_y(1, 1) = -F_y(1, 1, 0)/F_z(1, 1, 0) = -2e.$$

Por lo tanto:

$\nabla g(1, 1) = (2e, -2e)$ y la máxima variación de z en $(1, 1)$ es $\|\nabla g(1, 1)\| = \|(2e, -2e)\| = 2e\sqrt{2}$. Hasta 10 puntos.

TEMA 5: Considere la superficie $S: x^2 + xy + 2z^2 - 6 = 0$ y el punto $P = (1, 1, \sqrt{2})$.

(a) Halle la ecuación del plano tangente a la superficie en P .

(b) Determine el punto de intersección de la recta normal en P con el plano $z = 0$.

(c) Determine la medida del ángulo θ entre la recta normal y el eje z .

Solución: Verifica que el punto: $P: (1, 1, \sqrt{2}) = 1 + 1 + 2(\sqrt{2})^2 - 6 = 1 + 1 + 4 - 6 = 0$, pertenece a la superficie S , luego calcula el vector normal: $(2x + y, x, 4z)$. Evalúa en $P: (3, 1, 4\sqrt{2})$. Hasta 3 puntos.

Con esto obtiene la ecuación del plano tangente: $\pi: 3x + y + 4\sqrt{2}z - 12 = 0$. Hasta 4 puntos.

Para (b), calcula la recta normal: $(x, y, z) = (1, 1, \sqrt{2}) + t\langle 3, 1, 4\sqrt{2} \rangle, t \in R$. Así el punto de intersección es:

$$z(t) = \sqrt{2} + 4\sqrt{2}t = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{4} \Rightarrow \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0\right).$$

Hasta 8 puntos.

Para (c) la medida del ángulo es: $\theta = \arccos\left(\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{42}}\right)$. Hasta 10 puntos.