Ecuaciones Diferenciales y Álgebra Lineal

PAO II 2021

Examen de mejoramiento

Compromiso de honor

Yo declaro que he sido informado y conozco las normas disciplinarias que rigen a la ESPOL, en particular el Código de Ética y el Reglamento de Disciplina. Al aceptar este compromiso de honor, reconozco y estoy consciente de que la presente evaluación está diseñada para ser resuelta de forma individual; que puedo comunicarme únicamente con la persona responsable de la recepción de la evaluación; y que al realizar esta evaluación no navegaré en otras páginas que no sean las páginas de Aula Virtual; que no recibiré ayuda ni presencial ni virtual; que no haré consultas en libros, notas, ni apuntes adicionales u otras fuentes indebidas o no autorizadas por el evaluador; ni usaré otros dispositivos electrónicos o de comunicación no autorizados. Además, me comprometo a mantener encendida la cámara durante todo el tiempo de ejecución de la evaluación, y en caso de que el profesor lo requiera, tomar una foto de las páginas en las que he escrito el desarrollo de los temas y subirla a Aula Virtual, como evidencia del trabajo realizado, estando consciente que el no subirla, anulará mi evaluación. Acepto el presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptado la declaración anterior y me comprometo a seguir fielmente las instrucciones que se indican para la realización de la presente evaluación (incluyendo los requisitos de uso de la tecnología). Estoy consciente que el incumplimiento del presente compromiso, anulará automáticamente mi evaluación y podría ser objeto del inicio de un proceso disciplinario.

Problemas planteados

1. *a*) (10 puntos) Use el cambio de variable $z = \ln y$ para resolver la ecuación diferencial $ty' = 2t^2y + y\ln y$.

   b) (10 puntos) La ecuación diferencial $y - ty' = y'y^2e^y$ parece imposible de resolver analíticamente, pero podemos hallar una solución usando el siguiente método: reinterprete y como variable independiente y t como variable dependiente y use el hecho que $dy/dt = 1/(dt/dy)$, donde $y = y(t)$ y $t = t(y)$ son funciones inversas una de la otra.

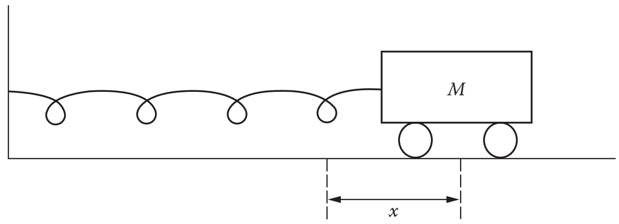
2. (20 puntos) Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$. Definamos la suma de elementos de $\mathbb{V}$ de la manera usual (componente a componente), y para $(x_1, x_2) \in \mathbb{V}$ y $c \in \mathbb{R}$, defina

$$c(x_1, x_2) = \begin{cases} (0,0), & \text{si } c = 0; \\ \left(cx_1, \frac{x_2}{c}\right), & \text{si } c \neq 0. \end{cases}$$

   ¿Es $\mathbb{V}$ un espacio vectorial con estas operaciones?

3. (20 puntos) El carro de la figura pesa 128 libras y está atado a una pared con un resorte cuya constante de resorte es $k = 64\,\text{lb/pie}$. El carro se tira 6 pies en la dirección contraria a la pared y se suelta sin velocidad inicial. Simultáneamente se aplica una fuerza externa

periódica $f(t) = 32 \operatorname{sen} 4t$ al carro. Suponiendo que no hay resistencia del aire, calcule la posición $x = x(t)$ del carro en el tiempo t.



4. *a*) (10 puntos) Pruebe que existe una transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,1) = (1,0,2)$ y $T(2,3) = (1,-1,4)$.

   b) (10 puntos) Halle la matriz de T respecto a las bases canónicas.

5. (20 puntos) Resuelva el problema de valor inicial

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & \text{si } 0 \leq t < \pi, \\ 0, & \text{si } t \geq \pi, \end{cases} \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$