Escuela Superior Politécnica del Litoral

Solucionario de Problemas de Ecuaciones Diferenciales

Primer parcial (3ra versión)

Roberto Cabrera

- RESOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN.
- APLICACIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN
- RESOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN: HOMOGENEAS Y NO HOMOGENEAS. METODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS Y VARIACION DE PARAMETROS.
- RESOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR: HOMOGENEAS Y NO HOMOGENEAS. METODO LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS Y VARIACION DE PARAMETROS.
- RESOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN ALREDEDOR DE PUNTOS ORDINARIOS. (SERIE DE TAYLOR)

09

Ecuaciones Diferenciales separables

Se tiene una ecuación diferencial ordinaria de primer orden:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = F(x,y)}$$

Se dice que ecuación diferencial de primer orden es separable si se puede expresar la esa ecuación diferencial de la siguiente manera:

$$\frac{dy}{dx} = F(x)G(y)$$

Donde $F(x,y)$ se lo expresa como una multiplicación de dos funciones, una que depende de la variable "x" y otra de la variable "y". En este caso se obtiene la siguiente solución de esta ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = F(x)G(y)$$

$$\frac{dy}{G(y)} = F(x)dx$$

$$\boxed{\int \frac{dy}{G(y)} = \int F(x)dx}$$

Donde la solución de esta ecuación diferencial separable tiene la siguiente forma:

$$\boxed{\Phi(y) = \Psi(x) + C}$$

1.- Encontrar la solución implícita de la siguiente ecuación diferencial:

$$dy(xy - 2x + 4y - 8) - dx(xy + 3x - y - 3) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(y+3) - (y+3)}{x(y-2) + 4(y-2)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y+3)(x-1)}{(y-2)(x+4)} = f(y)g(x);$$

$$\frac{(y-2)dy}{(y+3)} = \frac{(x-1)dx}{(x+4)} \Rightarrow \text{Integramos a ambos lados de la ecuación}$$

$$\int \frac{(y-2)dy}{(y+3)} = \int \frac{(x-1)dx}{(x+4)}$$

$$\int \frac{(y+3)dy}{(y+3)} - \int \frac{5dy}{y+3} = \int \frac{(x+4)dx}{(x+4)} - \int \frac{5dx}{(x+4)}$$

$$\int dy - \int \frac{5dy}{y+3} = \int dx - \int \frac{5dx}{(x+4)}$$

$$y - 5\ln|y+3| = x - 5\ln|x+4| + c$$

2.- Encontrar la solución particular de la siguiente ecuación diferencial:

Si $y(0) = \dfrac{\pi}{4}$;

$$3e^{x}\tan(y)dx + (2-e^{x})\sec^{2}(y)dy = 0$$
$$(2-e^{x})\sec^{2}(y)dy = -3e^{x}\tan(y)dx;$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3e^{x}\tan(y)}{(2-e^{x})\sec^{2}(y)} = f(x).g(y);$$
$$\frac{\sec^{2}(y)dy}{\tan(y)} = -\frac{3e^{x}dx}{(2-e^{x})};$$
$$\int\frac{\sec^{2}(y)dy}{\tan(y)} = \int -\frac{3e^{x}dx}{(2-e^{x})};$$
$$u = \tan(y) \Rightarrow du = \sec^{2}(y);$$
$$v = 2-e^{x} \Rightarrow dv = -e^{x}dx;$$
$\Rightarrow$ Reemplazan do :
$$\int\frac{du}{u} = \int\frac{3dv}{v};$$
$$\ln|u| = 3\ln|v| + c;$$

Reemplazando u y v :
$$\ln|\tan(y)| = 3\ln\left|2-e^{x}\right| + c;$$
$$e^{\ln|\tan(y)|} = e^{3\ln|2-e^{x}|+c};$$
$$\tan(y) = (2-e^{x})^{3}K;$$
La solución general es :
$$y = \arctan\left[(2-e^{x})^{3}K\right];$$
$$\text{si } y(0) = \pi/4;$$
$$\Rightarrow$$
$$\pi/4 = \arctan\left[\left(2-e^{0}\right)K\right];$$
$$\pi/4 = \arctan(K);$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = K; \Rightarrow K = 1;$$
La solución particular es :
$$y = \arctan\left[(2-e^{x})^{3}\right];$$

3.- Exprese de forma implícita la solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$e^{x/2}ydy - \frac{dx}{e^{y}(1+e^{x/2})} = 0$$

$$e^{x/2}ydy = \frac{dx}{e^{y}(1+e^{x/2})};$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^{x/2}(1+e^{x/2})ye^{y}} = f(x).g(y);$$
$$f(x) = \frac{1}{e^{x/2}(1+e^{x/2})};$$
$$g(y) = \frac{1}{ye^{y}};$$
$$\int ye^{y}dy = \int\frac{dx}{e^{x/2}(1+e^{x/2})};$$
$$\int\frac{dx}{e^{x/2}(1+e^{x/2})} = ?$$
$$u = e^{x/2} \Rightarrow du = \frac{1}{2}e^{x/2}dx;$$
$$du = \frac{1}{2}udx \Rightarrow dx = \frac{2du}{u};$$
$$\Rightarrow \int\frac{dx}{e^{x/2}(1+e^{x/2})} = \int\frac{\frac{2du}{u}}{u(1+u)} = \int\frac{2du}{u^{2}(1+u)}$$

Integrando por fracciones parciales obtenemos :
$$\frac{1}{u^{2}(u+1)} = \frac{A}{u^{2}} + \frac{B}{u} + \frac{C}{1+u};$$
Donde los valores de A, B, C son :
$$A = 1; B = -1; C = 1;$$
$$\Rightarrow \int\frac{2du}{u^{2}(1+u)} = 2\left[\int\left(\frac{1}{u^{2}} - \frac{1}{u} + \frac{1}{1+u}\right)du\right];$$
$$\Rightarrow \int\frac{2du}{u^{2}(1+u)} = 2\int\frac{du}{u^{2}} - 2\int\frac{du}{u} + 2\int\frac{du}{1+u};$$
$$\Rightarrow \int\frac{2du}{u^{2}(1+u)} = -\frac{2}{u} - 2\ln|u| + 2\ln|1+u| + c;$$
$$\Rightarrow \int\frac{dx}{e^{x/2}(1+e^{x/2})} = -\frac{2}{e^{x/2}} - 2\ln\left|e^{x/2}\right| + 2\ln\left|1+e^{x/2}\right| + c;$$
$$ye^{y} - e^{y} = \int\frac{dx}{e^{x/2}(1+e^{x/2})};$$
La solución implicita general es :
$$\Rightarrow ye^{y} - e^{y} = -\frac{2}{e^{x/2}} - 2\ln\left|e^{x/2}\right| + 2\ln\left|1+e^{x/2}\right| + c;$$

4.- Encuentre la solución general de la siguiente ecuación diferencial:

$$\boxed{2y\ln(x)dx-(e^{y}-e^{-y})x\sqrt{1+\ln(x)}dy=0}$$

$$(e^{y}-e^{-y})x\sqrt{1+\ln(x)}dy=2y\ln(x)dx;$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y\ln(x)}{(e^{y}-e^{-y})x\sqrt{1+\ln(x)}}=f(y).g(x);$$

$$f(y)=\frac{2y}{(e^{y}-e^{-y})}\ \wedge\ \mathbf{g(x)}=\frac{\ln(x)}{x\sqrt{1+\ln(x)}};$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y\ln(x)}{(e^{y}-e^{-y})x\sqrt{1+\ln(x)}}$$

$$\frac{(e^{y}-e^{-y})}{2y}dy=\frac{\ln(x)}{x\sqrt{1+\ln(x)}}dx;$$

Integrando a ambos lados de la ecuación se obtiene :

$$\int\frac{(e^{y}-e^{-y})}{2y}dy=\int\frac{\ln(x)}{x\sqrt{1+\ln(x)}}dx;$$

Si observamos que $\frac{(e^{y}-e^{-y})}{2}=\operatorname{senh}(y)$ **entonces tenemos lo siguiente :**

$$\int\frac{\operatorname{senh}(y)}{y}dy=\int\frac{\ln(x)}{x\sqrt{1+\ln(x)}}dx;$$

Para integrar $\frac{\operatorname{senh}(y)}{y}dy$ **debemos usar series de potencias :**

$$\text{Si } \operatorname{senh}(y)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}\Rightarrow\frac{\operatorname{senh}(y)}{y}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{y^{2n}}{(2n+1)!};$$

Reemplazando :

$$\int\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{y^{2n}}{(2n+1)!}dy=\int\frac{\ln(x)}{x\sqrt{1+\ln(x)}}dx;$$

Integrando $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{y^{2n}}{(2n+1)!}dy$ **obtenemos que :**

$$\int\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{y^{2n}}{(2n+1)!}dy=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!};$$

Ahora integrando $\frac{\ln(x)}{x\sqrt{1+\ln(x)}}dx$ **:**

$$\int \frac{\ln(x)}{x\sqrt{1+\ln(x)}}dx = ?$$

Si $u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$

$$\Rightarrow \int \frac{\ln(x)}{x\sqrt{1+\ln(x)}}dx = \int \frac{udu}{\sqrt{1+u}};$$

Ahora $z^2 = 1 + u \Rightarrow 2zdz = du;$

$$\Rightarrow \int \frac{udu}{\sqrt{1+u}} = \int \frac{(z^2 - 1)2zdz}{z};$$

$$\Rightarrow \int \frac{(z^2 - 1)2zdz}{z} = 2\int (z^2 - 1)dz = 2\left[\frac{z^3}{3} - z\right] + C;$$

$$\Rightarrow \int \frac{udu}{\sqrt{1+u}} = 2\left[\frac{\left(\sqrt{1+u}\right)^3}{3} - \sqrt{1+u}\right] + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{\ln(x)}{x\sqrt{1+\ln(x)}}dx = 2\left[\frac{\left(\sqrt{1+\ln(x)}\right)^3}{3} - \sqrt{1+\ln(x)}\right] + C;$$

La solucion general de forma implícita es :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} = 2\left[\frac{\left(\sqrt{1+\ln(x)}\right)^3}{3} - \sqrt{1+\ln(x)}\right] + C$$

Ecuaciones Diferenciales Lineales

Las ecuaciones diferenciales lineales tienen la siguiente forma:

$$y'+p(x)y=g(x);$$

Existen dos métodos para resolver este tipos de ecuaciones:

- El método del factor integrante.
- Método de variación de parámetros

El método del factor integrante:

$$y'+p(x)y=g(x);$$
$$u(x)=e^{\int p(x)dx};$$
$$u(x)\left[y'+p(x)y\right]=u(x)g(x);$$
$$\frac{d}{dx}\left[u(x)y\right]=u(x)g(x);$$
$$\int d\left[u(x)y\right]=\int u(x)g(x)dx;$$
$$u(x)y=\int u(x)g(x)dx;$$
$$y=\frac{1}{u(x)}\int u(x)g(x)dx;$$

Método de variación de parámetros

$$y'+p(x)y=g(x);$$
$$y_h'+p(x)y_h=0;$$
$$y_h'=-p(x)y_h;$$
$$\frac{dy_h}{dx}=-p(x)y_h;$$
$$\int\frac{dy_h}{y_h}=\int -p(x)dx;$$
$$\ln|y_h|=\int -p(x)dx;$$
$$y_h=e^{\int -p(x)dx;}$$

Asumir:

$$y=y_h v(x);$$
$$y'=y_h v'(x)+y'_h v(x);$$

Reemplazando:

$$y'+p(x)y=g(x);$$
$$\left[y_h v'(x)+y'_h v(x)\right]+p(x)y_h v(x)=g(x);$$
$$v'(x)\left[y_h\right]+v(x)\left[y'_h+p(x)y_h\right]=g(x);$$

Pero $y'_h+p(x)y_h=0$, *entonces:*

$$v'(x)\left[y_h\right]+v(x)\left[0\right]=g(x);$$
$$v'(x)\left[y_h\right]=g(x);$$
$$\frac{dv}{dx}\left[y_h\right]=g(x);$$
$$\int dv=\int\frac{g(x)}{y_h}dx;$$
$$v(x)=\int\frac{g(x)}{y_h}dx;$$
$$y=y_h v(x);$$
$$y=e^{\int -p(x)dx}\int\frac{g(x)}{y_h}dx;$$

1) $xy' - 2y = \dfrac{x^3}{sen^2(x)\sqrt[4]{ctg(x)}}$;

$$y' - \frac{2}{x}y = \frac{x^2}{sen^2(x)\sqrt[4]{ctg(x)}};$$

Tiene la forma $y' + p(x)y = g(x)$;

Por lo tanto podemos aplicar el método del factor integrante :

Encontremos el factor integrante u(x) :

$$u(x) = e^{\int p(x)dx}$$

$$u(x) = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln(x)} = e^{\ln(x^{-2})} = x^{-2} = \frac{1}{x^2};$$

Multipliquemos el factor integrante u(x) a ambos lados de la ecuación :

$$\frac{1}{x^2}\left(y' - \frac{2}{x}y\right) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{sen^2(x)\sqrt[4]{ctg(x)}}\right);$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}y\right) = \left(\frac{1}{sen^2(x)\sqrt[4]{ctg(x)}}\right);$$

$$\Rightarrow \int d\left(\frac{1}{x^2}y\right) = \int\left(\frac{1}{sen^2(x)\sqrt[4]{ctg(x)}}\right)dx;$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2}y = \int\left(\frac{1}{sen^2(x)\sqrt[4]{ctg(x)}}\right)dx;$$

$$\Rightarrow \int\left(\frac{1}{sen^2(x)\sqrt[4]{ctg(x)}}\right)dx = \int\frac{csc^2(x)}{\sqrt[4]{ctg(x)}}dx;$$

$$\text{Si } u = ctg(x) \Rightarrow du = -csc^2(x)dx;$$

$$\Rightarrow \int\frac{csc^2(x)}{\sqrt[4]{ctg(x)}}dx = \int\frac{-du}{\sqrt[4]{u}} = -\int u^{-1/4}du = -\left[\frac{u^{3/4}}{3/4}\right] = -\frac{4u^{3/4}}{3}$$

$$\Rightarrow \int\frac{csc^2(x)}{\sqrt[4]{ctg(x)}}dx = -\frac{4[ctg(X)]^{3/4}}{3} + C = -\frac{4\sqrt[4]{ctg^3(X)}}{3} + C;$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2}y = -\frac{4\sqrt[4]{ctg^3(X)}}{3} + C;$$

La solución general de la ecuacion diferencial es :

$$y = x^2\left[-\frac{4\sqrt[4]{ctg^3(X)}}{3} + C\right];$$

2) $$y'+p(x)y=1;\quad y(0)=1;\quad p(x)=\begin{cases}1 & ;\ 0\le x<2\\ -2x\ ; & x\ge 2\end{cases}$$

Para el intervalo $0\le x<2$ resolvemos la ecuación diferencial, donde $p(x)=1$:

$$y'+y=1;$$
$$\frac{dy}{dx}+y=1;\Rightarrow\frac{dy}{dx}=1-y;\ \textit{(Ec. dif. separable);}$$
$$\frac{dy}{1-y}=dx\Rightarrow\int\frac{dy}{1-y}=\int dx;$$
$$-\ln|1-y|=x+C;$$
$$\ln|1-y|=-x+K$$
$$e^{\ln|1-y|}=e^{-x+K};$$
$$1-y=k_1e^{-x};$$
$$y_1=1-k_1e^{-x};$$
$$\text{Pero } y(0)=1;$$
$$1=1-k_1e^{0};\Rightarrow k_1=0;$$
$$\Rightarrow y_1=1\quad \textit{para}\quad 0\le x<2$$

Ahora para $x\ge 2$, $p(x)=-2x$;

$$y'-2xy=1;\qquad \textit{(Ec. dif. lineal)}$$
$$u(x)=e^{\int -2x dx}=e^{-x^2};$$
$$e^{-x^2}\left(y'-2xy\right)=e^{-x^2}(1);$$
$$\frac{d(e^{-x^2}y)}{dx}=e^{-x^2};$$
$$\int d(e^{-x^2}y)=\int e^{-x^2}dx;\Rightarrow e^{-x^2}y=\int e^{-x^2}dx;$$

Pero para integrar $e^{-x^2}dx$ *necesitamos usar series de potencias :*

$$\Rightarrow e^{-x^2}y=\int\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}dx;$$
$$\Rightarrow e^{-x^2}y=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}+k_2;$$
$$\Rightarrow y_2=e^{x^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}+e^{x^2}k_2;\ \textit{para}\ x>2;$$

Ahora para encontrar k_2 *usaremos la condición de continuidad de dos funciones :*
Esta condición dice :

$$\lim_{x\to a^-}f(x)=\lim_{x\to a^+}f(x);$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to 2^-}y_1=\lim_{x\to 2^+}y_2;$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to 2^-}1=\lim_{x\to 2^+}\left[e^{x^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}+e^{x^2}k_2\right];$$
$$\Rightarrow 1=e^{2^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)n!}+e^{2^2}k_2;\Rightarrow 1=e^4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}2}{(2n+1)n!}+e^4k_2;$$
$$\Rightarrow 1-e^4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}2}{(2n+1)n!}=e^4k_2;\Rightarrow k_2=\frac{1}{e^4}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}2}{(2n+1)n!};$$
$$\Rightarrow k_2=\frac{1}{e^4}-2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n+1)n!};$$

La solución queda expresada con la siguiente regla de correspondencia :

$$y=\begin{cases}1; & 0\le x<2\\ e^{x^2}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}+e^{x^2}\left[\frac{1}{e^4}-2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n+1)n!}\right]; & x\ge 2\end{cases}$$

3.- Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{y}{e^{y}+2x}}$$

Si observamos que esta es una ecuación diferencial no separable, no lineal con respecto a y, que tal si hacemos que nuestra variable independiente sea "**y**", y que "**x**" nuestra variable dependiente, es decir obtener nuestra solución en función de "**y**" $\left(x=f(y)\right)$.

$$\left(e^{y}+2x\right)dy=y\,dx;$$

$$\left(e^{y}+2x\right)=y\frac{dx}{dy};$$

$$y\frac{dx}{dy}-e^{y}-2x=0;\quad \equiv \quad yx'-e^{y}-2x=0;$$

$$\Rightarrow x'-\frac{e^{y}}{y}-\frac{2x}{y}=0;\quad \Rightarrow \quad x'-\frac{2x}{y}=\frac{e^{y}}{y};$$

Tiene la forma $x'+p(y)x=g(y);$

Ahora y es la variable independiente:

Apliquemos el método del factor integrante:

$$x'+p(y)x=g(y);$$

* *El factor integrante ahora depende de y:*

$$u(y)=e^{\int p(y)dy};$$

$$p(y)=-\frac{2}{y};\ \ entonces\ \ u(y)=e^{\int -\frac{2}{y}dy}=e^{-2\ln y}=y^{-2}\ \ \Rightarrow\ u(y)=y^{-2}$$

Multiplicando el factor integrante $u(y)=y^{-2}$ *a ambos lados de la ecuación diferencial:*

$$x'-\frac{2x}{y}=\frac{e^{y}}{y}\quad\Rightarrow\quad \underbrace{y^{-2}\left(x'-\frac{2x}{y}\right)}_{\frac{d}{dy}\left[y^{-2}x\right]}=y^{-2}\frac{e^{y}}{y}.$$

$$\frac{d}{dy}\left[y^{-2}x\right]=\frac{e^{y}}{y^{3}}\ \Rightarrow\ d\left[y^{-2}x\right]=\frac{e^{y}}{y^{3}}dy\ \Rightarrow\ \int d\left[y^{-2}x\right]=\int\frac{e^{y}}{y^{3}}dy$$

$$y^{-2}x=\int\frac{e^{y}}{y^{3}}dy\quad\Rightarrow\quad x=y^{2}\int\frac{e^{y}}{y^{3}}dy$$

Para integrar $\frac{e^{y}}{y^{3}}dy$ *usamos series de potencias:*

$$e^{y}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{y^{n}}{n!}\Rightarrow\frac{e^{y}}{y^{3}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{y^{n-3}}{n!}$$

$$\int\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{y^{n-3}}{n!}dy=\int\left[\frac{1}{0!y^{3}}+\frac{1}{1!y^{2}}+\frac{1}{2!y}+\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{y^{n-3}}{n!}\right]$$

$$x(y)=y^{2}\int\frac{e^{y}}{y^{3}}dy=y^{2}\left[-\frac{1}{2y^{2}}-\frac{1}{y}+\frac{1}{2}\ln(y)+\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{y^{n-2}}{(n-2)n!}+C;\right]$$

La solución es:

$$x=\left[-\frac{1}{2}-y+\frac{1}{2}y^{2}ln(y)+\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{y^{n}}{(n-2)n!}+Cy^{2}\right]$$

4.- Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$xy'-y=x^2sen(ln(x)); \qquad y(1)=0;$$

Utilizando el método del factor integrante:

$$xy'-y=x^2sen(\ln(x));$$

$$y'-\frac{y}{x}=xsen(\ln(x));$$

Tiene la siguiente forma $y'+p(x)y=g(x)$, entonces :

$$u(x)=e^{\int p(x)dx;}$$

$$\Rightarrow u(x)=e^{\int p(x)dx}; \qquad donde \qquad p(x)=-\frac{1}{x};$$

$$\Rightarrow u(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{-\int\frac{1}{x}dx}=e^{-\ln(x)};$$

$$\Rightarrow u(x)=x^{-1};$$

Multiplicando el factor integrante a ambos lados de la ecuación diferencial se obtiene :

$$\underbrace{x^{-1}y'-x^{-1}\frac{y}{x}}_{\frac{d}{dx}\left[x^{-1}y\right]}=x^{-1}xsen(\ln(x));$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-1}y\right]=sen(\ln(x)) \quad\Rightarrow\quad d\left[x^{-1}y\right]=sen(\ln(x))dx \quad\Rightarrow\quad \int d\left[x^{-1}y\right]=\int sen(\ln(x))dx$$

$$x^{-1}y=\int sen(\ln(x))dx$$

$$y=x\int sen(\ln(x))dx$$

$$\int sen(\ln(x))dx=?$$

$$z=\ln(x); \qquad\Rightarrow\qquad dz=\frac{dx}{x};$$

$$dx=xdz; \quad Pero\ x=e^z;$$

$$dx=e^zdz;$$

$$\int sen(\ln(x))dx=\int sen(z)e^zdz;$$

$\int sen(z)e^zdz$, *integrando por partes obtenemos que :*

$$\int sen(z)e^zdz=\frac{e^z\left[sen(z)-cos(z)\right]}{2}+C;$$

$$\Rightarrow\int sen(\ln(x))dx=\frac{x\left[sen(\ln(x))-cos(\ln(x))\right]}{2}+C;$$

$$\Rightarrow y=x\left[\frac{x\left[sen(\ln(x))-cos(\ln(x))\right]}{2}+C\right]$$

$$y=\frac{x^2\left[sen(\ln(x))-cos(\ln(x))\right]}{2}+Cx;$$

Encontremos ahora la solución particular si $y(1)=0$;

$$y=\frac{x^2\left[sen(\ln(x))-cos(\ln(x))\right]}{2}+Cx;$$

$$y(1)=0;$$

$$\Rightarrow 0=\frac{1^2\left[sen(\ln(1))-cos(\ln(1))\right]}{2}+C(1);$$

$$\Rightarrow 0=\frac{\left[sen(0)-cos(0)\right]}{2}+C;$$

$$\Rightarrow 0=-\frac{1}{2}+C;\Rightarrow C=\frac{1}{2};$$

La solución es :

$$y=\frac{x^2\left[sen(ln(x))-cos(ln(x))\right]}{2}+\frac{x}{2}$$

Ecuaciones diferenciales Exactas

Las ecuaciones diferenciales exactas tienen la siguiente forma:

$$\boldsymbol{M(x,y) + N(x,y)y' = 0;}$$

Es exacta si :

$$\frac{\partial \boldsymbol{M(x,y)}}{\partial \boldsymbol{y}} = \frac{\partial \mathrm{N}\boldsymbol{(x,y)}}{\partial \boldsymbol{x}};$$

$$\mathrm{M_y = N_x};$$

Entonces existe :

F(x, y) tal que :

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y);$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y);$$

Si escogemos $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \boldsymbol{M(x,y)}$***, se obtiene :***

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$$

$$\int \partial F(x,y) = \int M(x,y)\partial x;$$

$$F(x,y) = G(x,y) + h(y);$$

Luego derivando F(x, y) con respecto a y :

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = G'(x,y) + h'(y);$$

Luego igualando con $\frac{\partial \boldsymbol{F(x,y)}}{\partial \boldsymbol{y}} = \boldsymbol{N(x,y);}$

$$G'(x,y) + h'(y) = N(x,y);$$

$$h'(y) = N(x,y) - G'(x,y);$$

$h(y) =$ ***La constante de F(x, y).***

Entonces :

$$F(x,y) = G(x,y) + h(y);$$

La solucíon es :

$$F(x,y) = 0;$$

$$G(x,y) + h(y) = 0;$$

Si se elige $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$***, y procedemos de la misma forma, se obtiene :***

$$\boldsymbol{F(x,y) = H(x,y) + h(x);}$$

Donde la solución es :

$$\boldsymbol{F(x,y) = 0;}$$

1.- Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$\left[4x^3y-\frac{e^{xy}}{x}+yln(x)+x\left(\sqrt[3]{x-4}\right)\right]dx+\left[x^4-\frac{e^{xy}}{y}+xln(x)-x\right]dy=0$$

$$\left[4x^3y-\frac{e^{xy}}{x}+yln(x)+x\left(\sqrt[3]{x-4}\right)\right]+\left[x^4-\frac{e^{xy}}{y}+xln(x)-x\right]y'=0$$

$$M(x,y)=4x^3y-\frac{e^{xy}}{x}+y\ln(x)+x\left(\sqrt[3]{x-4}\right);$$

$$M_y=4x^3-e^{xy}+\ln(x);$$

$$N(x,y)=x^4-\frac{e^{xy}}{y}+xln(x)-x;$$

$$Nx=4x^3-e^{xy}+\ln(x);$$

$My=Nx$***;*** ***entonces la ecuacion diferencia l es exacta;***

$\Rightarrow$ Existe ***una función F(x, y), donde*** $\begin{cases} Fx=M(x,y) \\ Fy=N(x,y) \end{cases}$

Si ***Fy = N(x, y), entonces se obtiene lo siguiente :***

$$Fy=x^4-\frac{e^{xy}}{y}+x\ln(x)-x;$$

$$\frac{\partial(F(x,y))}{\partial y}=x^4-\frac{e^{xy}}{y}+x\ln(x)-x;$$

$$\partial(F(x,y))=\left(x^4-\frac{e^{xy}}{y}+x\ln(x)-x\right)\partial y;$$

Entonces integrando a ambos lados de la ecuación :

$$\int\partial(F(x,y))=\int\left(x^4-\frac{e^{xy}}{y}+x\ln(x)-x\right)\partial y;$$

$$F(x,y)=x^4y-\int\left(\frac{e^{xy}}{y}\right)\partial y+yx\ln(x)-xy+h(x);$$

Para integrar $\left(\frac{e^{xy}}{y}\right)\partial y$ ***se usa series de potencias :***

$$\frac{e^{xy}}{y}=\frac{1}{y}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(xy)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x)^n(y)^{n-1}}{n!}=\frac{1}{y}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x)^n(y)^{n-1}}{n!};$$

$$\int\left(\frac{e^{xy}}{y}\right)\partial y=\int\left(\frac{1}{y}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x)^n(y)^{n-1}}{n!}\right)\partial y=\ln(y)+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x)^n(y)^n}{(n)(n!)};$$

$$F(x,y)=x^4y-\ln(y)-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x)^n(y)^n}{(n)(n!)}+yx\ln(x)-xy+h(x);$$

Ahora si Fx = M, entonces se obtiene lo siguiente :

Fx = M(x, y);

$$Fx = 4x^3y - \frac{e^{xy}}{x} + y\ln(x) + x\left(\sqrt[3]{x-4}\right);$$

$$Fx = 4x^3y - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(x)^{n-1}(y)^n}{(n)(n!)} + y[1+\ln(x)] - y + h'(x);$$

$$Fx = 4x^3y - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x)^{n-1}(y)^n}{(n!)} + y + y\ln(x) - y + h'(x);$$

$$Fx = 4x^3y - \frac{e^{xy}}{x} + y\ln(x) + h'(x);$$

Entonces reemplazando Fx :

$$4x^3y - \frac{e^{xy}}{x} + y\ln(x) + h'(x) = 4x^3y - \frac{e^{xy}}{x} + y\ln(x) + x\left(\sqrt[3]{x-4}\right);$$

Eliminando términos :

$$h'(x) = x\left(\sqrt[3]{x-4}\right);$$

Obteniendo h(x) :

$$h(x) = \int x\left(\sqrt[3]{x-4}\right)dx;$$

$$z^3 = x-4; \Rightarrow 3z^2dz = dx;$$

$$z = \left(\sqrt[3]{x-4}\right)$$

$$x = z^3 + 4;$$

$$h(z) = \int \left(z^3+4\right)\left(\sqrt[3]{z^3}\right)3z^2dz;$$

$$h(z) = 3\int \left(z^6 + 4z^3\right)dz;$$

$$h(z) = 3\left[\frac{z^7}{7} + z^4 + C\right];$$

$$h(x) = 3\left[\frac{\left(\sqrt[3]{x-4}\right)^7}{7} + \left(\sqrt[3]{x-4}\right)^4 + C\right];$$

Entonces :

$$F(x,y) = x^4y - \ln(y) - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x)^n(y)^n}{(n)(n!)} + yx\ln(x) - xy + 3\left[\frac{\left(\sqrt[3]{x-4}\right)^7}{7} + \left(\sqrt[3]{x-4}\right)^4 + C\right];$$

La solución implicitaes F(x, y) = 0, es decir :

$$x^4y - \ln(y) - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x)^n(y)^n}{(n)(n!)} + yx\ln(x) - xy + 3\left[\frac{\left(\sqrt[3]{x-4}\right)^7}{7} + \left(\sqrt[3]{x-4}\right)^4 + C\right] = 0;$$

2.- Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$\left(y^2-\frac{xy}{x+1}+xy^2\right)+\left(2xy-x+ln(x+1)+x^2y+\frac{y^3}{y^8-2}\right)y'=0\,;$$

$$M(x,y)=y^2-\frac{xy}{x+1}+xy^2$$

$$N(x,y)=2xy-x+\ln|x+1|+x^2y+\frac{y^3}{y^8-2}$$

$$My=2y-\frac{x}{x+1}+2xy$$

$$Nx=2y-1+\frac{1}{x+1}+2xy;$$

$$Nx=2y+\frac{1-x-1}{x+1}+2xy;$$

$$Nx=2y-\frac{x}{x+1}+2xy;$$

$My=Nx;$ ***la ecuación diferencial es exacta.***

$\Rightarrow$ Existe *una función F(x, y), donde* $\begin{cases} Fx=M(x,y) \\ Fy=N(x,y) \end{cases}$

Si ***Fx = M(x, y), entonces se obtiene lo siguiente :***

$$Fx=M(x,y)=y^2-\frac{xy}{x+1}+xy^2;$$

$$\frac{\partial(F(x,y))}{\partial x}=y^2-\frac{xy}{x+1}+xy^2$$

$$\partial(F(x,y))=\left(y^2-\frac{xy}{x+1}+xy^2\right)\partial x;$$

$$F(x,y)=xy^2-y\int\frac{x}{x+1}\partial x+\frac{x^2y^2}{2}+h(y);$$

$$F(x,y)=xy^2-y\int\frac{x+1-1}{x+1}\partial x+\frac{x^2y^2}{2}+h(y);$$

$$F(x,y)=xy^2-y\int\partial x+y\int\frac{1}{x+1}\partial x+\frac{x^2y^2}{2}+h(y);$$

$$F(x,y)=xy^2-xy+y\ln|x+1|+\frac{x^2y^2}{2}+h(y);$$

Ahora si Fy = N(x, y), entonces se obtiene lo siguiente :

Fy = N(x, y);

$$Fy=2xy-x+\ln|x+1|+x^2y+h'(y);$$

Entonces reemplazando Fy :

$$2xy-x+\ln|x+1|+x^2y+h'(y);=2xy-x+\ln|x+1|+x^2y+\frac{y^3}{y^8-2}$$

Eliminando términos :

$$h'(y)=\frac{y^3}{y^8-2};$$

Obteniendo h(y) :

$$h(y)=\int\frac{y^3}{y^8-2}dy;$$

$$h(y)=\int\frac{y^3}{\left(y^4\right)^2-2}dy;$$

$$z=y^4;\Rightarrow dz=4y^3dy;$$

$$h(z)=\frac{1}{4}\int\frac{dz}{z^2-2}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}}\right|+K\right];$$

$$h(z)=\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}}\right|+C;$$

$$h(y)=\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{y^4-\sqrt{2}}{y^4+\sqrt{2}}\right|+C;$$

Entonces :

$$F(x,y)=xy^2-xy+y\ln|x+1|+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{y^4-\sqrt{2}}{y^4+\sqrt{2}}\right|+C;$$

La solución implicitaes F(x, y) = 0, es decir :

$$xy^2-xy+y\ln|x+1|+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{y^4-\sqrt{2}}{y^4+\sqrt{2}}\right|+C=0;$$

3.- Determine el valor de N(x,y) para que la siguiente ecuación diferencial sea exacta, luego encuentre la solución de forma implícita:

$$\left(y^{1/2}x^{-1/2}+\frac{x}{x^2+y}\right)dx+N(x,y)dy=0$$

Para que la ecuación diferencial sea exacta debe cumplirse que My = Nx

$$Nx=My;$$

$$Nx=\frac{1}{2}y^{-1/2}x^{-1/2}-\frac{x}{\left(x^2+y\right)^2};$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{1}{2}y^{-1/2}x^{-1/2}-\frac{x}{\left(x^2+y\right)^2};$$

$$\partial N(x,y)=\left(\frac{1}{2}y^{-1/2}x^{-1/2}-\frac{x}{\left(x^2+y\right)^2}\right)\partial x;$$

$$\int \partial N(x,y) = \int \left(\frac{1}{2} y^{-1/2} x^{-1/2} - \frac{x}{\left(x^2+y\right)^2} \right) \partial x;$$

$$N(x,y) = y^{-1/2} x^{1/2} - \int \left(\frac{x}{\left(x^2+y\right)^2} \right) \partial x;$$

$$u = x^2 + y;$$
$$\partial u = 2x \partial x;$$

$$N(x,y) = y^{-1/2} x^{1/2} - \frac{1}{2} \int \frac{\partial u}{u^2};$$

$$N(x,y) = y^{-1/2} x^{1/2} + \frac{1}{2u} + C;$$

$$N(x,y) = y^{-1/2} x^{1/2} + \frac{1}{2\left(x^2+y\right)} + C;$$

$$\left(y^{1/2} x^{-1/2} + \frac{x}{x^2+y} \right) dx + \left(y^{-1/2} x^{1/2} + \frac{1}{2\left(x^2+y\right)} + C \right) dy = 0$$

Ahora como My = Nx;

$\Rightarrow$ Existe ***una función F(x, y), donde*** $\begin{cases} \boldsymbol{Fx = M(x,y)} \\ \boldsymbol{Fy = N(x,y)} \end{cases}$

Si ***Fx = M(x, y), entonces se obtiene lo siguiente :***

$$Fx = M(x,y) = y^{1/2} x^{-1/2} + \frac{x}{x^2+y};$$

$$\frac{\partial (F(x,y))}{\partial x} = y^{1/2} x^{-1/2} + \frac{x}{x^2+y}$$

$$\partial (F(x,y)) = \left(y^{1/2} x^{-1/2} + \frac{x}{x^2+y} \right) \partial x;$$

$$F(x,y) = \int \left(y^{1/2} x^{-1/2} + \frac{x}{x^2+y} \right) \partial x;$$

$$F(x,y) = 2y^{1/2} x^{1/2} + \int \frac{x}{x^2+y} \partial x;$$

$$u = x^2 + y;$$
$$\partial u = 2x \partial x;$$

$$F(x,y) = 2y^{1/2} x^{1/2} + \frac{1}{2} \int \frac{\partial u}{u};$$

$$F(x,y) = 2y^{1/2} x^{1/2} + \frac{1}{2} \ln \left| x^2 + y \right| + h(y);$$

Ahora si Fy = N(x, y), entonces se obtiene lo siguiente :

Fy = N(x, y);

$$Fy = x^{1/2} y^{-1/2} + \frac{1}{2(x^2+y)} + h'(y);$$

Entonces reemplazando Fy :

$$x^{1/2}y^{-1/2}+\frac{1}{2(x^2+y)}+h'(y);=y^{-1/2}x^{1/2}+\frac{1}{2(x^2+y)}+C;$$

Eliminando términos :

$$h'(y)=C;$$

Obteniendo h(y) :

$$h(y)=Cx+K;$$

Entonces :

$$F(x,y)=2y^{1/2}x^{1/2}+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+y\right|+h(y);$$

$$F(x,y)=2y^{1/2}x^{1/2}+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+y\right|+Cx+K;$$

La solución implicitaes F(x, y) = 0, es decir :

$$2y^{1/2}x^{1/2}+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+y\right|+Cx+K;=0;$$

Ecuaciones diferenciales exactas con factor integrante

$M(x,y)+N(x,y)y'=0;$

Si My ≠ Nx;

Entonces es una ecuación diferencial no exacta, por lo tanto se necesita un factor integrante :

Un factor integrante que solo depende de x es :

$u(x)=e^{\int \frac{My-Nx}{N(x,y)}dx};$

$u(x)M(x,y)+u(x)N(x,y)y'=0;$

Ahora *la ecuación diferencial es exacta.*

Un factor integrante que depende de y :

$u(y)=e^{\int \frac{Nx-My}{N(x,y)}dx};$

$u(y)M(x,y)+u(y)N(x,y)y'=0;$

Ahora la ecuación diferencial es exacta.

1) $\boxed{xydx+\left(2x^2+3y^2-20\right)dy=0; \quad Si \quad y(1)=1;}$

$M(x,y)=xy;$

$My=x;$

$N(x,y)=2x^2+3y^2-20;$

$Nx=4x;$

My ≠ Nx; entonces la ecuación diferencial no es exacta;

Por lo tanto debemos encontrar su factor integrante :

$u(y)=e^{\int\left(\frac{Nx-My}{M(x,y)}\right)dy}$

$u(y)=e^{\int\left(\frac{4x-x}{xy}\right)dy}=e^{\int\left(\frac{3}{y}\right)dy}=y^3;$

$u(y)=y^3;$

Luego mulitiplicando u(y) a ambos lados de la ecuación :

$y^3(xydx)+y^3\left(2x^2+3y^2-20\right)dy=0;$

$xy^4dx+\left(2x^2y^3+3y^5-20y^3\right)dy=0;$

$M(x,y)=xy^4;$

$My=4xy^3;$

$N(x,y)=2x^2y^3+3y^5-20y^3;$

$Nx=4xy^3;$

$My = Nx$, por lo tanto la ecuación diferencial es exacta :

$$\exists(F(x,y)) \text{ talque} : \begin{cases} Fx = M(x,y); \\ Fy = N(x,y); \end{cases}$$

$$Fx = M(x,y);$$

$$\frac{\partial(F(x,y))}{\partial x} = xy^4;$$

$$F(x,y) = \int xy^4 \partial x;$$

$$F(x,y) = \frac{x^2y^4}{2} + h(y);$$

$$Fy = N(x,y);$$

$$2x^2y^3 + h'(y) = 2x^2y^3 + 3y^5 - 20y^3;$$

$$h'(y) = 3y^5 - 20y^3;$$

$$h(y) = \int \left(3y^5 - 20y^3\right)dy;$$

$$h(y) = \frac{y^6}{2} - 5y^4 + C;$$

Entonces :

$$F(x,y) = \frac{x^2y^4}{2} + \frac{y^6}{2} - 5y^4 + C;$$

$$\frac{x^2y^4}{2} + \frac{y^6}{2} - 5y^4 + C = 0;$$

2) $\boxed{2xdy - \left[y + xy^3\left(1 + ln(x)\right)\right]dx = 0;}$

Si $y(1) = 1;$

$$\frac{x^2y^4}{2} + \frac{y^6}{2} - 5y^4 + C = 0;$$

$$\frac{(1^2)(1^4)}{2} + \frac{(1^6)}{2} - 5(1^4) + C = 0;$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 5 + C = 0;$$

$$C = 5 - 1;$$

$$C = 4;$$

$$\frac{x^2y^4}{2} + \frac{y^6}{2} - 5y^4 + 4 = 0;$$

La solución :

$$x^2y^4 + y^6 - 10y^4 + 8 = 0;$$

$\left[y+xy^3(1+ln(x))\right]dx - 2xdy = 0;$

$M(x,y) = y + xy^3(1+\ln(x));$

$My = 1 + 3xy^2 + 3xy^2\ln(x);$

$N(x,y) = -2x;$

$Nx = -2;$

$u(y) = e^{\int\left(\frac{Nx-My}{M(x,y)}\right)dy};$

$u(y) = e^{\int\left(\frac{-2-1-3xy^2-3xy^2\ln(x);}{y+xy^3(1+\ln(x))}\right)dy} = e^{\int\left(\frac{-3-3xy^2-3xy^2\ln(x);}{y(1+xy^2(1+\ln(x)))}\right)dy}$

$u(y) = e^{\int\left(\frac{-3(1+xy^2(1+\ln(x)))}{y(1+xy^2(1+\ln(x)))}\right)dy} e^{\int\frac{-3}{y}dy} = \frac{1}{y^3};$

Luego mulitiplicando u(y) a ambos lados de la ecuación :

$\frac{1}{y^3}\left[y+xy^3(1+\ln(x))\right]dx - \frac{1}{y^3}(2xdy) = 0;$

$\left[\frac{1}{y^2} + x(1+\ln(x))\right]dx - \left(\frac{2x}{y^3}\right)dy = 0;$

$M(x,y) = \frac{1}{y^2} + x(1+\ln(x));$

$My = -\frac{2}{y^3};$

$N(x,y) = -\frac{2x}{y^3};$

$Nx = -\frac{2}{y^3};$

My = Nx, por lo tanto la e.d. es exacta :

$\exists(F(x,y))\ talque: \begin{cases} Fx = M(x,y); \\ Fy = N(x,y); \end{cases}$

$Fx = M(x,y);$

$\frac{\partial(F(x,y))}{\partial x} = \frac{1}{y^2} + x(1+\ln(x));$

$F(x,y) = \int\left[\frac{1}{y^2} + x(1+\ln(x))\right]\partial x;$

$F(x,y) = \frac{x}{y^2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + h(y);$

$Fy = N(x,y);$

$-\frac{2x}{y^3} + h'(y) = -\frac{2x}{y^3};$

$h'(y) = 0;$

$h(y) = C$

Entonces :

$F(x,y) = \frac{x}{y^2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + C;$

$\frac{x}{y^2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + C = 0;$

3) $\boxed{x^2+\left(y^2\sqrt{y^2+1}\right)y'=-2xy\ln(y);}$

$$2xy\ln(y)+\left[x^2+y^2\sqrt{y^2+1}\right]y'=0;$$
$$M(x,y)=2xy\ln(y);$$
$$My=2x\left[1+\ln(y)\right];$$
$$N(x,y)=\left[x^2+y^2\sqrt{y^2+1}\right];$$
$$Nx=2x;$$
$$u(y)=e^{\int\left(\frac{Nx-My}{M(x,y)}\right)dy};$$
$$u(y)=e^{\int\left(\frac{2x-2x[1+\ln(y)]}{2xy\ln(y)}\right)dy}=e^{\int\left(\frac{-2x\ln(y)}{2xy\ln(y)}\right)dy}=e^{\int-\frac{1}{y}dy};$$
$$u(y)=\frac{1}{y};$$

Luego se multiplica u(y) a ambos lados de la ecuación :

$$\frac{1}{y}\left(2xy\ln(y)\right)+\frac{1}{y}\left[x^2+y^2\sqrt{y^2+1}\right]y'=0;$$
$$2x\ln(y)+\left[\frac{x^2}{y}+y\sqrt{y^2+1}\right]y'=0;$$
$$M(x,y)=2x\ln(y);$$
$$My=\frac{2x}{y};$$
$$N(x,y)=\frac{x^2}{y}+y\sqrt{y^2+1};$$
$$Nx=\frac{2x}{y};$$

My = Nx, por lo tanto la e.d. es exacta :

$$\exists(F(x,y))\ \textit{talque}:\begin{cases}Fx=M(x,y);\\Fy=N(x,y);\end{cases}$$

Fx = M(x,y);

$$\frac{\partial(F(x,y))}{\partial x}=2x\ln(y);;$$
$$F(x,y)=\int\left[2x\ln(y)\right]\partial x;$$
$$F(x,y)=x^2\ln(y)+h(y);$$

Fy = N(x,y);

$$\frac{x^2}{y}+h'(y)=\frac{x^2}{y}+y\sqrt{y^2+1};$$
$$h'(y)=y\sqrt{y^2+1};$$
$$h(y)=\int\left(y\sqrt{y^2+1}\right)dy;$$
$$u=y^2+1;$$
$$du=2ydy;$$
$$h(y)=\frac{1}{2}\int\sqrt{u}du=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}+C\right]=\frac{1}{3}u\sqrt{u}+C;$$

$$h(y)=\frac{1}{3}\left(y^2+1\right)\sqrt{y^2+1}+C;$$

Entonces :

$$F(x,y)=x^2\ln(y)+\frac{1}{3}\left(y^2+1\right)\sqrt{y^2+1}+C;$$
$$x^2\ln(y)+\frac{1}{3}\left(y^2+1\right)\sqrt{y^2+1}+C=0;$$

Ecuaciones diferenciales de Bernoulli

Sea

$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x)y^n$ una ecuación diferencial de Bernoulli, donde $n \neq 0,1$.

Esta es una ecuación diferencial no lineal, que se la convierte en lineal haciendo el siguiente cambio de variable:

$v = y^{1-n}$

Donde:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

Se multiplicará el factor $(1-n)y^{-n}$ a ambos lados de la ecuación de Bernoulli:

$$(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} + (1-n)y^{-n}p(x)y = (1-n)y^{-n}g(x)y^n$$

Se obtiene lo siguiente:

$$\underbrace{(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}}_{\text{Esto es: } \frac{dv}{dx}} + (1-n)p(x)\underbrace{y^{1-n}}_{v} = (1-n)g(x)$$

$\left.\frac{dv}{dx} + (1-n)p(x)v = (1-n)g(x)\right\}$ Esto es una ecuación diferencial Lineal,

que se puede resolver por el método del factor integrante.

1) $\boxed{xdy - \left[y + xy^3(1+ln(x))\right]dx = 0;}$

$$xdy\text{-}\left[y + xy^3(1+\ln(x))\right]dx = 0;$$

$$y' - \left[\frac{y}{x} + y^3(1+\ln(x))\right] = 0;$$

$$y' - \frac{y}{x} = y^3(1+\ln(x)); \qquad n = 3;$$

Se sustituye $v = y^{1-n}$ *;*

$$v = y^{-2};$$

$$v' = \frac{dv}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx};$$

Luego se multiplica $-2y^{-3}$ *a ambos de la ecuación :*

$$-2y^{-3}y' + 2y^{-3}\frac{y}{x} = -2y^{-3}y^3(1+\ln(x));$$

$$-2y^{-3}y' + 2\frac{y^{-2}}{x} = -2(1+\ln(x));$$

Reemplazando v y v' :

$$v' + \frac{2v}{x} = -2(1+\ln(x));$$

Resolviendo por factor integrante :

$$u(x) = e^{\int\frac{2}{x}dx} = x^2;$$

$$x^2v' + x^2\frac{2v}{x} = -2x^2(1+\ln(x));$$

$$\frac{d\left[x^2v\right]}{dx} = -2x^2(1+\ln(x));$$

$$x^2v = \int -2x^2(1+\ln(x))dx;$$

$$x^2v = -2\int\left(x^2 + x^2\ln(x)\right)dx;$$

$$x^2v = -\frac{2}{3}x^3 - 2\int\left(x^2\ln(x)\right)dx;$$

$$\int\left(x^2\ln(x)\right)dx = ?$$

$$u = \ln(x); \qquad \Rightarrow \qquad du = \frac{dx}{x};$$

$$dv = x^2dx; \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{x^3}{3};$$

$$\int\left(x^2\ln(x)\right)dx = \frac{x^3\ln(x)}{3} - \frac{x^3}{9} + C;$$

$$x^2v = -\frac{2}{3}x^3 - \frac{2x^3\ln(x)}{3} + \frac{2x^3}{9} + K;$$

Despejandola solución:

$$v = -\frac{2}{3}x - \frac{2x\ln(x)}{3} + \frac{2x}{9} + \frac{K}{x^2};$$

Reemplazando $v = y^{-2}$ **:**

$$y^{-2} = -\frac{2}{3}x - \frac{2x\ln(x)}{3} + \frac{2x}{9} + \frac{K}{x^2};$$

La solución general es:

$$\boxed{y = \frac{1}{\sqrt{-\frac{2}{3}x - \frac{2xln(x)}{3} + \frac{2x}{9} + \frac{K}{x^2}}};}$$

2) $\boxed{xy'+y=y^2 ln(x); \quad si \quad y(1)=1;}$

$$y'+\frac{y}{x}=y^2\frac{\ln(x)}{x}; \qquad n=2;$$

$$v=y^{1-n}=y^{-1};$$

$$\frac{dv}{dx}=-y^{-2}\frac{dy}{dx};$$

Luego se multiplica $-y^{-2}$ *a ambos lados de la ecuación:*

$$-y^{-2}y'-y^{-2}\frac{y}{x}=-y^{-2}y^2\frac{\ln(x)}{x};$$

Reemplazando v y v' en la ecuación:

$$v'-\frac{v}{x}=\frac{\ln(x)}{x};$$

Resolviendo por el método del factor integrante:

$$u(x)=e^{\int -\frac{dx}{x}}=\frac{1}{x};$$

$$\frac{1}{x}v'-\frac{v}{x^2}=\frac{\ln(x)}{x^2};$$

$$\frac{d\left[\frac{1}{x}v\right]}{dx}=\frac{\ln(x)}{x^2};$$

$$\frac{1}{x}v=\int\frac{\ln(x)}{x^2}dx;$$

Integrando $\int\frac{\ln(x)}{x^2}dx=?$

$$u=\ln(x); \quad \Rightarrow \quad du=\frac{dx}{x};$$

$$dv=\frac{dx}{x^2}; \quad \Rightarrow \quad v=-\frac{1}{x};$$

$$\frac{1}{x}v=-\frac{\ln(x)}{x}+\int\frac{dx}{x^2};$$

$$\frac{1}{x}v=-\frac{\ln(x)}{x}-\frac{1}{x}+C;$$

$$v=-\ln(x)-1+Cx;$$

$$y^{-1}=-\ln(x)-1+Cx;$$

$$y=\frac{1}{-\ln(x)-1+Cx};$$

Si $y(1)=1$, *entonces:*

$$1=\frac{1}{C-1}$$

$$C-1=1;$$

$$C=2;$$

La solución es:

$$\boxed{y=\frac{1}{-\ln(x)-1+2x};}$$

3) $\boxed{4(1+x)dy + y\left[1+4xy^2(1+x)\right]dx = 0;}$

$$y'+y\left[\frac{1}{4(1+x)}+xy^2\right]=0$$

$$y'+\frac{y}{4(1+x)}=-xy^3; \quad \boldsymbol{n=3;}$$

$$v=y^{1-n}=y^{-2};$$

$$\frac{dv}{dx}=-2y^{-3}\frac{dy}{dx};$$

Luego se multiplica - 2y^{-3} a ambos lados de la ecuación :

$$-2y^{-3}y'+\frac{-2y^{-3}y}{4(1+x)}=2y^{-3}xy^3;$$

$$v'-\frac{2v}{4(1+x)}=2x;$$

$$u(x)=e^{\int -\frac{1}{2(1+x)}dx}=e^{-\frac{1}{2}\ln|1+x|}=\frac{1}{\sqrt{1+x}};$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}v'-\frac{1}{\sqrt{1+x}}\frac{2v}{4(1+x)}=\frac{2x}{\sqrt{1+x}};$$

$$\frac{d\left[\frac{1}{\sqrt{1+x}}v\right]}{dx}=\frac{2x}{\sqrt{1+x}};$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}v=\int\frac{2x}{\sqrt{1+x}}dx;$$

$$\int\frac{2x}{\sqrt{1+x}}dx=?;$$

$$z^2=1+x; \qquad \Rightarrow \qquad 2zdz=dx;$$

$$x=z^2-1;$$

$$\int\frac{2x}{\sqrt{1+x}}dx=2\int\frac{(z^2-1)2zdz}{z}=4\int(z^2-1)dz;$$

$$4\int(z^2-1)dz=\frac{4z^3}{3}-4z+C;$$

$$\int\frac{2x}{\sqrt{1+x}}dx=\frac{4\sqrt{(1+x)^3}}{3}-4\sqrt{1+x}+C;$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}v=\frac{4\sqrt{(1+x)^3}}{3}-4\sqrt{1+x}+C;$$

$$v=\frac{4(1+x)^2}{3}-4(1+x)+C;$$

$$y^{-2}=\frac{4(1+x)^2}{3}-4(1+x)+C\sqrt{1+x};$$

La solución general es:

$$\boxed{\boldsymbol{y=\frac{1}{\sqrt{\frac{4(1+x)^2}{3}-4(1+x)+C\sqrt{1+x}}};}}$$

4) $\boxed{3y'+4csc(2x)y = 2y^{-1/2}ctg(x);}$

$$y'+\frac{4}{3}\csc(2x)y=\frac{2}{3}y^{-1/2}\text{ctg}(x); \qquad \boldsymbol{n}=-\frac{1}{2};$$

$$v=y^{1-n}=y^{3/2};$$

$$v'=\frac{3}{2}y^{1/2}y';$$

Se multiplica $\frac{3}{2}y^{1/2}$ ***a ambos lados de la ecuación :***

$$\frac{3}{2}y^{1/2}y'+\frac{3}{2}y^{1/2}\frac{4}{3}\csc(2x)y=\frac{3}{2}y^{1/2}\frac{2}{3}y^{-1/2}\text{ctg}(x);$$

$$v'+2\csc(2x)v=\text{ctg}(x);$$

$$u(x)=e^{\int 2\csc(2x)dx}=e^{\ln\left|\csc(2x)-\text{ctg}(2x)\right|}$$

$$u(x)=\csc(2x)-\text{ctg}(2x);$$

$$u(x)=\frac{1}{\text{sen}(2x)}-\frac{\cos(2x)}{\text{sen}(2x)};$$

$$u(x)=\frac{1-\cos(2x)}{\text{sen}(2x)}=\frac{\frac{1-\cos(2x)}{2}}{\frac{\text{sen}(2x)}{2}}=\frac{\text{sen}^2(x)}{\text{sen}(x)\cos(x)}=\tan(x);$$

$$\tan(x)v'+2\tan(x)\csc(2x)v=\tan(x)\text{ctg}(x);$$

$$\frac{d\left[\tan(x)v\right]}{dx}=1;$$

$$\tan(x)v=\int dx;$$

$$\tan(x)v=\int dx;$$

$$\tan(x)v=x+C;$$

$$v=x\text{ctg}(x)+C\text{ctg}(x);$$

$$y^{3/2}=x\text{ctg}(x)+C\text{ctg}(x);$$

$$y=\sqrt[3]{\left(x\text{ctg}(x)+C\text{ctg}(x)\right)^2};$$

Si $\boldsymbol{y(\pi/4)=1;}$

$$\boldsymbol{1}=\sqrt[3]{\left(\frac{\pi}{4}+C\right)^2};$$

$$1=\frac{\pi}{4}+C;$$

$$C=1-\frac{\pi}{4};$$

La solución particular es :

$$y=\sqrt[3]{\left(x\operatorname{ctg}(x)+\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{ctg}(x)\right)^2};$$

Ecuaciones diferenciales homogéneas de la forma $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$

Se dice que la ecuación $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ *es homogénea si se puede expresar esta ecuación como :*

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right);$$

Se hace la siguiente sustitución :

$$v=\frac{y}{x};\quad \text{entonces}\quad y=vx;$$

$$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx};$$

Reemplazando v, y y' en la ecuación :

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right);$$

$$v+x\frac{dv}{dx}=f(v);$$

$$x\frac{dv}{dx}=f(v)-v;$$

$$\frac{dv}{f(v)-v}=\frac{dx}{x};$$

$$v=\phi(x);$$

$$\frac{y}{x}=\phi(x);$$

$$y=x\phi(x);$$

1)Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{\sec^2\left(\frac{y}{x}\right)}{y^2};$$

Asumiendo que :

$$v=\frac{y}{x}\quad\Rightarrow\quad y=xv;$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v;$$

Reemplazando en la ecuación diferencial , $y=xv,\ v=\frac{y}{x},\ \frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v$, *se obtiene :*

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{sec^2\left(\frac{y}{x}\right)}{y^2}\quad\Rightarrow\quad x\frac{dv}{dx}+v=v+\frac{sec^2(v)}{x^2v^2};$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{sec^2(v)}{x^2v^2}\quad\Rightarrow\quad \left.x^3\frac{dv}{dx}=\frac{sec^2(v)}{v^2}\right\}\text{Ecuación diferencial separable.}$$

$$\Rightarrow\frac{v^2dv}{sec^2(v)}=\frac{dx}{x^3}\quad \text{Integrando :}\quad \int\frac{v^2dv}{sec^2(v)}=\int\frac{dx}{x^3};$$

$$\int\frac{v^2dv}{sec^2(v)}=?$$

$$\int\frac{v^2dv}{sec^2(v)}=\int v^2cos^2(v)dv=\int v^2\left(\frac{1+cos(2v)}{2}\right)dv=\int\left(\frac{v^2}{2}+\frac{v^2cos(2v)}{2}\right)dv$$

$$\int\frac{v^2dv}{sec^2(v)}=\int\left(\frac{v^2}{2}+\frac{v^2cos(2v)}{2}\right)dv=\int\left(\frac{v^2}{2}\right)dv+\int\left(\frac{v^2cos(2v)}{2}\right)dv$$

$$m=v^2\ \Rightarrow\ dm=2vdv;$$

$$dn=cos(2v)dv\ \Rightarrow\ n=\frac{sen(2v)}{2};$$

$$\int\frac{v^2dv}{sec^2(v)}=\int\left(\frac{v^2}{2}\right)dv+\frac{1}{2}\int\left(v^2cos(2v)\right)dv=\frac{v^3}{6}+\frac{1}{2}\left[\frac{v^2sen(2v)}{2}-\int\frac{2vsen(2v)}{2}dv\right]$$

$$\int\frac{v^2dv}{sec^2(v)}=\frac{v^3}{6}+\frac{v^2sen(2v)}{4}-\frac{1}{2}\int vsen(2v)dv$$

$$m=v\ \Rightarrow\ dm=dv.$$

$$dn=sen(2v)dv\ \Rightarrow\ n=-\frac{1}{2}cos(2v)$$

$$\int\frac{v^2dv}{sec^2(v)}=\frac{v^3}{6}+\frac{v^2sen(2v)}{4}-\frac{1}{2}\int vsen(2v)dv=\frac{v^3}{6}+\frac{v^2sen(2v)}{2}-\left[-\frac{v}{4}cos(2v)+\int\frac{1}{4}cos(2v)\,dv\right]$$

$$\int\frac{v^2dv}{sec^2(v)}=\frac{v^3}{6}+\frac{v^2sen(2v)}{4}-\left[-\frac{v}{4}cos(2v)+\int\frac{1}{4}cos(2v)\,dv\right]=\frac{v^3}{6}+\frac{v^2sen(2v)}{4}+\frac{v}{4}cos(2v)-\frac{1}{8}sen(2v)$$

$$\int\frac{v^2dv}{sec^2(v)}=\frac{v^3}{6}+\frac{v^2sen(2v)}{4}+\frac{v}{4}cos(2v)-\frac{1}{8}sen(2v)$$

$$\int \frac{v^2 dv}{sec^2(v)} = \int \frac{dx}{x^3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{v^3}{6} + \frac{v^2 sen(2v)}{4} + \frac{v}{4}cos(2v) - \frac{1}{8}sen(2v) = -\frac{1}{x^2} + C$$

$$\frac{v^3}{6} + \frac{v^2 sen(2v)}{4} + \frac{v}{4}cos(2v) - \frac{1}{8}sen(2v) = -\frac{1}{x^2} + C$$

Reemplazando $v = \frac{y}{x}$;

La *solución de forma implícita queda expresada por :*

$$\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^3}{6} + \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 sen\left(2\left(\frac{y}{x}\right)\right)}{4} + \frac{v}{4}cos\left(2\left(\frac{y}{x}\right)\right) - \frac{1}{8}sen\left(2\left(\frac{y}{x}\right)\right) = -\frac{1}{x^2} + C$$

2) $\boxed{(xy + 4y^2 + 2x^2)dx - (x^2)dy = 0;\ si\ y(1) = \sqrt{2}/2;}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(xy + 4y^2 + 2x^2)}{x^2};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{4y^2}{x^2} + 2;$$

$$v = \frac{y}{x};$$

$$y = xv;$$

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx};$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = v + 4v^2 + 2;$$

$$x\frac{dv}{dx} = 4v^2 + 2;$$

$$\frac{dv}{4v^2 + 2} = \frac{dx}{x};$$

$$\frac{dv}{4(v^2 + 1/2)} = \frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{dv}{(v^2 + 1/2)} = \int \frac{4dx}{x};$$

$$\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}v) = 4\ln|x| + C;$$

$$\arctan(\sqrt{2}v) = \frac{4\ln|x|}{\sqrt{2}} + K;$$

Aplicando tan a ambos lados se obtiene :

$$\sqrt{2}v = \tan\left(\frac{4\ln|x|}{\sqrt{2}} + K\right);$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan\left(\frac{4\ln|x|}{\sqrt{2}} + K\right);$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan\left(\frac{4\ln|x|}{\sqrt{2}} + K\right);$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{2}}\tan\left(\frac{4\ln|x|}{\sqrt{2}} + K\right);$$

$$Si\ y(1) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan(K);$$

$$K = \frac{\pi}{4};$$

La solución particular es :

$$y = \frac{x}{\sqrt{2}}\tan\left(\frac{4\ln|x|}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right);$$

3) $x\frac{dy}{dx}=y+\sqrt{x^2-y^2};\quad y(x_0)=0;\ \ donde\, x_0>0;$

$y(1)=\pi/4;$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x};$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2}};$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}};$$

Se asume :

$$v=\frac{y}{x};$$

$$y=xv;$$

$$y'=v+xv';$$

$$v+xv'=v+\sqrt{1-v^2};$$

$$xv'=\sqrt{1-v^2};$$

$$x\frac{dv}{dx}=\sqrt{1-v^2};$$

$$\frac{dv}{\sqrt{1-v^2};}=\frac{dx}{x};$$

$$arcsen(v)=\ln|x|+C;$$

$$v=sen(\ln|x|+C);$$

$$\frac{y}{x}=sen(\ln|x|+C);$$

$$y=xsen(\ln|x|+C);$$

Si $y(1)=1;$

$$1=sen(C);$$

$$\frac{\pi}{2}=C;$$

La solución paticular es :

$$y=xsen\left(\ln|x|+\frac{\pi}{2}\right);$$

4) $x(ln(x)-ln(y))dy-ydx=0;$

$$x(\ln(x)-\ln(y))dy-ydx=0;$$

$$x(\ln(y)-\ln(x))dy+ydx=0;$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x(\ln(y)-\ln(x))};$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x\left(\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right)};$$

Se asume :

$$v=\frac{y}{x};$$

$$y=xv;$$

$$y'=v+xv';$$

$$v+xv'=-\frac{v}{(\ln(v))};$$

$$xv'=-\frac{v}{(\ln(v))}-v;$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{-v(1+\ln(v))}{(\ln(v))};$$

$$\int\left(\frac{(\ln(v))}{v(1+\ln(v))}\right)dv=-\int\left(\frac{dx}{x}\right);$$

$$u=\ln(v);$$

$$du=\frac{dv}{v};$$

$$\int\left(\frac{u}{(1+u)}\right)du=-\ln|x|+C;$$

$$\int du-\int\left(\frac{1}{(1+u)}\right)du=-\ln|x|+C;$$

$$u-\ln|1+u|=-\ln|x|+C;$$

$$\ln|v|-\ln|1+\ln(v)|=-\ln|x|+C;$$

La solución general de forma implícita es:

$$\boxed{ln\left|\frac{y}{x}\right|-ln\left|1+ln\left(\frac{y}{x}\right)\right|=-ln|x|+C;}$$

Ecuaciones Diferenciales de Coeficientes Lineales

1) $\boxed{\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(2y-x+5)}{(2x-y-4)};}$

$(x-2y-5)dx-(2x-y-4)dy=0;$

$a_1b_2 \neq a_2b_1;$

$(1)(1)\neq(-2)(-2);$

$1\neq 4;$

Se asume :

$x=(u+h);$

$y=(v+k);$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dv}{du};$

Reemplazando x, y, y' en la ecuación, se obtiene

$\dfrac{dv}{du}=\dfrac{2(v+k)-(u+h)+5}{2(u+h)-(v+k)-4};$

$\dfrac{dv}{du}=\dfrac{2v-u+2k-h+5}{2u-v+2h-k-4};$

$\begin{cases}2k-h+5=0;\\ 2h-k-4=0;\end{cases}$

Resolviendo el sistema :

$k=-1;$

$h=3;$

Entonces :

$\dfrac{dv}{du}=\dfrac{2v-u}{2u-v};$

Divivdiendo para u, para poder obtener una ecuación homogénea :

$\dfrac{dv}{du}=\dfrac{\frac{2v}{u}-1}{2-\frac{v}{u}};$

Resolviendo como una ecuación diferencial homogénea :

$z=\dfrac{v}{u};$

$v=zu;$

$\dfrac{dv}{du}=z+u\dfrac{dz}{du};$

$z+u\dfrac{dz}{du}=\dfrac{2z-1}{2-z};$

$u\dfrac{dz}{du}=\dfrac{2z-1}{2-z}-z;$

$$u\frac{dz}{du}=\frac{2z-1-2z+z^2}{2-z};$$
$$\frac{(z-2)dz}{(z^2-1)}=-\frac{du}{u};$$
$$\int\frac{(z)dz}{(z^2-1)}-\int\frac{(2)dz}{(z^2-1)}=\int-\frac{du}{u};$$
$$\frac{1}{2}\ln\left|z^2-1\right|-\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|=-\ln|u|+C;$$
$$\frac{1}{2}\ln\left|z^2-1\right|-\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|=-\ln|u|+C;$$
$$\frac{1}{2}\ln|(z-1)(z+1)|-\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|=-\ln|u|+C;$$
$$\frac{1}{2}\ln|(z-1)|+\frac{1}{2}\ln|(z+1)|-\ln|(z-1)|+\ln|(z+1)|=-\ln|u|+C;$$
$$\frac{3}{2}\ln|(z+1)|-\frac{1}{2}\ln|(z-1)|=-\ln|u|+C;$$
$$\frac{3}{2}\ln\left|\left(\frac{v}{u}+1\right)\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\left(\frac{v}{u}-1\right)\right|=-\ln|u|+C;$$
$$v=y-k; \qquad \Rightarrow \qquad v=y+1;$$
$$u=x-h; \qquad \Rightarrow \qquad u=x-3;$$

La solución de forma implícita es :

$$\frac{3}{2}\ln\left|\left(\frac{y+1}{x-3}+1\right)\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\left(\frac{y+1}{x-3}-1\right)\right|=-\ln|x-3|+C;$$

2) $\boxed{\boldsymbol{(3y-7x+7)dx-(3x-7y-3)dy=0;}}$

$$a_1b_2\neq a_2b_1;$$
$$(-7)(7)\neq(-3)(3);$$
$$-49\neq-9;$$

Usando :

$$x=(u+h);$$
$$y=(v+k);$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{du};$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{-7x+3y+7}{-3x+7y+3};$$

Reemplazando x, y y y':

$$\frac{dv}{du}=\frac{-7(u+h)+3(v+k)+7}{-3(u+h)+7(v+k)+3};$$

$$\frac{dv}{du}=\frac{-7u+3v-7h+3k+7}{-3u+7v-3h+7k+3}$$

$$\begin{cases}-7h+3k+7=0;\\-3h+7k+3=0;\end{cases}$$

Resolviendo el sistema:

$$k=0;$$

$$h=1;$$

$$\frac{dv}{du}=\frac{-7u+3v}{-3u+7v};$$

$$\frac{dv}{du}=\frac{-7+\frac{3v}{u}}{-3+\frac{7v}{u}};$$

$$z=\frac{v}{u};$$

$$v=zu;$$

$$\frac{dv}{du}=z+u\frac{dz}{du};$$

$$z+u\frac{dz}{du}=\frac{-7+3z}{-3+7z};$$

$$u\frac{dz}{du}=\frac{-7+3z}{-3+7z}-z;$$

$$u\frac{dz}{du}=\frac{-7+3z+3z-7z^2}{-3+7z};$$

$$u\frac{dz}{du}=-\frac{7z^2-6z+7}{7z-3};$$

$$\int\frac{(7z-3)dz}{7z^2-6z+7}=\int\frac{-du}{u};$$

$$u=7z^2-6z+7;\qquad\Rightarrow\qquad du=14z\text{-}6;$$

$$7z-3=\frac{7}{14}(14z\text{-}6)-3+3;$$

$$\int\frac{\frac{7}{14}(14z\text{-}6)dz}{7z^2-6z+7}=\int\frac{-du}{u};$$

$$\frac{7}{14}\int\frac{(14z\text{-}6)dz}{7z^2-6z+7}=-\ln|u|+C;$$

$$\frac{\ln\left|7z^2-6z+7\right|}{2}=-\ln|u|+C;$$

$$\ln\left|7z^2-6z+7\right|=-\ln\left|u^2\right|+K;$$

$$\ln\left|7\left(\frac{v}{u}\right)^2-6\frac{v}{u}+7\right|=-\ln\left|u^2\right|+K;$$

$$\ln\left|7\left(\frac{y}{x-1}\right)^2-6\frac{y}{x-1}+7\right|=-\ln\left|(x-1)^2\right|+K;$$

La solución de forma implícita es:

$$7\left(\frac{y}{x-1}\right)^2-6\frac{y}{x-1}+7=\frac{C}{(x-1)^2};$$

3) $\boxed{(y-x-5)y'-(1-x-y)=0;}$

$$(1\text{-}x\text{-}y)-(y-x-5)y'=0;$$
$$a_1b_2 \neq a_2b_1;$$
$$(-1)(-1)\neq(1)(-1);$$
$$1\neq -1;$$
$$x=(u+h);$$
$$y=(v+k);$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-x-y}{y-x-5};$$

Reemplazando x,y, y y' en la ecuación:

$$\frac{dv}{du}=\frac{1\text{-}(u+h)\text{-}(v+k)}{(v+k)-(u+h)-5};$$
$$\frac{dv}{du}=\frac{-u-v-h-k+1}{-u+v-h+k-5};$$
$$\begin{cases}-h-k+1=0;\\-h+k-5=0;\end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones :

$$h=\text{-}2;$$
$$k=3;$$
$$\frac{dv}{du}=\frac{-u-v}{-u+v}$$
$$\frac{dv}{du}=\frac{-1-\frac{v}{u}}{-1+\frac{v}{u}};$$
$$z=\left(\frac{v}{u}\right);$$
$$v=zu;$$
$$\frac{dv}{du}=z+u\frac{dz}{du};$$
$$z+u\frac{dz}{du}=\frac{-1-z}{-1+z};$$
$$u\frac{dz}{du}=\frac{-1-z}{-1+z}-z;$$
$$u\frac{dz}{du}=\frac{-1-z+z-z^2}{-1+z};$$

$$u\frac{dz}{du}=-\frac{z^2+1}{z-1};$$

$$\int\frac{(z-1)dz}{(z^2+1)}=\int-\frac{du}{u};$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|z^2+1\right|-\arctan(z)=-\ln|u|+C;$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\left(\frac{v}{u}\right)^2+1\right|-\arctan\left(\frac{v}{u}\right)=-\ln|u|+C;$$

La solución implicita de la ecuación diferencial es :

$$\frac{1}{2}\ln\left|\left(\frac{y-3}{x+2}\right)^2+1\right|-\arctan\left(\frac{y-3}{x+2}\right)=-\ln|x+2|+C;$$

Ecuaciones diferenciales de la forma G(ax+by)

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=G(ax+by)}$$

Se asume el siguiente cambio de variable

$$z=ax+by$$

Despejando y:

$$y=\frac{z}{b}-\frac{a}{b}x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b}\frac{dz}{dx}-\frac{a}{b}$$

Reemplazando y, y' en:

$$\frac{dy}{dx}=G(ax+by)$$

Se obtiene una ecuación diferencial de la forma:

$$\boxed{\frac{1}{b}\frac{dz}{dx}-\frac{a}{b}=G(Z)}$$

$$\frac{1}{b}\frac{dz}{dx}=\frac{a}{b}+G(Z)$$

Se obtiene una ecuación diferencial separable dela forma:

$$\boxed{\frac{dz}{\frac{a}{b}+G(Z)}=bdx}$$

1. $\boxed{y' = (x+y+1)^2 - (x+y-1)^2; \qquad si\ y(0) = 7/4;}$

Se sustituye :

$z = x + y;$

$y = z - x;$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dx} - 1;$

$y' = (x+y+1)^2 - (x+y-1)^2;$

$\dfrac{dz}{dx} - 1 = (z+1)^2 - (z-1)^2;$

$\dfrac{dz}{dx} = z^2 + 2z + 1 - (z^2 - 2z + 1) + 1;$

$\dfrac{dz}{dx} = 4z + 1;$

$\int \dfrac{dz}{4z+1} = \int dx;$

$\dfrac{1}{4}\ln|4z+1| = x + C_1;$

$\ln|4z+1| = 4x + C_2;$

$4z + 1 = ke^{4x};$

$z = ke^{4x} - \dfrac{1}{4};$

$x + y = ke^{4x} - \dfrac{1}{4};$

$y = ke^{4x} - \dfrac{1}{4} - x;$

$\boldsymbol{Si\ y(0) = \dfrac{7}{4};}$

$\dfrac{7}{4} = k - \dfrac{1}{4};$

$k = 2;$

La solución particular es :

$y = 2e^{4x} - \dfrac{1}{4} - x;$

2. $y' = \tan^2(x+y); \qquad si \;\; y(0) = \pi;$

$$z = x + y;$$
$$y = z - x;$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1;$$
$$y' = \tan^2(x+y);$$
$$\frac{dz}{dx} - 1 = \tan^2(z);$$
$$\frac{dz}{dx} = 1 + \tan^2(z);$$
$$\frac{dz}{dx} = \sec^2(z);$$
$$\int \frac{dz}{\sec^2(z)} = \int dx;$$
$$\int \cos^2(z)dz = x + C;$$
$$\int \left(\frac{1+\cos(2z)}{2}\right)dz = x + C;$$
$$\frac{z}{2} + \frac{\mathrm{sen}(2z)}{4} = x + C;$$
$$\frac{x+y}{2} + \frac{\mathrm{sen}(2x+2y)}{4} = x + C;$$
$$2x + 2y + \mathrm{sen}(2x+2y) = 4x + K;$$

Si $y(0) = \pi;$

$$2\pi + \mathrm{sen}(2\pi) = K;$$
$$k = 2\pi;$$

La solución particular es :

$$2x + 2y + \mathrm{sen}(2x+2y) = 4x + 2\pi;$$

3. $\boldsymbol{y' = \sqrt{10x - 2y + 5} - 5;}$

$$y' = \sqrt{10x - 2y + 5} - 5;$$

$$z = 10x - 2y;$$

$$y = \frac{10x}{2} - \frac{z}{2};$$

$$\frac{dy}{dx} = 5 - \frac{1}{2}\frac{dz}{dx};$$

$$5 - \frac{1}{2}\frac{dz}{dx} = \sqrt{z+5} - 5;$$

$$10 - \frac{dz}{dx} = 2\sqrt{z+5} - 10;$$

$$\frac{dz}{dx} = 20 - 2\sqrt{z+5};$$

$$\int \frac{dz}{20 - 2\sqrt{z+5}} = \int dx;$$

$$u^2 = z + 5;$$

$$2udu = dz;$$

$$\int \frac{dz}{20 - 2\sqrt{z+5}} = \int \frac{2udu}{20 - 2u} = \int \frac{udu}{10 - u};$$

$$\int \frac{udu}{10 - u} = -\int \frac{udu}{u - 10};$$

Dividiendo u para u - 10;

$$\frac{u}{u - 10} = 1 + \frac{10}{u - 10};$$

$$-\int \frac{udu}{u - 10} = -\int du - 10\int \frac{du}{u - 10};$$

$$\int \frac{udu}{10 - u} = -u - 10\ln|u - 10|;$$

$$\int \frac{dz}{20 - 2\sqrt{z+5}} = -\sqrt{z+5} - 10\ln\left|\sqrt{z+5} - 10\right|;$$

Reemplazando las integrales :

$$-\sqrt{z+5} - 10\ln\left|\sqrt{z+5} - 10\right| = x + C;$$

$$z = 10x - 2y;$$

La solucion de forma explicita es :

$$-\sqrt{10x - 2y + 5} - 10\ln\left|\sqrt{10x - 2y + 5} - 10\right| = x + C;$$

4. $(2x+y)dx-(4x+2y-1)dy=0;$

$$a_1b_2=a_2b_1$$
$$(2)(-2)=(-4)(1)$$
$$-4=-4;$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{2(2x+y)-1};$$
$$z=2x+y;$$
$$y=z-2x;$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}-2;$$

Reemplazando :

$$\frac{dz}{dx}-2=\frac{z}{2z-1};$$
$$\frac{dz}{dx}=\frac{z}{2z-1}+2;$$
$$\frac{dz}{dx}=\frac{z+2(2z-1)}{2z-1};$$
$$\frac{(2z-1)dz}{5z-2}=dx;$$

Dividiendo $\frac{\boldsymbol{2z-1}}{\boldsymbol{5z-2}}=\frac{2}{5}-\frac{1}{5(5z-2)};$

$$\int\frac{2dz}{5}-\int\frac{dz}{5(5z-2)}=\int dx;$$
$$\frac{2}{5}z-\frac{1}{25}\ln|5z-2|=x+C;$$

La solución de forma implícita es :

$$\frac{2}{5}(2x+y)-\frac{1}{25}\ln|5(2x+y)-2|=x+C;$$

Ecuaciones de Primer Orden

Aplicaciones

1. Una taza de café caliente que inicialmente se encuentra a 95ºC, se enfría y llega a 80ºC en 5 minutos mientras permanece servida en un cuarto cuya temperatura está a 21ºC. Determine en que momento el café estará a la temperatura ideal de 50ºC.

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a)$$

$$\int \frac{dT}{T - T_a} = \int k\,dt$$

$$\ln(T - T_a) = kt + C$$

$$\underline{T(t) = Ce^{kt} + T_a}$$

sabemos que la temperatura del cuarto es $21^{\circ}C \therefore$

$$T(t) = Ce^{kt} + 21$$

en $t = 0$ *el café está a* $95^{\circ}C \therefore$

$$T(0) = Ce^{k(0)} + 21 = 95 \rightarrow C = 95 - 21 = 74$$

$$T(t) = 74e^{kt} + 21$$

en $t = 5\min$ *el café está a* $80^{\circ}C \therefore$

$$T(5) = 74e^{5k} + 21 = 80 \rightarrow k = \frac{\ln\left(\frac{59}{74}\right)}{5} = -0.0453\frac{^{\circ}C}{\min}$$

$$\underline{T(t) = 74e^{-0.0453t} + 21}$$

en $t = t_1\min$ *el café está a* $50^{\circ}C \therefore$

$$T(t_1) = 74e^{-0.0453t_1} + 21 = 50 \rightarrow t_1 = \frac{\ln\left(\frac{29}{74}\right)}{-0.0453} = \underline{\underline{20.67\min}}$$

2. El Sábado 24 de Febrero del 2007 a las 07h00 A.M. un conserje del básico encuentra el cuerpo de un estudiante de ecuaciones diferenciales en el aula donde rindió su examen el día anterior, que se conserva a temperatura constante de 26° C. En ese momento la temperatura del cuerpo es de 28° C y pasada hora y media la temperatura es de 27.5° C. Considere la temperatura del cuerpo en el momento de la muerte de 37° C y que se ha enfriado según la Ley de Enfriamiento de Newton, cuál fue la hora de la muerte?

Ley de enfriamiento de Newton :

$$\frac{dT}{dt} = -\mathrm{K}(\mathrm{T_c} - \mathrm{T_a})$$

$\frac{dT}{dt}$: (*Variación de la temperatura con respecto al tiempo*)

$\mathrm{T_c}$: (*Temperatura del cuerpo*)

$\mathrm{T_a}$: (*Temperatura del aula*) *t : tiempo en horas.*

$T_a = 26°\ C$

La temperatura del cuerpo cuando es hallado es 28° C.

El tiempo en que la temperatura es de 28° C es t_1.

$\Rightarrow T(t_1) = 28°\ C$

Después de una hora y media la temperatura del cuerpo desciende a 27.5° C.

El tiempo en que la temperatura es de 27.5° C será entonces : $t_1 + 1.5$.

$\Rightarrow T(t_1 + 1.5) = 27.5°\ C$

$$\frac{dT}{dt} = -K(T_c - 26);$$

$$\frac{dT}{(T_c - 26)} = -Kdt \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dT}{(T_c - 26)} = \int -Kdt \quad \Leftrightarrow \quad \ln|T_c - 26| = -Kt + C$$

$$e^{\ln|T_c - 26|} = e^{-Kt+C} \quad \Leftrightarrow \quad T_c - 26 = Ce^{-Kt} \quad \Rightarrow \quad T_c(t) = Ce^{-Kt} + 26;$$

$\Rightarrow T_c(t) = Ce^{-Kt} + 26;$

Si la temperatura antes de morir era de 37° C entonces:

$T(0) = 37°\ C;$

$37 = C + 26 \quad \Rightarrow \quad C = 11$

$\Rightarrow T_c(t) = 11e^{-Kt} + 26$

Si $T(t_1) = 28°\ C$

$$\Rightarrow T(t_1) = 11e^{-Kt_1} + 26 = 28 \quad \Rightarrow \quad 11e^{-Kt_1} = 2 \quad \Rightarrow e^{-Kt_1} = \frac{2}{11};$$

$$\Rightarrow -kt_1 = \ln\left(\frac{2}{11}\right) \Rightarrow kt_1 = 1.7047 \Rightarrow k = \frac{1.7047}{t_1} \quad \textit{(ecuación 1)};$$

Si $T(t_1 + 1.5) = 27.5°\ C$

$$\Rightarrow T(t_1 + 1.5) = 11e^{-K(t_1+1.5)} + 26 = 27.5 \quad \Rightarrow \quad 11e^{-K(t_1+1.5)} = 1.5 \quad \Rightarrow e^{-K(t_1+1.5)} = \frac{1.5}{11};$$

$$\Rightarrow -k(t_1 + 1.5) = \ln\left(\frac{1.5}{11}\right) \Rightarrow k(t_1 + 1.5) = 1.9924 \Rightarrow k = \frac{1.9924}{t_1 + 1.5} \quad \textit{(ecuación 2)};$$

Si se iguala ecuación 1 y 2 :

$$\frac{1.7047}{t_1} = \frac{1.9924}{t_1 + 1.5} \Rightarrow \quad (t_1 + 1.5)1.7047 = 1.9924t_1 \Rightarrow \quad 1.7047t_1 + 2.55705 = 1.9924t_1$$

$$\Rightarrow 1.9924t_1 - 1.7047t_1 = 2.55705 \Rightarrow t_1 = \frac{2.55705}{1.9924 - 1.7047} = 8.89 \textit{ horas}$$

Por lo tanto el estudiante murio 8.89 horas antes de ser encontrado es decir. A las 22h06.

3. Supóngase que un alumno de la ESPOL es portador del virus de la gripe y a pesar de ella va a la escuela donde hay 5000 estudiantes. Si se supone que la razón con la que se propaga el virus es proporcional no solo a la cantidad de infectados sino también a al cantidad de no infectados. Determine la cantidad de alumnos infectados a los 6 días después, si se observa que a los 4 días la cantidad de infectados era de 50.

x :# de *infectados*

$5000-x$:# de sanos

$$\frac{dx}{dt}=kx(5000-x) \quad \Leftrightarrow \quad \int\frac{dx}{x(5000-x)}=\int kdt \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{5000}\ln\left(\frac{x}{x-5000}\right)=kt+C$$

$$\ln\left(\frac{x}{x-5000}\right)=5000kt+C$$

$$\underline{x(t)=\frac{-5000Ce^{5000kt}}{1-Ce^{5000kt}}}$$

en $t=0$ $x=1$

$$\therefore x(0)=\frac{-5000Ce^{0}}{1-Ce^{0}}=1\rightarrow C=-\frac{1}{4999}$$

$$x(t)=\frac{e^{5000kt}}{1}\rightarrow x(t)=e^{5000kt}$$

en $t=4$ $x=50$

$$\therefore x(4)=e^{20000k}=50\rightarrow k=\frac{\ln(50)}{20000}$$

$$x(t)=e^{0.25t\ln(50)}\rightarrow \underline{x(t)=50^{0.25t}}$$

$$\therefore x(6)=50^{0.25*6}=50^{1.5}=\underline{\underline{353\ \textit{infectados}}}$$

4. En un cultivo de levadura la rapidez de cambio es proporcional a la cantidad existente. Si la cantidad de cultivo se duplica en 4 horas, ¿Qué cantidad puede esperarse al cabo de 16 horas, con la misma rapidez de crecimiento?

x : cantidad existente

$$\frac{dx}{dt}=kx$$

$$\int\frac{dx}{x}=\int kd$$

$$\ln(x)=kt+C$$

$$\underline{x(t)=Ce^{kt}}$$

en $t=0$ $\quad x=x_0$

$$x(0)=Ce^{0}=x_0\rightarrow \underline{C=x_0}$$

en $t=4$ $\quad x=2x_0$

$$x(4)=x_0e^{4k}=2x_0\rightarrow \underline{k=\frac{\ln(2)}{4}}$$

$$x(t)=x_0e^{\frac{t\ln(2)}{4}}\rightarrow \underline{x(t)=x_0 2^{\frac{t}{4}}}$$

$$x(16)=x_0 2^{\frac{16}{4}}=2^4x_0=\underline{\underline{32x_0}}$$

5. Un objeto que pesa 30Kg se deja caer desde una altura de 40 mt, con una velocidad de 3m/s. supóngase que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del cuerpo. Se sabe que la velocidad límite debe ser 40m/s. Encontrar la expresión de la velocidad en un tiempo t. La expresión para la posición del cuerpo en un tiempo t cualquiera.

$$mg - f_r = m\frac{dv}{dt}$$

$$mg - kv = m\frac{dv}{dt}$$

$$\int m\frac{dv}{kv-mg} = -\int dt \rightarrow \frac{m}{k}\ln(kv-mg) = -t + C \rightarrow \ln(kv-mg) = -\frac{k}{m}t + C$$

$$v(t) = \frac{1}{k}\left[Ce^{-\frac{k}{m}t} + mg\right] \rightarrow v(t) = \frac{1}{k}\left[Ce^{-\frac{k}{30}t} + 300\right]$$

en $t = 0$, $v = 3m/s$

$$v(0) = \frac{1}{k}\left[Ce^{0} + 300\right] = 3 \rightarrow \underline{C - 3k = -300}$$

en $t = \infty$, $v = 40m/s$

$$v(\infty) = \frac{1}{k}\left[Ce^{-\infty} + 300\right] = 40 \rightarrow \frac{300}{k} = 40 \rightarrow \underline{k = 7.5} \therefore \underline{C = -277.5}$$

$$\underline{\underline{v(t) = -37e^{-0.25t} + 40}}$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \rightarrow x(t) = \int v(t)dt + C$$

$$x(t) = \int\left[-37e^{-0.25t} + 40\right]dt + C = 148e^{-0.25t} + 40t + C$$

$$x(t) = 148e^{-0.25t} + 40t + C$$

en $t = 0$, $x = 0m$

$$x(0) = 148e^{0} + 40(0) + C = 0 \rightarrow \underline{C = -148}$$

$$\underline{\underline{x(t) = 148e^{-0.25t} + 40t - 148}}$$

6. La fuerza resistente del agua que opera sobre un bote es proporcional a su velocidad instantánea y es tal que cuando la velocidad es de 20m/seg la resistencia es de 40 Newtons. Se conoce que el motor ejerce una fuerza constante de 50Newtons. En la dirección del movimiento. El bote tiene una masa de 420 Kg. y el pasajero de 80 Kg.

a) Determine la distancia recorrida y la velocidad en l cualquier instante suponiendo que el bote parte del reposo.
b) Determine la máxima velocidad a la que puede viajar el bote.

Aplicando la segunda ley de Newton se obtiene:

.

$$\sum F_x = ma$$

a)

Fm: fuerza del motor

Fr: Fuerza de resistencia del agua

$Fm = 50$ *Newtons*

$Fr = kv$

Como la velocidad es de $20m/seg$

y la fuerza de resistencia de 40 *Newtons.*

$$Entonces\ k = \frac{40 Newtons}{20 m/seg} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad k = 2$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = ma \quad \Rightarrow \quad Fm - Fr = ma;$$

$$50 - kv = m\frac{dv}{dt}$$

m: masa total del sistema

$$m = 420kg + 80\ kg = 500kg.$$

$$\Rightarrow 50 - kv = 500\frac{dv}{dt}, \qquad k = 2$$

$$\left.500\frac{dv}{dt} + 2v = 50, \quad \right\} Ecuación\ \ dif.\ \ separable$$

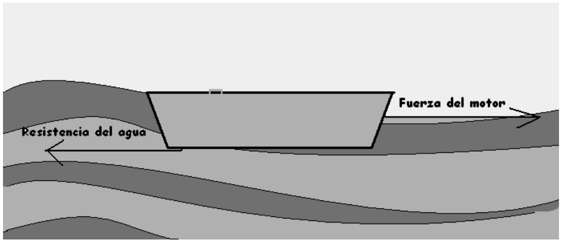
$$500\frac{dv}{dt} = 50 - 2v \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dv}{50 - 2v} = \frac{dt}{500}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dv}{2(v-25)} = -\frac{dt}{500}$$

$$\int \frac{dv}{(v-25)} = -\int \frac{dt}{250} + C \quad \Leftrightarrow \quad \ln|v\text{-}25| = -\frac{t}{250} + C$$

$$e^{\ln|v-25|} = e^{-\frac{t}{250}+C} \quad \Leftrightarrow \quad v\text{-}25 = ke^{-\frac{t}{250}}$$

$$\Rightarrow v = 25 + ke^{-\frac{t}{250}}$$



Si la velocidad inicial es 0 *por partir del reposo entonces* $v(0) = 0;$

$$0 = 25 + k \ \Rightarrow \ k = -25$$

La ecuación de la velocidad:

$$v = 25 - 25e^{-\frac{t}{250}}$$

Como $v = dx/dt$

Entonces:

$$\frac{dx}{dt} = 25 - 25e^{-\frac{t}{250}}$$

$$x(t) = \int \left(25 - 25e^{-\frac{t}{250}} \right) dt = 25t + 25(250)e^{-\frac{t}{250}} + C$$

$$x(t) = \ 25t + 25(250)e^{-\frac{t}{250}} + C$$

Si parte del reposo $x(0) = 0;$

$$0 = 25(250) + C \ \Rightarrow \ C = -25(250)$$

La ecuación del movimiento es:

$$\Rightarrow x(t) = \ 25t + 25(250)e^{-\frac{t}{250}} - 25(250)$$

b)

La velocidad limite o máxima es :

$$v_{\max} = \lim_{t\to\infty}\left(25 - 25e^{-\frac{t}{250}} \right) = 25 pies/seg$$

7. Un circuito RL tiene una fem de 9 voltios, una resistencia de 30 ohmios, una inductancia de 1 henrio y no tiene corriente inical. Hallar la corriente para t=1/5 segundos.

$$v = iR + L\frac{di}{dt}$$

$$9 = 30i + \frac{di}{dt}$$

$$\int \frac{di}{30i-9} = -\int dt$$

$$\frac{1}{30}\ln(30i-9) = -t + C$$

$$30i - 9 = -30t + C$$

$$i(t) = \frac{1}{30}\left[Ce^{-30t} + 9\right]$$

$$\text{en t} = 0 \quad \text{i} = 0$$

$$i(0) = \frac{1}{30}\left[Ce^{0} + 9\right] \rightarrow \underline{C = 21}$$

$$i(t) = \frac{1}{30}\left[21e^{-30t} + 9\right] \rightarrow \underline{i(t) = 0.7e^{-30t} + 0.3}$$

$$\text{en t} = 1/5$$

$$i(t) = 0.7e^{-6} + 0.3 \rightarrow \underline{\underline{i(1/5) = 0.301amp}}$$

8. Una Fem. de $200e^{-5t}$ voltios se conecta en serie con una resistencia de 20 Ohmios y una capacitancia de 0.01 Faradios. Asumiendo que la carga inicial del capacitor es cero. Encuentre la carga y la corriente en cualquier instante de tiempo.

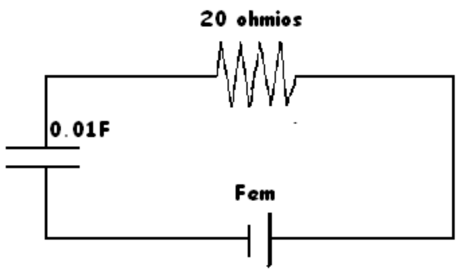
$$\left.R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \text{fem}\right\} \textit{Ecuación diferencial para el circuito RC.}$$

R : *resistencia* $\Rightarrow$ *R = 20 ohmios*

q : carga

C : capacitancia $\Rightarrow$ *C = 0.01 F*

fem = $200e^{-5t}$



$$20\frac{dq}{dt}+\frac{q}{0.01}=20e^{-5t};$$

$$\Rightarrow 20\frac{dq}{dt}+100q=20e^{-5t};$$

$$\Rightarrow \frac{dq}{dt}+5q=e^{-5t};\Big\}\textit{Ecuación diferencial lineal.}$$

$$u(t)=e^{\int 5dt}=e^{5t}$$

$$\Rightarrow q(t)=\frac{1}{u(t)}\int u(t)e^{-5t}dt$$

$$\Rightarrow q(t)=e^{-5t}\int e^{5t}e^{-5t}dt=e^{-5t}\int dt=e^{-5t}(t+c)$$

$$q(t)=e^{-5t}(t+c)=e^{-5t}t+e^{-5t}c$$

Si inicialmente no hay carga en el capacitor, entonces :

$$q(0)=0;$$

$$0=c$$

$$\Rightarrow q(t)=e^{-5t}t;$$

$$\Rightarrow i(t)=\int q(t)dt=\int e^{-5t}tdt;$$

$$u=t;\quad\Rightarrow\quad du=dt;$$

$$dv=e^{-5t}dt\quad v=-\frac{1}{5}e^{-5t};$$

$$i(t)=\int e^{-5t}tdt=-\frac{t}{5}e^{-5t}+\int\frac{1}{5}e^{-5t}dt$$

$$i(t)=-\frac{t}{5}e^{-5t}-\frac{1}{25}e^{-5t}+C$$

Si la carga inicial es cero, entonces la corriente inicial es cero :

$$i(o)=0;$$

$$\Rightarrow i(t)=-\frac{t}{5}e^{-5t}-\frac{1}{25}e^{-5t}$$

Casos especiales de ecuaciones diferenciales de segundo orden

Ecuaciones diferenciales en la que falta la variable "y"

1) $\left(3x\sqrt{(1+x)^3}-y'\right)+y''=x^2y';$

$$v=\frac{dy}{dx}=y';$$
$$\frac{dv}{dx}=\frac{d^2y}{dx}=y'';$$

Reemplazando en la ecuación:

$$\left(3x\sqrt{(1+x)^3}-y'\right)+y''=x^2y'';$$
$$\left(3x\sqrt{(1+x)^3}-v\right)+v'=x^2v';$$
$$3x\sqrt{(1+x)^3}-v+v'\text{-}x^2v'=0;$$
$$3x\sqrt{(1+x)^3}-v+v'\left(1-x^2\right)=0;$$
$$v'\left(1-x^2\right)-v=-3x\sqrt{(1+x)^3};$$
$$v'-\frac{v}{\left(1-x^2\right)}=\frac{-3x\sqrt{(1+x)^3}}{\left(1-x^2\right)};$$
$$u(x)=e^{-\int\frac{dx}{\left(1-x^2\right)}}=e^{\int\frac{dx}{\left(x^2-1\right)}}=e^{\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|};$$
$$u(x)=\left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{1/2}=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}};$$
$$\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{1+x}}\left(v'-\frac{v}{\left(1-x^2\right)}\right)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}\frac{-3x\sqrt{(1+x)^3}}{\left(1-x^2\right)}=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}\left(\frac{-3x\sqrt{(1+x)^3}}{(1-x)(1+x)}\right);$$
$$\frac{d\left[\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}v\right]}{dx}=\frac{3x}{\sqrt{x-1}};$$
$$\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}v=\int\frac{3xdx}{\sqrt{x-1}};$$
$$u^2=(x-1);$$
$$x=1+u^2;$$
$$dx=2udu;$$

$$\int \frac{3xdx}{\sqrt{x-1}} = \int \frac{3(1+u^2)(2udu)}{u}$$

$$\int 6(1+u^2)du = 6u + 2u^3 + C;$$

$$\int \frac{3xdx}{\sqrt{x-1}} = 6\sqrt{x-1} + 2\sqrt{(x-1)^3} + C;$$

$$\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{1+x}} v = 6\sqrt{x-1} + 2\sqrt{(x-1)^3} + C;$$

$$v = 6\sqrt{1+x} + 2\sqrt{1+x}(x-1) + C\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x-1}}$$

$$v = 6\sqrt{1+x} + 2\sqrt{1+x}(x-1) + C\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x-1}};$$

$$v = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 6\sqrt{1+x} + 2\sqrt{1+x}(x-1) + C\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x-1}};$$

$$y = \int 6\sqrt{1+x}dx + \int 2\sqrt{1+x}(x-1)dx + C\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x-1}}dx;$$

$$z^2 = 1+x;$$

$$z = \sqrt{1+x};$$

$$2zdz = dx;$$

$$x = z^2 - 1;$$

$$x - 1 = (z^2 - 2);$$

$$y = 4(1+x)^{3/2} - \int 2z(z^2-2)2zdz + C\int \frac{(1+x)dx}{\sqrt{x^2-1}};$$

$$y = 4(1+x)^{3/2} - 4\int (z^4 - 2z^2)dz + C\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} + C\int \frac{(x)dx}{\sqrt{x^2-1}};$$

$$y = 4(1+x)^{3/2} - \frac{4}{5}z^5 + \frac{8}{3}z^3 + C\ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| - C\sqrt{x^2-1} + K;$$

$$y = 4(1+x)^{3/2} + \frac{8}{3}\left(\sqrt{1+x}\right)^3 - \frac{4}{5}\left(\sqrt{1+x}\right)^5 + C\ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| - C\sqrt{x^2-1} + K;$$

2) $x^{-1}y' + \frac{(y')^2}{x} = y'';$

$$v = \frac{dy}{dx} = y';$$

$$v' = \frac{dv}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = y'';$$

Reemplazando en la ecuación :

$$x^{-1}y' + \frac{(y')^2}{x} = y'';$$

$$x^{-1}v + \frac{(v)^2}{x} = v';$$

$$v' - x^{-1}v = \frac{v^2}{x};$$

Es una E. diferencial de Bernoulli :

$$z = v^{1-n}; \qquad n = 2;$$

$$z = v^{-1};$$

$$\frac{dz}{dx} = -v^{-2}\frac{dv}{dx};$$

$$-v^{-2}v' - (-v^{-2})x^{-1}v = -v^{-2}\frac{v^2}{x};$$

$$z' + x^{-1}z = -\frac{1}{x};$$

$$u(x) = e^{\int x^{-1}dx} = x;$$

$$xz' + xx^{-1}z = -x\frac{1}{x};$$

$$\frac{d[x.z]}{dx} = -1;$$

$$xz = -\int dx = -x + C;$$

$$z = -1 + \frac{C}{x};$$

$$v^{-1} = -1 + \frac{C}{x} = \frac{C-x}{x};$$

$$v = \frac{x}{C-x};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{C-x} = -\frac{x}{x-C};$$

$$y = -\int \frac{xdx}{x-C};$$

$$y = -\int \frac{x-C}{x-C}dx - \int \frac{Cdx}{x-C};$$

$$y = -x - \ln|x-C| + K;$$

Ecuaciones diferenciales en las que falta la variable " x"

Cuando hace falta la variable "x" se hace el siguiente cambio de variable:

$$\frac{dy}{dx} = v;$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx} = v\frac{dv}{dy};$$

3) $2y^2y''+2y(y')^2 = 1;$ (HACE FALTA X)

$2y^2y''+2y(y')^2 = 1;$

Reemplazando y', y'' en la ecuación:

$$2y^2 v\frac{dv}{dy} + 2y(v)^2 = 1;$$

$$\frac{dv}{dy} + \frac{v}{y} = \frac{v^{-1}}{2y^2};$$ **Ecuacion diferencial de Bernoulli, n = -1.**

$$z = v^{1-(-1)};$$

$$z = v^2;$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dv}\frac{dv}{dy} = 2v\frac{dv}{dy};$$

Multiplicando 2v a ambos lados de la ecuación:

$$2v\frac{dv}{dy} + \frac{2v.v}{y} = \frac{2v.v^{-1}}{2y^2};$$

$$\frac{dz}{dy} + \frac{2z}{y} = \frac{1}{y^2};$$

$$u(y) = e^{\int \frac{2}{y}dy} = y^2;$$

$$y^2\frac{dz}{dy} + y^2\frac{2z}{y} = \frac{y^2}{y^2};$$

$$\frac{d\left[y^2 z\right]}{dy} = 1;$$

$$y^2 z = \int dy = y + C;$$

$$y^2 z = y + C;$$

$$z = \frac{1}{y} + \frac{C}{y^2}; \qquad \Rightarrow \qquad v^2 = \frac{1}{y} + \frac{C}{y^2};$$

$$v^2 = \frac{y+C}{y^2}; \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{\sqrt{y+C}}{y};$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y+C}}{y}$ **entonces separando variables** $\frac{y}{\sqrt{y+C}}dy = dx$

$$u^2 = y + C;$$

$$2zdz = dy;$$

$$y = u^2 - C;$$

Reemplazando en:

$$\int \frac{y}{\sqrt{y+C}}\,dy = \int dx$$

$$\int dx = \int \frac{(u^2-C)(2udu)}{u}, \quad \text{entonces} \quad x+K = \int (u^2-C)(2du),$$

Entonces: $x+K = \dfrac{2u^3}{3} - 2Cu$

Pero $u = (y+C)^{1/2}$

Por lo tanto la solución de la forma $x = f(y)$ **es:**

$$x+K = \frac{2(y+C)^{3/2}}{3} - 2C(y+C)^{1/2}$$

4) $y'y^2 + yy'' - (y')^2 = 0;$

$$v = \frac{dy}{dx};$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx} = v\frac{dv}{dy};$$

Reemplazando en la ecuación :

$$y'y^2 + yy'' - (y')^2 = 0;$$

$$vy^2 + yv\frac{dv}{dy} - (v)^2 = 0;$$

$$y + \frac{dv}{dy} - \frac{v}{y} = 0;$$

$$\frac{dv}{dy} - \frac{v}{y} = -y;$$

$$u(y) = e^{\int \frac{-dy}{y}} = \frac{1}{y};$$

$$\frac{1}{y}\frac{dv}{dy} - \frac{1}{y}\frac{v}{y} = -y\frac{1}{y};$$

$$\frac{d\left[\frac{1}{y}v\right]}{dy} = -1;$$

$$\frac{1}{y}v = -\int dy;$$

$$\frac{1}{y}v = -y + C;$$

$$v = -y^2 + Cy;$$

$$\frac{dy}{dx} = -y^2 + Cy;$$

$$x = \int \frac{dy}{Cy - y^2} = \int \frac{dy}{Cy} + \int \frac{dy}{C(C-y)};$$

La solución es:

$$\boxed{x = \frac{1}{C}\ln|y| - \frac{1}{C}\ln|C-y| + K;}$$

Ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes

1) Resuelva: $y''+3y'+2y = sen(e^x);$

$$\cdot\; y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen}(e^x)$$

Solución:

1. Solución de $y'' + 3y' + 2y = 0$

$$m^2 + 3m + 2 = 0 \Rightarrow (m+2)(m+1) = 0 \Rightarrow m = -2,\; m = -1$$

$$y_h = C_1 \underbrace{e^{-2x}}_{y_1} + C_2 \underbrace{e^{-x}}_{y_2}$$

2. $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{-x} \\ -2e^{-2x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^{-3x} + 2e^{-3x} = e^{-3x}$

3.

$$u_1' = \frac{-y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)} = \frac{-e^{-x}\operatorname{sen}(e^x)}{e^{-3x}} = -e^{2x}\operatorname{sen}(e^x)$$
$$u_2' = \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)} = \frac{e^{-2x}\operatorname{sen}(e^x)}{e^{-3x}} = e^{x}\operatorname{sen}(e^x)$$

4.

$$\begin{aligned}
u_1 &= \int u_1'\, dx \\
&= \int -e^{2x}\operatorname{sen}(e^x)\, dx \text{ y haciendo } \begin{cases} z &= e^x \\ dz &= e^x\, dx \\ dx &= \frac{dz}{z} \end{cases} \\
&= -\int z^2 \operatorname{sen}(z)\frac{dz}{z} \\
&= -\int z\operatorname{sen}(z)\, dz \quad \begin{cases} & \text{integrando por partes} \\ v &= z \Rightarrow dv = dz \\ dw &= -\operatorname{sen} z dz \Rightarrow w = \cos z \end{cases} \\
&= z\cos z - \int \cos z\, dz
\end{aligned}$$

$$= z\cos z - \operatorname{sen} z = e^x\cos(e^x) - \operatorname{sen}(e^x)$$

$$u_2 = \int u_2'\,dx = \int e^x \operatorname{sen}(e^x)\,dx = \int z \operatorname{sen} z\frac{dz}{z} = \int \operatorname{sen} z\,dz$$
$$= -\cos z = -\cos(e^x)$$

$$\begin{aligned} y_p &= u_1y_1 + u_2y_2 \\ &= [e^x\cos(e^x) - \operatorname{sen}(e^x)]\,e^{-2x} - e^{-x}\cos(e^x) \\ &= -e^{-2x}\operatorname{sen}(e^x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_h \\ &= C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} - e^{-2x}\operatorname{sen}(e^x) \end{aligned}$$

2) Resuelva: $y'' - y = \sec^3 x - \sec x$ ***si y(0)=3/16 , y'(0)=5/16;***

1. $y'' - y = 0$ (homogénea asociada)
$m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = \pm 1$
$y_h = C_1 \underbrace{e^x}_{y_1} + C_2 \underbrace{e^{-x}}_{y_2}$

2. $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = e^x(-e^{-x}) - e^x(e^{-x}) = -1 - 1 = -2$

$$\begin{aligned} u_1' &= -\frac{y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)} \\ &= -\frac{e^{-x}(\sec^3 x - \sec x)}{-2} = \frac{e^{-x}(\sec^3 x - \sec x)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2' &= \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)} \\ &= \frac{e^x(\sec^3 x - \sec x)}{-2} = -\frac{e^{-x}}{2}(\sec^3 x - \sec x) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}\int e^{-x}(\sec^3 x - \sec x)\,dx = \frac{1}{2}\int e^{-x}\sec x(\sec^2 x - 1)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int e^{-x}\sec x \tan^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int e^{-x}(\sec x \tan x)\tan x\,dx \end{aligned}$$

integremos por partes, haciendo:

$$u = e^{-x}\tan x, \quad dv = \tan x \sec x\,dx,$$

luego

$$du = (-e^{-x}\tan x + e^{-x}\sec^2 x)\,dx, \qquad v = \sec x$$

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}\left[e^{-x}\tan x \sec x - \int e^{-x}\sec x(\sec^2 x - \tan x)\,dx\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[e^{-x}\tan x \sec x - \int e^{-x}\sec^3 x\,dx + \int e^{-x}\sec x \tan x\,dx\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[e^{-x}\tan x \sec x - \int e^{-x}\sec^3 x\,dx + e^{-x}\sec x + \int e^{-x}\sec x\,dx\right] \\ &= \frac{e^{-x}}{2}\tan x \sec x - \frac{e^{-x}}{2}\sec x - \frac{1}{2}\int e^{-x}(\sec^3 x - \sec x)\,dx, \end{aligned}$$

despejando la integral :

$$\int e^{-x}(\sec^3 x - \sec x)\,dx = \frac{e^{-x}}{2}\tan x \sec x + \frac{e^{-x}}{2}\sec x$$
$$\frac{1}{2}\int e^{-x}(\sec^3 x - \sec x)\,dx = \frac{e^{-x}}{4}\tan x \sec x + \frac{e^{-x}}{4}\sec x$$

$$u_2 = \int u_2'\,dx = \frac{1}{2}\int e^{x}(\sec^3 x - \sec x)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int e^{-(-x)}\sec^3(-(-x)) - \sec(-(-x))\,d(-(-x))$$

hagamos: $z = -x$, $dz = -dx$

$$u_2 = \frac{1}{2}\int e^{-z}(\sec^3(-z) - \sec(-z))\,d(-z) = -\frac{1}{2}\int e^{-z}(\sec^3 z - \sec z)\,dz$$
$$= -\frac{e^{-z}}{4}\tan z \sec z - \frac{e^{-z}}{4}\sec z = -\frac{e^{x}}{4}\tan(-x)\sec(-x) - \frac{e^{x}}{4}\sec(-x)$$
$$= \frac{e^{x}}{4}\tan x \sec x - \frac{e^{x}}{4}\sec x$$

4.

$$\begin{aligned} y_p &= u_1y_1 + u_2y_2 \\ &= \left(\frac{e^{-x}}{4}\tan x \sec x + \frac{e^{-x}}{4}\sec x\right)e^{x} + \left(\frac{e^{x}}{4}\tan x \sec x - \frac{e^{x}}{4}\sec x\right)e^{-x} \\ &= \frac{\tan x \sec x}{2} \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= C_1e^{x} + c_2e^{-x} + \frac{\tan x \sec x}{2} \quad \text{solucion general} \end{aligned}$$

$$y' = C_1e^{x} - C_2e^{-x} + \frac{1}{2}\left(\tan^2(x)\sec(x) + \sec^3(x)\right)$$

$y(0) = \frac{3}{16}$;

$\frac{3}{16} = C_1 + C_2$;

$y'(0) = \frac{5}{16}$

$\frac{5}{16} = C_1 - C_2 + \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{8}\right)$

$C_1 - C_2 = \frac{1}{4}$;

Resolviendo :

$C_1 = \frac{7}{32}$;

$C_2 = \frac{-1}{32}$;

$$y = \frac{7}{32}e^{x} - \frac{1}{32}e^{-x} + \frac{\tan(x)\sec(x)}{2}$$

3) Resuelva $\boxed{y''-5y'+6y = xe^{x}\,;}$

$y''-5y'+6y = 0;$

$y = e^{rx};\qquad y' = re^{rx};\qquad y'' = r^2e^{rx};$

Reemplazando y, y', y'':

$e^{rx}\left[r^2 - 5r + 6\right] = 0;$

$\underbrace{r^2 - 5r + 6}_{\substack{\text{Ecuación}\\ \text{Característica}}} = 0;$

$(r-3)(r-2) = 0;$

$r_1 = 3;\qquad r_2 = 2;$

$y_1 = e^{3x};$

$y_2 = e^{2x};$

$y_h = \underbrace{C_1e^{3x} + C_2e^{2x}}_{\text{Solución homogénea}};$

Encontremos la solución particular:

$y''-5y'+6y = xe^{x};$

$y_p = x^S\left[a_0 + a_1x\right]e^{\alpha x};$

$s = 0;\qquad \alpha = \boldsymbol{1};$

$y_p = \left[a_0 + a_1x\right]e^{x};$

$y_p = a_0e^{x} + a_1xe^{x};$

$y'_p = a_0e^{x} + a_1\left[xe^{x} + e^{x}\right];$

$y''_p = a_0e^{x} + a_1\left[xe^{x} + 2e^{x}\right];$

Reemplazando en la ecuación diferencial no homogénea:

$y''-5y'+6y = xe^{x};$

$a_0e^{x} + a_1\left[xe^{x} + 2e^{x}\right] - 5\left[a_0e^{x} + a_1\left[xe^{x} + e^{x}\right]\right] + 6\left[a_0e^{x} + a_1xe^{x}\right] = xe^{x};$

$(2a_0 - 3a_1)e^{x} + 2a_1xe^{x} = xe^{x};$

$$\begin{cases} 2a_0 - 3a_1 = 0; \\ 2a_1 = 1; \end{cases}$$

Resolviendo el sistema:

$a_0 = \dfrac{3}{4};\qquad a_1 = \dfrac{1}{2};$

$y_p = a_0e^{x} + a_1xe^{x};$

$y_p = \dfrac{3}{4}e^{x} + \dfrac{1}{2}xe^{x};$

$y = y_h + y_p;$

$y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x} + \dfrac{3}{4}e^{x} + \dfrac{1}{2}xe^{x};$

4) Resuelva: $y'+2y'+2y = e^{-x}cosx;$

$y'+2y'+2y = 0;$

$y = e^{rx};$ $\quad y' = re^{rx};$ $\quad y'' = r^2e^{rx};$

Reemplazando y, y', y'':

$e^{rx}\left[r^2 + 2r + 2\right] = 0;$

$\underbrace{r^2 + 2r + 2}_{\text{Ecuación Característica}} = 0;$

$r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4(2)}}{2} = -1 \pm i;$

$\lambda = -1; \qquad \beta = 1;$

$y_1 = e^{-x}\cos x;$

$y_2 = e^{-x}senx;$

$y_h = \underbrace{C_1e^{-x}\cos x + C_2e^{-x}senx}_{\text{Solución homogénea}};$

Encontremos la solución particular :

$y''+2y'+2y = e^{-x}\cos(x);$

$y_p = x^S\left[a_0\cos x + b_0 senx\right]e^{\alpha x};$

$s = 0; \quad \alpha = -1;$

$y_p = \left[a_0\cos x + b_0 senx\right]e^{-x};$

$y_p = a_0e^{-x}\cos x + b_0e^{-x}senx;$

No se puede asumir esta solución particular ya que contiene términos linealmente dependiente con respecto a mi solución homogénea.

$s = 1$

$y_p = x\left[a_0e^{-x}\cos x + b_0e^{-x}senx\right];$

$y_p = a_0xe^{-x}\cos x + b_0xe^{-x}senx;$

$y'_p = a_0\left[x\left(-e^{-x}senx - e^{-x}\cos x\right) + e^{-x}\cos x\right] + b_0\left[x\left(e^{-x}\cos x - e^{-x}senx\right) + e^{-x}senx\right];$

$y'_p = a_0\left[-xe^{-x}senx - xe^{-x}\cos x + e^{-x}\cos x\right] + b_0\left[xe^{-x}\cos x - xe^{-x}senx + e^{-x}senx\right];$

$y''_p = a_0\left[2xe^{-x}senx - 2e^{-x}senx - 2e^{-x}\cos x\right] + b_0\left[-2xe^{-x}\cos x - 2e^{-x}senx + 2e^{-x}\cos x\right];$

Reemplazando y simplificando y_p, y'_p, y''_p *en la ecuación diferencial no homogénea :*

$y''+2y'+2y = e^{-x}\cos(x);$

$a_0\left[-2e^{-x}senx\right] + b_0\left[2e^{-x}\cos x\right] = e^{-x}\cos(x);$

$-2a_0 = 0;$

$2b_0 = 1;$

$a_0 = 0;$

$b_0 = \frac{1}{2};$

$y_p = \frac{1}{2}xe^{-x}\text{sen}(x);$

$y = y_h + y_p;$

$y = C_1e^{-x}\cos x + C_2e^{-x}\text{senx} + \frac{1}{2}xe^{-x}\text{sen}(x);$

$$y''-2y'+y = cosx + 3e^{x} + x^{2} - 1;$$

Encontrando la solución homogénea :

$y''-2y'+y = 0;$

$y = e^{rx};$

$y' = re^{rx};$

$y'' = r^2e^{rx};$

Reemplazando y, y' , y'' en la ecuación homogénea :

$e^{rx}\left[r^2 - 2r + 1\right] = 0;$

$r^2 - 2r + 1 = 0;$

$(r-1)^2 = 0;$

$r_{1,2} = 1;$

$y_1 = e^x;$

$y_2 = xe^x;$

$y_h = C_1e^x + C_2xe^x;$

Encontrando la solución particular :

$y''-2y'+y = cosx + 3e^{x} + x^{2} - 1;$

Encontrando la primera solución particular :

$y''-2y'+y = cosx;$ ***Ecuación 1.***

$y_{p1} = x^s[a\cos x + b\text{senx}];$

$s = 0;$

$y_{p1} = a\cos x + b\text{senx};$

$y'_{p1} = -a\text{senx} + b\cos x = a[-\text{senx}] + b[\cos x];$

$y''_{p1} = -a\cos x - b\text{senx} = a[-\cos x] + b[-\text{senx}];$

Reemplazando y''_{p1} , y'_{p1} , y_{p1} en la ecuacion 1;

$a[2\text{senx}] + b[-2\cos x] = cosx;$

$\begin{cases} 2a = 0; \\ -2b = 1; \end{cases}$ ***Resolviendo*** $a = 0;$ $b = -\frac{1}{2};$

$y_{p1} = -\frac{1}{2}\text{senx};$

Encontrando la segunda solución particular :

$y''-2y'+y=3e^{x}$; *Ecuación 2.*

$y_{p2}=x^{s}[a]e^{x};$

$s=0;$

$y_{p2}=[a]e^{x};$

No se puede asumir esta solución particular, ya que es lienalmente dependiente con respecto a la solución homogénea.

$s=1;$

$y_{p2}=x[a]e^{x};$

Tampoco se puede asumir esta solución, por la misma razón anterior.

$s=2;$

$y_{p2}=x^{2}[a]e^{x};$

En este caso, esta solución es linealmente independiente, respecto a la solución homogénea

$y_{p2}=ax^{2}e^{x};$

$y'_{p2}=a[x^{2}e^{x}+2xe^{x}];$

$y''_{p2}=a[x^{2}e^{x}+4xe^{x}+2e^{x}];$

Reemplazando $y''_{p2}, y'_{p2}, y_{p2}$ *en la ecuación 2.*

$y''-2y'+y=3e^{x}$

$2ae^{x}=3e^{x};$

$a=\frac{3}{2};$

La segunda solución particular es :

$y_{p2}=\frac{3}{2}x^{2}e^{x};$

Encontrando la tercera solución particular :

$y''-2y'+y=x^{2}-1$; *Ecuación 3.*

$y_{p3}=x^{s}[a+bx+cx^{2}];$

$s=0;$

$y_{p3}=a+bx+cx^{2};$

$y'_{p3}=b+2cx;$

$y''_{p3}=2c;$

Reemplazando $y''_{p3}, y'_{p3}, y_{p3}$ *en la ecuación 2.*

$y''-2y'+y=x^{2}-1$

$2c-2[b+2cx]+[a+bx+cx^{2}]=x^{2}-1;$

$$[2c-2b+a]+[2c+b]x+[c]x^2=x^2-1;$$

$$\begin{cases} 2c-2b+a=-1 \\ -4c+b=0 \\ c=1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema:

$c=1;$

$b=4;$

$a=5;$

La tercera solución particular:

$$y_{p3}=5+4x+x^2;$$

$$y_p=y_{p1}+y_{p2}+y_{p3};$$

$$y_p=-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(x)+\frac{3}{2}x^2e^x+5+4x+x^2;$$

La solución general:

$$y=y_h+y_p;$$

$$y=C_1e^x+C_2xe^x-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(x)+\frac{3}{2}x^2e^x+5+4x+x^2;$$

Ecuacion diferencial de Euler – Cauchy

1) Demuestre que la ecuación diferencial $x^2y''+\alpha xy'+\beta y=0,\quad donde\ \alpha,\beta\in R$ **, se la puede transformar en una ecuación de coeficientes constantes haciendo el cambio de variable** $x=e^z$ **, y luego resuelva:**

$x^2y''+2xy'+4y=4sen(lnx)+e^{2ln(X)}$;

$Si\ x=e^z;$

$z=\ln(x);$

$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{x};$

Ahora:

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{1}{x};$

$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dz};$

Se necesita luego y'':

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right);$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dz}{dx};$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{1}{x}\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{1}{x^2}\frac{dx}{dz}\frac{dy}{dz}\right)\frac{dz}{dx};$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{1}{x}\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{1}{x^2}x\frac{dy}{dz}\right)\frac{1}{x};$

$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}\right);$

Reemplazando en la ecuación diferencial

$x^2y''+\alpha xy'+\beta y=0;$

$x^2\left(\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}\right)+\alpha x\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}\right)+\beta y=0;$

$\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}+\alpha\frac{dy}{dz}+\beta y=0;$

$\frac{d^2y}{dz^2}+(\alpha-1)\frac{dy}{dz}+\beta y=0;$

Resolviendo la ecuación $x^2y''+2xy'+4y=4sen(lnx)+e^{2ln(X)};$

Encontrando primero la solución homogénea:

$x^2y''+2xy'+4y=0;$

$\frac{d^2y}{dz^2}+(2-1)\frac{dy}{dz}+4y=0;$

$$y''+y'+4y=0;$$

$$e^{rz}\left[\underbrace{r^2+r+4}_{\textit{Ecuación característica}}\right]=0;$$

$$r^2+r+4=0;$$

$$r_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-16}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{15}}{2}i;$$

$$y_1=e^{-z/2}\cos\left(\frac{\sqrt{15}z}{2}\right);$$

$$y_2=e^{-z/2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{15}z}{2}\right);$$

$$y_h=C_1e^{-z/2}\cos\left(\frac{\sqrt{15}z}{2}\right)+C_2e^{-z/2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{15}z}{2}\right);$$

$$y_h=C_1\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{15}\ln(x)}{2}\right)+C_2\sqrt{x}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{15}\ln(x)}{2}\right);$$

Ahora encontremos la solución particular :

Como se asume que $x=e^z$ y $z=\ln(x)$, al reemplazar

en la ecuación $x^2y''+2xy'+4y=4\operatorname{sen}(\ln x)+5e^{2\ln(X)}$, se obtiene :

$$y''+y'+4y=4\operatorname{sen}(z)+5e^{2z};$$

Donde se tiene 2 soluciones particulares :

$$y''+y'+4y=4\operatorname{sen}(z);\ \textit{Ecuación 1.}$$

La primera solución tiene la siguiente forma :

$$y_p=a\cos(z)+b\operatorname{sen}(z);$$

$$y'_p=-a\operatorname{sen}(z)+b\cos(z)=a[-\operatorname{sen}(z)]+b[\cos(z)];$$

$$y''_p=-a\cos(z)-b\operatorname{sen}(z)=a[-\cos(z)]+b[-\operatorname{sen}(z)];$$

Reemplazando y''_p, y'_p, y_p en la ecuación 1 :

$$y''+y'+4y=4\operatorname{sen}(z);\ \textit{Ecuación 1.}$$

$$a[3\cos(z)-\operatorname{sen}(z)]+b[3\operatorname{sen}(z)+\cos(z)]=4\operatorname{sen}(z);$$

$$\begin{cases}3a+b=0\\-a+3b=4\end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene :

$$a=-\frac{2}{5};\qquad b=\frac{6}{5};$$

$$y_{p1}=-\frac{2}{5}\cos(z)+\frac{6}{5}\operatorname{sen}(z);$$

$$y_{p1}=-\frac{2}{5}\cos(\ln(x))+\frac{6}{5}\operatorname{sen}(\ln(x));$$

Encontrando la segunda la solución particular :

$$y''+y'+4y=5e^{2z};\ \ \textit{Ecuación 2.}$$

Se asume la siguiente solución :

$y_{p2} = ae^{2z};$

$y'_{p2} = 2ae^{2z};$

$y''_{p2} = 4ae^{2z};$

Reemplazando y''_{p2} , y'_{p2} , y_{p2} en la ecuación 2 :

$y'' + y' + 4y = 5e^{2z};$ ***Ecuación 2.***

$4ae^{2z} + 2ae^{2z} + 4ae^{2z} = 5e^{2z};$

$10ae^{2z} = 5e^{2z};$

$a = \frac{1}{2};$

$y_{p2} = \frac{1}{2}e^{2z};$

$y_{p2} = \frac{1}{2}e^{2\ln(x)} = \frac{x^2}{2};$

$y_p = y_{p1} + y_{p2};$

$y_p = -\frac{2}{5}\cos(\ln(x)) + \frac{6}{5}\mathrm{sen}(\ln(x)) + \frac{x^2}{2};$

$y = y_h + y_p;$

$$y = C_1\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{15}\ln(x)}{2}\right) + C_2\sqrt{x}\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{15}\ln(x)}{2}\right) - \frac{2}{5}\cos(\ln(x)) + \frac{6}{5}\mathrm{sen}(\ln(x)) + \frac{x^2}{2};$$

2) Resuelva: $(x-2)^2 y'' + 3(x-2)y' + y = \ln^2(x-2) - 5\ln(x-2) + 6;$

Si $x - 2 = e^z$; ***entonces*** $z = \ln(x-1);$

$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x-2};$

Ahora :

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{1}{x-2};$

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-2}\frac{dy}{dz};$

Se necesita luego y'' :

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right);$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dz}{dx};$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{1}{x-2}\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{1}{(x-2)^2}\frac{dx}{dz}\frac{dy}{dz}\right)\frac{dz}{dx};$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{1}{x-2}\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{1}{(x-2)^2}(x-2)\frac{dy}{dz}\right)\frac{1}{x-2};$$

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{1}{(x-2)^2}\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{1}{(x-2)^2}\frac{dy}{dz}\right);$$

Reemplazando en la ecuación diferencial homog{enea :

$$(x-2)^2y''+3(x-2)y'+y=0;$$

$$(x-2)^2\left(\frac{1}{(x-2)^2}\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{1}{(x-2)^2}\frac{dy}{dz}\right)+3(x-2)\left(\frac{1}{x-2}\frac{dy}{dz}\right)+y=0;$$

$$\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}+3\frac{dy}{dz}+y=0;$$

$$\frac{d^2y}{dz^2}+(3-1)\frac{dy}{dz}+y=0;$$

Resolviendo la ecuación $y''+2y'+y=0$;

$$\frac{d^2y}{dz^2}+2\frac{dy}{dz}+y=0;$$

$$y=e^{rz};$$

$$y'=re^{rz};$$

$$y''=r^2e^{rz};$$

Reemplazando y, y', y'' ***en la ecuación homogénea :***

$$e^{rz}\left[\underbrace{r^2+2r+1}_{\text{Ecuación Característica}}\right]=0;$$

$$r^2+2r+1=0;$$

$$(r+1)^2=0;$$

$$r_{1,2}=-1;$$

$$y_1=e^{-z};$$

$$y_2=ze^{-z};$$

$$y_h=C_1e^{-z}+C_2ze^{-z};$$

$$z=\ln(x-2);$$

$$y_h=C_1e^{-z}+C_2ze^{-z};$$

$$y_h=C_1e^{-\ln(x-2)}+C_2\ln(x-2)e^{-\ln(x-2)};$$

$$y_h=\frac{C_1}{x-2}+\frac{C_2\ln(x-2)}{x-2};$$

Ahora encontremos la solución particular :

Como se asume que $x-2=e^z$ ***y*** $z=\ln(x-2)$***, al reemplazar***

en la ecuación $(x-2)^2y''+3(x-2)y'+y=\ln^2(x-2)-5\ln(x-2)+6;$ ***, se obtiene :***

$$y''+2y'+y=z^2-5z+6;$$

Donde la solución particular tiene la siguiente forma :

$y_p = x^S\left[a + bz + cz^2\right];$

$s = 0;$

$y_p = \left[a + bz + cz^2\right];$

$y'_p = b + 2cz;$

$y''_p = 2c;$

Reemplazando y''_p, y'_p, y_p *en la ecuación* $y'' + 2y' + y = z^2 - 5z + 6;$

$2c + 2(b + 2cz) + \left(a + bz + cz^2\right) = z^2 - 5z + 6;$

$$\begin{cases} 2c + 2b + a = 6 \\ 4c + b = -5 \\ c = 1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema :

$c = 1;$

$b = -9;$

$a = 22;$

$y_p = 22 - 9z + z^2;$

$y_p = 22 - 9\ln(x-2) + \ln^2(x-2);$

$y = y_h + y_p;$

$$y = \frac{C_1}{x-2} + \frac{C_2\ln(x-2)}{x-2} + 22 - 9\ln(x-2) + \ln^2(x-2);$$

3) $x^2y''+xy'+9y=3tan(3ln(x));$

$Si\ x=e^z,\quad entonces\ z=ln(x);$

Encontrando la solución homogénea :

$x^2y''+xy'+9y=0;$

Usando :

$$\frac{d^2y}{dz^2}+(\alpha-1)\frac{dy}{dz}+\beta y=0;$$

Se obtiene :

$$\frac{d^2y}{dz^2}+(1-1)\frac{dy}{dz}+9y=0;$$

$$\frac{d^2y}{dz^2}+9y=0;$$

$y''+9y=0;$

$y=e^{rz};$

$y''=r^2e^{rz};$

$e^{rz}\left[r^2+9\right]=0;$

$r^2+9=0;$

$r=\pm 3i;$

$y_1=\cos z;$

$y_2=\operatorname{sen} z;$

$y_h=C_1\cos(3z)+C_2\operatorname{sen}(3z);$

$y_h=C_1\cos(3\ln(x))+C_2\operatorname{sen}(3\ln(x));$

Encontremos la solución particular :

$x^2y''+xy'+9y=3tan(3ln(x));$

Reemplazando $z=ln(x)$ *y* $x=e^z$*, se obtiene :*

$y''+9y=3\tan(3z);$

$g(z)=3\tan(3z);$

$y_p=u_1y_1+u_2y_2;$

$$u'_1=\frac{\begin{vmatrix}0 & \operatorname{sen}3z\\ g(z) & 3\cos 3z\end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)};$$

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y'_1 & y'_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos 3z & \operatorname{sen}3z\\ -3\operatorname{sen}3z & 3\cos 3z\end{vmatrix}=3\cos^2(3z)+3\operatorname{sen}^2(3z);$$

$W(y_1,y_2)=3$

$$u'_1=-\frac{3\tan(3z)\operatorname{sen}(3z)}{3}=\frac{-\operatorname{sen}(3z)\operatorname{sen}(3z)}{\cos(3z)};$$

$$u'_1 = -\frac{\text{sen}^2(3z)}{\cos(3z)} = -\frac{1-\cos^2(3z)}{\cos(3z)};$$

$$u'_1 = \cos(3z) - \frac{1}{\cos(3z)};$$

$$u_1' = \cos(3z) - \sec(3z);$$

$$u_1 = \int (\cos(3z) - \sec(3z))dz$$

$$u_1 = \frac{\text{sen}(3z)}{3} - \frac{\ln|\sec(3z) + \text{tg}(3z)|}{3};$$

$$u'_2 = \frac{\begin{vmatrix} \cos 3z & 0 \\ -3\text{sen}3z & 3\tan(3z) \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \frac{3\cos(3z)\tan(3z)}{3}$$

$$u'_2 = \frac{\cos(3z)\text{sen}(3z)}{\cos(3z)};$$

$$u'_2 = \text{sen}(3z);$$

$$u_2 = \int \text{sen}(3z)dz = -\frac{1}{3}\cos(3z)$$

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2;$$

$$y_p = \left[\frac{\text{sen}(3z)}{3} - \frac{\ln|\sec(3z) + \text{tg}(3z)|}{3}\right]\cos(3z) - \frac{1}{3}\cos(3z)\text{sen}(3z);$$

$$y = y_h + y_p;$$

$$y = C_1\cos(3z) + C_2\text{sen}(3z) + \left[\frac{\text{sen}(3z)}{3} - \frac{\ln|\sec(3z) + \text{tg}(3z)|}{3}\right]\cos(3z) - \frac{1}{3}\cos(3z)\text{sen}(3z);$$

$$y = C_1\cos(3\ln x) + C_2\text{sen}(3\ln x) + \left[\frac{\text{sen}(3\ln x)}{3} - \frac{\ln|\sec(3\ln x) + \text{tg}(3\ln x)|}{3}\right]\cos(3\ln x) - \frac{1}{3}\cos(3\ln x)\text{sen}(3\ln x);$$

4) Si $y_1 = x^{-1/2}\cos x,\ y_2 = x^{-1/2}\operatorname{sen} x$ forman un conjunto linealmente independiente y son soluciones de $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0;$

Hallar la solución particular para $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=x^{3/2}$; si

$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0; \quad y'(\pi)=0;$

Como $y_1 = x^{-1/2}\cos x$, y $y_2 = x^{-1/2}\operatorname{sen} x$ son soluciones de

$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0$, entonces se obtiene :

$y_h = C_1x^{-1/2}\cos x + C_2x^{-1/2}\operatorname{sen} x;$

Para encontrar la solución de $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=x^{3/2}$;

Se aplica variación de parámetros :

$$\frac{x^2}{x^2}y''+\frac{x}{x^2}y'+\left(\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{4x^2}\right)y=\frac{x^{3/2}}{x^2};$$

$$y''+\frac{y'}{x}+\left(1-\frac{1}{4x^2}\right)y=x^{-1/2};$$

$$y_p = u_1y_1+u_2y_2;$$

$$g(x)=x^{-1/2};$$

$$u'_1=\frac{\begin{vmatrix}0 & y_2\\ g(x) & y'_2\end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)};$$

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x^{-1/2}\cos x & x^{-1/2}\operatorname{sen}x \\ -x^{-1/2}\operatorname{sen}x-\frac{1}{2}x^{-3/2}\cos x & x^{-1/2}\cos x-\frac{1}{2}x^{-3/2}\operatorname{sen}x \end{vmatrix}$$

$$W(y_1,y_2)=x^{-1/2}\cos x\left[x^{-1/2}\cos x-\frac{1}{2}x^{-3/2}\operatorname{sen}x\right]-x^{-1/2}\operatorname{sen}x\left[-x^{-1/2}\operatorname{sen}x-\frac{1}{2}x^{-3/2}\cos x\right];$$

$$W(y_1,y_2)=x^{-1}\cos^2 x-\frac{1}{2}x^{-2}\operatorname{sen}x\cos x+x^{-1}\operatorname{sen}^2x+\frac{1}{2}x^{-2}\operatorname{sen}x\cos x;$$

$$W(y_1,y_2)=x^{-1}\left(\cos^2 x+\operatorname{sen}^2x\right)=x^{-1}(1)=x^{-1};$$

$$W(y_1,y_2)=x^{-1};$$

$$u'_1=\frac{\begin{vmatrix} 0 & x^{-1/2}\operatorname{sen}x \\ x^{-1/2} & x^{-1/2}\cos x-\frac{1}{2}x^{-3/2}\operatorname{sen}x \end{vmatrix}}{x^{-1}}=-\frac{x^{-1}\operatorname{sen}x}{x^{-1}}=-\operatorname{sen}(x);$$

$$u_1=\int -\operatorname{sen}(x)dx=\cos x;$$

$$u'_2=\frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & g(x) \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)}=\frac{\begin{vmatrix} x^{-1/2}\cos x & 0 \\ -x^{-1/2}\operatorname{sen}x-\frac{1}{2}x^{-3/2}\cos x & x^{-1/2} \end{vmatrix}}{x^{-1}};$$

$$u'_2=\frac{x^{-1}\cos x}{x^{-1}}=\cos x;$$

$$u_2=\operatorname{sen}x;$$

$$y_p=(\cos x)\left(x^{-1/2}\cos x\right)+(\operatorname{sen}x)\left(x^{-1/2}\operatorname{sen}x\right)$$

$$y_p=x^{-1/2}\left(\cos^2 x+\operatorname{sen}^2x\right)=x^{-1/2}(1)=x^{-1/2};$$

$$y_p=x^{-1/2};$$

$$y=y_h+y_p;$$

$$y=C_1x^{-1/2}\cos x+C_2x^{-1/2}\operatorname{sen}x+x^{-1/2};$$

Si $\boldsymbol{y}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0;$ ***y*** $\boldsymbol{y'(\pi)=0;}$

$$y=C_1x^{-1/2}\cos x+C_2x^{-1/2}\operatorname{sen}x+x^{-1/2};$$

$$0=C_1\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}(0)+C_2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}(1)+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}};$$

$$C_2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}(1)+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}=0;$$

$$C_2=-1;$$

$$y'=C_1\left[-x^{-1/2}\operatorname{sen}x-\frac{1}{2}x^{-3/2}\cos x\right]+C_2\left[x^{-1/2}\cos x-\frac{1}{2}x^{-3/2}\operatorname{sen}x\right]-\frac{x^{-3/2}}{2};$$

$$0=C_1\left[-\frac{1}{\sqrt{\pi}}(0)-\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}}(-1)\right]+C_2\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}(-1)-\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}}(0)\right]-\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}};$$

$$0 = C_1\left[\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}}\right] - C_2\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right] - \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}};$$

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} = \frac{C_1}{2\pi\sqrt{\pi}} - \frac{C_2}{\sqrt{\pi}};$$

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} = \frac{C_1}{2\pi\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}};$$

$$1 = C_1 + 2\pi;$$

$$C_1 = 1 - 2\pi;$$

$$y = (1 - 2\pi)x^{-1/2}\cos x - x^{-1/2}\operatorname{sen}x + x^{-1/2};$$

Identidad de Abel

1. Resuelva la siguiente ecuación diferencial usando la identidad de Abel:

$$\left(1-2x-x^2\right)y''+2(1+x)y'-2y=0;\ Si\ y(0)=y'(0)=1.$$

Si una solución es $y_1=x+1;$

Se usará la identidad de abel :

$$W(y_1,y_2)=e^{\int -p(x)dx};$$

Donde la ecuación diferencial debe tener la siguiente forma :

$$y''+\mathrm{p}(x)y'+q(x)y=0;$$

$$\frac{\left(1-2x-x^2\right)}{\left(1-2x-x^2\right)}y''+\frac{2(1+x)}{\left(1-2x-x^2\right)}y'-\frac{2}{\left(1-2x-x^2\right)}y=0;$$

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix};$$

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} x+1 & y_2 \\ 1 & y'_2 \end{vmatrix}=(x+1)y'_2-y_2;$$

Entonces :

$$(x+1)y'_2-y_2=e^{\int -\frac{2(1+x)dx}{\left(1-2x-x^2\right)}};$$

$$(x+1)y'_2-y_2=e^{\int \frac{(-2-2x)dx}{\left(1-2x-x^2\right)}};$$

$$u(x)=\left(1-2x-x^2\right);$$

$$du=(-2-2x)dx;$$

$$(x+1)y'_2-y_2=e^{\ln\left|1-2x-x^2\right|};$$

$$(x+1)y'_2-y_2=1-2x-x^2;$$

$$y'_2-\frac{y_2}{x+1}=\frac{1-2x-x^2}{x+1};$$

$$u(x)=e^{-\int\frac{dx}{x+1}}=\frac{1}{x+1};$$

$$\frac{1}{x+1}y'_2-\frac{y_2}{(x+1)^2}=\frac{1-2x-x^2}{(x+1)^2};$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x+1}y_2\right]=\frac{1-2x-x^2}{(x+1)^2};$$

$$\frac{1}{x+1}y_2=\int\frac{\left(1-2x-x^2\right)dx}{(x+1)^2};$$

$$\frac{1}{x+1}y_2=\int\frac{\left(2-1-2x-x^2\right)dx}{(x+1)^2};$$

$$\frac{1}{x+1}y_2=-\int\frac{(x+1)^2dx}{(x+1)^2}+\int\frac{2dx}{(x+1)^2};$$

$$\frac{1}{x+1}y_2=-\int dx+\int\frac{2dx}{(x+1)^2};$$

$$\frac{1}{x+1}y_2=-x-\frac{2}{x+1};$$

$$\frac{1}{x+1}y_2=-x-\frac{2}{x+1};$$

$$y_2=-x(x+1)-2;$$

$$y_2=-x^2-x-2;$$

$$y=C_1(x+1)+C_2\left(-x^2-x-2\right);$$

Si $\boldsymbol{y(0)=1;}$

$$1=C_1(1)+C_2(-2);$$

Si $\boldsymbol{y'(0)=1;}$

$$\boldsymbol{y'=C_1+C_2(-2x-1);}$$

$$1=C_1+C_2(-1);$$

$$\begin{cases}C_1-C_2=1\\C_1-2C_2=1\end{cases}$$

Resolviendo el sistema :

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 1\\1 & -2 & 1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}0 & 1 & 0\\1 & -2 & 1\end{array}\right)$$

$$C_2=0;$$

$$C_1=1+2C_2;$$

$$C_1=1;$$

La solución es :

$$y=x+1;$$

Método de Reducción de Orden

2) Resuelva: $xy''+(x+1)y'+y=0;$
$Si\ y_1=e^{-x};$

Usando el método de reducción de orden :

Se asume que $y_2=u(x)y_1;$

$y_2=u(x)e^{-x};$

$y'_2=-u(x)e^{-x}+u'(x)e^{-x};$

$y''_2=-\left[-u(x)e^{-x}+u'(x)e^{-x}\right]+\left[-u'(x)e^{-x}+u''(x)e^{-x}\right];$

$y''_2=u(x)e^{-x}-2u'(x)e^{-x}+u''(x)e^{-x};$

Reemplazando en la ecuación diferencial

$xy''+(x+1)y'+y=0$*, se obtiene :*

$x\left[u(x)e^{-x}-2u'(x)e^{-x}+u''(x)e^{-x}\right]+(x+1)\left[-u(x)e^{-x}+u'(x)e^{-x}\right]+u(x)e^{-x}=0;$

$u''(x)\left[xe^{-x}\right]+u'(x)\left[-2xe^{-x}+(x+1)e^{-x}\right]+u(x)\left[xe^{-x}-(x+1)e^{-x}+e^{-x}\right]=0;$

$u''(x)\left[xe^{-x}\right]+u'(x)\left[-xe^{-x}+e^{-x}\right]+u(x)\left[xe^{-x}-xe^{-x}-e^{-x}+e^{-x}\right]=0;$

$u''(x)\left[xe^{-x}\right]+u'(x)\left[-xe^{-x}+e^{-x}\right]+u(x)[0]=0;$

$u''(x)\left[xe^{-x}\right]+u'(x)\left[-xe^{-x}+e^{-x}\right]=0;$

Falta y :

$v(x)=u'(x);$

$v'(x)=u''(x);$

Reemplazando $v(x)$ *y* $v'(x)$ *en la ecuación diferencial :*

$u''(x)\left[xe^{-x}\right]+u'(x)\left[-xe^{-x}+e^{-x}\right]=0;$

$v'(x)\left[xe^{-x}\right]+v(x)\left[-xe^{-x}+e^{-x}\right]=0;$

$$\frac{dv}{dx}\left[xe^{-x}\right]=v(x)\left[xe^{-x}-e^{-x}\right];$$

$$\frac{dv}{dx}=v(x)\left[1-\frac{1}{x}\right];$$

$$\int\frac{dv}{v(x)}=\int\left[1-\frac{1}{x}\right]dx;$$

$\ln|v(x)|=x-\ln|x|;$

$$v(x)=\frac{e^x}{x};$$

$$u'(x)=\frac{e^x}{x};$$

$$u(x) = \int \frac{e^x dx}{x};$$

$$u(x) = \int \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} dx;$$

$$u(x) = \int \left[\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} \right] dx;$$

$$u(x) = \ln|x| + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n)n!};$$

$$y_2 = u(x) y_1;$$

$$y_2 = \left[\ln|x| + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n)n!} \right] e^{-x};$$

La solución es :

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 \left[\ln|x| + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n)n!} \right];$$

Ecuación homogénea de orden superior

1. **Las raíces de la ecuación auxiliar, que corresponden a una cierta ecuación diferencial homogénea de orden 10, con coeficientes constantes, son:**

   4, 4, 4, 4, 2+3i, 2-3i, 2+3i, 2-3i, 2+3i, 2-3i,

   Escriba la solución general.

Se tienen 4 *raíces reales iguales y un par complejo conjugado* 3 *veces entonces* :

$$y(x) = e^{4x}\left(C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3\right) + e^{2x}\cos(3x)\left(C_5 + C_6x + C_7x^2\right) + e^{2x}sen(3x)\left(C_8 + C_9x + C_{10}x^2\right)$$

2. $\boxed{y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0}$

$$\phi(m) = m^3 - 6m^2 + 12m - 8 = 0$$

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -6 & 12 & -8 & 2 \\ & 2 & -8 & 8 & \\ \hline 1 & -4 & 4 & 0 & \end{array}$$

$$\phi(m) = (m-2)\left(m^2 - 4m + 4\right) = 0$$

$$\phi(m) = (m-2)^3 = 0 \rightarrow m_1 = m_2 = m_3 = 2$$

$$y(x) = e^{2x}\left(C_1 + C_2x + C_3x^2\right)$$

3. $\boxed{\dfrac{d^5y}{dx^5} + 32y = 0}$

$$\phi(m) = m^5 + 32 = 0 \rightarrow m_k = 2e^{\frac{i\pi + 2\pi ki}{5}}; k = 0,1,2,3,4$$

$$m_{0,4} = 2e^{\frac{i\pi}{5}} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\,sen\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) = 1.618 \pm 1.175i$$

$$m_{1,5} = 2e^{\frac{i3\pi}{5}} = 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) + i\,sen\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right) = -0.618 \pm 1.902\,i$$

$$m_3 = 2e^{i\pi} = 2(\cos(\pi) + i\,sen(\pi)) = -2$$

$$y(x) = (C_1\cos(1.175x) + C_2sen(1.175x))e^{1.618x} + (C_3\cos(1.902x) + C_4sen(1.902x))e^{-0.618x} + C_5e^{-2x}$$

4. $\boxed{\left(D^2 - 2D + 5\right)^2 y = 0}$

$$\phi(m) = \left(m^2 - 2m + 5\right)^2 = 0$$

$$\phi(m) = \left(m^2 - 2m + 5\right)\left(m^2 - 2m + 5\right) = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4.1.5}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = 1 \pm 2i$$

$$m_{3,4} = 1 \pm 2i$$

$$y(x) = e^x\cos(2x)(C_1 + C_2x) + e^x sen(2x)(C_3 + C_4x)$$

Ecuaciones de Orden Superior

Ecuación no homogénea de orden superior

1. $\boxed{y'''+3y''+2y'=x^2+4x+8}$

$y(x)=y_c(x)+y_p(x)$

Encuentro la solución complementaria :

$y'''+3y''+2y'=0 \rightarrow \phi(m)=m^3+3m^2+2m=0$

$\phi(m)=m(m^2+3m+2)=0$

$\phi(m)=m(m+1)(m+2)=0$

$m_1=0,\ m_2=-1,\ m_3=-2 \rightarrow \underline{y_c(x)=C_1+C_2e^{-x}+C_3e^{-2x}}$

Encuentro la solución particular :

$g(x)=x^2+4x+8 \rightarrow y_p(x)=x^s\left(Ax^2+Bx+C\right)$

$s=0 \rightarrow y_p(x)=Ax^2+Bx+C$ *pero no es linealmente independiente con* $y_c(x)$

$s=1 \rightarrow y_p(x)=x(Ax^2+Bx+C)=Ax^3+Bx^2+Cx$ *si es l.i. con* $y_c(x)$

$y_p(x)=Ax^3+Bx^2+Cx$

$y_p'(x)=3Ax^2+2Bx+C$

$y_p''(x)=6Ax+2B$

$y_p'''(x)=6A$

$y_p'''+3y_p''+2y_p'=x^2+4x+8$

$6A+3(6Ax+2B)+2(3Ax^2+2Bx+C)=x^2+4x+8$

$(6A)x^2+(18A+4B)x+(6A+6B+2C)=x^2+4x+8$

$$\begin{cases} 6A=1 \rightarrow \underline{A=\dfrac{1}{6}} \\ 18A+4B=4 \rightarrow B=\dfrac{4-18A}{4} \rightarrow \underline{B=\dfrac{1}{4}} \\ 6A+6B+2C=8 \rightarrow C=\dfrac{8-6A+6B}{2} \rightarrow \underline{C=\dfrac{11}{4}} \end{cases}$$

Por lo que decimos :

$\underline{y_p(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^2+\frac{11}{4}x}$

Solución general :

$$\underline{\underline{y(x)=C_1+C_2e^{-x}+C_3e^{-2x}+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^2+\frac{11}{4}x}}$$

2. $\boxed{y'''-y''-4y'+4y = 2x^2-4x-1+2x^2e^{2x}+5xe^{2x}+e^{2x}}$

$y(x)=y_c(x)+y_p(x)$

Encuentro la solución complementaria :

$y'''-y''-4y'+4y=0 \rightarrow \phi(m)=m^3-m^2-4m+4=0$

$\phi(m)=m^2(m-1)-4(m-1)=0$

$\phi(m)=(m-1)(m^2-4)=(m-1)(m-2)(m+2)$

$m_1=1,\ m_2=2,\ m_3=-2 \rightarrow \underline{y_c(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}+C_3e^{-2x}}$

Encuentro la solución particular :

$g(x)=g_1(x)+g_2(x)$

$g_1(x)=2x^2-4x-1 \rightarrow y_p(x)=x^s\left(Ax^2+Bx+C\right)$

$s=0 \rightarrow y_p(x)=Ax^2+Bx+C \text{ si es l.i. con } y_c(x)$

$y_p(x)=Ax^2+Bx+C$

$y_p'(x)=2Ax+B$

$y_p''(x)=2A$

$y_p'''(x)=0$

$y_p'''-y_p''-4y_p'+4y_p=2x^2-4x-1$

$0-2A-4(2Ax+B)+4\left(Ax^2+Bx+C\right)=2x^2-4x-1$

$(4A)x^2+(-8A+4B)x+(-2A-4B+4C)=2x^2-4x-1$

$$\begin{cases} 4A=2 \rightarrow \underline{A=\dfrac{1}{2}} \\ -8A+4B=-4 \rightarrow B=\dfrac{-4+8A}{4} \rightarrow \underline{B=0} \\ -2A-4B+4C=-1 \rightarrow C=\dfrac{-1+2A+4B}{4} \rightarrow \underline{C=0} \end{cases}$$

Por lo que decimos :

$\underline{y_{p_1}(x)=\frac{1}{2}x^2}$

$g_2(x)=2x^2e^{2x}+5xe^{2x}+e^{2x} \rightarrow y_p(x)=x^se^{2x}\left(Ax^2+Bx+C\right)$

$s=0 \rightarrow y_p(x)=e^{2x}\left(Ax^2+Bx+C\right) \text{ pero no es linealmente independiente con } y_c(x)$

$s=1 \rightarrow y_p(x)=xe^{2x}\left(Ax^2+Bx+C\right)=e^{2x}\left(Ax^3+Bx^2+Cx\right) \text{ si es l.i. con } y_c(x)$

$y_p(x)=e^{2x}\left(Ax^3+Bx^2+Cx\right)$

$y_p'(x)=e^{2x}\left(2Ax^3+(3A+2B)x^2+(2B+2C)x+C\right)$

$y_p''(x)=e^{2x}\left(4Ax^3+(12A+4B)x^2+(6A+8B+4C)x+(2B+4C)\right)$

$y_p'''(x)=e^{2x}\left(8Ax^3+(36A+8B)x^2+(36A+24B+8C)x+(6A+12B+12C)\right)$

$y_p'''-y_p''-4y_p'+4y_p=2x^2e^{2x}+5xe^{2x}+e^{2x}$

$e^{2x}\left((12A)x^2+(30A+8B)x+(6A+10B+4C)\right)=2x^2e^{2x}+5xe^{2x}+e^{2x}$

$$\begin{cases} 12A = 2 \rightarrow A = \underline{\dfrac{1}{6}} \\ 30A + 8B = 5 \rightarrow B = \dfrac{5-30A}{8} \rightarrow \underline{B = 0} \\ 6A + 10B + 4C = 1 \rightarrow C = \dfrac{1-6A-10B}{4} \rightarrow \underline{C = 0} \end{cases}$$

$$\underline{y_{p_2}(x) = \frac{1}{6}x^3e^{2x}}$$

$$\underline{\underline{y(x) = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3e^{2x}}}$$

3. $\boldsymbol{y''' + y' = csc(x)}$

$y(x) = y_c(x) + y_p(x)$

Encuentro la solución complementaria :

$y''' + y' = 0 \rightarrow \phi(m) = m^3 + m = 0$

$\phi(m) = m(m^2+1) = 0$

$m_1 = 0,\ m_2 = i,\ m_3 = -i \rightarrow \underline{y_c(x) = C_1 + C_2\cos(x) + C_3 sen(x)}$

Encuentro la solución particular :

$y_p(x) = u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3$

$$W(1, \cos(x), sen(x)) = \begin{vmatrix} 1 & \cos(x) & sen(x) \\ 0 & -sen(x) & \cos(x) \\ 0 & -\cos(x) & -sen(x) \end{vmatrix} = 1\left(\cos^2(x) + sen^2(x)\right) = 1$$

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos(x) & sen(x) \\ 0 & -sen(x) & \cos(x) \\ \csc(x) & -\cos(x) & -sen(x) \end{vmatrix}}{1} = \csc(x)(1) \rightarrow u_1 = \int \csc(x)dx = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & sen(x) \\ 0 & 0 & \cos(x) \\ 0 & \csc(x) & -sen(x) \end{vmatrix}}{1} = -\csc(x)\cos(x) \rightarrow u_2 = -\int \csc(x)\cos(x)dx = \ln(\csc(x))$$

$$u_3' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cos(x) & 0 \\ 0 & -sen(x) & 0 \\ 0 & -\cos(x) & \csc(x) \end{vmatrix}}{1} = -\csc(x)sen(x) \rightarrow u_3 = -\int 1dx = -x$$

$$y_p = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)(1) + \ln(\csc(x))(\cos(x)) + (-x)sen(x)$$

$$\underline{y_p(x) = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \cos(x)\ln(\csc(x)) - x\,sen(x)}$$

$$\underline{\underline{y(x) = C_1 + C_2\cos(x) + C_3 sen(x) + \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \cos(x)\ln(\csc(x)) - x\,sen(x)}}$$

4. $y''' = x\ln(x)$

$y(x) = y_c(x) + y_p(x)$

Encuentro la solución complement aria :

$y''' = 0 \rightarrow \phi(m) = m^3 = 0$

$\phi(m) = m^3 = 0$

$m_1 = 0,\ m_2 = 0,\ m_3 = 0 \rightarrow \underline{y_c(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2}$

Encuentro la solución particular :

$y_p(x) = u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3$

$$W(1, \cos(x), sen(x)) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1(2x^2 - x^2) = x^2$$

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ x\ln(x) & 0 & 2 \end{vmatrix}}{x^2} = \frac{x\ln(x)(x^2)}{x^2} \rightarrow u_1 = \int x\ln(x)dx = \frac{x^2}{2}\left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right)$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & x^2 \\ 0 & 0 & 2x \\ 0 & x\ln(x) & 2 \end{vmatrix}}{x^2} = -\frac{x\ln(x).2x}{x^2} \rightarrow u_2 = -2\int \ln(x)dx = -2x(\ln(x) - 1)$$

$$u_3' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x\ln(x) \end{vmatrix}}{x^2} = \frac{x\ln(x)}{x^2} \rightarrow u_3 = \int \frac{\ln(x)}{x}dx = \frac{\ln^2(x)}{2}$$

$$y_p = \frac{x^2}{2}\left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right)(1) + (-2x(\ln(x) - 1))(x) + \left(\frac{\ln^2(x)}{2}\right)x^2$$

$$\underline{y_p = \frac{x^2}{4}\left(2\ln^2(x) - 6\ln(x) + 7\right)} \; no\ es\ l.i. \therefore\ y_p = \frac{x^2}{4}\left(2\ln^2(x) - 6\ln(x)\right)$$

Solución general :

$$\underline{\underline{y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \frac{x^2}{4}\left(2\ln^2(x) - 6\ln(x)\right)}}$$

Ecuación de Euler de orden n

1. $x^3\frac{d^3y}{dx^3}-x^2\frac{d^2y}{dx^2}-6x\frac{dy}{dx}+18y=0$

La resolveremos por dos métodos :

1° Método :

asumo $y=x^r$ *como solución entonces la escución se reduce a :*

$$x^3r(r-1)(r-2)x^{r-3}-x^2r(r-1)x^{r-2}-6xrx^{r-1}+18x^r=0$$
$$[r(r-1)(r-2)-r(r-1)-6r+18]x^r=0$$
$$[r(r-1)(r-2)-r(r-1)-6r+18]=0$$
$$r(r-1)(r-3)-6(r-3)=0$$
$$(r-3)(r^2-r-6)=0$$
$$(r-3)^2(r+2)=0$$
$$r_1=r_2=3 \qquad r_3=-2$$
$$\underline{\underline{y(x)=(C_1+C_2\ln x)x^3+C_3x^{-2}}}$$

2° Método :

aplicando el cambio $x=e^t \to t=\ln x$ *se obtiene* :

$$D(D-1)(D-2)-D(D-1)-6D+18=0$$
$$D^3-4D^2-3D+18=0$$
$$(D-3)^2(D+2)=0$$

$y'''-4y''-3y'+18y=0$ *ecuación en t*

$$\phi(m)=(m-3)^2(m+2)=0\to m_1=3 \qquad m_2=3 \qquad m_3=-2$$
$$y(t)=C_1e^{3t}+C_2te^{3t}+C_3e^{-2t}$$
$$\underline{\underline{y(x)=(C_1+C_2\ln x)x^3+C_3x^{-2}}}$$

2. $x^3\frac{d^3y}{dx^3}+2x^2\frac{d^2y}{dx^2}-10x\frac{dy}{dx}-8y=0$

asumo $y=x^r$ *como solución entonces la escución se reduce a :*

$$x^3r(r-1)(r-2)x^{r-3}+2x^2r(r-1)x^{r-2}-10xrx^{r-1}-8x^r=0$$
$$[r(r-1)(r-2)+2r(r-1)-10r-8]x^r=0$$
$$[r^2(r-1)-2(5r+4)]=0$$
$$r^3-r^2-10r-8=0$$
$$(r-4)(r+1)(r+2)=0$$
$$r_1=4 \qquad r_2=-1 \qquad r_3=-2$$
$$\underline{\underline{y(x)=C_1x^4+C_2x^{-1}+C_3x^{-2}}}$$

3. $x^3 \dfrac{d^3y}{dx^3} - 4x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + 8x\dfrac{dy}{dx} - 8y = 4\ln x$

aplicando el cambio $x = e^t \rightarrow t = \ln x$ *se obtiene*:

Encuentro la solución complementaria:

$D(D-1)(D-2) - 4D(D-1) + 8D - 8 = 0$

$D(D-1)(D-2) - 4D(D-1) + 8(D-1) = 0$

$(D-1)(D(D-2) - 4D + 8) = 0$

$(D-1)(D^2 - 6D + 8) = 0$

$(D-1)(D-2)(D-4) = 0 \rightarrow y''' - 7y'' + 14y' - 8y = 0$ *ecuación en t*

$\phi(m) = (m-1)(m-2)(m-4) = 0 \rightarrow m_1 = 1 \quad m_2 = 2 \quad m_3 = 4$

$y_c(t) = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{4t} \rightarrow \underline{y_c(x) = C_1x + C_2x^2 + C_3x^4}$

Encuentro la solución particular:

$y''' - 7y'' + 14y' - 8y = 4t$

$y_p = t^s(At + B)$

$s = 0 \rightarrow y_p = At + B$ *si es linealmente independiente con* y_c

$y_p = At + B$

$y_p' = A$

$y_p'' = y_p''' = 0$

Re*emplazando*:

$0 - 7(0) + 14(A) - 8(At + B) = 4t$

$(-8A)t + (14A - 8B) = 4t$

$$\begin{cases} -8A = 4 & A = -\dfrac{1}{2} \\ 14A - 8B = 0 & B = \dfrac{7}{8} \end{cases} \rightarrow y_p(t) = -\frac{1}{2}t + \frac{7}{8} \rightarrow \underline{y_p(x) = -\frac{1}{2}\ln x + \frac{7}{8}}$$

$$\underline{\underline{y(x) = C_1x + C_2x^2 + C_3x^4 - \frac{1}{2}\ln x + \frac{7}{8}}}$$

4. $\boldsymbol{x^3 \dfrac{d^3y}{dx^3} - x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x\dfrac{dy}{dx} - 2y = x^3}$

asumo $y = x^r$ *como solución entonces la escución se reduce a :*

$$x^3 r(r-1)(r-2)x^{r-3} - x^2 r(r-1)x^{r-2} + 2xrx^{r-1} - 2x^r = 0$$
$$[r(r-1)(r-2) - r(r-1) + 2r - 2]x^r = 0$$
$$[r(r-1)(r-2) - r(r-1) + 2(r-1)] = 0$$
$$(r-1)(r(r-2) - r + 2) = 0$$
$$(r-1)(r(r-2) - (r-2)) = 0$$
$$(r-1)^2(r-2) = 0$$
$$r_1 = r_2 = 1 \qquad r_3 = 2$$
$$\underline{y_c = (C_1 + C_2 \ln x)x + C_3 x^2}$$

encuentro la solución particular :

$$y_p(x) = u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3$$

$$W(x, x\ln x, x^2) = \begin{vmatrix} x & x\ln x & x^2 \\ 1 & \ln x + 1 & 2x \\ 0 & x^{-1} & 2 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} \ln x + 1 & 2x \\ x^{-1} & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} x\ln x & x^2 \\ x^{-1} & 2 \end{vmatrix} = x$$

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x\ln x & x^2 \\ 0 & \ln x + 1 & 2x \\ 1 & x^{-1} & 2 \end{vmatrix}}{x} = \frac{(2x)(x\ln x) - (\ln x + 1)(x^2)}{x} \rightarrow u_1 = \int x(\ln(x) - 1)dx = \frac{x^2}{2}\left(\ln(x) - \frac{3}{2}\right)$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 & x^2 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{x} = -\frac{(x)(2x) - x^2}{x} \rightarrow u_2 = -\int x dx = -\frac{x^2}{2}$$

$$u_3' = \frac{\begin{vmatrix} x & x\ln x & 0 \\ 1 & \ln x + 1 & 0 \\ 0 & x^{-1} & 1 \end{vmatrix}}{x} = \frac{x(\ln x + 1) - x\ln x}{x} \rightarrow u_3 = \int 1 dx = x$$

$$y_p = \frac{x^2}{2}\left(\ln(x) - \frac{3}{2}\right)(x) - \frac{x^2}{2}(x\ln x) + (x)x^2$$

$$\underline{y_p = \frac{x^3}{4}}$$

Solución general :

$$\underline{\underline{y(x) = (C_1 + C_2 \ln x)x + C_3 x^2 + \frac{x^3}{4}}}$$

Ecuaciones de segundo orden de coeficientes variables

Solución en serie alrededor de un punto ordinario

1. $\left(x^2-1\right)\dfrac{d^2y}{dx^2}+3x\dfrac{dy}{dx}+xy=0, \qquad y(0)=4; y'(0)=6$

$$\left(x^2-1\right)\sum_{n=2}^{+\infty}C_n n(n-1)x^{n-2}+3x\sum_{n=1}^{+\infty}C_n nx^{n-1}+x\sum_{n=0}^{+\infty}C_n x^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty}C_n n(n-1)x^n-\sum_{n=2}^{+\infty}C_n n(n-1)x^{n-2}+3\sum_{n=1}^{+\infty}C_n nx^n+\sum_{n=0}^{+\infty}C_n x^{n+1}=0$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty}C_n n(n-1)x^n-\sum_{n=0}^{+\infty}C_{n+2}(n+2)(n+1)x^n+3\sum_{n=1}^{+\infty}C_n nx^n+\sum_{n=1}^{+\infty}C_{n-1}x^n=0$$

$$-2C_2-6C_3x+3C_1x+C_0x+\sum_{n=2}^{+\infty}\left[C_n n(n+2)-C_{n+2}(n+2)(n+1)+C_{n-1}\right]x^n=0$$

$$-2C_2=0\rightarrow \underline{C_2=0}$$

$$-6C_3+3C_1+C_0=0\rightarrow \underline{C_3=\frac{C_1}{2}+\frac{C_0}{6}}$$

$$C_n n(n+2)-C_{n+2}(n+2)(n+1)+C_{n-1}=0\rightarrow \underline{C_{n+2}=\frac{C_n n(n+2)+C_{n-1}}{(n+2)(n+1)}; n\geq 2}$$

$$n=2\rightarrow C_4=\frac{C_2 2(2+2)+C_1}{(2+2)(2+1)}=\frac{8C_2+C_1}{12}=\underline{\frac{C_1}{12}}$$

$$n=3\rightarrow C_5=\frac{C_3 3(3+2)+C_2}{(3+2)(3+1)}=\frac{15C_3+C_2}{20}=\underline{\frac{3C_1}{8}+\frac{C_0}{8}}$$

$$y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}C_n x^n=C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+\ldots.$$

$$y(x)=C_0\left[1+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{8}+\ldots\right]+C_1\left[x+\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{12}+\frac{3x^5}{8}+\ldots\right]\rightarrow y(0)=\underline{C_0=4}$$

$$y'(x)=C_0\left[x+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{8}+\ldots\right]+C_1\left[1+\frac{3x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{15x^4}{8}+\ldots\right]\rightarrow y'(0)=\underline{C_1=6}$$

$$\underline{\underline{y(x)=4+6x+\frac{11}{3}x^3+\frac{x^4}{3}+\frac{11x^5}{4}+\ldots}}$$

2. $y''-xy'=e^{-x}$ *alrededor de* $x_0=0$

$$\sum_{n=2}^{+\infty}C_n n(n-1)x^{n-2}-x\sum_{n=1}^{+\infty}C_n nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty}C_n n(n-1)x^{n-2}-\sum_{n=1}^{+\infty}C_n nx^{n}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}C_{n+2}(n+2)(n+1)x^{n}-\sum_{n=1}^{+\infty}C_n nx^{n}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$$

$$2C_2+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(C_{n+2}(n+2)(n+1)-C_n n\right)x^{n}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$$

$$2C_2=1\rightarrow \underline{C_2=\frac{1}{2}}$$

$$C_{n+2}(n+2)(n+1)-C_n n=\frac{(-1)^n}{n!}\rightarrow \underline{C_{n+2}=C_n\frac{n}{(n+2)(n+1)}+\frac{(-1)^n}{n!(n+2)(n+1)}}\quad n\geq 1$$

$$n=1\rightarrow C_3=C_1\frac{1}{(1+2)(1+1)}+\frac{(-1)^1}{1!(1+2)(1+1)}\rightarrow \underline{C_3=\frac{C_1}{6}-\frac{1}{6}}$$

$$n=2\rightarrow C_4=C_2\frac{2}{(2+2)(2+1)}+\frac{(-1)^2}{2!(2+2)(2+1)}=\frac{C_2}{6}+\frac{1}{24}\rightarrow \underline{C_4=\frac{1}{8}}$$

$$n=3\rightarrow C_5=C_3\frac{3}{(3+2)(3+1)}+\frac{(-1)^3}{3!(3+2)(3+1)}=\frac{3C_3}{20}-\frac{1}{120}\rightarrow \underline{C_4=\frac{C_1}{40}-\frac{1}{30}}$$

$$y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}C_n x^n=C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+.....$$

$$y(x)=C_0+C_1x+\frac{1}{2}x^2+\left(\frac{C_1}{6}-\frac{1}{6}\right)x^3+\frac{1}{8}x^4+\left(\frac{C_1}{40}-\frac{1}{30}\right)x^5+......$$

$$\underline{\underline{y(x)=C_0+C_1\left(x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{40}+....\right)+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{8}-\frac{x^5}{30}+....\right)}}$$

3) Resolver la siguiente ecuación diferencial alrededor del punto $x_0 = 0$. Determine las soluciones homogéneas de esta ecuación diferencial en términos de series indicando a que función converge cada una de ellas. (Sugerencia: para encontrar la solución particular use el método de variación de parámetros).

$$(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = \frac{1}{x}$$

Desarrollo.

$$(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = \frac{1}{x}$$

$$P(x) = (x^2 - 1); \qquad x_0 = 0 \qquad entonces\ P(0) = -1 \neq 0$$

$Por\ lo\ tanto\ x_0 = 0\ \ es\ un\ punto\ ordinario$

Se asume:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \ ,pero\ \ x_0 = 0$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)^n\ , \qquad y' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(n)(x)^{n-1}, \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} a_n(n)(n-1)(x)^{n-2}$$

Primero se obtendrá las soluciones homogéneas. Se reemplaza y, y', y'' en la ecuación:

$$(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 0$$

$$(x^2 - 1)\sum_{n=2}^{\infty} a_n(n)(n-1)(x)^{n-2} + 4x\sum_{n=1}^{\infty} a_n(n)(x)^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)^n = 0$$

Luego se introduce los coeficientes dentro de las sumatorias

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n(n)(n-1)(x)^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_n(n)(n-1)(x)^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} 4a_n(n)(x)^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(x)^n = 0$$

Se igualan las patencias de x de todas la sumatorias, en este caso a la que más se repite que en este caso es n:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n(n)(n-1)(x)^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_n(n)(n-1)(x)^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} 4a_n(n)(x)^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(x)^n = 0$$

Para la
m = n – 2
Si n = 2, entonces m = 0
Pero n = m + 2
Luego m = n

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n(n)(n-1)(x)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)(x)^n + \sum_{n=1}^{\infty} 4a_n(n)(x)^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(x)^n = 0$$

Se igualan los subíndices de todas las sumatorias al mayor, en este caso n=2.

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n(n)(n-1)(x)^n - 2a_2 - 6a_3x - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)(x)^n + 4a_1x + \sum_{n=2}^{\infty} 4a_n(n)(x)^n + 2a_0 + 2a_1x + \sum_{n=2}^{\infty} 2a_n(x)^n = 0$$

$$-2a_2 - 6a_3x + 4a_1x + 2a_0 + 2a_1x + \sum_{n=2}^{\infty}[a_n(n)(n-1) - a_{n+2}(n+2)(n+1) + 4a_n(n) + 2a_n](x)^n = 0$$

Se igualan los coeficientes:

$$-2a_2 + 2a_0 = 0, \quad \textit{entonces se tiene que} \quad a_2 = a_0$$
$$-6a_3x + 6a_1x = 0, \textit{entonces se tiene que} \quad a_3 = a_1$$
$$a_n(n)(n-1) - a_{n+2}(n+2)(n+1) + 4a_n(n) + 2a_n = 0$$

La fórmula de recurrencia es:

$$a_{n+2} = \frac{a_n(n)(n-1) + 4a_n(n) + 2a_n}{(n+2)(n+1)}, \quad \forall n \geq 2.$$

$$a_{n+2} = \frac{(n^2 - n + 4n + 2)}{(n+2)(n+1)}a_n = \frac{(n^2 + 3n + 2)}{(n+2)(n+1)}a_n = \frac{(n^2 + 3n + 2)}{(n+2)(n+1)}a_n = \frac{(n+2)(n+1)}{(n+2)(n+1)}a_n = a_n$$

Por lo tanto:

$a_{n+2} = a_n, \quad \forall n \geq 2$

Encontrando los coeficientes:

$$Si\ n = 2, entonces\ a_4 = a_2 = a_0$$
$$Si\ n = 3, entonces\ a_5 = a_3 = a_1$$
$$Si\ n = 4, entonces\ a_6 = a_4 = a_0$$
$$Si\ n = 5, entonces\ a_7 = a_5 = a_1$$
$$Si\ n = 6, entonces\ a_8 = a_6 = a_0$$
$$Si\ n = 7, entonces\ a_9 = a_7 = a_0$$

Volviendo a la solución:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = \quad a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + \cdots$$
$$y(x) = \quad a_0 + a_1x + a_0x^2 + a_1x^3 + a_0x^4 + a_1x^5 + a_0x^6 + \cdots$$

La solución homogénea:

$$y(x) = \quad a_0\left(\underbrace{1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n} + \cdots}_{y_1(x)}\right) + a_1\left(\underbrace{x + x^3 + x^5 + \cdots + x^{2n+1} + \cdots}_{y_2(x)}\right)$$

$$= a_0\left(\frac{1}{1-x^2}\right) + a_1x(1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + \cdots)$$

$$y_h(X) = a_0\left(\frac{1}{1-x^2}\right) + a_1\left(\frac{x}{1-x^2}\right), \qquad ya\ que\ \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

Ahora se encuentra la solución particular y_p:

Normalizando la ecuación diferencial $(x^2-1)y'' + 4xy' + 2y = \frac{1}{x}$, se obtiene:

$$y'' + \frac{4xy'}{(x^2-1)} + \frac{2y}{(x^2-1)} = \frac{1}{x(x^2-1)}$$

Usando el método de variación de parámetros:

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2$$

Encontrando el wronskiano: $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1{}' & y_2{}' \end{vmatrix}$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{1-x^2} & \dfrac{x}{1-x^2} \\ \dfrac{2x}{(1-x^2)^2} & \dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{(1-x^2)^2}$$

$$Donde\ u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \dfrac{1}{x(x^2-1)} & y_2{}' \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{x}{1-x^2} \\ \dfrac{1}{x(x^2-1)} & \dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2} \end{vmatrix}}{\dfrac{1}{(1-x^2)^2}}$$

$$u_1' = \frac{\dfrac{1}{(1-x^2)^2}}{\dfrac{1}{(1-x^2)^2}} = 1, \qquad entonces\ \ u_1 = x$$

$$Donde\ u_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1{}' & \dfrac{1}{x(x^2-1)} \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{1}{1-x^2} & 0 \\ \dfrac{2x}{(1-x^2)^2} & \dfrac{1}{x(x^2-1)} \end{vmatrix}}{\dfrac{1}{(1-x^2)^2}} = \frac{-\dfrac{1}{x(1-x^2)^2}}{\dfrac{1}{(1-x^2)^2}}$$

$$u_2' = -\frac{1}{x}, \qquad entonces\ \ u_2 = -\ln(x)$$

Por lo tanto a solución particular es:

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2$$

$$y_p = x\left(\frac{1}{1-x^2}\right) - \ln(x)\frac{x}{1-x^2}$$

La solución general es:

$$y(x) = a_0\left(\frac{1}{1-x^2}\right) + a_1\left(\frac{x}{1-x^2}\right) + x\left(\frac{1}{1-x^2}\right) - \ln(x)\frac{x}{1-x^2}$$

Este es un solucionario de problemas de Ecuaciones Diferenciales correspondiente a la Primera Evaluación, donde constan ejercicios tipo examen. Esta obra ha sido elaborada por Roberto Cabrera y Christian de La Rosa, ex – estudiante de la ESPOL, con el auspicio de la directiva A.E.F.I.E.C. de los años 2006, 2007, 2008. Modificado y corregido dos veces por Roberto Cabrera.