# Rúbrica

## Tema 2

2

Sea $f : M_{2\times2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times2}(\mathbb{R})$ una transformación lineal definida por que $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ a & c+d \end{pmatrix}$. Determine:

1. La matriz asociada a la transformación lineal, respecto a la base canónica de $M_{2\times2}(\mathbb{R})$.
2. El núcleo de la transformación.
3. La imagen de la transformación.
4. Si f es un isomorfismo.

| | **Resuelve de forma satisfactoria** |
|---|---|
| Determinar la matriz asociada a la transformación lineal | 5 |
| Determinar el núcleo de la transformación lineal | 5 |
| Determinar la imagen de la transformación lineal | 6 |
| Indicar si es o no un isomorfismo | 4 |

Respuesta enviada por el Profesor Nelson Cordoba

Sea la aplicación lineal $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definida por

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ a & c+d \end{pmatrix}$$

a) Calcular la matriz de la aplicación respecto a la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$

b) Calcular $Ker(f)$, una base y su dimensión.

c) Calcular la dimensión de $Im(f)$

d) Determine si es inyectiva, sobreyectiva e isomorfismo

**Solución**

Se considera la base canónica de $M_2(\mathrm{R}), C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

calcula la matriz de la aplicación lineal $f$ hallando las imágenes de estos vectores respecto de la base canónica

$$\begin{cases} f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1,0,1,0)_C \\ f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1,0,0,0)_C \end{cases}$$

$$\begin{cases} f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0,0,0,1)c \end{cases}$$

$$\begin{cases} f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,0,0,1)_c \end{cases}$$

Colocando por columnas estas imágenes se obtiene la matriz de la aplicación $f$

$$f_{C,C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) El núcleo de la aplicación lineal $f$ está formado por los siguientes vectores

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ A \in M_2(\mathrm{R}) \,\middle|\, f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Rightarrow f(A) = \begin{pmatrix} x+y & 0 \\ x & z+t \end{pmatrix}$$

La matriz $A$ pertenecerá al núcleo si se verifica

$$f(A)=\begin{pmatrix} x+y & 0 \\ x & z+t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} x+y=0 \\ 0=0 \\ x=0 \\ z+t=0 \end{cases}\Rightarrow x=y=0, z=-t,\ \forall t\in\mathbb{R}$$

Es decir, $\operatorname{Ker}(f)=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -t & t \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}: t\in\mathbb{R}\right\}$ siendo $B=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ una base de $\operatorname{Ker}(f)$ y por tanto, $\dim(\operatorname{Ker}(f))=1$

c) Para determinar la dimension de $\operatorname{Im}(f)$ basta estudiar el rango de la matriz de la aplicacion

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}=rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=3\Rightarrow\dim(\operatorname{lm}(f))=3$$

c) $\dim(\operatorname{Ker}(f))=1\neq 0\Rightarrow f$ no es inyectiva

$\dim(\operatorname{lm}(f))=3\neq 4=\dim\left(M_2(\mathbb{R})\right)\Rightarrow f$ no es sobreyectiva

Por lo tanto no es isomorfismo

# Tema 3

3

Sea $f: M_{2\times 1}(\mathbb{R})\times M_{2\times 1}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(X,Y)=f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)=X^t\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}Y.$$

1. Demuestre que f define un producto interno en $M_{2\times 1}(\mathbb{R})$.
2. Utilice este producto interno para encontrar la proyección ortogonal de $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sobre el $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

| | **Resuelve de forma satisfactoria** |
|---|---|
| Verificar que f define un producto interno | 12 |
| Encontrar la proyección ortogonal de | 8 |

4

Una matriz A tiene como subespacios propios a los conjuntos $E_1 = gen\left\{\begin{pmatrix}0\\5\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$, $E_2 = gen\left\{\begin{pmatrix}0\\-5\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ y $E_3 = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} : x+z=0 \quad \text{y} \quad x+2w=0\right\}$. Determine:

1. El orden de la matriz.
2. Si la matriz es diagonalizable.
3. Si la matriz es simétrica.

| | **Resuelve de forma satisfactoria** |
|---|---|
| Indicar la dimensión de la matriz | 3 |
| Determinar que la dimensión del espacio $E_3$ es dos | 7 |
| Justificar si la matriz es diagonalizable | 5 |
| Justificar que no puede ser simétrica | 5 |

- Dado que los espacios propios son subespacios de $R^4$ se tiene que la matriz es de orden 4.
- Dado que $E_3 = gen\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\-2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ entonces se tiene que A es una matriz diagonalizable.
- $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}0\\-5\\0\\1\end{pmatrix}\right) = -5$ indica que la matriz no es simétrica.

| | Inadecuado | En desarrollo | Satisfactorio | Avanzado |
|---|---|---|---|---|
| | En blanco o sólo incoherencias | Intenta demostrar y escribe algo relacionado | Demuestra con procedimientos casi completos con pocas fallas | Demuestra satisfactoriamente |
| | 0 | $0 <$ Calificación $\leq 8$ | $8 <$ Calificación $< 20$ | 20 |