



# ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL

## FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS

<b>AÑO:</b>	2017	<b>PERIODO:</b>	II
<b>MATERIA:</b>	Estadística Descriptiva	<b>PROFESORES:</b>	Bauz, S. Cárdenas, N. Cevallos, L. Mendoza, M. Pambabay, J. Plata, W. Roa, H.
<b>EVALUACIÓN:</b>	Primera	<b>FECHA:</b>	Noviembre 30 del 2017

### COMPROMISO DE HONOR

Yo, ..... al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que puedo usar una calculadora *ordinaria* para cálculos aritméticos, un lápiz o esferográfico; que solo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen; y, cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído, debo apagarlo y depositarlo en la parte anterior del aula, junto con algún otro material que se encuentre acompañándolo. No debo además, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a las que se entreguen en esta evaluación. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.

*Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptar la declaración anterior.*

"Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".

**Firma** \_\_\_\_\_ **NÚMERO DE MATRÍCULA:** \_\_\_\_\_ **PARALELO:** \_\_\_\_\_

**Tema 1: (4 Puntos) Defina**

- a) Probabilidad Condicional
- b) Variable Aleatoria
- c) Función de distribución de probabilidades
- d) Función generadora de momentos

**Tema 2: (6 Puntos)** Pruebe que Si A y B son dos eventos definidos en un mismo espacio muestral  $(\Omega, \mathcal{L})$  y se cumple además que  $P(A|B) = P(A|B^c)$ , entonces A y B son eventos estocásticamente independientes.

**Tema 3: (10 Puntos)** Una entidad bancaria dispone de 11 sucursales en el territorio nacional y ha observado el número de empleados que hay en cada una de ellas para un estudio posterior. Las observaciones obtenidas han sido:

15	16	9	10	10	11	12	13	14	15	11
----	----	---	----	----	----	----	----	----	----	----

- a) Construya una tabla de frecuencia de 4 intervalos
- b) Grafique la Ojiva
- c) Calcule el número medio de empleados y su desviación
- d) Calcule la mediana, moda y el  $P_{20}$
- e) Interprete los resultados del numeral c y d

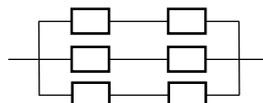
**Tema 4: (10 Puntos)** Suponga que se tienen dos urnas, la primera tiene 8 canicas, de las cuales 3 son amarillas y las demás rojas. La segunda tiene 10 canicas, 4 amarillas y las demás rojas. De la primera urna se extraen 3 canicas y se las introduce en la segunda urna, luego de la segunda urna se extraen dos canicas.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que de la urna dos, salgan dos canicas rojas?
- b) Si de la urna dos salieron dos canicas rojas, ¿Cuál es la probabilidad de que de la urna uno haya salido una canica amarilla y dos rojas?

**Tema 5: (10 Puntos)** Se tienen 10 bolas en una caja, de las cuales dos son rojas y las demás azules. Se van a elegir la bolas de la caja una a continuación de la otra. Si X es la variable aleatoria que representa el número de bolas sacadas de la caja, hasta obtener la primera roja. Determine:

- a) La distribución de probabilidades de X
- b) La media y la varianza de X
- c) La Acumulada de X
- d) Grafique el histograma de probabilidades

**Tema 6: (10 Puntos)** Suponga que se tienen sistemas como se indica la figura, donde cada componente tiene probabilidad de funcionar correctamente de 0,97.



- a) ¿Cuál es la probabilidad de que dos vías del sistema funcionen?
- b) Si se eligen 5 de estos sistemas, ¿Cuál es la probabilidad de que cuando más cuatro de ellos tengan dos vías que funcionan?

**Tema 3: (10 Puntos)** Se tiene una muestra de tamaño  $n=9$ , cuya media es 100 y desviación estándar 4. Si se agrega una observación adicional  $X_{10}=102$ , determine la media y la varianza para la muestra constituida ahora por los 10 elementos.



# ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL

## FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS

### RÚBRICA

#### Tema 1: (4 Puntos) Defina

- e) Probabilidad Condicional
- f) Variable Aleatoria
- g) Función de distribución de probabilidades
- h) Función generadora de momentos

#### Desarrollo

##### Probabilidad Condicional

Dado un espacio muestral y dos eventos A y B, y la  $P(B) > 0$ , la probabilidad condicional es la probabilidad de que ocurra el evento A dado que ocurre el evento B y se denota por  $P(A|B)$

##### Variable Aleatoria

Sea  $(\Omega, S)$  el espacio muestral de un experimento estadístico, una variable aleatoria es una función X cuyo dominio es  $\Omega$  y el conjunto de llegada es  $\mathbb{R}$ , donde  $\mathbb{R}$  es el conjunto de los números reales.

$$X: S \rightarrow \mathbb{R}$$

##### Función de distribución de probabilidades

La función de distribución de probabilidad de X, es una función definida  $f: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$  que cumple con las siguientes condiciones:

- i.  $f(x) = P(X=x)$
- ii.  $\sum_{x \in S} P(X=x) = 1$
- iii.  $P(x \in A) = \sum_{x \in A} f(x)$

##### Función generadora de momentos

Una función generadora de momentos de una variable aleatoria X es una función a valores reales  $M_x(t) = E[e^{tx}]$  definida como:

$$M_x(t) = E[e^{tx}] \begin{cases} \sum_x e^{tx} \cdot p(x) & \text{si } X \text{ es discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot f(x) dx & \text{si } X \text{ es continua} \end{cases}$$

Si  $E[e^{tx}]$  existe.

Cada literal vale 1 punto				
Y cada una se califica bajo la misma rúbrica				
Nivel	Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Excelente
Criterios	No define de manera correcta ninguno de los literales.		Define de manera poco clara cada literal. Considerando algunas de las condiciones básicas	Define de manera clara y correcta cada uno de los literales.
Puntos	0	0	0.5	1

**Tema 2:** (6 Puntos) Pruebe que Si A y B son dos eventos definidos en un mismo espacio muestral  $(\Omega, L)$  y se cumple además que  $P(A|B) = P(A|B^c)$ , entonces A y B son eventos estocásticamente independientes.

Por definición de probabilidad condicional se tiene que:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (1)$$

$$P(A|B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} \quad (2)$$

Por hipótesis del ejercicio se cumple lo siguiente:

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} \quad (3)$$

Se conoce que:  $A \cap B^c = A - (A \cap B)$  (4)

Luego se cumple que:  $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$  (5)

Reemplazando (5) en (3) se tiene lo siguiente:

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(B^c)}$$

$$P(A \cap B)P(B^c) = P(A)P(B) - P(A \cap B)P(B)$$

$$P(A \cap B)P(B^c) + P(A \cap B)P(B) = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap B)[P(B^c) + P(B)] = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap B)[1 - P(B) + P(B)] = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Por el resultado anterior, se concluye que los eventos  $A$  y  $B$  son estocásticamente independientes.

Nivel	Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Excelente
Criterios	No desarrolla procesos coherentes	Identifica correcta la probabilidad condicional de $A B$ y/o $A B^c$ , pero no logra identificar una expresión para $A \cap B^c$	Identifica correcta la probabilidad condicional de $A B$ , $A B^c$ y logra identificar una expresión para $A \cap B^c$ , pero comete errores al justificar que $A$ y $B$ son eventos estocásticamente independientes	Realiza correctamente la justificación de que $A$ y $B$ son eventos estocásticamente independientes
Puntos	0	2	3-5	6

**Tema 3: (10 Puntos)** Una entidad bancaria dispone de 11 sucursales en el territorio nacional y ha observado el número de empleados que hay en cada una de ellas para un estudio posterior. Las observaciones obtenidas han sido:

15	16	9	10	10	11	12	13	14	15	11
----	----	---	----	----	----	----	----	----	----	----

- Construya una tabla de frecuencia de 4 intervalos
- Grafique la Ojiva
- Calcular el número medio de empleados y su desviación
- Calcule la mediana, moda y el  $P_{20}$
- Interprete los resultados del numeral c y d

Literal A - 2 puntos.

Clase	Intervalo	Marca de clase	Frecuencia	Frecuencia relativa	Frecuencia acumulada	Frecuencia acumulada relativa
1	9 - 11	10	3	0,273	3	0,273
2	11 - 13	12	3	0,273	6	0,545
3	13 - 15	14	2	0,182	8	0,727
4	15 - 17	16	3	0,273	11	1
			11			

Nivel	Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Excelente
Criterios	No realiza cálculo alguno.	Identifica los campos que se requieren en una tabla de frecuencia, Establece el cálculo en cada uno de ellos	Define todos los campos y sus cálculos. Toma en consideración que los intervalos los intervalos sean exhaustivos, que entre ellos sean mutuamente excluyentes y de igual longitud.	Considera las condiciones que debe de cumplir y Proporciona los cálculos correctos.
Puntos	0	0.5	1.	2

Literal B- Construya la Ojiva - 2 puntos.

Nivel	Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Excelente
Criterios	No realiza cálculo o gráfica alguna	Bosqueja la gráfica pero no sustenta sus cálculos	Define correctamente las coordenadas a graficar en la Ojiva	Realiza gráfica, sustentando los cálculos, representa correctamente en el plano cartesiano los puntos a graficar en la Ojiva
Puntos	0	0	1.5	2

Literal C - Calcular el número medio de empleados y su desviación - 1 pt c/u  
 Datos no agrupados: Media: 12,364 , Desviación: 2,26

Nivel	Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Excelente
Criterios	No realiza cálculo alguno.	No realiza cálculo alguno.	Identifica lo que se solicita. Planea el cálculo de forma correcta (Utilizando datos agrupados o no agrupados)	Proporciona los valores correctos.
Puntos	0	0	0.5	1

Literal D - Calcule la mediana, moda y el  $P_{20}$   
 Datos no agrupados: Mediana: 12, Moda: 10, 11 y 15,  $P_{20}$ :

Cada literal vale 0.66 punto Y cada una se califica bajo la misma rúbrica				
Nivel	Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Excelente
Criterios	No realiza cálculo alguno.	No realiza cálculo alguno.	Identifica lo que se solicita. Planea el cálculo de forma correcta (Utilizando datos agrupados/ no agrupados o los estima a través de la Ojiva)	Proporciona los valores correctos.
Puntos	0	0	0.33	0.66

Literal E - Interprete los resultados del numeral c y d

Nivel	Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Excelente
Criterios	No hay interpretación de resultados		Proporciona una interpretación que obedece a definir el cálculo o el significado del indicador.	Acorde al contexto del problema Interpreta correctamente lo solicitado
Puntos	0	0	1	2

**Tema 4: (10 Puntos)** Suponga que se tienen dos urnas, la primera tiene 8 canicas, de las cuales 3 son amarillas y las demás rojas. La segunda tiene 10 canicas, 4 amarillas y las demás rojas. De la primera urna se extraen 3 canicas y se las introduce en la segunda urna, luego de la segunda urna se extraen dos canicas.

- a.-¿Cuál es la probabilidad de que de la urna dos, salgan dos canicas rojas?  
 b.- Si de la urna dos salieron dos canicas rojas, ¿Cuál es la probabilidad de que de la urna uno haya salido una canica amarilla y dos rojas?

Urna 1	Amarilla	Rojas
8	3	5

4 Formas de seleccionar 3 bolas de la 1era Urna

Amarilla	Rojas

$P(\text{Extracción de la Urna 1})$

1.-	0	3	0.18
2.-	1	2	0.54
3.-	2	1	0.27
4.-	3	0	0.02

Urna 2	Amarilla	Rojas
10	4	6

Como cambia el contenido de la Urna 2, de acuerdo a cada escenario de extracción de la Urna 1

Amarilla	Rojas

$P(2\text{Rojas de la Urna2} | \text{Extracción de la Urna1})$

4	9	0.46	$P(2\text{Rojas de la Urna2} \cap \text{Extracción de la Urna1})$ 0.08 0.19 0.07 0.00
5	8	0.36	
6	7	0.27	
7	6	0.19	

a) ¿Cuál es la probabilidad de que de la urna dos, salgan dos canicas rojas?

0.35

probabilidad de que de la urna uno haya salido una canica amarilla y dos rojas?

0.549

**Literal a:** ¿Cuál es la probabilidad de que de la urna dos, salgan dos canicas rojas?

Nivel	Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Excelente
Criterios	No realiza calculo alguno	Plantea los escenarios de extracción de la Urna 1 y de la Urna 2	Calcula las probabilidades de extracción de cada escenario para cada Urna Reconoce que se trata de Probabilidad Total.	Determina el cálculo correcto.
Puntos	0	2	4	5

**Literal b:** Si de la urna dos salieron dos canicas rojas, ¿Cuál es la probabilidad de que de la urna uno haya salido una canica amarilla y dos rojas?

Nivel	Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Excelente
Criterios	No realiza calculo alguno		Reconoce que se trata de Probabilidad de Bayes y plantea de forma correcta el desarrollo.	Determina el cálculo correcto.
Puntos	0	0	4	5

**Tema 5: (10 Puntos)** Se tienen 10 bolas en una caja, de las cuales dos son rojas y las demás azules. Se van a elegir la bolas de la caja una a continuación de la otra. Si X es la variable aleatoria que representa el número de bolas sacadas de la caja, hasta obtener la primera roja. Determine:

- La distribución de probabilidades de X
- La media y la varianza de X
- La Acumulada de X
- Grafique el histograma de probabilidades

X: Número de bolas sacadas de la caja hasta obtener la primera roja

$$X=1 \quad \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$X=2 \quad \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$$

X=3    Literal A - La distribución de probabilidades de X -4pts

$$X=4 \quad \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{45}$$

·  
·  
·

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}; & x = 1 \\ \frac{8}{45}; & x = 2 \\ \frac{7}{45}; & x = 3 \\ \frac{6}{45}; & x = 4 \\ \frac{5}{45}; & x = 5 \\ \frac{4}{45}; & x = 6 \\ \frac{3}{45}; & x = 7 \\ \frac{2}{45}; & x = 8 \\ \frac{1}{45}; & x = 9 \end{cases}$$

Nivel	Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Excelente
Criterios	No realiza cálculo alguno	Identifica y calcula correctamente la probabilidad de x=1	Identifica y calcula correctamente la probabilidad de la mayoría de los valores de X pero no completa la distribución.	Calcula correctamente la probabilidad de cada uno de los valores que puede tomar X
Puntos	0	1	3	4

Literal B - La media y la varianza de X

$$E(x) = 3.6667$$

$$\sigma^2 = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$\sigma^2 = 18.3333 - [3.6667]^2$$

$$\sigma^2 = 4.8888$$

Cada solicitud vale 1 punto

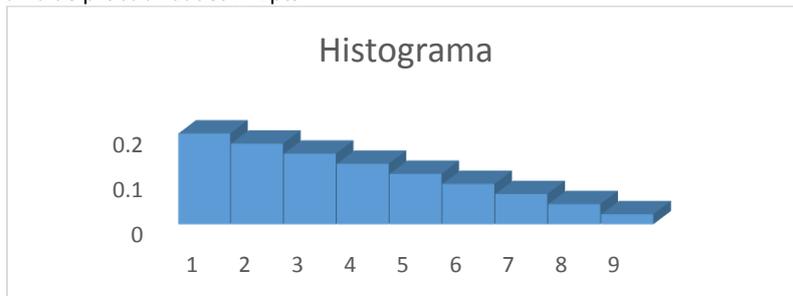
Nivel	Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Excelente
Criterios	No realiza cálculo alguno.	No realiza cálculo alguno.	Identifica lo que se solicita Planea el cálculo de forma correcta	Proporciona los valores correctos.
Puntos	0	0	0.5	1

Literal C - La Acumulada de X 2pts

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x < 1 \\ \frac{1}{5}; & 1 \leq x < 2 \\ \frac{17}{45}; & 2 \leq x < 3 \\ \frac{24}{45}; & 3 \leq x < 4 \\ \frac{30}{45}; & 4 \leq x < 5 \\ \frac{35}{45}; & 5 \leq x < 6 \\ \frac{39}{45}; & 6 \leq x < 7 \\ \frac{42}{45}; & 7 \leq x < 8 \\ \frac{44}{45}; & 8 \leq x < 9 \\ 1; & x \geq 9 \end{cases}$$

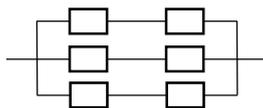
Nivel	Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Excelente
Criterios	No realiza cálculo alguno	No aplica	Plantea la distribución acumulada incompleta o no obtiene resultados correctos.	Obtiene la Distribución acumulada correctamente.
Puntos	0	-	1	2

Literal D - Grafique el histograma de probabilidades X 2pts



Nivel	Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Excelente
Criterios	No realiza gráfica alguna		Define que el eje x son los valores que adopta la variable y la altura la probabilidad	Define que el eje x son los valores que adopta la variable y la altura la probabilidad Rotula el gráfico
Puntos	0	0	1.5	2

**Tema 6: (10 Puntos)** Suponga que se tienen sistemas como se indica la figura, donde cada componente tiene probabilidad de funcionar correctamente de 0,97.

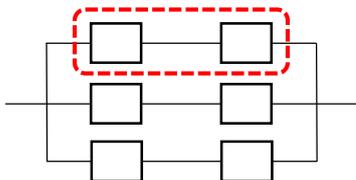


**RESOLUCIÓN Y RÚBRICA**

**S1**

**S2**

**S3**



Probabilidad de fiabilidad de que la vía S1 Funcione:

$$R_1 = \prod_{j=1}^2 S_{1j} = 0.97 * 0.97 = 0.9409$$

Si consideramos que cada vía funcione o no, como una distribución binomial. Calculamos la probabilidad de dos vías funcionen como lo siguiente:

$$P(X = x) = f(x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}; \text{ para todo } x \in S$$

Reemplazando los valores en la función:

$$P(X = 2) = f(x) = \binom{3}{2} 0.9409^2 (1 - 0.9409)^{3-2};$$

$$\frac{3 * 0.885 * 0.0591}{(3 - 2)} = 0.1569$$

Nivel	Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Excelente
Criterios	No desarrolla procesos coherentes	Identifica y calcula correctamente la probabilidad de una vía funcione, pero no considera que cada vía se modeliza mediante una distribución binomial.	Identifica y calcula correctamente la probabilidad de que una vía funcione, e identifica claramente que cada vía se modeliza mediante una distribución binomial; Pero comete errores al calcular la probabilidad de que dos vías funcionen correctamente	Calcula correctamente la probabilidad de que dos vías del sistema funcionen correctamente
Puntos	0	2	3-4	5

Literal B

Si se eligen 5 de estos sistemas, ¿Cuál es la probabilidad de que cuando más cuatro de ellos tengan dos vías que funcionan?

$$P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$$

$$P(X \leq 4) = \binom{5}{0} 0.9409^0 (0.0591)^5 + \binom{5}{1} 0.9409^1 (0.0591)^4 + \binom{5}{2} 0.9409^2 (0.0591)^3 + \binom{5}{3} 0.9409^3 (0.0591)^2$$

$$+ \binom{5}{4} 0.9409^4 (0.0591)^1$$

$$P(X \leq 4) = (0.0591)^5 + 5 * 0.9409^1 (0.0591)^4 + 10 * 0.9409^2 (0.0591)^3 + 10 * 0.9409^3 (0.0591)^2 + 5 * 0.9409^4 (0.0591)^1$$

$$P(X \leq 4) = 0.26257$$

Nivel	Insuficiente	Regular	Satisfactorio	Excelente
Criterios	No desarrolla procesos coherentes	Identifica y formula el problema como una suma de probabilidades menores e iguales a 4, pero no considera que cada sistema se modeliza mediante una distribución binomial.	Identifica y calcula correctamente la probabilidad de que cuando más cuatro de ellos tengan dos vías que funcionan, se modeliza mediante una distribución binomial; Pero comete errores al calcular la probabilidad que dos vías funcionen correctamente.	Calcula correctamente la probabilidad de que cuando más cuatro de ellos tengan dos vías que funcionan dos vías funcionen correctamente.
Puntos	0	2	3-4	5