RÚBRICA DEL PRIMER EXAMEN DE CÁLCULO DE VARIAS VARIABLES

I TÉRMINO 2016-2017

1. (10 p.) Determine de ser posible:

   a) Las ecuaciones paramétricas de la recta L que contiene los puntos $(k,0,0)$ y $(0,k,0)$, con una constante $k>0$.

   - Calcula un vector director de la recta.................2 p.
   - Identifica un punto P_0.............................1 p.
   - Escribe correctamente las ecuaciones paramétricas de L...........2 p.

   b) La ecuación general del plano π, tal que contiene la recta L construida en el inciso *a*) y es paralelo al plano tangente a la superficie $2z = x^2 + y^2$ en el punto $P(1,1,1)$.

   - Calcula el vector gradiente de la superficie en el punto P..............1 p.
   - Justifica adecuadamente que sí es posible que $L \subset \pi$......................2 p.
   - Escribe correctamente la ecuación general de π...........2 p.

2. (10 p.) Considere la función $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x - y} & ;\text{si} \quad x \neq y \\ x + y & ;\text{si} \quad x = y \end{cases}$.

   a) Estudiar la *continuidad* de f en los puntos de la forma (a,a); $a \in \mathbb{R}$.

   - Plantea criterio de continuidad en (a,a)......................................1 p.
   - Argumenta adecuadamente que no existe continuidad en (a,a) con $a \neq 0$, $a \neq \dfrac{2}{3}$ ....2 p.
   - Argumenta adecuadamente que existe continuidad en $(0,0)$.........1 p.

   b) Calcular las *derivadas parciales* de f en el origen.

   - Calcula correctamente $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$...............1 p.
   - Calcula correctamente $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$...............1 p.

   c) ¿Es f *diferenciable* en el origen?

   - Plantea definición de difereniabilidad en $(0,0)$..............1 p.
   - Reemplaza datos..............1 p.
   - Argumenta adecuadamente que f no es diferenciable en $(0,0)$......2 p.

3. (10 p.) Considere la función $f(x, y, z) = (x - y - 1)log_2(z^2 + 1)$; $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Empleando la fórmula de Taylor de 2º orden, aproxime $f(0.1, -0.2, 0.9)$.

- Plantea la fórmula de aproximación................1 p.
- Selecciona el punto adecuado (x_0, y_0)..............1 p.
- Escribe vector incremento...............................1 p.
- Calcula correctamente $f(x_0, y_0)$......................1 p.
- Calcula correctamente $\nabla f(x_0, y_0)$...................1 p.
- Calcula correctamente $Hf(x_0, y_0)$...................3 p.
- Reemplaza datos y simplifica correctamente...............2 p.

4. (10 p.) Una función $f(x, y)$ definida en un dominio D se dice que es *homogénea de grado* $n \in \mathbb{Z}^+$, si para todo $(x, y) \in D$ se cumple que:

$$\forall t > 0\, [f(tx, ty) = t^n f(x, y)] \qquad (*)$$

Demuestre que si $f(x, y)$ es *homogénea de grado* n, entonces:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = nf(x, y)$$

Sugerencia: Comience derivando $(*)$ respecto a t.

- Define sustituciones adecuadas para derivar $(*)$.............2 p.
- Deriva correctamente $(*)$ respecto a t.............................2 p.
- Deriva correctamente $(*)$ respecto a x............................2 p.
- Deriva correctamente $(*)$ respecto a y............................2 p.
- Sustituye expresiones, simplifica y concluye correctamente...................2 p.

5. (10 p.) Determine las dimensiones de la cisterna rectangular cerrada con el mayor volumen posible, si el área de la superficie total es de 10 metros cuadrados.

- Plantea función objetivo y variables..........2 p.
- Plantea función restricción........................2 p.
- Plantea condición necesaria de Lagrange.......................1 p.
- Plantea sistema de ecuaciones.......................................1 p.
- Resuelve correctamente el sistema planteado y obtiene punto crítico.....2 p.
- Justifica adecuadamente que en dicho punto
  se alcanza el máximo volumen..................2 p.