ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Año: 2023	Período: PAO1
Materia: CÁLCULO VECTORIAL	Profesores: Mario Célleri, Nelson Córdova, Carlos Martín, María Nela Pastuizaca, Ebner Pineda, Pedro Ramos, Soraya Solís
Evaluación: Tercera	Fecha: 11 de septiembre del 2023

COMPROMISO DE HONOR

Yo, ……..…………… al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que no puedo usar calculadoras, celulares u otros dispositivos electrónicos, que sí puedo usar un lápiz o esferográfico; que sólo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen y que no debo hacer ruidos molestos durante el mismo; y, cualquier objeto que hubiere traído que sea de mi propiedad, debo depositarlo en el lugar autorizado. No debo, además, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a los que se entreguen en esta evaluación. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.
Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptar la declaración anterior.

Firma ***NÚMERO DE MATRÍCULA: ……………………………..….*** ***PARALELO: ………..***

1. (15 p.) Considere la superficie $S : x^2 + y^2 - 3z^2 = 1$ y sea π el plano que es tangente a S en el punto $(3, -2, 2)$.

   a) Obtenga la ecuación general de π.

   b) Suponga que L es la recta que contiene los puntos $A(1, 0, -1)$ y $B(-1, 1, 0)$. Determine si L es perpendicular a π.

2. (20 p.) Sea $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)e^{-x^2-y^2} & , x^2+y^2 \neq 0 \\ 1 & , x^2+y^2 = 0 \end{cases}$.

   a) Determine si f es continua en $(0,0)$ empleando el criterio de continuidad.

   b) Calcule f_x y f_y en $(0,0)$.

   c) Concluya sobre la diferenciabilidad de f en $(0,0)$ usando alguno de los resultados obtenidos en los literales *a*) o *b*).

3. (15 p.) Sean f, g funciones de variable real de clase C^2 en $\mathbb{R}$. Sea $z = f(u) + g(v)$, siendo $u = xy$, $v = 2x - y$. Demuestre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4u + v^2)\frac{d^2 f}{du^2} + 8\frac{d^2 g}{dv^2}.$$

4. (15 p.) Una empresa que transporta gasolina necesita diseñar un nuevo tipo de contenedor en forma de paralelepípedo rectangular con base cuadrada. El volumen de cada contenedor debe ser de $288m^3$ debido a una restricción de los camiones. Además, el costo de fabricar cinco de las seis caras del contenedor es de 3 dólares por cada m^2. La base del contenedor debe ser de un material diferente, por lo que cada m^2 cuesta 5 dólares. Empleando el método de Lagrange, determine las dimensiones del contenedor que minimizan su costo de fabricación.

5. (15 p.) Considere la región plana

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - 3 \leq y \leq -x^2 + 5\}$$

y sea f una función continua en D.

a) Dibuje y sombree D, especificando ejes coordenados y vértices.

b) Plantear $\int_D \int f(x, y) dA$ en el orden $dx\, dy$.

6. (20 p.) Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (x - y)\mathbf{i} + (y - z)\mathbf{j} + (z - x)\mathbf{k}$ un campo vectorial definido en $\mathbb{R}^3$. Sea S la superficie del sólido Q limitado por las superficies $z = 9 - x^2 - y^2$ y $z = 3x^2 + 3y^2 - 16$. Empleando el teorema de la divergencia de Gauss, determine el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S orientado hacia el exterior de Q.