Primer tema – a (25 p)

Comprobar el Teorema de Gauss para el campo vectorial $F(x,y,z) = (x^2, xy, z)$, siendo la región E el sólido limitado por la superficie $z = 4 - x^2 - y^2$ y el plano XY

Por integrales de superficie:

Vamos a dividir la superficie en dos:

- S_1 será el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$, el cual está dado como una función de x e y, y por lo tanto, podemos tomar a estas variables como parámetros. Entones:

$\mathbf{r}(x,y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + (4 - x^2 - y^2)\,\mathbf{k}$ con $x^2 + y^2 \leq 4$

$\mathbf{r}_x(x,y) = 1\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} - 2x\,\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_y(x,y) = 0\,\mathbf{i} + 1\,\mathbf{j} - 2y\,\mathbf{k}$

$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$

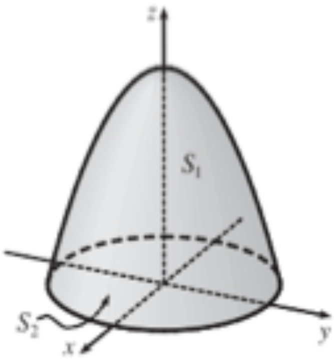
$\mathbf{F}(\mathbf{r}(x,y)) = x^2\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + (4 - x^2 - y^2)\mathbf{k}$

Aplicando la definición 9 de la pág. 1117 tenemos:

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(x,y)) \cdot (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y)\, dA = \iint_D 2x^3 + 2xy^2 + 4 - x^2 - y^2\, dA$$

$$= \iint_D 2x(x^2 + y^2) + 4 - (x^2 + y^2)\, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{2} (2r^3 cos\theta + 4 - r^2)\, r\, dr d\theta = 8\pi$$

- S_2 será el círculo de radio 2 sobre el plano xy. Parametrizándolo y procediendo como antes, tenemos:



$\mathbf{r}(r,\theta) = rcos\theta\,\mathbf{i} + rsen\theta\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$ con $0 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$\mathbf{r}_r(r,\theta) = cos\theta\,\mathbf{i} + sen\theta\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_\theta(r,\theta) = -rsen\theta\,\mathbf{i} + rcos\theta\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$

$\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta = 0\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + r\,\mathbf{k}$

$\mathbf{F}(\mathbf{r}(r,\theta)) = (rcos\theta)^2\,\mathbf{i} + r^2 cos\theta sen\theta\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(r,\theta)) \cdot (\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta)\, dA = \iint_D 0\, dA = 0$$

Luego,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 8\pi$$

Por Gauss:

La región E se muestra en la figura. Sobre el plano xy tenemos un círculo de radio 2, $x^2 + y^2 = 4$, de aquí obtenemos:

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq r \leq 2$.

Al observar z, vemos que este varía entre el plano xy y el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ que, en coordenadas cilíndricas es $z = 4 - r^2$, por lo tanto $0 \leq z \leq 4 - r^2$.

$div\mathbf{F} = 3x + 1$

Entonces:

$$\iiint_E \ div\mathbf{F}\, dV = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{4-r^2} [3\,(rcos\theta) + 1]\ r\, dz\, d\theta\, dr$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} [3\,(rcos\theta) + 1] r\,(4 - r^2) d\theta dr$$

$$= \int_0^2 r(4 - r^2)(3rsen\theta + \theta)\Big|_0^{2\pi}$$

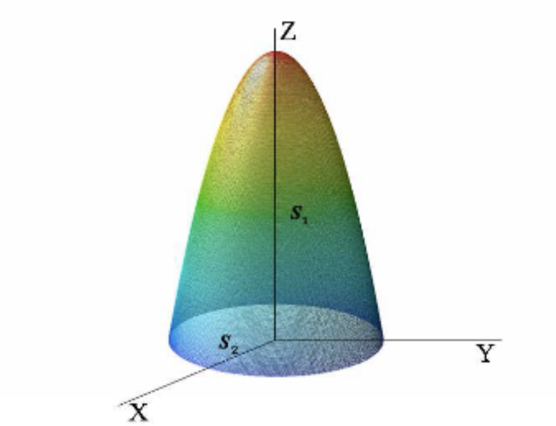
$$= 2\pi \int_0^2 4r - r^3 dr = 8\pi$$

Primer tema – b (25 p)

Comprobar el Teorema de Gauss para el campo vectorial $F(x, y, z) = (x, y, 2z)$, a través de la superficie cerrada S que limita el sólido $V = 4\{(x, y, z); 0 \leq z \leq 4 - 2x^2 - 2y^2$

Solución:

a) La superficie cerrada S que limita el sólido V está compuesta por dos superficies: una porción del paraboloide $z = 4 - 2x^2 - 2y^2$, S_1, y la tapa inferior S_2.



Por tanto, hay que calcular el flujo de F a través de cada una de ellas hacia el exterior de la superficie cerrada.

- Parametrizamos S_1 de ecuación $z = 4 - 2x^2 - 2y^2$ (paraboloide):

$$r_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \ : \quad r_1(x,y) = (x, y, 4 - 2x^2 - 2y^2) \ ,$$

Donde las variables x e y varían en la proyección del sólido en el plano XY, que calculamos a partir de la interseccción del paraboloide $z = 4 - 2x^2 - 2y^2$ con el plano $z = 0$.

$$S_1 = r_1(D) \ , \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

El vector normal

$$N_1(x,y) = \frac{\partial r_1}{\partial x} \wedge \frac{\partial r_1}{\partial y} = (4x, 4y, 1) \ ,$$

tiene tercera componente positiva y por lo tanto su sentido es hacia el exterior de S. El flujo de F a través de S_1 es

$$\begin{aligned}\int_{S_1} F \cdot n \, dS &= \iint_D F(r_1(x,y)) \cdot N_1(x,y) \, dxdy = \\ &= \iint_D (x, y, 8 - 4x^2 - 4y^2) \cdot (4x, 4y, 1) \ dxdy = \\ &= \iint_D 8 dxdy = 16\pi.\end{aligned}$$

- Parametrizamos S_2, tapa inferior de ecuación $z = 0$,

$$r_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \ : \quad r_2(x,y) = (x, y, 0) \ , \quad S_2 = r_2(D).$$

El vector normal

$$N_2(x,y) = \frac{\partial r_2}{\partial x} \wedge \frac{\partial r_2}{\partial y} = (0, 0, 1) \ ,$$

está dirigido hacia el interior de la superficie S. Calculamos,

$$\begin{aligned}\int_{S_2} F \cdot n \, dS &= \iint_D F(r_2(x,y)) \cdot (-N_2(x,y)) \, dxdy = \\ &= \iint_D (x, y, 0) \cdot (0, 0, -1) \ dxdy = 0.\end{aligned}$$

Por tanto, el flujo de F hacia el exterior de la superficie cerrada S es:

$$\int_S F \cdot n \, dS = \int_{S_1} F \cdot n \, dS + \int_{S_2} F \cdot n \, dS = 16\pi.$$

b) El flujo de F, utilizando el teorema de Gauss, puede calcularse como la integral triple en V de la divergencia de F.

$$\mathrm{div}F(x,y,z) = 1+1+2 = 4.$$

Entonces,

$$\int_S F\cdot n\, dS = \iiint_V \mathrm{div}F\, dxdydz \;= \iiint_V 4\, dxdydz =$$
$$= 4\iint_D \left(\int_0^{4-2x^2-2y^2} dz\right) dxdy = 4\iint_D (4-2x^2-2y^2)\, dxdy$$

Para hacer esta integral doble en el circulo D pasamos a coordenadas polares con

$$\rho \in]0,\sqrt{2}[\,, \quad \varphi \in]0,2\pi[.$$

Por tanto,

$$\int_S F\cdot n\, dS = 4\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} (4-2\rho^2)\rho\, d\rho d\varphi = 16\pi.$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe aplicar el teorema de la divergencia y realizar su comprobación por medio de integrales de superficie.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No puede establecer correctamente el Teorema de Gauss ni las dos integrales de superficie requeridas.	Establece correctamente el Teorema de Gauss y las dos integrales de superficie pero no resuelve correctamente ninguno de los dos métodos.	Resuelve corectamente uno de los dos métodos pero comete errores en uno de ellos.	Resuelve correctamente ambos métodos y comprueba la igualdad de la respuesta.
	0-5	6-15	16-24	25

Segundo tema - a (15 p)

Utilizando el Teorema de Stokes determine la circulación del campo $\vec{a} = (2xz, x^2 - y, 2z - x^2)$ a lo largo del circuito del primer octante limitado por la esfera centrada en el origen y de radio 1, el plano $z = x$ y los planos XZ y YZ

Vamos a resolver a continuación la integral utilizando el teorema de Stokes. Para ello, calculamos

$$\operatorname{rot} \overrightarrow{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2xz & x^2 - y & 2z - x^2 \end{vmatrix} = (0, 4x, 2x).$$

Además, si S es la superficie encerrada por el circuito C, entonces

$$S : \begin{cases} z = y \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = y \\ x^2 + 2y^2 \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \end{cases}$$

Esto permite definir la superficie S por su fórmula explícita $z = y$ a lo largo de la región $D : x^2 + 2y^2 \leq 1$, con $x \geq 0$, $y \geq 0$.

De este modo, el vector normal exterior a la superficie es $\overrightarrow{n} = (0, -1, 1)$ y, como consecuencia del teorema de Stokes,

$$\int_C \overrightarrow{a}\, ds = \iint_S \operatorname{rot} a\, dS = \iint_D (0, 4x, 2x) \cdot (0, -1, 1)\, dxdy = \iint_D -2x\, dxdy.$$

Resolvemos la integral doble utilizando el cambio de coordenadas

$$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = (1/\sqrt{2}) u \operatorname{sen} v \end{cases}, \quad (0 \leq u \leq 1,\ 0 \leq v \leq \pi/2).$$

Como el jacobiano de la transformación es $J = u/\sqrt{2}$, tenemos:

$$\iint_D -2x\, dxdy = \int_0^1 du \int_0^{\pi/2} -2u \cos v \cdot (1/\sqrt{2}) u\, dv = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Segundo tema - b (15 p)

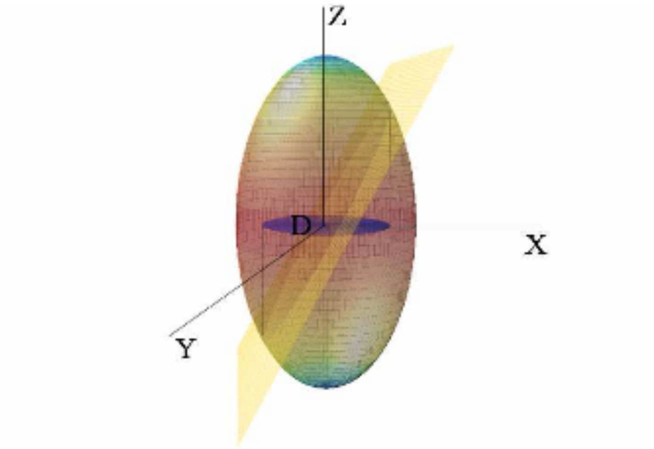
Calcule, utilizando el Teorema de Stokes, la integral curvilínea $\int_{\gamma} (2x + y - z)dx + (2x + z)dy + (2x - y - z)\,dz$, siendo γ una parametrización de las superficies: $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$; $2x - z = 0$

El teorema de Stokes relaciona la integral curvilínea de un campo vectorial a lo largo de una curva cerrada con el flujo del rotacional del campo a través de una superficie cuyo borde sea la curva en cuestión. En este caso la superficie más sencilla es la superficie plana que parametrizamos mediante:

$$r : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad r(x, y) = (x, y, 2x)\,,$$

siendo el vector normal:

$$N(x, y) = \frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} = (-2, 0, 1).$$



Para hallar el conjunto en el que varían los parámetros proyectamos la curva sobre el plano XY:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - z = 0 \\ 4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} z = 2x \\ 2x^2 + y^2 = 1 \text{ (Proyección)} \end{array}\right.$$

Por tanto, el conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ tal que $S = r(D)$ es el interior de la elipse $2x^2 + y^2 = 1$,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad 2x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Calculamos el rotacional de $F = (2x + y - z\,,\, 2x + z\,,\, 2x - y - z)$:

$$\text{rot}F(x, y, z) = (-2, -3, 1).$$

Entonces, si γ es una parametrización de la curva intersección del elipsoide y el plano tal que su proyección en el plano XY se recorre en sentido positivo, el teorema de Stokes dice que

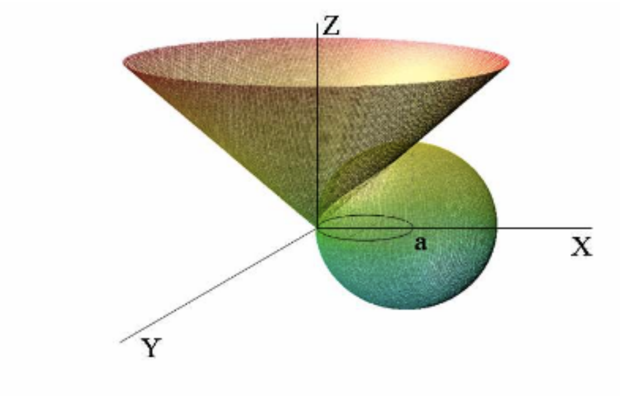
$$\int_\gamma F = \int_S \text{rot}F \, dS = \iint_D (-2, -3, 1) \cdot (-2, 0, 1) \, dxdy =$$
$$= 5 \iint_D dxdy = 5\,\mu(D) = \frac{5\pi}{\sqrt{2}}.$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
El estudiante sabe aplicar el teorema de Stokes para determinar la circulación de un campo a lo largo de una trayectoria.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	Calcula correctamente el rotacional del campo y define correctamente la superficie; o comete errores en ellos.	Calcula el rotacional, define la superficie y el vector normal, y establece correctamente el teorema de Stokes.	Desarrolla correctamente todo lo necesario para resolver la integral pero comete errores en la solución o no cambia de sistema.	Desarrolla correctamente todo el ejercicio incluyendo el cambio de coordenadas respectivo.
	0-5	6-10	11-14	15

Tercer tema - a (15 p)

Determine el área de la porción de la superficie cónica $x^2 + y^2 = z^2$ situada por encima del plano $z = 0$ y limitada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$



Hemos de parametrizar la superficie de la cual hay que hallar el área, esto es, la hoja superior (pues $z \geq 0$) del cono $x^2 + y^2 = z^2$. Como S es la gráfica de la función $z = \sqrt{x^2 + y^2} = f(x, y)$ sobre la región D (que queda definida por la intersección del cono y la esfera)

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2ax \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad 2(x^2 + y^2) = 2ax \quad \rightarrow \quad (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{4}\right\}$$

entonces $S = r(D)$ siendo r la parametrización:

$$r(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}), \quad \forall (x, y) \in D.$$

El producto vectorial fundamental es:

$$N(x, y) = (-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), 1) = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1\right)$$

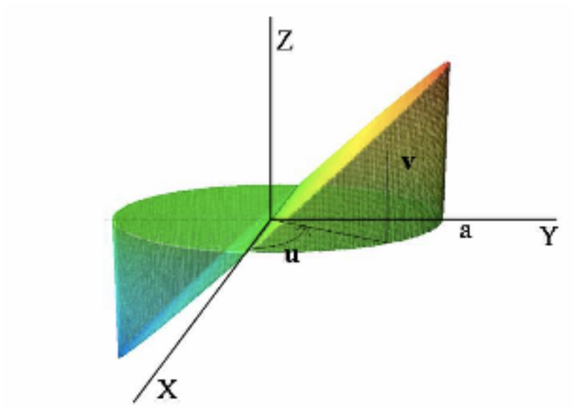
$$\|N(x, y)\| = \sqrt{2}.$$

y el área pedida vale:

$$a(S) = \iint_D \|N(x, y)\| dxdy = \iint_D \sqrt{2}\, dxdy = \sqrt{2}\, \mu(D) = \sqrt{2}\, \pi \frac{a^2}{4}$$

Tercer tema - b (15 p)

Dado el recinto limitado por los planos $z = y$, $z = 0$ y el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$. Determine el área de la porción de la superficie cilíndrica comprendida entre los dos planos dados.



En el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ podemos tomar la parametrización:

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cos u \\ y = a\,\mathrm{sen}u \\ z = v \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad r(u,v) = (a\cos u, a\,\mathrm{sen}u, v), \quad (u,v) \in D$$

siendo

$$D = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq u \leq \pi, \ 0 \leq v \leq a\mathrm{sen}u\right\}$$

De esta manera $S = r(D)$ es la mitad de la superficie que se describe en el enunciado porque sólo consideramos la porción del cilindro con $z \geq 0$. El producto vectorial fundamental es (véase el problema 1)

$$N(u,v) = (a\cos u, a\,\mathrm{sen}u, 0), \quad \|N\| = a$$

y el área de S

$$a(S) = \iint_D a\,du\,dv =$$
$$= \int_0^\pi \left(\int_0^{a\,senu} a\,dv\right) du = \int_0^\pi a^2\mathrm{sen}u\,du = -a^2\cos u\Big]_0^\pi = 2a^2.$$

Por tanto, el área que nos piden, que es el doble que la de S, vale: $\quad 4a^2$.

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
	Inicial	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante sabe calcular el área de una superficie tridimensional.	Bosqueja el escenario del ejercicio y detemina la región de integración o comete errores.	Adicionalmente obtiene el producto vectorial fundamental y su modulo y establece la integral de área o comete errores en estos procesos.	Resuelve coorectamente el ejercicio hasta obtener la integral de área pero comete errores al resolverla.	Resuelve correctamente todo el ejercicio respetando los pasos requeridos y obteniendo el valor del área solicitado.
	0-5	6-10	11-14	15

Cuarto tema - a (10 p)

Cambiar el orden de integración de la siguiente integral doble:

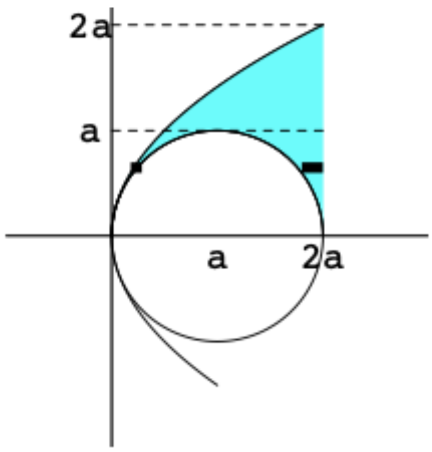
$$\int_0^{2a}\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\,dy\,dx \quad ; \quad a>0$$

NOTA: Usted debe obligatoriamente seguir los siguientes pasos:

1. Analizar el tipo de barrido original

2. Representar gráficamente la región original de integración en el plano

3. Plantear la integral(es) con el nuevo barrido



Si observamos la región de integración, al cambiar el orden de integración debemos descomponer la integral en tres sumandos:

$$\int_0^{a}\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy + \int_0^{a}\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)\,dx\,dy + \int_a^{2a}\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)\,dx\,dy$$

Cuarto tema - b (10 p)

Cambiar el orden de integración de la siguiente integral doble:

$$\int_{0}^{3}\int_{\frac{4x}{3}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)\ dy\ dx$$

NOTA: Usted debe obligatoriamente seguir los siguientes pasos:

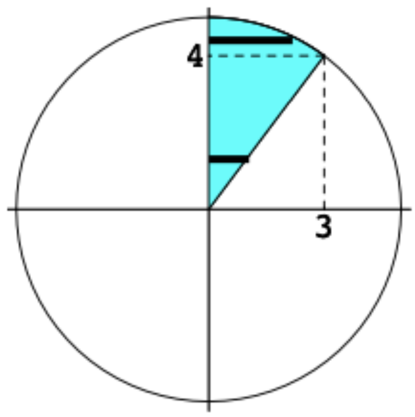
1. Analizar el tipo de barrido original

2. Representar gráficamente la región original de integración en el plano

3. Plantear la integral(es) con el nuevo barrido

La región de integración, indicada en la figura, es la que verifica el sistema

$$0 \le x \le 3,\ 4x/3 \le y \le \sqrt{25-x^2}.$$



Como el punto $(3,4)$ es la intersección entre la circunferencia y la recta, la nueva integral se escribirá como

$$\int_0^3 dx \int_{4x/3}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)\,dy = \int_0^4 dy \int_0^{3y/4} f(x,y)\,dx + \int_4^5 dy \int_0^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante entiende la estructura de una integral doble y sabe como invertir el orden de integración.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No puede interpretar la integral y/o no puede graficar correctamente la región de integración.	Interpreta correctamente la integral y bosqueja la región de integración.	Establece correctamente las 3 integrales requeridas e barrido horizontal o comete errores en los límites de integración respectivos.	Resuelve correctamente el ejercicio entregando las tres integrales requeridas para el barrido horizontal.
	0-3	4-5	6-9	10

Quinto tema – a (15 p)

Sea $\boldsymbol{I = \int_{\pi}^{2\pi} \int_{e}^{e^2} r\, ln(r)\, dr\, d\theta}$

a) **Resuelva la integral**
b) **Dibuje la región de integración**
c) **Plantee la integral en coordenadas cartesianas**

a) $$I = \int_{\pi}^{2\pi}\int_{e}^{e^2} \mathrm{r}\ln \mathrm{r}\mathrm{d}\mathrm{r}\,\mathrm{d}\theta = \int_{\pi}^{2\pi}\left[\frac{r^2 \ln r}{2} - \frac{r^2}{4}\right]_{e}^{e^2} d\theta = \int_{\pi}^{2\pi}\left[\frac{e^4 \ln e^2}{2} - \frac{e^4}{4} - \frac{e^2 \ln e}{2} + \frac{e^2}{4}\right] d\theta =$$
$$= \left(\frac{3e^4}{4} - \frac{e^2}{4}\right)[\theta]_{\pi}^{2\pi} = \frac{\pi}{2}\left(3\mathrm{e}^4 - e^2\right)$$

b) Observe que

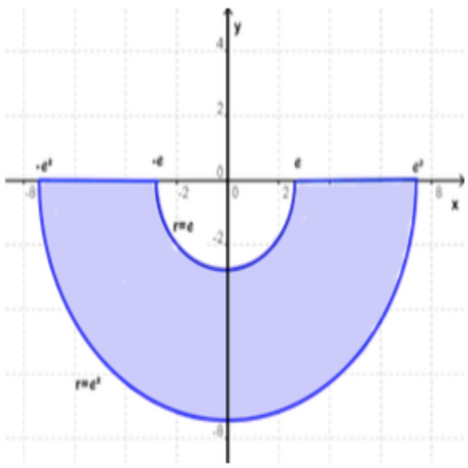
$$D = \{(r,\theta)/ \quad e \le r \le e^2 \quad \text{y} \quad \pi \le \theta \le 2\pi\}$$

Como

$$e \le r \le e^2 \Rightarrow e^2 \le r^2 \le e^4 \Rightarrow e^2 \le x^2 + y^2 \le e^4 \quad \text{y} \quad \pi \le \theta \le 2\pi$$

D es la parte inferior del anillo limitado por las circunferencias de centro $(0,0)$ y radios *e* y e^2 respectivamente, es decir

$$D = \{(x,y) \in R^2 / \quad e^2 \le x^2 + y^2 \le \mathrm{e}^4, \quad y \le 0\}$$



c) Al plantear la integral en coordenadas cartesianas, se obtiene:

$$I = \int_{-e^2}^{-e}\int_{-\sqrt{e^4-x^2}}^{0} \ln\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{-e}^{e}\int_{-\sqrt{e^4-x^2}}^{-\sqrt{e^2-x^2}} \ln\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{e}^{e^2}\int_{-\sqrt{e^4-x^2}}^{0} \ln\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe resolver una integral doble en polares, dibujar la región de integración y plantear la misma integral en coordenadas cartesianas	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No puede resolver correctamente la integral en polares o bosquejar la región de integración.	Resuelve correctamente la integral doble en polares, bosqueja la región de integración pero tiene problemas en plantear las 3 integrales requeridas en cartesianas.	Establece las tres integrales dobles requeridas pero tiene errores en algunos de los límites de integración.	Resuelve correctamente todas las tres partes del ejercicio sin cometer error alguno.
	0-5	6-10	11-14	15