Facultad de
Ciencias Naturales y Matemáticas

Año: 2025	**Período**: Segundo
Materia: Análisis funcional	**Profesora**: Mireya R. Bracamonte P.
Evaluación: Segunda	**Tiempo de duración**: 120 minutos
Fecha: 25 de Agosto de 2025	**Calificación obtenida** : /50

COMPROMISO DE HONOR

Yo, ... al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que puedo usar un lápiz o esferográfico; que sólo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen; y, cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído, debo apagarlo y depositarlo en la parte anterior del aula, junto con algún otro material no permitido en el examen. No debo, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a las que se entreguen en esta evaluación. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.

Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptar la declaración anterior.

En calidad de estudiante de ESPOL, asumo el compromiso de combatir la mediocridad y actuar con total honestidad. Por consiguiente, rechazo la práctica de copiar tanto en mis propios trabajos como en permitir que otros lo hagan.

Firma:.. Número de matrícula: ....

Instrucciones:

1. Antes de comenzar, verifique que el examen esté completo y que no haya páginas faltantes o errores de impresión. Si encuentra algún problema, notifíquelo al supervisor del examen de inmediato.

2. Administre su tiempo de manera efectiva para completar todas las preguntas dentro del límite de tiempo establecido.

3. Recuerde seguir las instrucciones específicas.

4. Trabaje de manera concentrada y evite distracciones durante todo el período de examen.

5. Mantenga un comportamiento adecuado y respetuoso en todo momento durante el examen. Cualquier violación de las normas de conducta puede resultar en consecuencias disciplinarias.

Parte I: (10 puntos) A continuación se presenta una lista de afirmaciones, indique si la afirmación es verdadera o falsa (No tiene que justificar su respuesta).

1. $\square$ Si $T \in B(X,Y)$. Si $(x_j)_j$ converge débilmente a x, entonces $(Tx_j)_j$ converge débilmente a Tx.
2. $\square$ Si X, Y son espacios normados, $\Gamma \subseteq B(X,Y)$ y para cada $x \in X$, el conjunto $\{Tx \colon T \in \Gamma\}$ es acotado en Y, entonces el conjunto $\{\|T\| : T \in \Gamma\}$ es acotado.
3. $\square$ Sea X un espacio normado, $Y \subseteq X$ subespacio y $f \in Y^*$. Entonces existe $F \in X^*$ que extiende a f con $\|F\| = \|f\|$.
4. $\square$ El Teorema de Hahn Banach nos garantiza que el operador identidad sobre c_0 tiene una extensión lineal continua a ℓ^∞.
5. $\square$ Si X es un espacio normado y x, y son dos elementos diferentes de X entonces existe x^* en el dual de X tal que $x^*(x-y) \neq 0$.
6. $\square$ Si X y Y son dos espacios normados, no triviales, entonces $B(X,Y)$ el espacio de todos los operadores lineales acotados de X en Y, es un espacio de Banach.
7. $\square$ Si el dual de un espacio normado X es separable, entonces X es separable.
8. $\square$ Un espacio H es de Hilbert si y sólo si es reflexivo.
9. $\square$ Si $T : X \to Y$ es lineal y su grafo $\mathcal{G}(T) = \{(x, Tx) : x \in X\}$ es cerrado en $X \times Y$, con X y Y espacios de Banach, entonces T es continuo.
10. $\square$ Toda aplicación lineal continua y sobreyectiva $T : X \to Y$ entre espacios de Banach es abierta, y si además es biyectiva entonces T^{-1} es continua.

Parte II: **Desarrollo**. A continuación, se presentan varios problemas que requieren de su análisis y solución detallada. La presentación y el rigor de los detalles son fundamentales para una mejor calificación.

$\boxed{10}$ 1. Sea M un subespacio de un espacio normado X. Supongamos que existe $x \in X$ tal que x no está en la clausura de M. Demuestre que existe $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*\| = 1$, $x^*(M) = \{0\}$ y $x^*(x)$ es un número real positivo.

$\boxed{10}$ 2. Sea H un espacio de Hilbert, $x \in H$ y $(x_n)_n$ una sucesión en H.

1. Si $(x_n)_n$ una sucesión en H que converge débilmente a $x \in H$ y $\|x_n\| \to \|x\|$ cuando $n \to \infty$, demuestre que $(x_n)_n$ converge en H.
2. Suponga que $(x_n)_n, (y_n)_n$ son sucesiones en H tales que

$$x_n \xrightarrow{w} x \quad \text{y} \quad \|y_n - y\| \to 0 \qquad n \to \infty.$$

Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n \rangle = \langle x, y \rangle$.

.

$\boxed{10}$ 3. Si X es un espacio reflexivo. Demuestre que X^* no tienen subespacios propios cerrados que separe puntos.

$\boxed{10}$ 4. Sea H un espacio de Hilbert y $T : H \to H$ un operador lineal tal que $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$. Demuestre que T es continuo.