Medida y Probabilidad

Segunda Evaluación

6 de febrero de 2018

1. Usando los 3 axiomas de probabilidad:
   i. No negativad: $P(A) \geq 0$
   ii. σ-aditividad: $P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ para una secuencia contable de eventos disjuntos $(m \neq n \rightarrow A_m \cap A_n = \emptyset)$
   iii. Unitariedad: $P(\Omega) = 1)$

   Demuestre las siguientes propiedades:
   a. (6 puntos) Complemento: $P(A^c) = 1 - P(A)$.

   b. (6 puntos) Monotonicidad: Si $A \subset B$ entonces $P(A) \leq P(B)$.

   c. (8 puntos) Unión: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

2. Demuestre que si P_1 y P_2 son medidas de probabilidad (satisfacen los 3 axiomas de probabilidad) definidas en $(\Omega, \mathcal{B})$, entonces la clase de conjuntos $\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{B} : P_1(A) = P_2(A)\}$ es un sistema-λ. Recuerde que los axiomas que debe probar son:
   a. (4 puntos) $\Omega \in \mathcal{L}$.

   b. (6 puntos) $A \in \mathcal{L} \to A^c \in \mathcal{L}$ (cerrado bajo complemento).

   c. (10 puntos) Si $A_n \in \mathcal{L}$ y $m \neq n \to A_m \cap A_n = \emptyset$, entonces $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}$ (cerrado bajo uniones contables disjuntas).

3. El teorema de Dynkin establece que si $\mathcal{P}$ es un sistema-π y $\mathcal{L}$ es un sistema-λ tal que $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$, entonces el σ-campo generado por $\mathcal{P}$ es subcojunto de $\mathcal{L}$, es decir, $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$. Basándose en este resultado demuestre:
   a. (10 puntos) El σ-campo y el sistema-λ generados por un sistema-π son iguales, es decir, si $\mathcal{P}$ es un sistema-π, entonces $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{L}(\mathcal{P})$.

   b. (10 puntos) Si P_1 y P_2 son medidas de probabilidad definidas en $(\Omega, \mathcal{B})$, y si $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$ es un sistema-π tal que $\forall A \in \mathcal{P} : P_1(A) = P_2(A)$, entonces $\forall A \in \sigma(\mathcal{P}) : P_1(A) = P_2(A)$.

4. Suponga que Ω es un conjunto no vacío y que $\mathcal{F}_0$ es la colección de todos los subconjuntos de Ω tales que $A \in \mathcal{F}_0$ si y solo si A es finito o A^c es finito. Demuestre que $\mathcal{F}_0$ es un campo, probando que:
   a. (4 puntos) $\Omega \in \mathcal{F}_0$.

   b. (6 puntos) $A \in \mathcal{F}_0 \to A^c \in \mathcal{F}_0$.

   c. (10 puntos) $A, B \in \mathcal{F}_0 \to A \cup B \in \mathcal{F}_0$.

5. Suponga que $\Omega = \mathbb{N}$ (números naturales) y considere el campo $\mathcal{F}_0$ del problema anterior. Defina la función de conjuntos $P : \mathcal{F}_0 \to \mathbb{R}$, tal que $P(A) = 0$ cuando A es finito, y $P(A) = 1$ cuando A es infinito. Es claro que $P(\Omega) = 1$ y que $\forall A \in \mathcal{F}_0 : P(A) \geq 0$, sin embargo esta no es una medida de probabilidad.
   a. (10 puntos) Demuestre que P es aditiva, es decir, $A \cap B = \emptyset \to P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

   b. (10 puntos) Demuestre que P no es σ-aditiva usando un contraejemplo, es decir, encuentre una secuencia $A_n \in \mathcal{F}_0$ de conjuntos disjuntos ($m \neq n \to A_m \cap A_n = \emptyset$) en el que $P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \neq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.