**ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL**
**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS**
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**

| | |
|---|---|
| Examen: | |
| Lecciones: | |
| Talleres: | |
| Deberes: | |

| | |
|---|---|
| Total: | |

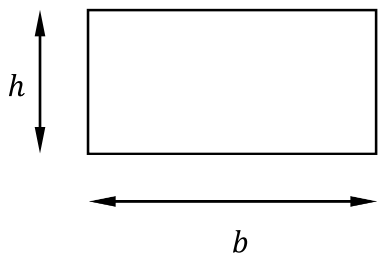
| | | | |
|---|---|---|---|
| **AÑO:** | 2016 | **PERÍODO:** | SEGUNDO TÉRMINO |
| **MATERIA:** | Cálculo de una variable | **PROFESOR:** | |
| **EVALUACIÓN:** | SEGUNDA | **FECHA:** | 13/febrero/2017 |

## S O L U C I Ó N y R Ú B R I C A

**1) (10 PUNTOS) Un jardín rectangular debe tener un área de 3000 pies cuadrados. Tres de los cuatro lados del jardín serán cubiertos con una malla (cerca) con un costo de \$ 3 por pie y el cuarto lado será cubierto con otra malla que cuesta \$ 2 por pie. Realizando un análisis de cálculo diferencial, determine las longitudes, en pies, de cada lado del jardín que minimicen el costo total de la malla rectangular.**

**Solución:**

Se realizará una representación geométrica de la situación planteada.




Las dimensiones del rectángulo son:
$b$: longitud de la base.
$h$: longitud de la altura.

Se proporciona el dato del área de la superficie del jardín, con lo cual se puede despejar una variable en términos de la otra:

$$A = b * h = 3000 \quad \rightarrow \quad h = \frac{3000}{b}$$

El costo total $C$ a minimizar, para cercar el jardín, tiene que ver con su perímetro y es:

$$C = (2b + h)\left(\frac{\$3}{pie}\right) + h\left(\frac{\$2}{pie}\right) = 6b + 5h \quad [\$]$$

Reemplazando:

$$C = 6b + 5\left(\frac{3000}{b}\right) = 6b + \frac{15000}{b}$$

Se obtiene la primera derivada de la función de costo y se iguala a 0:

$$C' = 6 - \frac{15000}{b^2} = 0$$

$$\frac{15000}{b^2} = 6 \quad \rightarrow \quad b^2 = \frac{15000}{6} \quad \rightarrow \quad b^2 = 2500 \quad \rightarrow \quad b = 50\,pies$$

Se obtiene la segunda derivada de la función de costo y se verifica el signo:

$C'' = \frac{30000}{b^3} > 0$ $\rightarrow$ Se trata de un valor mínimo.

Se reemplaza y se obtiene el otro valor, $h = 60\ pies$.

Las dimensiones que debe tener el jardín rectangular para que se incurra en un costo mínimo son $50\ pies$ y $60\ pies$.

**Rúbrica:**

| **Capacidades deseadas** | **Desempeño** | | | |
|---|---|---|---|---|
| **El estudiante plantea un problema de optimización con expresiones de geometría plana, realiza el análisis de cálculo diferencial e interpreta los resultados encontrados.** | **Insuficiente** | **En desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelente** |
| | **No logra asociar los datos proporcionados o se limita al planteo del área de la superficie de un rectángulo.** | **Plantea la expresión de área de la superficie de un rectángulo y determina bien la función de costo a minimizar, pero se equivoca el derivar.** | **Plantea la expresión de área de la superficie de un rectángulo, determina bien la función de costo a minimizar, aplica el criterio de la primera derivada, pero no aplica el criterio de la segunda derivada.** | **Plantea la expresión de área de la superficie de un rectángulo, determina bien la función de costo a minimizar, aplica el criterio de la primera y de la segunda derivada; y, determina las dimensiones solicitadas.** |
| | **0 – 1** | **2 – 5** | **6 – 8** | **9 – 10** |

**2) Resuelva:**

**a) (5 PUNTOS)** $\int (2x+5)e^{-x}\, dx$

**Solución:**

Se aplica la propiedad de linealidad de las integrales indefinidas:

$$\int (2x+5)e^{-x}\, dx = 2\int xe^{-x}\, dx + 5\int e^{-x}\, dx$$

Al término $\int xe^{-x}\, dx$**,** se le aplica la técnica de integración por partes:

$$\begin{array}{ll} u = x & dv = e^{-x}dx \\ du = dx & v = -e^{-x} \end{array}$$

$$\int xe^{-x}\, dx = -xe^{-x} - \int \left(-e^{-x}\right) dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

Por lo tanto:

$$\int(2x+5)e^{-x}\,dx=2\left(-xe^{-x}-e^{-x}\right)+5\int e^{-x}\,dx=-2xe^{-x}-2e^{-x}-5e^{-x}+C$$

$$\boxed{\int(2x+5)e^{-x}\,dx=-2xe^{-x}-7e^{-x}+C}$$

**Rúbrica:**

| **Capacidades deseadas** | **Desempeño** | | | |
|---|---|---|---|---|
| **El estudiante aplica la propiedad de linealidad de las integrales indefinidas, identifica que debe aplicar la técnica de integración por partes y conoce la antiderivada de la función exponencial.** | **Insuficiente** | **En desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelente** |
| | **No logra identificar la técnica de integración que debe aplicar, ni tampoco sabe la antiderivada de la función exponencial.** | **Aplica la propiedad de linealidad de las integrales indefinidas, pero no identifica la técnica de integración que debe usar o se equivoca al integrar la función exponencial.** | **Aplica la propiedad de linealidad de las integrales indefinidas, identifica la técnica de integración que debe usar, pero no integra correctamente alguno de los términos.** | **Aplica la propiedad de linealidad de las integrales indefinidas, identifica que debe aplicar la técnica de integración por partes, integra correctamente y realiza la simplificación de términos semejantes.** |
| | **0** | **1** | **2 – 3** | **4 – 5** |

**b) (5 PUNTOS)** $\displaystyle\int\frac{5x-7}{(x^2-1)(x-3)}\,dx$

## Solución:

Se aplica la técnica de integración por fracciones parciales:

$$\frac{5x-7}{(x^2-1)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-3}$$

$$\frac{5x-7}{\cancel{(x^2-1)(x-3)}}=\frac{A(x-1)(x-3)+B(x+1)(x-3)+C(x+1)(x-1)}{\cancel{(x^2-1)(x-3)}}$$

$$5x-7=A(x-1)(x-3)+B(x+1)(x-3)+C(x+1)(x-1)$$

$$x=-1\quad\to\quad 5(-1)-7=A(-1-1)(-1-3)+0+0\quad\to\quad 8A=-12\quad\to\quad A=-3/2$$

$$x=1\quad\to\quad 5(1)-7=0+B(1+1)(1-3)+0\quad\to\quad -4B=-2\quad\to\quad B=1/2$$

$$x=3\quad\to\quad 5(3)-7=0+0+C(3+1)(3-1)\quad\to\quad 8C=8\quad\to\quad C=1$$

$$\int \frac{5x-7}{(x^2-1)(x-3)}\,dx = \int\left(\frac{-3/2}{x+1}+\frac{1/2}{x-1}+\frac{1}{x-3}\right)dx$$

$$\int \frac{5x-7}{(x^2-1)(x-3)}\,dx = -\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{x-3}$$

$$\boxed{\int \frac{5x-7}{(x^2-1)(x-3)}\,dx = -\frac{3}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x-1|+\ln|x-3|+C}$$

**Rúbrica:**

| **Capacidades deseadas** | **Desempeño** | | | |
|---|---|---|---|---|
| **El estudiante identifica que debe aplicar la técnica de integración por fracciones parciales, determina los valores de un sistema de ecuaciones lineales, aplica la propiedad de linealidad de las integrales indefinidas y conoce la antiderivada de una función racional propia.** | **Insuficiente** | **En desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelente** |
| | **No logra identificar la técnica de integración que debe aplicar, ni resuelve correctamente un sistema de ecuaciones lineales, ni tampoco sabe la antiderivada de una función racional.** | **Identifica la técnica de integración que debe aplicar, pero no resuelve correctamente el sistema de ecuaciones lineales.** | **Identifica la técnica de integración que debe aplicar, resuelve correctamente el sistema de ecuaciones lineales, no aplica bien la propiedad de linealidad de las integrales indefinidas o no integra correctamente alguno de los términos.** | **Identifica que debe aplicar la técnica de integración por fracciones parciales, resuelve correctamente el sistema de ecuaciones lineales, aplica la propiedad de linealidad de las integrales indefinidas e integra correctamente cada término.** |
| | **0** | **1** | **2 – 4** | **5** |

## 3) Calcule:

**a) (5 PUNTOS)** $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(x|x|+\frac{10}{x^2+1}\right)dx$

**Solución:**

Se aplica la propiedad de linealidad de las integrales definidas:

$$\int_{-1}^{1}\left(x|x|+\frac{10}{x^2+1}\right)dx = \int_{-1}^{1} x|x|\,dx + 10\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+1}$$

Observe los integrandos de cada término:

$$f(x)=x|x|=\begin{cases} x^2, & x\geq 0 \\ -x^2, & x<0 \end{cases} \qquad\qquad g(x)=\frac{1}{x^2+1}=g(-x)$$

La función $f$ es impar y la función $g$ es par. Se aplica la propiedad de simetría:

$$\int_{-1}^{1} x|x|\,dx+10\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+1}\;=0+10(2)\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2+1}$$

$$\int_{-1}^{1}\left(x|x|+\frac{10}{x^2+1}\right)dx=20\left(\arctan(x)\right)\Big|_0^1=20\left(\arctan(1)-\arctan(0)\right)=20\left(\frac{\pi}{4}-0\right)$$

$$\boxed{\int_{-1}^{1}\left(x|x|+\frac{10}{x^2+1}\right)dx=5\pi}$$

**Rúbrica:**

| **Capacidades deseadas** | **Desempeño** | | | |
|---|---|---|---|---|
| **El estudiante identifica que debe aplicar la propiedad de simetría y de linealidad de las integrales definidas; y, conoce la antiderivada de una función racional propia.** | **Insuficiente** | **En desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelente** |
| | **No logra identificar las propiedades que debe aplicar de las integrales definidas, ni tampoco sabe la antiderivada de una función racional.** | **Identifica las propiedades de las integrales definidas que debe aplicar, pero no las aplica correctamente.** | **Identifica las propiedades de las integrales definidas que debe aplicar, integra correctamente, pero no evalúa bien alguno de los términos.** | **Identifica que debe aplicar la propiedad de simetría y la propiedad de linealidad de las integrales definidas, integra correctamente; y, evalúa bien cada término.** |
| | **0** | **1** | **2 – 4** | **5** |

**b) (5 PUNTOS)** $\displaystyle\int_{-1}^{2}\left(\; x\; +\operatorname{sgn}(x)\right)dx$

## Solución:

Se establece la regla de correspondencia de la función que se tiene como integrando:

$$x\;+\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases} -1-1, & -1\leq x<0 \\ 0+0, & x=0 \\ 0+1, & 0<x<1 \\ 1+1, & 1\leq x<2 \end{cases}=\begin{cases} -2, & -1\leq x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1, & 0<x<1 \\ 2, & 1\leq x<2 \end{cases}$$

Se aplica la propiedad de linealidad de las integrales definidas:

$$\int_{-1}^{2}\left( \ x \ + \operatorname{sgn}(x)\right) dx = \int_{-1}^{0} -2dx + \int_{0}^{1} dx + \int_{1}^{2} 2dx = -2\,x\Big|_{-1}^{0} + x\Big|_{0}^{1} + 2\,x\Big|_{1}^{2}$$

$$\int_{-1}^{2}\left( \ x \ + \operatorname{sgn}(x)\right) dx = -2\big(0-(-1)\big) + (1-0) + 2(2-1) = \cancel{-2}+1+\cancel{2}$$

$$\boxed{\int_{-1}^{2}\left( \ x \ + \operatorname{sgn}(x)\right) dx = 1}$$

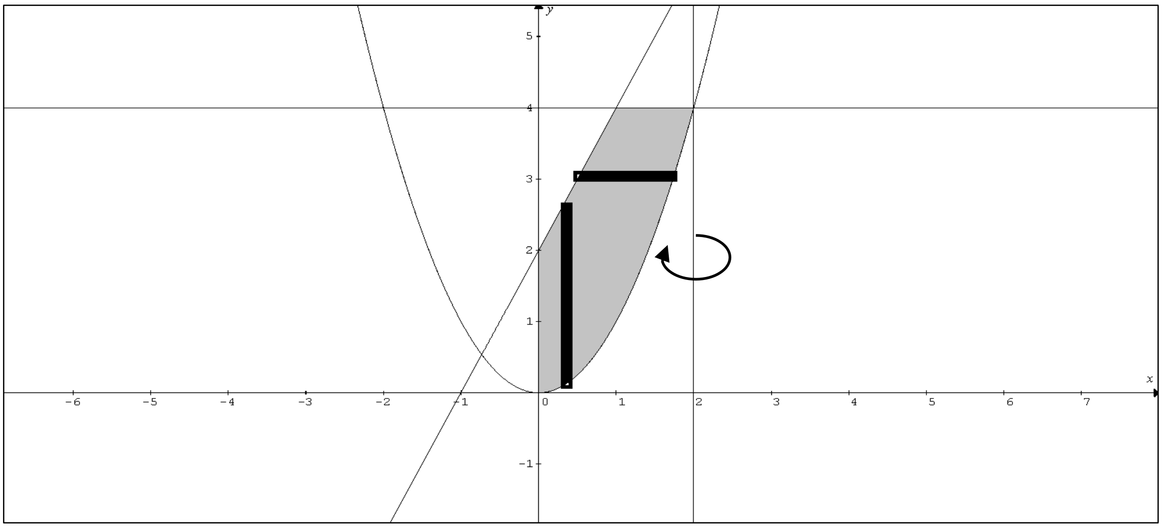
**Rúbrica:**

| Capacidades deseadas | Desempeño | | | |
|---|---|---|---|---|
| El estudiante identifica que debe sumar las funciones especiales dadas, aplicar la propiedad de linealidad de las integrales definidas; y, conocer la antiderivada de una función constante. | **Insuficiente** | **En desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelente** |
| | No logra identificar que debe sumar las funciones dadas, ni aplicar las propiedades de las integrales definidas, ni tampoco sabe la antiderivada de una función constante. | Identifica que debe sumar las funciones dadas aplicando las definiciones de las funciones especiales, pero no lo hace correctamente. | Identifica que debe sumar las funciones dadas aplicando las definiciones de las funciones especiales, integra correctamente, pero no evalúa bien algún término. | Identifica que debe sumar las funciones dadas aplicando las definiciones de las funciones especiales, integra correctamente; y, evalúa bien cada término. |
| | **0** | **1** | **2 – 4** | **5** |

**4) (10 PUNTOS) Dada la región** $R=\left\{(x,y)\in IR^2 \,/\, y\ge x^2 \ \wedge\ y\le 2x+2 \ \wedge\ y\le 4 \ \wedge\ x\ge 0\right\}$**.** **Dibuje la región** $R$ **en el plano cartesiano y calcule el volumen del sólido de revolución, en unidades cúbicas, que se genera al rotar** $R$ **alrededor del eje** $x=2$**.**

**Solución:**

En el plano cartesiano se define la siguiente región:




Se puede considerar una integración con capas cilíndricas:

$$V=2\pi\int_0^1 (2-x)(2x+2-x^2)dx+2\pi\int_1^2 (2-x)(4-x^2)dx$$

$$V=2\pi\int_0^1 (4x+4-2x^2-2x^2-2x+x^3)dx+2\pi\int_1^2 (8-2x^2-4x+x^3)dx$$

$$V=2\pi\int_0^1 (4+2x-4x^2+x^3)dx+2\pi\int_1^2 (8-4x-2x^2+x^3)dx$$

$$V=2\pi\left(4x+x^2-\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1+2\pi\left(8x-2x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_1^2$$

$$V=2\pi\left(4+1-\frac{4}{3}+\frac{1}{4}\right)+2\pi\left(16-8-\frac{16}{3}+4-8+2+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)$$

$$V=2\pi\left(5-\frac{4}{3}+\frac{1}{4}\right)+2\pi\left(6-\frac{14}{3}-\frac{1}{4}\right)$$

$$V=2\pi\left(5-\frac{4}{3}+\frac{1}{4}\right)+2\pi\left(6-\frac{14}{3}-\frac{1}{4}\right)$$

$$V=2\pi\left(\frac{47}{12}\right)+2\pi\left(\frac{13}{12}\right)$$

$$V=10\pi\ u^3$$

O se puede considerar una integración con el método del disco:

$$y=2x+2 \quad\to\quad x=\frac{y-2}{2}$$

$$y=x^2 \quad\to\quad |x|=y$$

$$V=\pi\left[\int_0^2\left(\left(2\right)^2-\left(2-\sqrt{y}\right)^2\right)dy+\int_2^4\left(\left(2-\frac{y-2}{2}\right)^2-\left(2-\sqrt{y}\right)^2\right)dy\right]$$

El resultado que se obtiene es el mismo.

**Rúbrica:**

| **Capacidades deseadas** | **Desempeño** | | | |
|---|---|---|---|---|
| **El estudiante identifica una región en el plano como la solución a un sistema de inecuaciones no lineales, observa el sólido de revolución que se forma y con un análisis de cálculo integral obtiene su volumen.** | **Insuficiente** | **En desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelente** |
| | **No logra identificar la región o no plantea correctamente la integral definida asociada al volumen.** | **Identifica la región a integrar pero tiene problemas para plantear la expresión de cálculo del volumen del sólido de revolución.** | **Identifica la región a integrar, plantea correctamente la expresión de cálculo del volumen del sólido de revolución, pero se equivoca al integrar algún término.** | **Identifica la región a integrar, plantea correctamente la expresión de cálculo del volumen del sólido de revolución, integra correctamente cada término y expresa el resultado.** |
| | **0 – 2** | **3 – 4** | **5 – 9** | **10** |

5) **(10 PUNTOS) De los dos siguientes ejercicios, SELECCIONE SOLAMENTE UNO y resuélvalo.**

   a) **Calcule el área, en unidades cuadradas, de la región interior a $r = 3\operatorname{sen}(\theta)$ y exterior a $r = 2 - \operatorname{sen}(\theta)$ en el primer cuadrante. Bosqueje la gráfica de ambas curvas polares y la región especificada.**

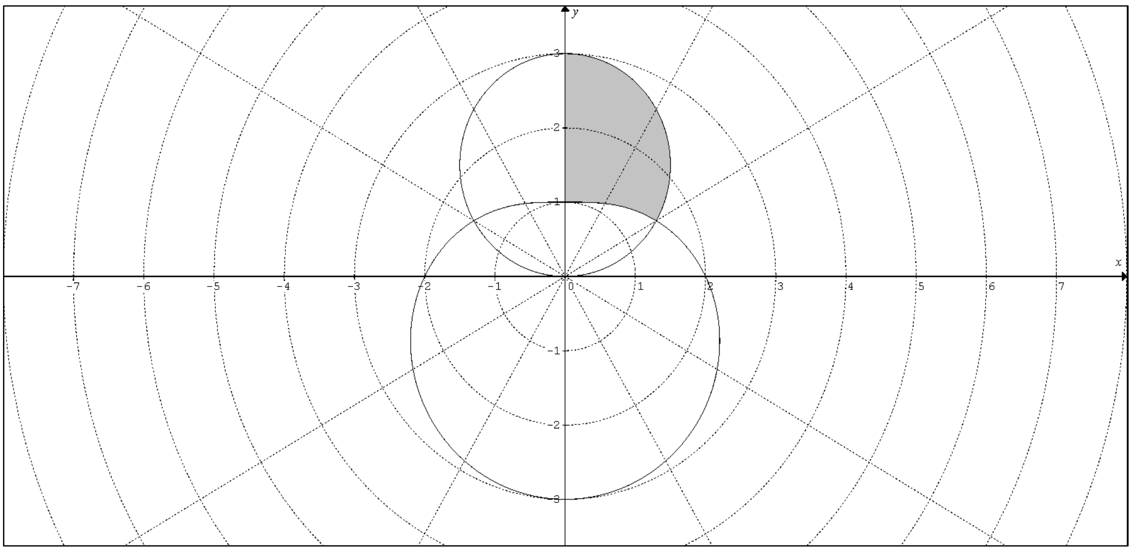
**Solución:**

Se igualan las expresiones polares, para determinar el punto de intersección de ambas curvas:

$$3\operatorname{sen}(\theta) = 2 - \operatorname{sen}(\theta) \quad \to \quad 4\operatorname{sen}(\theta) = 2 \quad \to \quad \operatorname{sen}(\theta) = \frac{1}{2} \quad \to \quad \theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\left(\theta = \frac{\pi}{6}\right) \vee \left(\theta = \frac{5\pi}{6}\right)$$

Se grafica la región en base a las ecuaciones de las curvas polares:




Como es en el primer cuadrante:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\left[\left(3\operatorname{sen}(\theta)\right)^2 - \left(2 - \operatorname{sen}(\theta)\right)^2\right]d\theta = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\left[9\operatorname{sen}^2(\theta) - \left(4 - 4\operatorname{sen}(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta)\right)\right]d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\left(8\operatorname{sen}^2(\theta) + 4\operatorname{sen}(\theta) - 4\right)d\theta = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\left(4\left(1 - \cos(2\theta)\right) + 4\operatorname{sen}(\theta) - 4\right)d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\left(4\operatorname{sen}(\theta) - 4\cos(2\theta)\right)d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/2}\left(2\operatorname{sen}(\theta) - 2\cos(2\theta)\right)d\theta$$

$$A = 2\int_{\pi/6}^{\pi/2}\operatorname{sen}(\theta)\,d\theta - \int_{\pi/6}^{\pi/2}2\cos(2\theta)\,d\theta = -2\cos(\theta)\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} - \operatorname{sen}(2\theta)\Big|_{\pi/6}^{\pi/2}$$

$$A = -2\left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{A = \frac{3\sqrt{3}}{2}\,u^2}$$

**Rúbrica:**

| Capacidades deseadas | Desempeño | | | |
|---|---|---|---|---|
| El estudiante identifica la región común entre dos curvas polares en forma analítica y en forma gráfica; y, con el uso de integrales sabe cómo se calcula el área en coordenadas polares. | Insuficiente | En desarrollo | Desarrollado | Excelente |
| | No logra identificar bien cómo se grafican las curvas dadas o no sabe cómo plantear el área como una integral. | Grafica ambas curvas e identifica sus puntos de intersección, pero no grafica correctamente la región común entre las ecuaciones polares o no plantea correctamente la integral. | Grafica correctamente la región en base a los puntos de intersección, no conoce cómo integrar todas las expresiones trigonométricas que se presentan o no evalúa bien todos los términos. | Grafica correctamente la región en base a los puntos de intersección, integra correctamente todas las expresiones trigonométricas que se presentan y evalúa bien cada término. |
| | 0 – 1 | 2 – 4 | 5 – 9 | 10 |

**b) La fabricación de las $q$ unidades de cierto producto tiene las siguientes funciones:**

**Oferta:** $O(q) = 42q$ **Demanda:** $D(q) = 1000 - 0.4q^2$

**i) Calcule el punto de equilibrio para la fabricación de este producto.**

**ii) Calcule el excedente del consumidor, en dólares americanos, en el intervalo del punto de equilibrio, como el área de la función oferta y la demanda en dicho punto de equilibrio.**

**Solución:**

i) Para determinar el punto de equilibrio, se igualan las ecuaciones de la oferta y la demanda.

$$1000 - 0.4q^2 = 42q$$
$$0.4q^2 + 42q - 1000 = 0$$

$$q = \frac{-42 \pm \sqrt{42^2 - 4(0.4)(-1000)}}{2(0.4)}$$

$$q = \frac{-42 \pm \sqrt{1764 + 1600}}{0.8}$$

$$q = \frac{-42 \pm \sqrt{3364}}{0.8}$$

$$q = \frac{-42 \pm 58}{0.8}$$

$$\left(q = \frac{-42 + 58}{0.8}\right) \vee \left(q = \frac{-42 - 58}{0.8}\right)$$

$$(q = 20) \vee (q = -125)$$

Se descarta el valor negativo y se concluye que el punto de equilibrio se da cuando se demandan y se ofrecen 20 unidades de producto.

ii) El excedente del consumidor se lo calcula así:

$$A = \int_0^{20} \big(D(q) - D(20)\big)dq$$
$$A = \int_0^{20} (1000 - 0.4q^2 - 840)dq$$
$$A = \left(1000q - \frac{0.4q^3}{3} - 840q\right)\Bigg|_0^{20}$$

$$A = (20000 - 1066.67 - 16800)$$

$$A = 2133.33$$

El excedente del consumidor es de \$ 2 133.33.

**Rúbrica:**

| Capacidades deseadas | Desempeño | | | |
|---|---|---|---|---|
| El estudiante identifica la región común entre las funciones de oferta y demanda en forma analítica y en forma gráfica; y, con el uso de integrales sabe cómo se calcula el área en coordenadas cartesianas. | **Insuficiente** | **En desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelente** |
| | No logra identificar bien cómo se grafican las funciones dadas o no sabe cómo plantear el área como una integral. | Grafica ambas funciones e identifica el punto de equilibrio, pero no grafica correctamente la región común entre las funciones o no plantea correctamente la integral. | Grafica correctamente la región en base al punto de equilibrio, no conoce cómo establecer el integrando que se presenta o no evalúa bien todos los términos. | Grafica correctamente la región en base al punto de equilibrio, integra correctamente y evalúa bien cada término. |
| | **0 – 1** | **2 – 4** | **5 – 9** | **10** |