espol **Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas**

AÑO: **2025**

MATERIA: **Álgebra lineal**

EVALUACIÓN: Segunda

TIEMPO DE DURACIÓN: **120 minutos**

PERIODO: **PRIMER TERMINO**

PROFESORES: Bracamonte Mireya, Cabezas José, Córdova Nelson, Laveglia Franca, Marchan Elimar, Martin Carlos, Pastuizaca María Nela, Ramírez John, Valdiviezo Janet.

FECHA: 28 de agosto de 2025

COMPROMISO DE HONOR

Yo, ……..…………… al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que puedo usar un lápiz o esferográfico; que solo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen. No debo, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a las que se entreguen en esta evaluación y NO USARE calculadora alguna o cualquier instrumento de comunicación ajena al desarrollo del examen. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.

Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptar la declaración anterior.

"Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".

FIRMA: ________________________________ ***NÚMERO DE MATRÍCULA:*** ___________________ ***PARALELO:*** ________

1. ***(18 Puntos)***

A continuación, encontrará tres afirmaciones, donde debe determinar si estas son verdaderas o falsas. En cada caso debe justificar su elección, bien sea presentando alguna demostración, contraejemplo o cálculo.

a. Si V es un espacio vectorial con un producto interno definido y W es un subespacio de V, entonces $W \cap W^{\perp} = \{0_V\}$

b. Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita y $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal. Si T es sobreyectiva, entonces $dim\, V < dim\, W$.

c. Sea A una matriz cuadrada de orden 4 con tres valores propios diferentes. Si un espacio propio es de dimensión dos, entonces la matriz A no es diagonalizable.

2. (20 Puntos)

Sea T una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $P_2(\mathbb{R})$ de la cual se conoce que:

$$Ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ a+b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / a\,, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$Im(T) = gen\{(x+1)^2\}.$$

Determine la regla de correspondencia de T, en caso de que sea factible.

3. (20 Puntos)

En un sistema de comunicaciones, un vector de señal recibido es $r = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

y la señal transmitida debe estar en el subespacio

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0 \right\}.$$

Se define el **error** como la distancia entre la señal recibida y el espacio válido de señales.

Determine:

a. $p = Proy_W r$.

b. El error, calculando la distancia entre los vectores r y p.

4. *(20 Puntos)*

Dado el subespacio vectorial $H = \{p(x) \in P_2(\mathbb{R}) \,/\, p(x) = (b-a)x + b; \quad a, b \in \mathbb{R}\}$ de $P_2(\mathbb{R})$, con el producto interno definido:

$$\langle p(x), q(x) \rangle = 2p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

Determine:

a. El subespacio $H^{\perp}$.

b. Una base ortonormal para $H^{\perp}$.

5. ***(22 Puntos)***

Sobre el espacio vectorial

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\},$$

se define la transformación lineal $T: V \to V$ con regla de correspondencia:

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a - b & 2a + 3b \\ 2a + 3b & b - 6a \end{pmatrix}.$$

a. Encuentre alguna representación matricial de T y úsela para probar que T es un isomorfismo.

b. Encuentre los valores y vectores propios de la matriz del literal anterior.

c. Encuentre, de ser posible, una base respecto de la cual la matriz asociada a T sea una matriz diagonal.